ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.30.09.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

БЕР АЛЕКСЕЙ ФЕЛИКСОВИЧ

ЎЛЧОВЛИ ОПЕРАТОРЛАР АЛГЕБРАЛАРИДА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАШЛАР

01.01.01 – Математик анализ
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2019 йил

УДК: 517.98

Докторлик (DSc) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации

Content of the abstract of doctoral (DSc) dissertation

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.30.09.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

БЕР АЛЕКСЕЙ ФЕЛИКСОВИЧ

ЎЛЧОВЛИ ОПЕРАТОРЛАР АЛГЕБРАЛАРИДА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАШЛАР

01.01.01 – Математик анализ
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2019 йил

Фан доктори (Doctor of Science) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2019.3.DSc/FM143 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (http://ik-fizmat.nuu.uz/) ва «Ziyonet» Ахборот таълим тармоғида (http://www.ziyonet.uz/) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи:	**Чилин Владимир Иванович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Ғаниходжаев Расул Набиевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Закиров Ботир Сабитович физика-математика фанлари доктори, профессор
	Арзикулов Фарходжон Нематжонович физика-математика фанлари доктори
Етакчи ташкилот:	**В.И.Вернадский номидаги Қрим федерал универстети, Россия**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.30.09.2019.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2019 йил «___»___________ соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент шаҳри, Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (99871) 227-12-24, факс: (99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (____ рақами билан рўйхатга олинган.) (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (99871) 246-02-24.)

Диссертация автореферати 2019 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2019 йил «____» ___________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

А.А.Аъзамов
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раиси ўринбосари,
ф.-м.ф.д., академик

Н.К.Мамадалиев
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.ф.д. (PhD)

А.С.Садуллаев
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш ҳузуридаги илмий семинар
раиси ўринбосари, ф.-м.ф.д., академик

КИРИШ (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий–амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда ўлчовли функциялар алгебраларининг келиб чиқадиган муаммоларни ҳал қилиш, шунингдек, халқаро миқёсда амалга ошириладиган ўлчовли операторлар алгебралари назарияси масалаларини ўрганишда, асосан, бундай алгебраларнинг дифференциаллашларини ўрганиш масаласига келади. Фон Нейман алгебралари учун америкалик олим С.Сакаи томонидан ўрнатилган ихтиёрий дифференциаллаш учун узлуксизлик хоссаси алохида ўринга эга. И.Капланский, С.Сакаи, Р.В.Кэдисон, Д.Олесен ишларидан кўринадики, оператор алгебраларида дифференциалланишни ўрганиш фаннинг кўп соҳаларида, хусусан, статистик ва квант механикасида катта ўрин эгаллайди. Бундай дифференциалларнинг узлуксизлиги ва ички дифференциаллаш эканлигини, шунингдек тасвири оператор алгебралари устидаги бимодулларда бўлган дифференциалларни топиш оператор алгебралари назариясининг муҳим муаммоларидан биридир.

Айни пайтда, статистик ва квант механикаси моделлари учун фон Нейман алгебрасига бириктирилган, ўлчовли операторлар алгебрасида таъсир қилувчи узлуксиз автоморфизмлар гуруҳлари (ва уларнинг генераторлари)ни ўрганиш муҳим рол ўйнайди. Шу муносабат билан қуйидаги йўналишлар бўйича мақсадли тадқиқотларни амалга ошириш асосий вазифалардан бири ҳисобланади: ушбу гурухларнинг дифференциалланиш бўлган генераторларини ўрганиш, дифференциалланишларнинг узлуксиз, ҳамда ички дифференциалланиш бўлиши мезонларини топиш. Юқорида қайд етилган йўналишлар бўйича олиб бориладиган илмий изланишлар диссертация мавзусининг долзарблигини тасдиқлайди.

Мамлакатимизда амалий аҳамиятга эга бўлган илмий соҳаларга кўпроқ эътибор қарата бошланди. Жумладан, статистик ва квант механикаси муаммоларини ўрганишнинг асосий объекти бўлган квант механикасининг классик моделлари ва бундай алгебраларнинг автоморфизм гуруҳлари генераторлари учун операторлар алгебраси назариясини ишлаб чиқишга алоҳида еътибор қаратилди. Чегараланган операторлар алгебрасининг автоморфизмларини, бу гуруҳларнинг генераторларини, шунингдек оператор алгебралари устида тасвири бимодулларда булган дифференциалларни ўрганиш бўйича сезиларли натижалар олинган. Илмий тадқиқотлар олиб боришнинг асосий вазифа ва йўналишлари устувор илмий йўналишлар, хусусан, функционал анализ ва алгебрада халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш ҳисобланади[1]. Операторлар алгебралари назарияси, уларнинг аутоморфизмлари ва дифференциаллашлари устида ўтказилган кейинги тадқиқотларнинг ривожланиши ушбу қарорни амалга оширилишини таъминлашда муҳим рол ўйнайди.

---

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамаси 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги ПФ-4947-сонли Фармони, 2017 йил 17 февралдаги «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-2789-сонли Қарори, 2018 йил 27 апрелдаги «Инновацион ғоялар, технологиялар ва лойихаларни амалий жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-3682-сонли Қарори ва 2019 йил 9 июлдаги «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И. Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4387-сонли Қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожлантиришнинг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи[2]. Ўлчовли функциялар алгебраларида ва ўлчовли операторлар алгебраларида дифференциаллашлар бўйича илмий изланишлар етакчи хорижий давлатларнинг илмий марказлари ва олий таълим муассасалари, жумладан: Янги Жанубий Уэлс университети, Математика ва стаистика мактаби (Австралия); Абдус Салам номидаги Халқаро назарий физика маркази (Abdus Salam International Center for Theoretical Physics), Пиза университети (Италия); Париж университети, Тулуза университети (Франция); Москва давлат университети, Крим федерал университети, Новосибирск давлат университети, Россия фанлар академияси Математика институти (Россия); Пенсильвания штати университети, Питсбург университети (АҚШ); Торонто университети (Канада) ва бошқа жойларда олиб борилмоқда.

Дунё миқёсида ўлчовли операторлар алгебрасида дифференциаллашлар бўйича олиб борилган илмий тадқиқотлар натижасида бир қатор долзарб муаммолар ҳал етилди, жумладан қуйидаги илмий натижалар олинди: дискрет ўлчовли фазода берилган ўлчовли функциялар алгебрасининг ихтиёрий дифференциаллаши нол дифференциаллаш еканлигини исботланди, I_∞ ёки III типли фон Нейман алгебрасига бириктирилган ўлчовли ёки локал ўлчовли операторлар алгебрасининг ихтиёрий дифференциаллаши ички дифференциаллаш экани курсатилди.

[2] Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий тадқиқотлар шарҳи: Journal of Statistical Physics, Queueing Systems, Теоретическая и математическая физика, Сибирский математический журнал, Математические заметки, Украинский математический журнал, http://www.springer.com/mathematics; Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics, Journal of Physics: Conference Series https://www.researchgate.net ва бошқа манбалар асосида ишлаб чиқилган.

Жаҳон миқёсида бир қатор тадқиқот лойиҳалари устувор йўналишларда амалга оширилмоқда, масалан, ўлчовли функциялар ва ўлчовли операторлар алгебраларида дифференциаллашларни ўрганиш ва уларни қўллаш, аниқроғи, IIтипли фон Нейман алгебрасига бириктрилган ўлчовли ҳамда локал ўлчовли операторлар алгебралари дифференциалларининг узлуксиз булиш мезонларини топиш ва дифференциаллашларнинг ички дифференциаллаш булиш мезонларини топиш.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. C^* ва W^* алгебраларнинг дифференциаллар назариясига Капланский томонидан асос солинган бўлиб, у I типли $\mathcal{M}$ фон Нейман алгебрасининг ихтиёрий δ дифференциалланиши ички дифференциаллаш бўлишини кўрсатган, яъни, $\delta(a) = [d, a] = da - ad, a \in \mathcal{M},$ бу ерда $d \in \mathcal{M}$ қандайдир элемент. Кейинроқ, Сакаи C^*-алгебрасида ихтиёрий дифференциалланиш узлуксиз бўлишини кўрсатган. Сўнгра Сакаи ва Кадисонлар томонидан ихтиёрий $\mathcal{M}$ -фон Нейман алгебрасининг ғар бир δ дифференциалланиши ички дифференциаллаш бўлишини кўрсатилган, яъни, $\delta(a) = [d, a]$, бу ҳолда, $\| d \|_{\mathcal{M}} \leq \| \delta \|_{\mathcal{M} \to \mathcal{M}}$ тенгсизлик доимо уринли булиши ҳам кўрсатилган. Олесен ушбу натижани барча AW^*-алгебралари учун исботлаган.

Ихтиёрий C* -алгебрада ҳар қандай дифференциаллаш узлуксиз бўлса ҳам, у ички ички дифференциаллаш бўлиши шарт емас. Агар C*-алгебра содда ва бирлик элементга эга бўлса, унда ҳар қандай дифференциаллаш ички дифференциаллаш бўлади. Коммутатив алгебрада ички дифференциаллаш нол оператори бўлади. Маълумки, коммутатив C*-алгебранинг ихтиёрий дифференциалланиши нолга тенг (яъни, ички дифференциаллаш).

Юкоридаги маълумотлардан оператор алгебраларидаги дифференциаллашни ўрганишда табиий равишда иккита савол алоҳида қизиқиш уйғотади:

алгебраларнинг берилган синфидаги ихтиёрий дифференциаллаш ички дифференциаллаш бўладими;

агар бўлмаса, у ҳолда узлуксиз бўладими.

Сўнгги йилларда ўлчовли ва локал ўлчовли операторлар алгебралари назариясининг ривожланиши билан бундай алгебраларда дифференциаллашларни ўрганишга алоҳида қизиқиш пайдо бўлди. Бу йўналишдаги асосий масалалар академик Ш.А.Аюпов томонидан қўйилган. Бу масалалр, биринчи навбатда, юқорида айтиб ўтилган иккита савол билан боғлиқ.

I типли $\mathcal{M}$ фон Нейман алгебрасига бириктирилган $LS(\mathcal{M})$ локал ўлчовли, $S(\mathcal{M})$ ўлчовли, ҳамда $S(\mathcal{M}, \tau)$ $\tau -$ ўлчовли алгебраларида дифференциаллашга оид асосий натижалар Ш. А Аюпов, S. Albeverio ва К.К.Кудайбергеновларнинг ишларида олинган. Юқорида келтирлган чегараланмаган операторлар алгебрасида $\mathcal{Z} -$ чизиқлилик (яъни $\delta(\mathcal{Z}(\mathcal{M})) = \{0\}$, бу ерда $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ тўплам $\mathcal{M}$ алгебранинг маркази) шартини қаноатлантирувчи ҳар қандай дифференциаллаш ички бўлиши аниқланди. Фон Нейман алгебраси I_∞ типли бўлганда барча ўлчовли операторлар алгебрасидаги ҳар қандай дифференциаллаш $\mathcal{Z}-$ чизиқли ва шунинг учун ички бўлади. Фон Нейман алгебраси чекли I типли бўлгандаги ҳолат $\mathcal{M}=L_\infty(X,\Sigma,\mu)\otimes M_n$ ҳолатга келтирилади, бу ерда $(X,\Sigma,\mu)-$ чекли ўлчовли фазо, M_n эса n- тартибли комплекс матрицалар алгебраси. Ушбу ҳолатда $LS(\mathcal{M})=S(\mathcal{M})=S(X,\Sigma,\mu)\otimes M_n$ тенглик ўринли бўлади ва $(X,\Sigma,\mu)\otimes M_n$ даги ихтиёрий дифференциаллаш ички дифференциаллаш ва $S(X,\Sigma,\mu)$ ($\delta\longrightarrow\delta\otimes Id$) дан табиий равишда давом эттирилган дифференциаллашнинг йиғиндиси кўринишида бир қийматли тасвирланади. Шунинг учун $S(X,\Sigma,\mu)\otimes M_n$ даги ихтиёрий дифференциаллаш $\mathcal{M}$ даги марказий проекторларнинг бул алгебраси атомик бўлганда ва фақат шу ҳолдагина ички бўлади. Ихтиёрий I типли $\mathcal{M}$ фон Нейман алгебраси учун юқорида келтирилган ўлчовли операторлар алгебрасида ички бўлмаган дифференциаллашларнинг мавжудлигини мезони бўлиб $\mathcal{M}$ даги ихтиёрий марказий проектор ёки чексиз, ёки дискрет (яъни, атомларнинг супремуми) бўлиши хизмат қилади.

Агар $\mathcal{M}$ фон Нейман алгебраси III типли бўлса, у ҳолда унда аниқ нормал ярим-чекли излар бўлмайди ва $S(\mathcal{M})=\mathcal{M}$ тенглик ўринли бўлади. Лекин, $LS(\mathcal{M})$ алгебраси $\mathcal{M}$ га тенг бўлмаслиги ҳам мумкин. Шунинг учун $LS(\mathcal{M})$ даги дифференциаллашни ички бўлиши масаласи тривиал эмас. Ушбу саволга ижобий жавоб Ш.А.Аюпов ва К.К.Кудайбергеновларнинг ишида келтирилган.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилаётган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги. Диссертация ОТ-Ф4-82 «Операторлар ва ноассоциатив алгебраларда локал дифференциаллаш ва автоморфизмлар, ночизикли динамик системаларда фаза алмашишлар ва хаос», ОТ-Ф4-87 «Евклид ва псевдо-Евклид фазоларидаги эгри чизиқлар ва сиртларнинг глобал инвариантлари назарияси ва унинг механикага тадбиқлари» (2017-2021 йиллар) мавзусидаги В.И.Романовский номидаги Ўзбекситон ФА Математика институти илмий тадқиқот лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади ўлчовли операторлар алгебрасида таъсир қилаётган ихтиёрий дифференциаллашни ички ёки узлуксиз бўлишини таъминлайдиган мезонларни топишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

коммутатив ўлчовли операторлар алгебрасида нолдан фарқли дифференциаллашлар мавжуд бўлиши учун мезонлар олиш ;

Фон Нейман алгебраси аниқ чексиз бўлганда $S(\mathcal{M},\tau)$ ва $LS(\mathcal{M})$ даги ихтиёрий дифференциаллаш узлуксиз эканлигини исбот қилиш;

$S(\mathcal{M},\tau)$ ва $LS(\mathcal{M})$ даги ихтиёрий узлуксиз дифференциаллаш ички эканлигини исбот қилиш;

$\mathcal{M}$ Фон Нейман алгебрасини локал ўлчовли операторларнинг банах $\mathcal{M}$ модулига акслантираётган ҳар қандай дифференциаллаш ички эканлигини исбот қилиш.

Тадқиқотнинг объекти. Ўлчовли ва локал ўлчовли операторлар алгебралари, дифференциаллаш, фон Нейман алгебрасидаги идеаллар, фон Нейман алгебрасидаги бимодуллар, регуляр (фон Нейман бўйича) ҳалқалар, инверс ярим-группалар, аппроксиматив ҳосилалар тадқиқотнинг объектлари ҳисобланади.

Тадқиқотнинг предмети. Ўлчовли ва локал ўлчовли операторлар алгебраларидаги узлуксиз ва ички дифференциаллашлар, фон Нейман алгебраларини ушбу алгебрадаги бимодул ва идеалларга акслантирувчи дифференциаллашлар тадқиқотнинг предмети ҳисобланади.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқотда ҳалқаларни кенгайтириш назарияси, кўпҳадлар назарияси, спектрал назария, панжаралар назарияси ва фон Нейман алгебралари назариясининг умумий усуллари қўлланилади.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

ўлчовли функциялар алгебрасида нолдан фарқли дифференциаллашнинг мавжуд бўлиши учун мезонлар топилган ҳамда ўлчовли функциялар алгебрасидаги барча дифференциаллашлар фазоси таснифланган;

аниқ нормал ярим-чеклига эга бўлган хос чексиз фон Нейман алгебрасига бириктирилган ўлчовли операторлар (изга нисбатан) алгебрасидаги ихтиёрий дифференциаллаш, ўлчовли яқинлашиш топологиясига нисбатан узлуксиз эканлиги исботланган;

хос чексиз фон Нейман алгебрасига бириктирилган локал ўлчовли операторлар алгебрасидаги ихтиёрий дифференциаллаш, локал ўлчовли яқинлашиш топологиясига нисбатан узлуксиз эканлиги исботланган;

барча локал ўлчовли операторлар алгебрасини ўзининг қисм-алгебрасида берилган ихтиёрий дифференциаллаш бутун алгебрадаги дифференциаллашгача ягона равишда давом эттирилиши исботланган;

изга нисбатан ўлчовли операторлар алгебрасининг ихтиёрий узлуксиз дифференциаллашиши ички эканлиги исботланган;

локал ўлчовли операторлар алгебрасининг ихтиёрий узлуксиз дифференциаллашиши ички эканлиги исботланган;

фон Нейман алгебрасини локал ўлчовли операторларнинг Банах бимодулига акслантирувчи ихтиёрий дифференциаллаш ички эканлиги исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижаси қуйидагилардан иборат:

дифференциаллашни коммутатив регуляр алгебранинг қисм алгебрасидан бутун алгебрага давом эттириш теоремаси ёрдамида ўлчовли функциялар алгебрасида нолдан фарқли дифференциаллашларнинг мавжудлиги мезони исботланган;

коммутатор баҳолаш ва дифференциаллашларни давом эттириш ҳақидаги теоремалардан фойдаланиб $\mathcal{M}$ фон Нейман алгебрасидан локал ўлчовли операторлар Банах $\mathcal{M}$ -бимодулига акслантирувчи ихтиёрий дифференциаллашларнинг ички бўлиши кўрсатилган;

$(LS(\mathcal{M}), t(\mathcal{M}))$ алгебрасида дифференциаллашларнинг узлуксизлик ва ички бўлишлик хоссаларининг эквивалентлиги ҳақидаги теоремадан фойдаланиб $\mathcal{M}$ фон Нейман алгебраси хос чексиз бўлган ҳолда $LS(\mathcal{M})$ алгебрасидаги ихтиёрий дифференциаллаш ички бўлиши исботланган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги, олинган натижаларнинг қатъий математик исботлари, шунингдек юқори ҳалқаро рейтингга эга бўлган математик журналларда нашр этилганлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқотнинг илмий аҳамияти ҳар қандай узлуксиз дифференциаллаши ички бўладиган ўлчовли ва локал ўлчовли оператор алгебралари синфининг тўлиқ тавсифланганлиги билан аниқланади.

Диссертациянинг амалий аҳамияти олинган натижалар ҳар қандай узлуксиз дифференциаллаши ички бўладиган чегараланмаган инволютив алгебралар синфини таснифлашда олдиндан башорат қилишга имкон бериши билан аниқланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Ўлчовли функциялар алгебраси дифференциаллашлари бўйича олинган натижалар амалиётда қуйидаги йўналишлар буйича қўлланди:

ўлчовли функциялар алгебрасида дифференциаллашнинг ички бўлиши меъзонларини топиш DP150100920 «Шур ёйилмаси ва операторлар назариясининг тегишли масалалари» хорижий лойиҳасида кесмадаги ўлчовли функциялар алгебрасининг нол бўлмаган дифференциали борлигини исботлаш учун қўлланилган (Янги Жанубий Уэлс университетининг 2019 йил 9 июлдаги маълумотномаси, Австралия). Илмий натижаларнинг қўлланилиши кесмадаги ўлчовли функциялар алгебрасининг оддий ҳосила ягона равишда давом эттириладиган энг катта қисм алгебрасини тавсифлаш имконини берди;

ўлчовли ва локал ўлчовли операторлар алгебраларида дифференциаллашнинг узлуксизлиги ҳақидаги теорема FL170100052 рақамли «Нокоммутатив анализнинг янги методлари» хорижий лойиҳасида хос чексиз алгебраларда дифференциаллашнинг узлуксизлигини исботлаш учун қўлланилган (Янги Жанубий Уэлс университетининг 2019 йил 9 июлдаги маълумотномаси, Австралия). Илмий натижаларни қўллаш бундай дифференциаллашларнинг ички эканини исботлаш имконини берди;

коммутатор баҳолар ҳақидаги теорема локал ўлчовли операторлар 16-11-10125 рақамли «Функционал фазоларда оператор тенгаламалар ва ночизиқли анализда тадбиқлари» халқаро лойиҳасида қисм алгебраларидаги дифференциаллашнинг ички эканлигига оид исботларнинг бутун алгебрада таъсир қилувчи дифференциалларга қўллаш учун фойдаланилди (Крим федерал университетининг 2019 йил 6 сентябрдаги 9-29-286-сон маълумотномаси, Россия). Илмий натижаларнинг қўлланилиши фон Нейман алгебрасининг типига қараб ўлчовли операторлар алгебраларининг дифференсиаллашлари ички бўлиш мезонларини топиш имконини берди.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Диссертация натижалари 8 та илмий конференцияда, шу жумладан 6 та халқаро ва 2 та маҳаллий илмий конференцияларда тақдим этилди ва муҳокама қилинди.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилиниши. Диссертация мавзуси бўйича 22 та илмий мақола чоп этилган бўлиб, улардан 13 таси докторлик диссертацияларини ҳимоя қилиш учун Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссияси томонидан таклиф этилган илмий нашрлар рўйхатига киритилган, шу жумладан 13 таси хорижий журналларда чоп етилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш, бешта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат. Диссертация ҳажми 188 бетни ташкил этади.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устивор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Биринчи боб «Бошланғич маълумотлар» деб номланиб, унда диссертация асосий матнини баён қилишга зарур бўлган, фон Нейман алгебралари назарияси, ўлчовли ва локал ўлчовли операторлар назарияси, алгебраларда дифференциаллаш назарияларига оид маълумотлар, таърифлар ҳамда машхур натижалар келтирилган.

$(\mathcal{M}, \|.\|_{\mathcal{M}})$ жуфтлик $\mathcal{H}$ Гильберт фазосидаги $\mathbf{1}$ бирлик элементга эга бўлган фон Нейман алгебраси бўлсин. $\mathcal{M}$ даги барча проекторлар тўпламини $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ орқали, $\mathcal{M}$ нинг марказини $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ орқали ва $\mathcal{M}$ нинг унитар операторлари группасини $\mathcal{U}(\mathcal{M})$ орқали белгилаймиз.

Агар $v^*v = p, vv^* = q$ тенгликни қаноатлантирадиган қисман изометрия $v \in \mathcal{M}$ топилса, $p, q \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ проекторлари эквивалент дейилади. Биз буни $p \sim q$ каби белгилаймиз. Поектор p *чекли* дейилади, агар

$$\mathcal{P}(\mathcal{M}) \ni q \leq p, q \sim p \Rightarrow q = p$$

муносабати ўринли бўлса. Барча чекли проекторлар тўплами $\mathcal{P}_{fin}(\mathcal{M})$ каби белгиланади. Чекли бўлмаган проектор *чексиз* проектор дейилади.

$\mathfrak{D}(x)$ аниқланиш соҳаси $\mathcal{H}$ нинг қисм фазоси бўлган $x: \mathfrak{D}(x) \rightarrow \mathcal{H}$ чизиқли оператор $\mathcal{M}$ га *бириктирилган* дейилади, агар барча $y \in \mathcal{M}'$ учун $yx \subseteq xy$ муносабат ўринли бўлса (бу вазиятда $x\eta\mathcal{M}$ каби белгиланади).

Агар $x -$ ёпиқ, зич аниқланган, $\mathcal{M}$ га бириктирилган бўлиб, ва x учун барча n ларда

$$p_n \uparrow \mathbf{1},\ p_n(\mathcal{H}) \subseteq \mathfrak{D}(x), p_n^{\perp} \in \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{M})$$

шартни қаноатлантирадиган $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ га тегишли $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетлик мавжуд бўлса, у ҳолда $x: \mathfrak{D}(x) \rightarrow \mathcal{H}$ чизиқли оператори $\mathcal{M}$ фон Нейман алгебрасига нисбатан *ўлчовли* дейилади, бу ерда $p_n^{\perp} = \mathbf{1} - p_n$. $p_n(\mathcal{H}) \subseteq \mathfrak{D}(x)$

шартларидан $xp_n \in \mathcal{M}$ муносабати келиб чиқади. $\mathcal{M}$ га нисбатан ўлчовли оперторлар тўплами $S(\mathcal{M})$ кучли йиғинди ва кучли кўпайтмага нисбатан (барча $x, y \in S(\mathcal{M})$ учун $x + y$ ва xy каби ёзилади) унитал (яъни бирлик элементи мавжуд) $*$-алгебра бўлади.

$\mathcal{M}$ да аниқ нормал ярим-чекли τ из берилган бўлсин. $x \in S(\mathcal{M})$ оператори *τ- ўлчовли* дейилади, агар барча n лар учун

$$p_n \uparrow \mathbf{1},\ p_n(\mathcal{H}) \subseteq \mathfrak{D}(x) \text{ ва } \tau(p_n^{\perp}) < \infty$$

шартларини қаноатлантирувчи $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ га тегишли $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетлик мавжуд бўлса. $S(\mathcal{M}, \tau)$ барча τ- ўлчовли операторлар тўплами $S(\mathcal{M})$ да $*$-қисм-алгебра бўлади.

$S(\mathcal{M}, \tau)$ алгебрасида нол нуқтанинг базовий атрофлари

$$U(\varepsilon, \delta) = \{x \in S(\mathcal{M}, \tau) \colon \exists p \in \mathcal{P}(\mathcal{M}), xp \in \mathcal{M}, \| xp \| \leq \varepsilon, \tau(p^{\perp}) \leq \delta\},$$
$$\varepsilon > 0, \delta > 0,$$

каби аниқланган t_τ вектор топологиясига *ўлчовли яқинлашиш топологияси дейилади*.

Ёпиқ оператор $x\eta\mathcal{M}$ *локал ўлчовли* дейилади, агар $\mathcal{M}$ даги марказий проекторлардан иборат $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетлиги мавжуд бўлиб, барча $n \in \mathbb{N}$ учун $z_n \uparrow \mathbf{1}$ ва $xz_n \in S(\mathcal{M})$ шартлари ўринли бўлса. $LS(\mathcal{M})$ барча локал ўлчовли операторлар тўплами кучли йиғинди ва кучли кўпайтмага нисбатан унитал $*$-алгебра бўлади.

$LS(\mathcal{M})$ алгебрасида *локал ўлчовли яқинлашиш* топологияси $t(\mathcal{M})$ аниқланади. Унинг хоссалари [Муратов М.А., Чилин В.И. Алгебры измеримых и локально измеримых операторов. Труды института математики НАН Украины, т. 69, 2007] китобида батафсил баён қилинган.

Фон Нейман алгебраси $\mathcal{M}$ га бириктирилган барча локал ўлчовли операторлар алгебраси $LS(\mathcal{M})$ нинг $\mathcal{L}$ қисм-фазоси *ўлчовли операторларнинг $\mathcal{M}$-бимодули* дейилади, агар барча $x \in \mathcal{L}$ ва $a, b \in \mathcal{M}$ лар учун $axb \in \mathcal{L}$ муносабати ўринли бўлса. Ўлчовли операторларнинг $\mathcal{M}$ -бимодули $\mathcal{L}$ *ўлчовли операторларнинг нормаланган $\mathcal{M}$ -бимодули* дейилади, агар $\mathcal{L}$ да барча $x \in \mathcal{L}, a, b \in \mathcal{M}$ лар учун

$$\| axb \|_{\mathcal{L}} \leq \| a \|_{\mathcal{M}} \| x \|_{\mathcal{L}} \| b \|_{\mathcal{M}}$$

тенгсизлигини қаноатлантирадиган $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ норма аниқланган бўлса. Агар шунинг билан бирга $(\mathcal{L}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$ банах фазоси бўлса, у ҳолда $\mathcal{L}$ *ўлчовли операторларнинг банах $\mathcal{M}$-бимодули* дейилади.

Иккинчи боб «Коммутатив регуляр алгебраларда дифференциаллаш» деб номланиб, унда FCR- алгебраларида нолдан фарқли дифференциаллаш мавжудлиги муаоммоси ўрганилган. Бу синф алгебралари ушбу бобнинг биринчи бўлимида келтирилган ва унинг хоссалри ўрганилган. Бундай алгебраларда дифференциаллашни ўрганишга, бу синф алгебралари ўлчовли фазода ўлчовли функциялар алгебрасини ўз ичига оганлиги сабаб бўлган.

Иккинчи бобнинг **II.1 бўлими** коммутатив регуляр алгебраларининг структурасини ўрганишга бағишланган.

$\mathcal{A}$ ҳалқа *регуляр* дейилади, агар у қуйидаги икки эквивалент шартларидан бирини қаноатлантирса:

1. Ихтиёрий $a \in \mathcal{A}$ элементи учун $a = aba$ тенгликни қаноатлантирадиган $b \in \mathcal{A}$ элемент мавжуд бўлса;

2. Ихтиёрий $a \in \mathcal{A}$ элементи учун $a\mathcal{A} = e\mathcal{A}$ тенгликни қаноатлантирадиган $e \in \nabla$ (∇ - $\mathcal{A}$ алгебранинг барча идемпотентлари тўплами)элемент мавжуд бўлса.

Регуляр ҳалқа бўлган алгебра *регуляр алгебра* дйилади.

Идемпотент $e \in \nabla$ элементи $a \in \mathcal{A}$ элементнинг *устуни* дейилади, агар $ea = a$ ва $ga = a,\ g \in \nabla$ муносабатлардан $e \leq g$ тенгсизлиги келиб чиқса. $a \in \mathcal{A}$ элементнинг ташувчиси $s(a)$ орқали белгиланади.

$K(A_1, A_2, \dots)$ орқали будем $\mathcal{A}$ даги $A_1, A_2, \dots \subset \mathcal{A}$ тупламлардан ҳосил қилинган қим алгебрани белгилаймиз. Масалан,

$K(\nabla) = \{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \colon e_k \in \nabla, \lambda_k \in K, k = 1, \dots, n\}$,

агар $\mathcal{B}$ - $\mathcal{A}$ нинг қисм алгебраси бўлса, у ҳолда

$K(\mathcal{B}, \nabla) = \{\sum_{l=1}^{m} b_l f_l + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \colon f_l, e_k \in \nabla, \lambda_k \in K, l = 1, \dots, m, k = 1, \dots, n\}$.

Қуйидаги тасдиқда берилган алгебрани ўз ичига олувчи энг кичик регуляр қисм алгебра конструкцияси келтирилган.

Тасдиқ II.1.3. Айтайлик $\mathcal{B}$ – $\mathcal{A}$ да қисм алгебра бўлсин, $\nabla \subset \mathcal{B}$. Унда

$$R(\mathcal{B}) = \{a \cdot i(b) \colon a, b \in \mathcal{B}\}$$

$\mathcal{A}$ даги $\mathcal{B}$ ни ўз ичига олувчи энг кичик регуляр қисм алгебра бўлади.

K майдонда $\mathcal{A}$ коммутатив унитал регуляр алгебра берилган бўлиб, $\mathcal{A}$ нинг идемпотентларидан ташкил топган ∇ бул алгебрасида аниқ мусбат саноқли аддитив чекли μ ўлчов берилган бўлсин. Агар $\mathcal{A}$ алгебраси

$$\rho(a, b) = \mu(s(a - b))$$

метрикага нисбатан тўла бўлса, у ҳолда $\mathcal{A}$ ни биз FCR-алгебра деб атаймиз.

(Ω, Σ, μ) чекли саноқли аддитив ўлчовли фазо, $\mathcal{A} = S(\Omega, \Sigma, \mu)$ тўплам (Ω, Σ, μ) даги деярли ҳамма ерда тенг ҳақиқий (комплекс) ўлчовли функциялар синфлари алгебраси бўлсин. μ ўлчови $\mathcal{A}$ нинг барча идемпотентлари ∇ тўла бул алгебрасида аниқ мусбат саноқли аддитив ўлчовни аниқлайди. Ихтиёрий $a, b \in \mathcal{A}$ элементлари учун

$$\rho(a, b) = \mu\big(s(a - b)\big) = \mu(\{\omega \in \Omega \colon a(\omega) \neq b(\omega)\})$$

муносабат ўринли бўлади. Бундан метрик фазо $(\mathcal{A}, \rho)$ тўла эканлиги, яъни $\mathcal{A}$ алгебра FCR-алгебрага мисол бўлади.

$K(\nabla)$ орқали FCR -алгебра $\mathcal{A}$ нинг ∇ дан ҳосил қилинган қисм-алгебрасини белгилаймиз. $K_c(\nabla)$ орқали эса $K(\nabla)$ ни ρ метрикадаги ёпиғини белгилаймиз.

$\mathcal{B}$ - $\mathcal{A}$ да қисм алгебра бўлсин. $I(\mathcal{B})$ орқали $\mathcal{B}$ га нисбатан барча бутун элементлар тўпламини белгилаймиз. Ихтиёрий $b \in \mathcal{B}$ элемент $x - b$ полиномнинг илдизи бўлади, шунинг учун $\mathcal{B} \subset I(\mathcal{B})$. Бизга $I(\mathcal{B})$ - $\mathcal{A}$ нинг қисм ҳалқаси экани маълум. Ушбу ҳалқа $\mathcal{B}$ ҳалқа (алгебра)нинг $\mathcal{A}$алгебрадаги бутун ёпилмаси деб аталади. Ундан ташқари, $I(I(\mathcal{B})) = I(\mathcal{B})$ бўлади. Агар $I(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$, у ҳолда $\mathcal{B}$ алгебра $\mathcal{A}$ алгебранинг бутун ёпиқ қисм алгебраси дейилади.

Тасдиқ II.1.8. (Ω, Σ, μ) тўла саноқли аддитив ўлчовли фазо ва $\mathcal{A} = \mathrm{S}(\Omega, \Sigma, \mu)$ тўплам (Ω, Σ) даги K-қийматли ($\mathrm{K} = \mathbb{R}$, ёки $\mathrm{K} = \mathbb{C}$) ўлчовли функциялар синфларидан ташкил топган алгебра бўлиб, ∇ эса $\mathcal{A}$ нинг барча идемпотентларидан иборат бул алгебраси бўлсин. У ҳолда $\mathrm{K}_c(\nabla) = \mathcal{A}$ тенглик факат ва фақат ∇ атомик бул алгебраси бўлгандагина ўринли бўлади.

$\mathcal{B}$ - $\mathcal{A}$ нинг қисм алгебраси бўлсин. $E(\mathcal{B}) = \overline{I(\overline{R(K(\mathcal{B}, \nabla))})}$ деб белгилаймиз. Энди охирги тенгликда нима ёзилганини тушунтирамиз. $E(\mathcal{B})$ алгебра $\mathcal{B}$ алгебрадан қуйидаги бир неча кетма-кет амалларни бажаришдан ҳосил бўлган: барча идемпотентларни қушиш, энг кичик регуляр қисм алгебрани ҳосил қилиш, ρ метрика бўйича ёпилмасини олиш, бутун ёпиқликни ҳосил қилиш ва яна бир бор ρ метрика бўйича ёпилмасини олиш.

Тасдиқ II.1.17. (Ω, Σ, μ) тўла саноқли аддитив ўлчовли фазо ва $\mathcal{A} = \mathrm{S}(\Omega, \Sigma, \mu)$ тўплам (Ω, Σ) даги K-қийматли ($\mathrm{K} = \mathbb{R}$, ёки $\mathrm{K} = \mathbb{C}$) ўлчовли функциялар синфларидан ташкил топган алгебра бўлиб, ∇ эса $\mathcal{A}$ нинг барча идемпотентларидан иборат бул алгебраси бўлсин. У ҳолда $\mathrm{E}(\mathrm{K}_c(\nabla)) = \mathrm{K}_c(\nabla)$.

$K[x_1, \dots, x_n]$ орқали K майдондаги n та $x_1, \dots, x_n$ ўзгарувчили барча кўпхадлар алгебрасини белгилаймиз.

$$q(x_1, \dots, x_n)$$

бир ҳади

$$p(x_1, \dots, x_n) \in K[x_1, \dots, x_n]$$

кўпхад ёйилмасида қатнашади дейилади, агар $p(x_1, \dots, x_n)$ ни нолдан фарқли коэффитцентли бирҳадларнинг табиий йиғиндисида q ҳам қатнашса (табиий йиғиндида иккита ҳар ҳил бир ҳадларнинг даражалари тақсимоти турлича бўлади)

$\mathcal{X} \subset \mathcal{A} \backslash \{0\}$ қисм тўпламни *алгебраик эркли* деймиз, агар ихтиёрий

$$a_1, \dots, a_n \in \mathcal{X}, e \in \nabla, p \in K[x_1, \dots, x_n]$$

Учун

$$ep(a_1, \dots, a_n) = 0$$

тенгликдан

$$eq(a_1, \dots, a_n) = 0$$

тенглиги келиб чиқса, бу ерда $q \in K[x_1, \dots, x_n]$ кўпҳади p ни ёйилмасига кирувчи бир ҳад. Бўш тўпламни ҳам алгебраик эркли деб ҳисоблаймиз.

Максимал алгебраик мустақил қисм тўпламнинг хоссасини келтирамиз.

Тасдиқ II.1.20 Айтайлик $\mathcal{X}$ - $\mathcal{A}$нинг максимал алгебраик мустақил қисм тўплами бўлсин. У ҳолда $\overline{I(\overline{R(K(\mathcal{X}, \nabla))})} = \mathcal{A}$ (эслатиб ўтамиз: $K(\mathcal{X}, \nabla)$ орқали $\mathcal{A}$ даги $\mathcal{X}$ ва ∇ тўпламлари орқали ҳосил қилинган қисм алгебрани белгилаган эдик).

$\mathcal{S}$ регуляр коммутатив $\mathcal{A}$ алгебранинг қисм-тўплами бўлсин. $\alpha: \mathcal{S} \to \mathcal{A}$ акслантириш *кенгаймайдиган* дейилади, агар барча $b \in \mathcal{S}$ учун

$$s(\alpha(b)) \leq s(b)$$

тенгсизлиги ўринли бўлса.

$\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ қисм-тўплами учун $K_s(\mathcal{S}, \mathcal{A})$ орқали $\mathcal{S}$ ни $\mathcal{A}$ га акслантирувчи барча f кенгаймайдиган акслантиришлар тўпламини белгилаймиз.

Тасдиқ II.1.22. $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ бўлсин. У ҳолда $K_s(\mathcal{S}, \mathcal{A})$ координатали қўшиш ва сонга кўпайтиришга нисбатан K-чизиқли фазо бўлади. Бунда $K_s(\mathcal{S}, \mathcal{A})$ кўпайтма

$$\prod\nolimits_{a \in \mathcal{S}} s(a)\mathcal{A}$$

га K-чизиқли изоморф бўлади.

Иккинчи бобнинш **II.2 бўлими «дифференциаллашни давом эттириш»** деб номланиб, у коммутатив регуляр алгебраларда дифференциаллашни ўрганишга бағишланган. Ушбу бўлимнинг асосий мақсади FCR -алгебраларида нолдан фарқли дифференциаллашни мавжудлигига мезонлар топиш ва улар ёрдамида ўлчовли функциялар алгебрасида нолдан фарқли дифференциаллашни мавжудлигига зарур ва етарли шарт топиш. FCR -алгебраларида нолдан фарқли дифференциаллашни мавжудлигига мезони аниқлашда, ихтиёрий қисм-алгебрада берилагн кенгаймайдиган дифференциаллашни бутун алгебрагача дифференциаллаш қилиб давом эттириш мумкин эканлиги фойдаланилди. Бунинг учун диссертацияда дифференциаллашни давом эттириш олдинги бўлимда келтирилган бир неча босқичда бўлади: барча идемпотентлари кўшилган қисм-алгебрагача, энг кичик регуляр қисм-алгебрача, метрика бўйича ёпилган қисм-алгебрагача, бутун элементи қўшилган қисм-алгебрагача ва транцендент элементи қўшилган қисм-алгебрагача давом эттирилади.

Тасдиқ II.2.3. $\mathcal{B}$ – $\mathcal{A}$да қисм алгебра, $\delta: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ – кенгайтмайдишан дифференциаллаш бўлсин. У ҳолда шундай ягона дифференциаллаш $\delta_1: K(\mathcal{B}, \nabla) \to \mathcal{A}$ мавжуд бўлиб, ихтиёрий $b \in \mathcal{B}$ элемент учун $\delta_1(b) = \delta(b)$ тенглик ўринли бўлади.

Қуйидаги тасдиқда дифференциаллашни давом эттиришнинг иккинчи қадами амалга оширилади: у берилган қисм алгебра $\mathcal{B}$ ва ∇ ни ўз ичига олувчи регуляр қисм алгебрага давом эттирилади.

Тасдиқ II.2.4. $\mathcal{B}$ – $\mathcal{A}$ нинг қисм алгебраси, $\nabla \subset \mathcal{B}$, $\delta: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ – дифференциаллаш, $R(\mathcal{B})$ - $\mathcal{B}$ ни ўз ичига олувчи $\mathcal{A}$ нинг энг кичик регуляр қисм алгебраси бўлсин (Тасдиқ 1.3 га қаранг). У ҳолда шундай ягона дифференциаллаш $\delta_1: R(\mathcal{B}) \to \mathcal{A}$ мавжуд бўлиб, ихтиёрий $b \in \mathcal{B}$ элемент учун $\delta_1(b) = \delta(b)$ тенглик ўринли бўлади.

Қуйидаги тасдиқда дифференциаллашни давом эттиришнинг учинчи қадами амалга оширилади: у берилган қисм алгебра $\mathcal{B}$ нинг содда бутун кенгайтмасига давом эттирилади.

Тасдиқ II.2.7. Айтайлик $\mathcal{B}$ - $\mathcal{A}$ нинг $(\mathcal{A},\rho)$ да ёпиқ булган регуляр қисм алгебраси, $\nabla\subset\mathcal{B}$, $0\neq a\in\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ га нисбатан бутун элемент ва $\delta:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ – дифференциаллаш бўлсин. У ҳолда шундай ягона дифференциаллаш $\delta_1:\mathcal{B}(a)\to\mathcal{A}$ мавжуд бўлиб, ихтиёрий $b\in\mathcal{B}$ элемент учун $\delta_1(b)=\delta(b)$ тенглик ўринли бўлади.

Охирида қисм алгебранинг кучсиз трансцендент элементни қўшиш ёрдамида ҳосил қилинган кенгайишини кўриб чиқамиз.

Тасдиқ II.2.8. $\mathcal{B}$ - $\mathcal{A}$ да регуляр қисм алгебра, $\nabla\subset\mathcal{B}$ ва $\delta:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ - дифференциаллаш бўлсин. Агар $a\in\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ га нисбатан кучсиз трансцендент элемент бўлса, у ҳолда ихтиёрий $c\in\mathcal{A}$, $s(c)\leq s(a)$ учун шундай ягона дифференциаллаш $\delta_1:\mathcal{B}(a)\to\mathcal{A}$ мавжуд бўлиб, ихтиёрий $b\in\mathcal{B}$ элемент учун $\delta_1(b)=\delta(b)$ ва $\delta_1(a)=c$ тенгликлар ўринли бўлади.

Ушбу бўлимнинг энг асосий теоремасини келтирамиз.

Теорема II.2.9. Нол характеристикали K майдонда $\mathcal{A}$ FCR-алгебрасининг $\mathcal{B}$ қисм алгебраси берилган бўлсин. У ҳолда ихтиёрий кенгаймайдиган $\delta:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ дифференциаллаши учун барча $b\in\mathcal{B}$ учун

$$\tilde{\delta}(b)=\delta(b)$$

тенгликни қаноатлантирувчи $\tilde{\delta}:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ дифференциаллаши мавжуд бўлади.

Ушбу теореманинг натижаси сифатида қуйидаги мезонни келтирамиз.

Теорема II.2.11. Нол характеристикали K майдонда $\mathcal{A}$ FCR-алгебраси берилган бўлсин. У ҳолда $\mathcal{A}$ да нолдан фарқли дифференциаллашни мавжуд бўлиши учун

$$E(K_c(\nabla))\neq\mathcal{A}$$

муносабатини бажарилиши зарур ва етарли. Агар K алгебраик ёпиқ бўлса, у ҳолда юқоридаги муносабат

$$K_c(\nabla)\neq\mathcal{A}$$

га эквивалент бўлади.

Қуйидаги теорема юқоридаги натижани мухим татбиқи ҳисобланади.

Теорема II.2.12. (Ω,Σ,μ) тўла саноқли аддитив чекли ўлчовли фазо ва $S=S(\Omega,\Sigma,\mu)$ тўплам (Ω,Σ) даги K-қийматли ($K=\mathbb{R}$, ёки $K=\mathbb{C}$) ўлчовли функциялар алгебраси бўлсин. У ҳолда қуйидаги шартлар эквивалентдир:

1. Нолдан фарқли $\delta:S\to S$ дифференциаллаш мавжуд;
2. S даги идемпотентлардан иборат ∇ бул алгебраси атомик эмас.

Энди юқоридаги теоремани коммутатив ўлчовли оператор алгебралари учун келтирамиз

Теорема II.2.14. $\mathcal{M}$ коммутатив фон Нейман алгебраси бўлсин. У ҳолда қуйидаги шартлар эквивалентдир:

1. Нолдан фарқли $\delta:S(\mathcal{M})\to S(\mathcal{M})$ дифференциаллаш мавжуд;
2. $\mathcal{M}$ даги барча проекторлардан иборат $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ бул алгебраси атомик бул алгебраси бўлмайди.

Иккинчи бобнинг **II.3 бўлими «дифференциаллаш чизиқли фазосини тузилишиу ва ўлчами»** деб номланиб, у алгебраик эрклилик тушунчаси ёрдамида FCR- алгебра $\mathcal{A}$ даги барча дифференциаллашларнинг K-чизиқли фазоси $Dir(\mathcal{A})$ ни ўлчами ва тузилишини таснифлашга бағишланган. Хусусан, $Dir(S[0,1])$ ўлчами $\aleph_1$ континуум қувватидан кам эмаслиги кўрсатилган.

Ушбу бўлимнинг асосий натижасини келтирамиз.

Теорема II.3.3. Нол характеристикали K майдонда $\mathcal{A}$- FCR алгебраси берилган бўлсин. $\mathcal{X}$ тўплам $\mathcal{A}$ нинг максимал алгебраик эркли қисм-тўплами бўлсин. У ҳолда $\delta \to \delta|_{\mathcal{X}}$ акслантириш $Dir(\mathcal{A})$ дан

$$K_s(\mathcal{X},\mathcal{A}) \cong \prod\nolimits_{a\in\mathcal{X}} s(a)\mathcal{A}$$

га чизиқли изоморфизм бўлади.

Қуйидаги теоремада $Dir(S_K[0,1])$ ($K=\mathbb{R}$, ёки $K=\mathbb{C}$) фазоси ўлчамига баҳо берилади.

Теорема II.3.6. $Dir(S_K[0,1])$ чизиқли фазоси ($K=\mathbb{R}$, ёки $K=\mathbb{C}$) $S_K[0,1]$ фазонинг саноқсиз экземплярлари кўпайтмасига изоморф бўлади. Хусусан, $\dim(Dir(S_K[0,1])) \geq \dim(S_K[0,1])$ тенгсизлиги ўринли бўлади.

Иккинчи бобнинг **II.4 бўлими «дифференциаллашни бир қийматли максимал давом эттириш»** деб номланади. **II.2** бўлимда ихтиёрий кенгаймайдиган δ дифференциаллашни ихтиёрий $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$ қисм-алгебрадан $\mathcal{A}$ гача дифференциаллаш қилиб давом эттириш мумкин эканлиги исбот қилинган эди. Шунинг учун бундай дифференциаллашни $\mathcal{B}$ ва $\mathcal{A}$ орасидаги ихтиёрий қисм-алгебрасигача давом эттириш мумкин. Бунда қуйидагича табиий савол туғилади: Қандай ҳолларда ихтиёрий дифференциаллашни $\mathcal{B}$ қисм-алгебрадан $\mathcal{C}\supset\mathcal{B}$ қисм-алгебрагача давом эттирилиши ягона бўлади?

Ушбу бўлимда мана шу саволга жавоб берилади: бундай давом эттиришни шарти

$$\mathcal{B}\subseteq\mathcal{C}\subseteq E(\mathcal{B})$$

муносабатини бажарилишидир.

Ушбу бўлимнинг асосий натижасини келтирамиз.

Теорема II.4.1. Нол характеристикали K майдонда $\mathcal{A}$- FCR алгебраси берилган бўлиб, $\mathcal{B}$ ва $\mathcal{C}$ лар $\mathcal{A}$ нинг қисм-алгебралари ва $\mathcal{B}\subset\mathcal{C}$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий кенгаймайдиган $\delta\colon\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ дифференциаллаши $\mathcal{C}$ ни $\mathcal{A}$ га акслантирувчи дифференциаллашгача ягона равишда давом эттирилиши $\mathcal{C}\subseteq E(\mathcal{B})$ муносабитини бажарилишига эквивалентдир. Агар $E(\mathcal{B})\neq\mathcal{A}$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий кенгаймайдиган $\delta\colon\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ дифференциаллаш $\mathcal{A}$ гача чексиз кўп усулда давом эттирилиши мумкин.

Ушбу теореманинг мухим татбиқи, уни оддий классик ҳосилани давом эттиришга қўлланилишидадир

Теорема II.4.4. $S_K[0,1]$ ($K=\mathbb{R}$, ёки $K=\mathbb{C}$) тўплами $[0,1]$ кесмадаги деярли барча ерда тенг K –қийматли ўлчовли функциялар синфлари алгебраси, $D[0,1]$ эса $S_K[0,1]$ нинг ҳеч бўлмаганда битта барча ерда дифференциалланувчи функцияга эга бўлган синфлардан ташкил топган қисм-алгебраси бўлсин. Ҳар бир барча ерда дифференциалланувчи f функция учун

$$\partial([f]) = [f']$$

тенгликни аниқлаймиз. У ҳолда ∂ акслантириш $D[0,1]$ дан $S_K[0,1]$ га коррект аниқланган дифференциаллаш бўлади. Сўнгра, $E(D[0,1])$ тўплам $S_K[0,1]$ нинг ҳеч бўлмаганда битта барча ерда апроксиматив дифференциалланувчи функцияга эга бўлган синфлардан ташкил топган $AD[0,1]$ қисм-алгебраси билан тенг бўлади. Бунда

$$D[0,1] \subsetneqq AD[0,1] \subsetneqq S_K[0,1]$$

муносабатлари ўринли бўлади. $AD[0,1]$ алгебраси $D[0,1]$ ни ўз ичига олувчи $S_K[0,1]$ нинг шундай энг катта қисм-алгебраси бўладики, бу қисм-алгебрада ∂ диффернциаллашни давом эттирувчи ягона ∂_{ap} диффернциаллаши мавжуд бўлади. Агар f- барча ерда апроксиматив дифференциалланувчи функция бўлса, у ҳолда

$$\partial_{ap}([f]) = [f'_{ap}]$$

тенглик ўринли бўлади. $S_K[0,1]$ алгебрасида эса ∂ ни давом эттирувчи чексиз кўп диффернциаллашлар мавжуд.

Учиничи боб «Дифференциаллашни узлуксизлиги» деб номланиб, унда $\mathcal{M}$ фон Нейман алгебраси хос чексиз бўлганда τ-ўлчовли операторлар алгебраси $S(\mathcal{M},\tau)$ ва локал ўлчовли операторлар алгебраси $LS(\mathcal{M})$ да ихтиёрий дифференциаллаш мос равишда ўлчовли яқинлашиш ва локал ўлчовли яқинлашиш топологиясига нисбатан узлуксиз бўлиши кўрсатилган.

Учинчи бобнинг **III.1** бўлими **«τ-ўлчовли хос чексиз $*$- оператор алгебраларда дифференциаллашни узлуксизлиги »** хос чексиз фон Нейман алгебраси $\mathcal{M}$ учун $S(\mathcal{M},\tau)$ алгебрадаги иҳтиёрий дифференциаллашнинг узлуксизлигини исботлашга бағишланган.

Исбот учун бизга қуйидаги ёрдамчи леммалар керак бўлади.

Лемма III.1.1. Агар $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ихтиёрий n учун $e_n \downarrow 0$ ва $\mathcal{P}(\mathcal{M}) \ni p \precsim e_n$ шартларни қаноатлантирувчи $\mathcal{M}$ дан олинган чекли проекторлар кетма-кетлиги булса, у ҳолда $p = 0$.

Лемма III.1.2. Агар $a \in LS(\mathcal{M})^+$ оператор ва $q \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ проектор бирор $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ учун $qaq \geq \lambda q$ шартни қаноатлантирса, у холда ихтиёрий $0 \leq \mu < \lambda$ учун $q \precsim e^a(\mu,\infty)$ бажарилади.

Лемма III.1.3. Айтайлик $a \in LS(\mathcal{M})^+$бўлсин. Агар $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$кетма-кетлик $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ дан олиниб ва $q_0 \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ бўлиб, $q_n \sim q_0$ ва ихтиёрий $n \in \mathbb{N}$ учун $q_n a q_n \geq n q_n$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $q_0 = 0$.

Лемма III.1.4. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - $\mathcal{M}$ фон Нейман алгебрасининг ўзаро дизъюнкт, ўз-ўзига қушма операторлари кетма-кетлиги бўлсин ва $sup_n \parallel a_n \parallel < \infty$ бўлсин. Унда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор so-топологияда қандайдир $a \in \mathcal{M}$ элементга яқинлашади ва $\parallel a \parallel = sup_n \parallel a_n \parallel$ тенглик бажарилади.

Ушбу бўлимнинг асосий натижасини келтирамиз.

Теорема III.1.5. $\mathcal{M}$ хос чексиз фон Нейман алгебраси бўлиб, τ эса $\mathcal{M}$

даги аниқ нормал ярим-чекли из бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\delta: S(\mathcal{M},\tau) \to S(\mathcal{M},\tau)$ дифференциаллаш ўлчовли яқинлашиш топологиясига нисбатан узлуксиз бўлади.

Учинчи бобнинг **III.2** бўлими **«локал ўлчовли хос чексиз $*$- оператор алгебраларда дифференциаллашни узлуксизлиги »** хос чексиз фон Нейман алгебраси $\mathcal{M}$ учун $LS(\mathcal{M})$ алгебрадаги иҳтиёрий дифференциаллашнинг узлуксизлигини исботлашга бағишланган.

Исбот учун бизга қуйидаги тасдиқлардан фойдаланилади.

Тасдиқ III.2.1. Агар $x_\alpha \in LS(\mathcal{M}), 0 \neq z \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{M}))$ бўлса, у ҳолда

$$zx_\alpha \overset{t(\mathcal{M})}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow zx_\alpha \overset{t(z\mathcal{M})}{\longrightarrow} 0.$$

Натижа III.2.2. Агар $\{z_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{M}))$ ва $z_\alpha \downarrow 0$ бўлса, унда $z_\alpha \overset{t(\mathcal{M})}{\longrightarrow} 0$ бўлади.

Тасдиқ III.2.3. $L^0(\Omega,\Sigma,\mu)$ дан олинган $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ тўр ва f элемент учун қуйидаги шартлар эквивалент:

(i). $f_\alpha \overset{t(L^\infty(\Omega))}{\longrightarrow} f$;

(ii). $f_\alpha\chi_{A_i} \overset{t(L^\infty(A_i))}{\longrightarrow} f\chi_{A_i}$ ихтиёрий $i \in I$ учун.

Тасдиқ III.2.4. $\mathcal{M}$ - ихтиёрий фон Нейман алгебраси, $x_\alpha, x \in LS(\mathcal{M})$, $0 \neq z_i \in \mathcal{P}\big(\mathcal{Z}(\mathcal{M})\big), z_i z_j = 0,$ бу ерда $i \neq j$, $sup_{i\in I} z_i = \mathbf{1}$ бўлсин. У ҳолда қуйидаги шартлар эквивалент:

(i). $x_\alpha \overset{t(\mathcal{M})}{\longrightarrow} x$;

(ii). $z_i x_\alpha \overset{t(z_i\mathcal{M})}{\longrightarrow} z_i x$ ихтиёрий $i \in I$ учун.

Эслатма III.2.5. III.2.4 тасдиқдан $t(\mathcal{M})$ топология $t(z_i\mathcal{M}), i \in I$ топологияларнинг Тихонов купайтмаси билан устма-уст тушади.

Натижа III.2.6. $\{z_i\}_{i\in I}$ - бирлик элементнинг $\mathcal{M}$ даги марказий бўлинмаси бўлсин. Айтайлик, чизиқли оператор $T: LS(\mathcal{M}) \to LS(\mathcal{M})$ ихтиёрий $x \in LS(\mathcal{M}), i \in I$ учун $T(z_i x) = z_i T(x)$ тенгликни қаноатлантирсин. У холда қуйидаги шартлар эквивалент:

(i). $T: (LS(\mathcal{M}), t(\mathcal{M})) \to (LS(\mathcal{M}), t(\mathcal{M}))$ акслантириш узлуксиз;

(ii). $T_{z_i}: (LS(z_i\mathcal{M}), t(z_i\mathcal{M})) \to (LS(z_i\mathcal{M}), t(z_i\mathcal{M}))$ акслантиришлар ихтиёрий $i \in I$ учун узлуксиз.

Лемма III.2.7. $\mathcal{A}$ - $LS(\mathcal{M})$ да қисм алгебра бўлсин. Агар $\mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{M})) \subset \mathcal{A}$, $\delta: \mathcal{A} \longrightarrow LS(\mathcal{M})$ - дифференциаллаш ва $z \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{M}))$ бўлса, унда ихтиёрий $x \in \mathcal{A}$ учун $\delta(z) = 0$ ва $\delta(zx) = z\delta(x)$ бўлади.

Бўлимнинг асосий натижасини келтирамиз:

Теорема III.2.8. Агар $\mathcal{M}$-хос чексиз фон Нейман алгебраси бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\delta: LS(\mathcal{M}) \longrightarrow LS(\mathcal{M})$ дифференциаллаш локал ўлчовли яқинлашиш топологиясига нисбатан узлуксиз бўлади.

Эслатма III.2.9. Агар $\mathcal{M}$ - I_∞ ёки III типли фактор бўлса, унда $LS(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ ва $t(\mathcal{M})$ топология $\mathcal{M}$ даги текис узлуксиз топология

(C^*-норма топологияси) билан мос тушади. Шунинг учун, бу ҳолда, III.2.8 Теореманинг натижаси мос равишда классик Сакаи-Кадисона теоремасидан келиб чиқади.

Тўртинчи боб «Локал ўлчовли операторлар алгебрасида коммутатор баҳолар» деб номланиб, у ихтиёрий фон Нейман алгебраси $\mathcal{M}$ ни ўзининг идеалига акслантирувчи дифференциаллашларни ўрганишга бағишланган. Бу натижалар, ўзи мухим аҳамиятга эга бўлган коммутатор баҳолашдан келиб чиқади.

$\mathcal{M}$ фон Нейман алгебраси, $a \in \mathcal{M}$ ва a элементдан ҳосил қилинган $\mathcal{M}$ нинг δ_a - ички дифференциаллаши берилган бўлсин. У ҳолда δ_a дифференциаллаши $(\mathcal{M}, \|.\|_{\mathcal{M}})$ даги чизиқли чегараланган оператор бўлади, бу ерда $\|.\|_{\mathcal{M}}$ норма $\mathcal{M}$ нинг C^*- нормасидир. Яхши маълумки

$$\| \delta_a \| \geq 2 \| a - c \|_{\mathcal{M}},$$

тенгсизлигини қаноатлантирадиган $c \in \mathcal{Z}(\mathcal{M})$ элементи мавжуд.

Юқоридаги тенгсизликдан табиий савол туғилади: барча $y \in \mathcal{M}, \| y \|_{\mathcal{M}} \leq 1$ лар учун $C|[a, y]| \geq |a - c|$ оператор тенгсизлигини (C -фиксирланган константа) қаноатлантирувчи $c \in \mathcal{Z}(\mathcal{M})$ элементи мавжудми? Ушбу саволга a оператор ўз-ўзига қўшма бўлганда ижобий жавоб топилди: агар $a \in LS_h(\mathcal{M})$ бўлса, у ҳолда шундай $c \in \mathcal{Z}_h(LS(\mathcal{M}))$ элементи ва $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \in \mathcal{U}(\mathcal{M})$ унитар операторлар оиласи мавжудки, бунда $|\delta_a(u_\varepsilon)| \geq (1-\varepsilon)|a - c|, \forall \varepsilon > 0$ тенгсизлиги бажарилади.

Ушбу натижа **«Коммутатор баҳолар ҳақидаги асосий теорема»** деб номланган **IV.1** бўлимда келтирилган. Қуйида унинг аниқ баёнини келтирамиз.

Теорема IV.1.1. Пусть $\mathcal{M}$ фон Нейман алгебраси ва $a = a^* \in LS(\mathcal{M})$ бўлсин. У ҳолда

1. Агар $\mathcal{M}$ - чекли ёки хос чексиз σ- чекли фон Нейман алгебраси бўлса, у ҳолда шундай $c_0 = c_0^* \in \mathcal{Z}(LS(\mathcal{M}))$ ва $u_0 = u_0^* \in \mathcal{U}(\mathcal{M})$ элементлари мавжудки, бунда қуйидаги тенглик ўринли бўлади:
$$|[a, u_0]| = u_0^*|a - c_0|u_0 + |a - c_0|;$$
2. Шундай $c_0 = c_0^* \in \mathcal{Z}(LS(\mathcal{M}))$ элементи ва $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset \mathcal{U}(\mathcal{M})$ оиласи мавжудки, бунда
$$|[a, u_\varepsilon]| \geq (1-\varepsilon)\left|a - c_0\right|, u_\varepsilon^* = u_\varepsilon, \forall\, \varepsilon > 0$$
муносабати ўринли бўлади.

IV.2 бўлим «Акси идеалларда бўлган дифференциаллашга татбиқлари» деб номланиб, унда IV.1.1. теоремани, акси идеалларда бўлган дифференциаллашга қўлланидиши келтирилган.

Теорема IV.2.1. $\mathcal{M}$ фон Нейман алгебраси ва $\mathcal{M}$ нинг $\mathcal{I}$ идеали берилган бўлсин. Агар $\delta: \mathcal{M} \to \mathcal{I}$ дифференциаллаш бўлса, у ҳолда $\delta = \delta_a = [a, \cdot]$ шартини қаноатлантирувчи $a \in \mathcal{I}$ элементи мавжуд.

$\mathcal{A}$ - алгебра ва $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ - унинг идеаллари бўлсин. Қуйидаги белгилашларни киритамиз

$$\mathcal{I}:\mathcal{J} = \{x \in \mathcal{A}: x\mathcal{J} \subset \mathcal{I}\}$$

ва

$$D(\mathcal{J},\mathcal{I}) = \{x \in \mathcal{A}: [x,y] \in \mathcal{I}, \forall y \in \mathcal{J}\}.$$

Куриниб турибдики, $\mathcal{I}:\mathcal{J}$ - $\mathcal{A}$ да идеал бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, агар $x \in \mathcal{I}:\mathcal{J}, y \in \mathcal{A}$, унда

$$(yx)\mathcal{J} = y(x\mathcal{J}) \subset y\mathcal{I} \subset \mathcal{I},$$
$$(xy)\mathcal{J} = x(y\mathcal{J}) \subset x\mathcal{J} \subset \mathcal{I}.$$

Агар $\mathcal{A}$ - комплекс $*$-алгебра бўлиб, ундаги ихтиёрий идеал $*$-идеал бўлса (барча фон Нейман алгебралари ушбу хусусиятга эга), унда $\{x \in \mathcal{A}: \mathcal{J}x \subset \mathcal{I}\} = (\mathcal{I}:\mathcal{J})^* = \mathcal{I}:\mathcal{J}$.

Тасдиқ IV.2.2. $\mathcal{A}$ - бирлик элемент **1** ни уз ичига олган комплекс $*$-алгебра бўлиб, ундаги ихтиёрий идеал $*$-идеал бўлсин. У ҳолдақуйидаги шартлар эквивалент:

(i). $\mathcal{A}$ нинг ихтиёрий идеали $\mathcal{I}$ ва элементи $a \in \mathcal{A}$ учун $[a,\mathcal{A}] \subset \mathcal{I} \Rightarrow a \in \mathcal{I} + \mathcal{Z}(\mathcal{A})$;

(ii). $\mathcal{A}$даги ихтиёрий $\mathcal{I},\mathcal{J}$ идеаллар учун $D(\mathcal{J},\mathcal{I}) = \mathcal{I}:\mathcal{J} + \mathcal{Z}(\mathcal{A})$;

(iii). $\mathcal{A}$ даги ихтиёрий идеал $\mathcal{I}$ учун $\pi_{\mathcal{I}}^{-1}(\mathcal{Z}(\mathcal{A}/\mathcal{I})) = \mathcal{I} + \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ (бу ерда $\pi_{\mathcal{I}}: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I}$ - каноник эпиморфизм).

IV.2.1. теорема қуйидагига эквивалент:

Натижа IV.2.3. $\mathcal{M}$ фон Нейман алгебраси, $\mathcal{M}$ нинг $\mathcal{I}$ идеали ва

$$\pi_{\mathcal{I}}: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}/\mathcal{I}$$

каноник эпиморфизм берилган бўлсин. У ҳолда $\pi_{\mathcal{I}}^{-1}(\mathcal{Z}(\mathcal{M}/\mathcal{I})) = \mathcal{Z}(\mathcal{M}) + \mathcal{I}$ тенглиги ўринли бўлади.

$\mathcal{H}$ сепарабел Гильберт фазоси ва $\mathcal{M} = B(\mathcal{H})$ бўлганда IV.2.3 натижанинг тасдиқи Калкиннинг [Calkin J. Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space. Ann. of Math. **42** (1941), 839–873] мақоласидаги 2.9 теоремаси билан устма-уст тушади. Шундай қилиб, IV.2.3 натижа Калкиннинг классик теоремасини ихтиёрий фон Нейман алгебраларига умумлашмаси бўлади.

Теорема 2.1 ва Тасдиқ 2.2 дан қуйидаги натижани оламиз

Натижа IV.2.4. Ихтиёрий фон Нейман алгебраси $\mathcal{M}$ ва унинг ихтиёрий $\mathcal{I},\mathcal{J}$ идеаллари учун қуйидаги тенглик бажарилади

$$D(\mathcal{J},\mathcal{I}) = \mathcal{I}:\mathcal{J} + \mathcal{Z}(\mathcal{M}).$$

Кейинчалик, биз тасвири симметрик идеалларда булган дифференциаллашларни кўриб чиқамиз.

Теорема IV.2.5. $\mathcal{M}$ - фон Нейман алгебраси ва $\mathcal{I}$ - $\mathcal{M}$ нинг симметрик оператор идеали булсин. Агар $\delta: \mathcal{M} \to \mathcal{I}$ - ўз-ўзига қўшма дифференциаллаш бўлса, у ҳолда шундай

$$a = -a^* \in \mathcal{I},$$

элемент мавжуд бўлиб қуйидаги шартлар бажарилади

$$\delta = \delta_a = [a,\cdot]$$

ва

$$\| a \|_{\mathcal{J}} \leq \| \delta \|_{\mathcal{M} \to \mathcal{J}}.$$

Бешинчи боб «Узлуксиз ва ички дифференциаллашлар синфини тенглиги» деб номланиб, унда τ- ўлчовли $S(\mathcal{M}, \tau)$ оператор алгебралари ва локал ўлчовли $LS(\mathcal{M})$ оператор алгебраларида дифференциаллашни узлуксизлик ва ички бўлишлик хоссалари эквивалент эканлиги кўрсатилади.

V.1 бўлим « τ -ўлчовли оператор алгебралардаги узлуксиз дифференциаллаш ичкидир» деб номланиб, унинг асосий натижаси қуйидаги теормадир:

Теорема V.1.1. Агар $\delta: S(\mathcal{M}, \tau) \to S(\mathcal{M}, \tau)$ дифференциаллаши ўлчовли яқинлашиш топологиясига нисбатан узлуксиз бўлса, у ҳолда бирон $d \in S(\mathcal{M}, \tau)$ учун

$$\delta = [d, \cdot]$$

муносабати ўринли бўлади.

III.1.5 ва V.1.1 теоремаларидан қуйидаги теорема келиб чиқади.

Теорема V.1.7. Агар $\mathcal{M}$ тўплам аниқ нормал ярим-чекли τ изли хос чексиз фон Нейман алгебраси бўлса, у ҳолда $S(\mathcal{M}, \tau)$ даги ихтиёрий дифференциаллаш ички бўлади.

V.2 бўлим «Локал ўлчовли хос чексиз $*$- оператор алгебраларда узлуксиз дифференциаллаш ичкидир» деб номланиб, унинг асосий натижаси қуйидаги теормадир:

Теорема V.2.6. $LS(\mathcal{M})$ алгебрасидаги локал ўлчовли яқинлашиш топологиясига нисбатан узлуксиз бўлган ҳар қандай дифференциаллаш ички диффернциаллаш бўлади.

III.2.8 ва V.2.6 теоремаларидан қуйидаги теорема келиб чиқади.

Теорема V.2.7. Агар $\mathcal{M}$-хос чексиз фон Нейман алгебраси бўлса, у ҳолда $*$-алгебра $LS(\mathcal{M})$ даги ихтиёрий дифференциаллаш ички бўлади.

V.3 бўлим «локал ўлчовли оператор алгебраларининг қисм-алгебрасида берилган дифференциаллашни ягона равишда давом эттирилиши» деб номланиб, унда $\mathcal{M}$ фон Нейман алгебрасини $LS(\mathcal{M})$ га акслантирувчи дифференциаллашни, $LS(\mathcal{M})$ гача давом эттириш конструксияси келтирилган. Ушбу давом эттириш ёрдамида $\mathcal{M}$ хос чексиз фон Нейман алгебраси бўлганда, ихтиёрий $\delta: \mathcal{A} \longrightarrow LS(\mathcal{M})$ дифференциаллаш (бу ерда $\mathcal{A}$ тўплам $\mathcal{M}$ ни ўз ичига олувчи, $LS(\mathcal{M})$ нинг қисм-алгебрасидир) локал ўлчовли яқинлашиш топологиясига нисбатан узлуксиз бўлиши исбот қилинади.

Ушбу бўлимнинг асосий натижаси қуйидаги теоремадир.

Теорема V.3.8. $LS(\mathcal{M})$ нинг ихтиёрий $\mathcal{A}$ ($\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$) қисм-алгебраси ва $\delta: \mathcal{A} \to LS(\mathcal{M})$ дифференциаллаш берилган бўлсин. У ҳолда барча $x \in \mathcal{A}$ учун $\delta_{\mathcal{A}}(x) = \delta(x)$ шартни қаноатлантирувчи ягона $\delta_{\mathcal{A}}: LS(\mathcal{M}) \to LS(\mathcal{M})$ дифференциаллаши мавжуд бўлади.

Натижа V.3.9. $\mathcal{M}$ хос чексиз фон Нейман алгебраси, $LS(\mathcal{M})$ нинг $\mathcal{A}$

($\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$) қисм-алгебраси берилган бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $\delta: \mathcal{A} \to LS(\mathcal{M})$ дифференциаллаш локал ўлчовли яқинлашиш топологиясига нисбатан узлуксиз бўлади.

V.4 бўлим «Фон Нейман алгебрасини локал ўлчовли операторларнинг Банах бимодулига акслантирувчи дифференциаллаш ичкидир » деб номланиб, унинг асосий натижаси қуйидаги теоремадир:

Теорема V.4.6. $\mathcal{M}$ фон Нейман алгебраси ва $\mathcal{E}$ локал ўлчовли операторларнинг $\mathcal{M}$-бимодули бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $\delta: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{E}$ дифференциаллаш ички бўлади, яъни барча $x \in \mathcal{M}$ учун

$$\delta(x) = [d, x]$$

шартини қаноатлантирувчи $d \in \mathcal{E}$ элементи мавжуд. Бунда

$$\| \mathrm{d} \| \leq 2 \| \delta \|_{\mathcal{M} \to \mathcal{E}}$$

тенгсизлиги ўринли бўлади. Агар $\delta^* = \delta$ ёки $\delta^* = -\delta$ бўлса, у ҳолда d ни

$$\| d \| \leq \| \delta \|_{\mathcal{M} \to \mathcal{E}}$$

тенгсизлигини қаноатлантирадиган қилиб танлаш мумкин.

ХУЛОСА

Диссертация фон Нейман алгебрасига бириктирилган ўлчовли ҳамда локал ўлчовли операторлар алгебрасида дифференциаллашларни ўрганишга бағишланган. Тадқиқотнинг асосий масаласи қандай ҳолларда дифференциаллаш ички ва қандай ҳолларда дифференциаллаш узлуксиз бўлишини аниқлашдан иборат.

Диссертацияда қуйидаги янги натижалар олинган:

1. Ўлчовли функцияларнинг қисм-алгебрасида берилган ихтиёрий кенгаймайдиган дифференциаллаш бутун алгебрагача давом эттириш мумкин эканлиги исбот қилинди;
2. Ўлчовли функциялар алгебрасида нолдан фарқли дифференциаллашларни мавжуд бўлишига мезон топилди. Ўлчовли функциялар алгебрасида барча дифференциаллар фазоси таснифлпнди;
3. $[0,1]$ сегментдаги $S[0,1]$ ўлчовли функциялар алгебрасидаги барча дифференциаллашлар фазоси ўлчами учун қуйи чегара топилди;
4. Ўлчовли функциялар алгебрасининг, ихтиёрий дифференциаллаши бутун алгебрагача ягона равишда давом этувчи максимал қисм-алгебраси таснифланди. $[0,1]$ сегментдаги деяли барча ерда дифференциалланувчи функциялар алгебраси учун бундай максимал қисм-алгебра деярли барча ерда аппроксиматив дифференциалланувчи функциялар алгебраси эканлиги кўрсатилди.
5. Аниқ нормал ярим-чекли τ изга эга бўлган хос чексиз фон Нейман алгебраси $\mathcal{M}$ га бириктирлган $S(\mathcal{M}, \tau)$ алгебрасидаги ихтиёрий дифференциаллаши ўлчовли яқинлашиш топологиясига нисбатан узлуксиз эканлиги исбот қилинди;
6. Хос чексиз фон Нейман алгебраси $\mathcal{M}$ га бириктирилган локал ўлчовли

операторлар алгебраси $LS(\mathcal{M})$ даги ихтиёрий дифференциаллаши локал ўлчовли яқинлашиш топологиясига нисбатан узлуксиз эканлиги исбот қилинди;

7. Фон Нейман алгебраси $\mathcal{M}$ га бириктирилган барча локал ўлчовли операторлар алгебраси $LS(\mathcal{M})$ нинг $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ шартини қаноатлантирувчи $\mathcal{A}$ қисм-алгебрасидаги ихтиёрий $\delta_0: \mathcal{A} \longrightarrow LS(\mathcal{M})$ дифференциаллаши $\delta: LS(\mathcal{M}) \longrightarrow LS(\mathcal{M})$ дифференциаллашгача ягона равишда давом эттирилиши исбот қилинди;
8. Фон Нейман алгебрасига бириктирилган ихтиёрий ўз-ўзига қўшма локал ўлчовли махсус марказий суриш оператори учун коммутатор баҳо топилди;
9. Фон Нейман алгебрасини идеалга акслантирувчи ихтиёрий дифференциаллаш ушбу идеалнинг элементи ёрдамида ҳосил қилиниши исбот қилинди. Нормаланган идеал бўлган ҳолда ҳосил қилувчи элементнинг нормаси учун баҳо топилди;
10. Калкин и Хоффманнинг $B(\mathcal{H})$ учун исбот қилган классик теоремалари ихтиёрий фон Нейман алгебраси учун исботланди;
11. $S(\mathcal{M}, \tau)$ алгебрасидаги ўлчовли яқинлашиш топологиясига нисбатан узлуксиз бўлган ихтиёрий дифференциаллаш ички эканлиги исбот қилинди;
12. $LS(\mathcal{M})$ алгебрасидаги локал ўлчовли яқинлашиш топологиясига нисбатан узлуксиз бўлган ихтиёрий дифференциаллаш ички эканлиги исбот қилинди;
13. $\mathcal{M}$ фон Нейман алгебрасини локал ўлчовли операторларнинг Банах $\mathcal{M}$ бимодулига акслантирувчи ихтиёрий дифференциаллаш ички эканлиги исбот қилинди.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.30.09.2019.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

БЕР АЛЕКСЕЙ ФЕЛИКСОВИЧ

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В АЛГЕБРАХ ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

01.01.01 – Математический анализ
(физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ
ДОКТОРА (DSc) ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Ташкент – 2019 год

Тема диссертации доктора наук (Doctor of Science) зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за номером B2019.3.DSc/FM143.

Диссертация выполнена в Институте математики.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.ik-fizmat@nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный консультант:	**Чилин Владимир Иванович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Ганиходжаев Расул Набиевич** доктор физико-математических наук, профессор
	Закиров Ботир Сабитович доктор физико-математических наук, профессор
	Арзикулов Фарходжон Нематжонович доктор физико-математических наук
Ведущая организация:	**Крымский федеральный университет имени В.И.Вернадского, Россия**

Защита диссертации состоится «____» _________________2019 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.30.09.2019.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871)227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №________). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2019 года.
(протокол рассылки №________ от «____» _______________2019 года).

А.А.Аъзамов
Заместитель председателя Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

Н.К.Мамадалиев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.ф.-м.н. (PhD)

А.С.Садуллаев
Заместитель председателя научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Решения проблем, возникающих в результате научно-прикладных исследований при изучении алгебр измеримых функций, а также при изучении задач теории алгебр измеримых операторов, проводимых на международном уровне, в основном, приводятся к задачам изучения дифференцирований на таких алгебрах. Для алгебр фон Неймана важное значение имеет свойство непрерывности произвольного дифференцирования на такой алгебре, установленное американским ученым С.Сакаи. Из работ И.Капланского, С.Сакаи, Р.В.Кэдисона, Д.Олесена можно увидеть, что изучение дифференцирований на операторных алгебрах занимает не малое место во многих областях науки, в частности, в статистической и квантовой механике. Нахождение критериев непрерывности и внутренности таких дифференцирований, а также дифференцирований с образом в бимодулях над операторными алгебрами, является одной из важных задач теории операторных алгебр.

В настоящее время важную роль играет исследование непрерывных групп автоморфизмов (и их генераторов), действующих в алгебрах измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана, для моделей статистической и квантовой механики. В связи с этим, реализация целевых научных исследований в следующих направлениях является одной из основных задач: изучение генераторов этих групп, которые являются дифференцированиями, нахождения критериев непрерывности и внутренности этих дифференцирований. Научные исследования, проводимые в вышеупомянутых направлениях, подтверждают актуальность темы диссертации.

В нашей стране стали больше уделять внимание научным направлениям с прикладным значением. В частности, особое внимание было уделено развитию теории операторных алгебр для классических моделей квантовой механики и генераторов групп автоморфизмов таких алгебр, являющихся основным объектом изучения задач статистической и квантовой механики. Значительные результаты были получены по исследованию автоморфизмов алгебр ограниченных операторов, генераторов этих групп, а также для дифференцирований с образом в бимодулях над операторными алгебрами. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным научным направлениям, в частности, по функциональному анализу и алгебре, являются основными задачами и направлениями ведения научных исследований[3]. Развитие дальнейшего исследования по теории операторных алгебр, их автоморфизмов и дифференцирований на операторных алгебрах играет важную роль при обеспечении исполнения данного постановления.

[3] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан».

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, указанных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О Стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» и ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности института математики имени В.И. Романовского академии наук Республики Узбекистан», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Связь исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации[4].

Исследования по теории дифференцирований в алгебрах измеримых функций и в алгебрах измеримых операторов ведутся научными центрами и специалистами университетов зарубежных стран, такими как: Университет Нового Южного Уэльса, Школа математики и статистики (Австралия), Международный центр теоретической физики им. Абдуса Салама, Пизанский университет (Италия), Парижский университет, Университет Тулузы (Франция), Московский государственный университет, Федеральный университет Крыма, Новосибирский государственный университет, Институт математики РАН (Россия), Университет штата Пенсильвания, Университет Питтсбурга (США), Университет Торонто (Канада), и многими специалистами других стран мира.

В результате научных исследований, проведенных по дифференцированиям в алгебрах измеримых операторов в мире, решен целый ряд актуальных задач, в том числе получены следующие научные результаты: доказано, что любое дифференцирование на алгебре измеримых функций на пространстве с дискретной мерой является нулевым, любое дифференцирование на алгебре измеримых или локально измеримых операторов, присоединенной к алгебре фон Неймана типа I_∞ или III является внутренним.

На мировом уровне осуществляется ряд научно-исследовательских работ в приоритетных направлениях, таких как изучение дифференцирований на алгебрах измеримых функций и измеримых операторов, и их применение, а именно в целях, чтобы: найти критерии непрерывности дифференцирований

---

[4] Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации: Journal of Statistical Physics, Queueing Systems, Теоретическая и математическая физика, Сибирский математический журнал, Математические заметки, Украинский математический журнал, http://www.springer.com/mathematics; Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics, Journal of Physics: Conference Series https://www.researchgate.net, также были использованы и другие источники.

на алгебрах измеримых или локально измеримых операторов, присоединенной к алгебре фон Неймана типа II и критерии внутренности таких дифференцирований.

Степень изученности проблемы.

Теория дифференцирований C^* и W^*-алгебр была заложена Капланским, который году показал, что каждое дифференцирование δ на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ типа I является *внутренним*, т.е. $\delta(a) = [d, a] = da - ad, a \in \mathcal{M},$ для некоторого фиксированного $d \in \mathcal{M}$. Затем Сакаи доказал, что любое дифференцирование на C^*-алгебре является непрерывным. После этого Сакаи и Кадисон показали, что произвольное дифференцирование δ на любой алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ является внутренним, т.е. $\delta(a) = [d, a]$, причем верно неравенство $\| d \|_{\mathcal{M}} \leq \| \delta \|_{\mathcal{M} \to \mathcal{M}}$. Олесен распространила этот результат на все AW^*-алгебры.

Хотя на произвольной C^*-алгебре любое дифференцирование и является непрерывным, но оно не обязательно внутреннее. Если же C^*-алгебра является простой и имеет единицу, то любое дифференцирование на ней обязательно внутреннее. В случае коммутативной алгебры внутреннее дифференцирование есть нулевой оператор. Хорошо известно, что произвольное дифференцирование на коммутативной C^*-алгебре является нулевым (т.е. внутренним).

Из приведенных фактов исследования дифференцирований на операторных алгебрах следует естественный вывод о том, что особый интерес представляют два вопроса:

является ли произвольное дифференцирование в данном классе алгебр внутренним;

если нет, то является ли оно непрерывным.

В связи с развитием теории алгебр измеримых и локально измеримых операторов в последние годы возник особый интерес к изучению дифференцирований на таких алгебрах. Основные задачи в этом направлении были поставлены академиком Ш.А. Аюповым. И эти задачи связаны, в первую очередь, с двумя вышеупомянутыми вопросами.

Основные результаты для дифференцирований, действующих в алгебрах $LS(\mathcal{M})$ локально измеримых операторов, $S(\mathcal{M})$ измеримых операторов и $S(\mathcal{M}, \tau)$ τ-измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана типа I , были получены в работах Аюпова Ш. А., Albeverio S. и Кудайбергенова К. К. Оказалось, что каждое дифференцирование на любой из вышеперечисленных алгебр неограниченных операторов, обладающее свойством $\mathcal{Z}$-линейности (т.е. $\delta(\mathcal{Z}(\mathcal{M})) = \{0\}$, где $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ - центр алгебры $\mathcal{M}$), является внутренним. В случае алгебры фон Неймана типа I_∞ любое дифференцирование на всех алгебрах измеримых операторов является $\mathcal{Z}$-линейным, а значит, и внутренним. Случай конечной алгебры фон Неймана типа I сводится к случаю $\mathcal{M} = L_\infty(X, \Sigma, \mu) \otimes M_n$, где (X, Σ, μ) - пространство с конечной мерой, а M_n - алгебра комплексных матриц n-го порядка. В этой ситуации, $LS(\mathcal{M}) = S(\mathcal{M}) = S(X, \Sigma, \mu) \otimes M_n$ и любое дифференцирование на $S(X,\Sigma,\mu)\otimes M_n$ однозначно раскладывается в сумму внутреннего дифференцирования и дифференцирования, естественно продолженного с $S(X,\Sigma,\mu)$ ($\delta\longrightarrow\delta\otimes Id$). Поэтому произвольное дифференцирование на алгебре $S(X,\Sigma,\mu)\otimes M_n$ является внутренним тогда и только тогда, когда булева алгебра центральных проекторов в $\mathcal{M}$ - атомическая. Для произвольной алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ типа I критерий наличия на любой из вышеперечисленных алгебр измеримых операторов дифференцирования, не являющегося внутренним, состоит в том, что произвольный центральный проектор из $\mathcal{M}$ - либо бесконечный, либо дискретный (т.е. супремум атомов).

Если алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ имеет тип III, то на ней нет точных нормальных полуконечных следов и $S(\mathcal{M})=\mathcal{M}$. Но алгебра $LS(\mathcal{M})$ может не совпадать с $\mathcal{M}$. Поэтому вопрос о том, будет ли произвольное дифференцирование на $LS(\mathcal{M})$ внутренним, не является тривиальным. На этот вопрос дан положительный ответ в работе Аюпова Ш. А. и Кудайбергенова К. К.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в котором выполняется диссертация. Исследование выполнено в соответствии с планом научного исследования ОТ-Ф4-82 «Локальные дифференцирования и автоморфизмы операторных и неассоциативных алгебр, фазовые переходы и хаос в нелинейных динамических системах» и ОТ-Ф4-87 «Теория глобальных инвариантов кривых и поверхностей в Евклидовом и псевдо-Евклидовом пространствах и ее приложения в механике» Института математики им. В. И. Романовского АН Узбекистана (2017–2021 гг).

Целью исследования является нахождение критериев, обеспечивающих непрерывность или внутренность произвольных дифференцирований, действующих в алгебрах измеримых операторов.

Задачи исследования, решаемые в данной работе, следующие:

получение критерия существования ненулевых дифференцирований на коммутативных алгебрах измеримых операторов;

доказательство непрерывности произвольного дифференцирования на алгебрах $S(\mathcal{M},\tau)$ и $LS(\mathcal{M})$ в случае собственно бесконечной алгебры фон Неймана;

доказательство внутренности любого непрерывного дифференцирования на алгебрах $S(\mathcal{M},\tau)$ и $LS(\mathcal{M})$;

доказательство внутренности любого дифференцирования, дейсвующего из алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ в банахов $\mathcal{M}$-модуль локально измеримых операторов.

Объект исследования − алгебры измеримых и локально измеримых операторов, дифференцирования, идеалы в алгебрах фон Неймана, бимодули над алгебрами фон Неймана, регулярные (по фон Нейману) кольца, инверсные полугруппы, аппроксимативные производные.

Предмет исследования – непрерывные и внутренние дифференцирования в алгебрах измеримых и локально измеримых операторов, дифференцирования в алгебрах фон Неймана со значениями в их идеалах и в бимодулях над этими алгебрами.

Методы исследования. В работе используются методы, основанные на теории алгебр фон Неймана, спектральной теории, теории решеток. Также используются методы теории расширения колец и теории многочленов.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

дан критерий существования ненулевых дифференцирований на алгебрах измеримых функций, дано описание пространства всех дифференцирований на алгебре измеримых функций;

доказано, что произвольное дифференцирование на алгебре всех измеримых (относительно следа) операторов, присоединенных к собственно бесконечной алгебре фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом, является непрерывным в топологии сходимости по мере;

доказано, что произвольное дифференцирование на алгебре всех локально измеримых операторов, присоединенных к собственно бесконечной алгебре фон Неймана, является непрерывным в топологии сходимости локально по мере;

доказано, что любое дифференцирование, заданное на подалгебре алгебры всех локально измеримых операторов операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана, содержащей саму эту алгебру, продолжается до дифференцирования на всей алгебре локально измеримых операторов единственным образом;

доказано, что произвольное непрерывное дифференцирование на алгебре измеримых (относительно следа) операторов является внутренним

доказано, что произвольное непрерывное дифференцирование на алгебре локально измеримых операторов является внутренним;

доказано, что любое дифференцирование из алгебры фон Неймана в банахов бимодуль локально измеримых операторов является внутренним.

Практические результаты исследования состоят в следующем:

с помощью теоремы о продолжении дифференцирования с подалгебры коммутативной регулярной алгебры на всю алгебру доказан критерий существования ненулевых дифференцирований на алгебре измеримых функций;

благодаря теоремам о коммутаторной оценке и о продолжении дифференцирований доказана внутренность произвольных дифференцирований из алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ в банахов $\mathcal{M}$-бимодуль локально измеримых операторов;

с помощью теоремы об эквивалентности свойств непрерывности и внутренности дифференцирований на алгебре $(LS(\mathcal{M}), t(\mathcal{M}))$ доказано, что любое дифферненцирование на алгебре $LS(\mathcal{M})$ является внутренним в случае собственно бесконечной алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений и доказательств, использованием известных методов исследования алгебр измеримых функций и измеримых операторов, применением фундаментальных результатов теории операторных алгебр, а также методов функционального анализа, теории колец и их расширений. В результате доказанных утверждений найдены критерии внутренности дифференцирований на алгебрах измеримых функций и измеримых операторов.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что полностью описаны классы алгебр измеримых и локально измеримых операторов, для которых произвольное непрерывное дифференцирование является внутренним.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что полученные результаты позволяют прогнозировать описание классов инволютивных алгебр неограниченных операторов, для которых все непрерывные дифференцирования являются внутренними.

Внедрение результатов исследования. Полученные результаты по дифференцированиям в алгебрах измеримых операторов внедрены в практику по следующим направлениям:

Нахождения критериев внутренности дифференцирования на алгебре измеримых функций были использованы в проекте под номером DP150100920 «Разложения Шура и смежные вопросы теории операторов» для доказательства того, что на алгебре измеримых функций на отрезке существует ненулевое дифференцирование (Справка от 9 июля 2019 года Университета Нового Южного Уэльса, Австралия). Применение научных результатов дало возможность описания наибольшей подалгебры в алгебре измеримых функций на отрезке, на которую обычная производная продолжается единственным образом;

Теоремы о непрерывности дифференцирований на алгебрах измеримых и локально измеримых операторов были использованы в проекте под номером FL170100052 «Новейшие методы для некоммутативного анализа» для доказательства непрерывности дифференцирований на собственно бесконечных алгебрах (Справка от 9 июля 2019 года Университета Нового Южного Уэльса, Австралия). Применения научных результатов дало возможность доказательства внутренности таких дифференцирований;

Теорема о коммутаторных оценках была использованы в международном проекте 16-11-10125 «Операторные уравнения в функциональных пространствах и приложения к нелинейному анализу» для сведения доказательств внутренности дифференцирований на подалгебрах алгебры локально измеримых операторов к рассмотрению дифференцирований, заданных на всей алгебре (Справка № 9-29-286 от 27 августа 2019 года Крымского федерального университета, Россия). Применение научных результатов дало возможность нахождения критериев внутренности дифференцирований на различных алгебрах измеримых операторов в зависимости от типа алгебры фон Неймана.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертации были представлены и обсуждены на 8 научных конференциях, в том числе на 6 международных и 2 республиканских научных конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 22 научных работ, из них 13 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе 13 опубликованы в зарубежных журналах.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 188 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В главе I, названной «Предварительные сведения», приводятся необходимые определения и сведения, а также и формулируются некоторые известные результаты из теории алгебр фон Неймана, алгебр измеримых и локально измеримых операторов, теории дифференцирований в алгебрах, которые необходимы для изложения основного текста диссертации.

Пусть $(\mathcal{M}, \|.\|_{\mathcal{M}})$ - алгебра фон Неймана на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с единицей $\mathbf{1}$. Обозначим через $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ множество всех проекторов из $\mathcal{M}$, через $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ - центр алгебры $\mathcal{M}$, через $\mathcal{U}(\mathcal{M})$ - группу унитарных операторов из $\mathcal{M}$.

Проекторы $p, q \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ называются *эквивалентными*, если существует такая частичная изометрия $v \in \mathcal{M}$, что $v^*v = p, vv^* = q$. В этом случае пишут $p \sim q$. Проектор p называется *конечным*, если $\mathcal{P}(\mathcal{M}) \ni q \leq p, q \sim p \Rightarrow q = p$. Множество всех конечных проекторов обозначается через $\mathcal{P}_{fin}(\mathcal{M})$. Проектор, не являющийся конечным, называется *бесконечным*.

Линейный оператор $x: \mathfrak{D}(x) \to \mathcal{H}$, где область определения $\mathfrak{D}(x)$ оператора x есть линейное подпространство в $\mathcal{H}$, называется *присоединенным* к $\mathcal{M}$, если $yx \subseteq xy$ для всех $y \in \mathcal{M}'$ (в этом случае пишут $x\eta\mathcal{M}$).

Линейный оператор $x: \mathfrak{D}(x) \to \mathcal{H}$ называется *измеримым* относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, если x - замкнутый, плотно определенный, присоединенный к $\mathcal{M}$ оператор, и существует такая последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $\mathcal{P}(\mathcal{M})$, что

$$p_n \uparrow \mathbf{1},\ p_n(\mathcal{H}) \subseteq \mathfrak{D}(x), p_n^{\perp} \in \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{M})$$

для всех n, где $p_n^{\perp} = \mathbf{1} - p_n$. Из условия $p_n(\mathcal{H}) \subseteq \mathfrak{D}(x)$ следует, что $xp_n \in \mathcal{M}$. Множество $S(\mathcal{M})$ всех измеримых относительно $\mathcal{M}$ операторов, является унитальной (т.е. алгеброй с единицей) $*$-алгеброй относительно операций сильного сложения и сильного умножения (записываемых просто: $x+y$ и xy для всех $x,y \in S(\mathcal{M})$).

Пусть на $\mathcal{M}$ существует точный нормальный полуконечный след τ. Оператор $x \in S(\mathcal{M})$ называется τ-*измеримым*, если существует такая последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $\mathcal{P}(\mathcal{M})$, что

$$p_n \uparrow \mathbf{1},\ p_n(\mathcal{H}) \subseteq \mathfrak{D}(x) \text{ и } \tau(p_n^{\perp}) < \infty$$

для всех n. Множество $S(\mathcal{M},\tau)$ всех τ-измеримых операторов есть унитальная $*$-подалгебра в $S(\mathcal{M})$.

Векторная топология t_τ на алгебре $S(\mathcal{M},\tau)$, базу окрестностей нуля которой составляют множества

$$U(\varepsilon,\delta) = \{x \in S(\mathcal{M},\tau) \colon \exists p \in \mathcal{P}(\mathcal{M}), xp \in \mathcal{M}, \| xp \| \le \varepsilon, \tau(p^{\perp}) \le \delta\},$$

где $\varepsilon > 0, \delta > 0$, называется *топологией сходимости по мере*.

Замкнутый оператор $x\eta\mathcal{M}$ называется *локально измеримым*, если существует такая последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ центральных проекторов из $\mathcal{M}$, что $z_n \uparrow \mathbf{1}$ и $xz_n \in S(\mathcal{M})$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Множество $LS(\mathcal{M})$ всех локально измеримых операторов относительно $\mathcal{M}$ является унитальной $*$-алгеброй с операциями сильного сложения и сильного умножения.

На алгебре $LS(\mathcal{M})$ определяется *топология сходимости локально по мере* $t(\mathcal{M})$, свойства которой подробно описаны в книге [Муратов М.А., Чилин В.И. Алгебры измеримых и локально измеримых операторов. Труды института математики НАН Украины, т. 69, 2007].

Линейное подпространство $\mathcal{L}$ в алгебре $LS(\mathcal{M})$ всех локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, называется $\mathcal{M}$-*бимодулем измеримых операторов*, если $axb \in \mathcal{L}$ для любых $x \in \mathcal{L}$ и $a,b \in \mathcal{M}$.

$\mathcal{M}$-бимодуль измеримых операторов $\mathcal{L}$ называется *нормированным* $\mathcal{M}$-*бимодулем измеримых операторов*, если на $\mathcal{L}$ задана такая норма $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$, что

$$\| axb \|_{\mathcal{L}} \le \| a \|_{\mathcal{M}} \| x \|_{\mathcal{L}} \| b \|_{\mathcal{M}}$$

для любых $x \in \mathcal{L}, a,b \in \mathcal{M}$.

Если, при этом, $(\mathcal{L}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$ - банахово пространство, то $\mathcal{L}$ называется *банаховым* $\mathcal{M}$-*бимодулем измеримых операторов*.

Глава II, названная **«Дифференцирования на коммутативных регулярных алгебрах»**, посвящена изучению вопроса о существовании ненулевых дифференцирований на FCR-алгебрах. Этот класс алгебр введен и описан в первом разделе данной главы. Изучение дифференцирований на алгебрах данного класса мотивировалось тем, что этот класс содержит класс алгебр измеримых функций на пространствах с мерой.

Раздел II.1 главы II посвящен изучению структуры коммутативных регулярных алгебр.

Кольцо $\mathcal{A}$ называется *регулярным*, если оно удовлетворяет одному из двух эквивалентных условий:

1. Для любого $a \in \mathcal{A}$ существует такое $b \in \mathcal{A}$, что $a = aba$;
2. Для любого $a \in \mathcal{A}$ существует такое $e \in \nabla$ (∇ - множество всех

идемпотентов алгебры $\mathcal{A}$), что $a\mathcal{A} = e\mathcal{A}$.

Алгебра, являющаяся регулярным кольцом, называется *регулярной алгеброй*.

Идемпотент $e \in \nabla$ называется *носителем* элемента $a \in \mathcal{A}$, если $ea = a$ и если $ga = a$, $g \in \nabla$, то $e \leq g$. Носитель элемента $a \in \mathcal{A}$ обозначается через $s(a)$.

Через $K(A_1, A_2, \dots)$ будем обозначать подалгебру в $\mathcal{A}$, порожденную подмножествами $A_1, A_2, \ldots \subset \mathcal{A}$. Например,

$$K(\nabla) = \{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k : e_k \in \nabla, \lambda_k \in K, k = 1, \dots, n\},$$

а если $\mathcal{B}$ - подалгебра в $\mathcal{A}$, то

$$K(\mathcal{B}, \nabla) = \{\sum_{l=1}^{m} b_l f_l + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k : f_l, e_k \in \nabla, \lambda_k \in K, l = 1, \dots, m, k = 1, \dots, n\}.$$

В следующем предложении дается конструкция наименьшей регулярной подалгебры, содержащей данную подалгебру.

Предложение II.1.3. Пусть $\mathcal{B}$ – подалгебра в $\mathcal{A}$, $\nabla \subset \mathcal{B}$. Тогда

$$R(\mathcal{B}) = \{a \cdot i(b) : a, b \in \mathcal{B}\}$$

есть наименьшая регулярная подалгебра в $\mathcal{A}$, содержащая $\mathcal{B}$.

Пусть $\mathcal{A}$ - коммутативная унитальная регулярная алгебра над полем K и пусть на булевой алгебре ∇ идемпотентов $\mathcal{A}$ задана строго положительная счетно аддитивная конечная мера μ. Если алгебра $\mathcal{A}$ полна относительно метрики

$$\rho(a, b) = \mu(s(a - b)),$$

то алгебру $\mathcal{A}$ будем называть FCR-*алгеброй*.

Пусть (Ω, Σ, μ) измеримое пространство с конечной счетно аддитивной мерой, $\mathcal{A} = S(\Omega, \Sigma, \mu)$ алгебра всех классов равных почти всюду действительных (комплексных) измеримых функций, заданных на (Ω, Σ, μ). Мера μ определяет строго положительную счетно аддитивную меру на полной булевой алгебре ∇ всех идемпотентов из $\mathcal{A}$. Для любых $a, b \in \mathcal{A}$ мы имеем

$$\rho(a, b) = \mu\big(s(a - b)\big) = \mu(\{\omega \in \Omega : a(\omega) \neq b(\omega)\}),$$

при этом, метрическое пространство $(\mathcal{A}, \rho)$ является полным, т.е. $\mathcal{A}$ является примером FCR-алгебры.

Обозначим через $K(\nabla)$ подалгебру в $FCR -$ алгебре $\mathcal{A}$, порожденную ∇, и пусть $K_c(\nabla)$ - замыкание $K(\nabla)$ в метрике ρ.

Пусть $\mathcal{B}$ - подалгебра в $\mathcal{A}$. Обозначим через $I(\mathcal{B})$ множество всех целых элементов относительно $\mathcal{B}$. Каждый элемент $b \in \mathcal{B}$ является корнем полинома $x - b$, поэтому $\mathcal{B} \subset I(\mathcal{B})$. Известно, что $I(\mathcal{B})$ - подкольцо в $\mathcal{A}$. Это кольцо называется целым замыканием кольца (алгебры) $\mathcal{B}$ в алгебре $\mathcal{A}$. Кроме того, $I(I(\mathcal{B})) = I(\mathcal{B})$. Если $I(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$, то алгебра $\mathcal{B}$ называется целозамкнутой подалгеброй в $\mathcal{A}$.

Предложение II.1.8. Пусть (Ω, Σ, μ) – измеримое пространство с конечной полной счетно аддитивной мерой и $\mathcal{A} = S(\Omega, \Sigma, \mu)$ - алгебра классов всех K-значных измеримых функций на (Ω, Σ) ($K = \mathbb{R}$, либо $K = \mathbb{C}$), ∇ - булева алгебра всех идемпотентов из $\mathcal{A}$. Тогда

$$K_c(\nabla) = \mathcal{A}$$

в том, и только в том случае, когда ∇ – атомическая булева алгебра.

Пусть $\mathcal{B}$ - подалгебра в $\mathcal{A}$. Положим $E(\mathcal{B}) = I(\overline{\overline{R(K(\mathcal{B},\nabla))}})$. Поясним, что здесь написано. Алгебра $E(\mathcal{B})$ получена из $\mathcal{B}$ в результате последовательного применения нескольких операций: присоединения всех идемпотентов, образования наименьшей регулярной подалгебры, замыкания в метрике ρ, образования целого замыкания и, еще раз, замыкания в метрике ρ.

Предложение II.1.17. Пусть (Ω, Σ, μ) – измеримое пространство с конечной полной счетно аддитивной мерой, и пусть $\mathcal{A} = S(\Omega, \Sigma, \mu)$ - алгебра классов всех K-значных измеримых функций на (Ω, Σ) ($K = \mathbb{R}$, либо $K = \mathbb{C}$), ∇ - булева алгебра всех идемпотентов из $\mathcal{A}$. Тогда

$$E(K_c(\nabla)) = K_c(\nabla).$$

Обозначим через $K[x_1, \ldots, x_n]$ алгебру всех многочленов от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ над полем K.

Говорят, что одночлен $q(x_1, \ldots, x_n)$ входит в разложение многочлена $p(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n]$, если в естественном представлении $p(x_1, \ldots, x_n)$ в виде суммы одночленов с ненулевыми коэффициентами присутствует слагаемое q (под естественным представлением понимается такое представление, в котором любые два различных одночлена имеют разное распределение степеней переменных).

Подмножество $\mathcal{X} \subset \mathcal{A} \setminus \{0\}$ назовем *алгебраически независимым*, если для любых

$$a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{X}, e \in \nabla, p \in K[x_1, \ldots, x_n]$$

из равенства

$$ep(a_1, \ldots, a_n) = 0$$

следует, что

$$eq(a_1, \ldots, a_n) = 0,$$

где $q \in K[x_1, \ldots, x_n]$ любой одночлен, входящий в разложение p. Пустое подмножество будем также считать алгебраически независимым.

Приведем основное свойство максимального алгебраически независимого подмножества.

Предложение II.1.20 Пусть $\mathcal{X}$ - максимальное алгебраически независимое подмножество в $\mathcal{A}$. Тогда $I(\overline{\overline{R(K(\mathcal{X},\nabla))}}) = \mathcal{A}$ (напомним, что через $K(\mathcal{X},\nabla)$ обозначается подалгебра в $\mathcal{A}$, порожденная множествами $\mathcal{X}$ и ∇).

Пусть $\mathcal{S}$ - подмножество в коммутативной регулярной алгебре $\mathcal{A}$. Отображение $\alpha: \mathcal{S} \to \mathcal{A}$ называется *нерасширяющим*, если

$$s(\alpha(b)) \leq s(b)$$

для всех $b \in \mathcal{S}$.

Для подмножества $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ обозначим через $K_s(\mathcal{S}, \mathcal{A})$ множество всех нерасширяющих отображений f из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{A}$.

Предложение II.1.22. Пусть $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$. Тогда $K_s(\mathcal{S}, \mathcal{A})$ - K-линейное пространство, относительно поточечного сложения и умножения на константу. При этом $K_s(\mathcal{S},\mathcal{A})$ K-линейно изоморфно произведению $\prod_{a\in\mathcal{S}} s(a)\mathcal{A}$.

Раздел II.2 главы II, названный **«Продолжение дифференцирований»**, посвящен изучению дифференцирований на коммутативных регулярных алгебрах. Основная цель этого раздела есть получение критерия существования ненулевых дифференцирований на FCR-алгебре, следствием которого будут необходимые и достаточные условия для существования ненулевых дифференцирований на алгебре измеримых функций. Критерий существования ненулевых дифференцирований на FCR-алгебре является следствием того факта, что любое нерасширяющее дифференцирование, заданное на произвольной подалгебре может быть продолжено до дифференцирования, заданного на всей алгебре. Для этого в диссертационной работе рассматриваются продолжение дифференцирования на расширения нескольких видов: присоединение всех идемпотентов, наименьшую регулярную подалгебру, порожденную данной, замыкание по метрике, определенное в предыдущем разделе, присоединение целого элемента и присоединение слабо трансцендентного элемента.

Предложение II.2.3. Пусть $\mathcal{B}$ – подалгебра в $\mathcal{A}$, $\delta:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ – нерасширяющее дифференцирование. Тогда существует единственное дифференцирование $\delta_1: K(\mathcal{B},\nabla)\to\mathcal{A}$, такое, что $\delta_1(b)=\delta(b)$ для всех $b\in\mathcal{B}$.

В следующем утверждении реализуется второй шаг в построении продолжения дифференцирования: оно расширяется на наименьшую регулярную подалгебру, содержащую исходную подалгебру $\mathcal{B}$ и ∇.

Предложение II.2.4. Пусть $\mathcal{B}$ – подалгебра в $\mathcal{A}$, $\nabla\subset\mathcal{B}$, $\delta:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ – дифференцирование, $R(\mathcal{B})$ - наименьшая регулярная подалгебра в $\mathcal{A}$, содержащая $\mathcal{B}$ (см Предложение 1.3). Тогда существует единственное дифференцирование $\delta_1: R(\mathcal{B})\to\mathcal{A}$, такое, что $\delta_1(b)=\delta(b)$ для всех $b\in\mathcal{B}$.

В следующем утверждении реализуется третий шаг в построении продолжения дифференцирования: оно расширяется на простое целое расширение подалгебры $\mathcal{B}$.

Предложение II.2.7. Пусть $\mathcal{B}$ - регулярная подалгебра в $\mathcal{A}$, замкнутая в $(\mathcal{A},\rho)$, $\nabla\subset\mathcal{B}$, $0\neq a\in\mathcal{A}$ - целый элемент относительно $\mathcal{B}$ и $\delta:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ – дифференцирование. Тогда существует единственное дифференцирование $\delta_1:\mathcal{B}(a)\to\mathcal{A}$, такое, что $\delta_1(b)=\delta(b)$ для всех $b\in\mathcal{B}$.

В заключение рассмотрим расширение подалгебры с помощью присоединения слабо трансцендентного элемента.

Предложение II.2.8. Пусть $\mathcal{B}$ - регулярная подалгебра в $\mathcal{A}$, $\nabla\subset\mathcal{B}$ и пусть $\delta:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ - дифференцирование. Если $a\in\mathcal{A}$ - слабо трансцендентный элемент относительно $\mathcal{B}$, то для любого $c\in\mathcal{A}$, такого, что $s(c)\leq s(a)$, существует единственное дифференцирование $\delta_1:\mathcal{B}(a)\to\mathcal{A}$, для которого $\delta_1(b)=\delta(b)$ для всех $b\in\mathcal{B}$ и $\delta_1(a)=c$.

Приведем основную теорему данного раздела.

Теорема II.2.9. Пусть $\mathcal{B}$ - подалгебра FCR-алгебры $\mathcal{A}$ над полем K

нулевой характеристики. Тогда для любого нерасширяющего дифференцирования $\delta: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, существует такое дифференцирование $\tilde{\delta}: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, что

$$\tilde{\delta}(b) = \delta(b)$$

для всех $b \in \mathcal{B}$.

Следствием этой теоремы является следующий критерий

Теорема II.2.11. Пусть $\mathcal{A}$ - FCR -алгебра над полем K нулевой характеристики. Тогда на $\mathcal{A}$ существует ненулевое дифференцирование в том и только в том случае, когда $E(K_c(\nabla)) \neq \mathcal{A}$. В случае, когда поле K алгебраически замкнуто, последнее условие равносильно выполнению неравенства $K_c(\nabla) \neq \mathcal{A}$.

Следующая теорема является важным приложением предыдущего результата.

Теорема II.2.12. Пусть (Ω, Σ, μ) - пространство с конечной счетно аддитивной полной мерой и пусть $S = S(\Omega, \Sigma, \mu)$ - алгебра измеримых функций на (Ω, Σ, μ) со значениями в поле K, где $K = \mathbb{R}$ или $K = \mathbb{C}$. Следующие условия эквивалентны:

1. Существует ненулевое дифференцирование $\delta: S \to S$;

2. Булева алгебра ∇ всех идемпотентов из S не является атомической булевой алгеброй.

В заключение приведем вариант предыдущей Теоремы для коммутативных алгебр измеримых операторов.

Теорема II.2.14. Пусть $\mathcal{M}$ - коммутативная алгебра фон Неймана. Следующие условия эквивалентны:

1. Существует ненулевое дифференцирование $\delta: S(\mathcal{M}) \to S(\mathcal{M})$;

2. Булева алгебра $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ всех проекторов из $\mathcal{M}$ не является атомической булевой а лгеброй.

Раздел II.3 главы II, названный **«Структура и размер линейного пространства дифференцирований»**, посвящен описанию структуры и оценке размерности K -линейного пространства $Dir(\mathcal{A})$ всех дифференцирований на FCR-алгебре $\mathcal{A}$, исходя из понятия алгебраической независимости. В частности, показано, что размерность $Dir(S[0,1])$ не меньше мощности континуума $\aleph_1$.

Приведем основной результат этого раздела.

Теорема II.3.3. Пусть $\mathcal{A}$ - FCR -алгебра над полем K нулевой характеристики. Пусть $\mathcal{X}$ - максимальное алгебраически независимое подмножество в $\mathcal{A}$. Тогда отображение $\delta \to \delta|_{\mathcal{X}}$ задает линейный изоморфизм из $Dir(\mathcal{A})$ на

$$K_s(\mathcal{X}, \mathcal{A}) \cong \prod_{a \in \mathcal{X}} s(a)\mathcal{A}.$$

В следующей теореме дается оценка размерности пространства $Dir(S_K[0,1])$ ($K = \mathbb{R}$, либо $K = \mathbb{C}$).

Теорема II.3.6. Линейное пространство $Dir(S_K[0,1])$ ($K = \mathbb{R}$, либо $K = \mathbb{C}$) содержит подпространство, изоморфное произведению несчетного количества экземпляров пространств $S_K[0,1]$. В частности,

$$\dim(Dir(S_K[0,1])) \geq \dim(S_K[0,1]).$$

.

Раздел II.4 главы II называется **«Наибольшее однозначное продолжение дифференцирования»**. В разделе **II.2** было показано, что любое нерасширяющее дифференцирование δ можно продолжить с произвольной подалгебры $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ до дифференцирования, определенного на всей алгебре $\mathcal{A}$. Следовательно, такое дифференцирование можно продолжить на любую промежуточную подалгебру между $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}$. Возникает естественный вопрос: в каком случае продолжение произвольного дифференцирования с подалгебры $\mathcal{B}$ на данное расширение $\mathcal{C} \supset \mathcal{B}$ будет единственным?

В этом разделе дается ответ на этот вопрос: критерием такого продолжения является условие

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C} \subseteq E(\mathcal{B}).$$

Приведем основной результат данного раздела.

Теорема II.4.1. Пусть $\mathcal{A}$ - FCR -алгебра над полем K нулевой характеристики. Пусть $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ - подалгебры в $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$. Тогда любое нерасширяющее дифференцирование

$$\delta: \mathcal{B} \to \mathcal{A},$$

продолжается до дифференцирования из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{A}$ единственным образом в том и только в том случае, если

$$\mathcal{C} \subseteq E(\mathcal{B}).$$

Если

$$E(\mathcal{B}) \neq \mathcal{A},$$

то любое нерасширяющее дифференцирование $\delta: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, имеет бесконечно много продолжений до дифференцирования на $\mathcal{A}$.

Важным приложением этого результата является его применение к расширению действия обычной классической производной.

Теорема II.4.4. Пусть $S_K[0,1]$ - алгебра всех класов почти всюду равных K-значных измеримых функций на отрезке $[0,1]$ ($K = \mathbb{R}$, либо $K = \mathbb{C}$), $D[0,1]$ - подалгебра в $S_K[0,1]$, состоящая из всех классов, содержащих хотя бы одну почти всюду дифференцируемую функцию. Для каждой почти всюду дифференцируемой функции f положим

$$\partial([f]) = [f'].$$

Тогда ∂ - корректно определенное дифференцирование из $D[0,1]$ в $S_K[0,1]$. Далее, алгебра $E(D[0,1])$ совпадает с подалгеброй $AD[0,1]$ в $S_K[0,1]$, состоящей из всех классов, содержащих хотя бы одну почти всюду аппроксимативно дифференцируемую функцию. При этом

$$D[0,1] \subsetneqq AD[0,1] \subsetneqq S_K[0,1].$$

Алгебра $AD[0,1]$ является наибольшей подалгеброй в $S_K[0,1]$, содержащей $D[0,1]$, на которой существует <u>единственное</u> дифференцирование ∂_{ap} , продолжающее ∂ . Если f - почти всюду аппроксимативно дифференцируемая функция, то

$$\partial_{ap}([f]) = [f'_{ap}].$$

На алгебре $S_K[0,1]$ существует бесконечно много дифференцирований, продолжающих ∂.

В **Главе III**, названной **«Непрерывность дифференцирований»**, показывается, что в случае собственно бесконечной алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ любое дифференцирование на алгебре $S(\mathcal{M},\tau)$ τ-измеримых операторов и алгебре $LS(\mathcal{M})$ локально измеримых операторов является непрерывным соответственно в топологиях сходимости по мере и сходимости локально по мере.

Раздел III.1 главы III, названный **«Непрерывность дифференцирований на собственно бесконечной $*$-алгебре τ-измеримых операторов»**, посвящен доказательству непрерывности произвольного дифференцирования на алгебре $S(\mathcal{M},\tau)$ в случае собственно бесконечной алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$.

Для доказательства используются следующие вспомогательные леммы:

Лемма III.1.1. Если $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность таких конечных проекторов из $\mathcal{M}$, что $e_n \downarrow 0$ и если $\mathcal{P}(\mathcal{M}) \ni p \precsim e_n$ для всех n, то $p = 0$.

Лемма III.1.2. Если оператор $a \in LS(\mathcal{M})^+$ и проектор $q \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ - такие, что $qaq \geq \lambda q$ для некоторого $0 < \lambda \in \mathbb{R}$, то $q \precsim e^a(\mu,\infty)$ для всех $0 \leq \mu < \lambda$.

Лемма III.1.3. Пусть $a \in LS(\mathcal{M})^+$. Если $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность из $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ и $q_0 \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ - такие, что $q_n \sim q_0$ и $q_n a q_n \geq n q_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $q_0 = 0$.

Лемма III.1.4. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность попарно дизъюнктных самосопряженных операторов в алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, $sup_n \parallel a_n \parallel < \infty$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится в so-топологии к некоторому элементу $a \in \mathcal{M}$ и $\parallel a \parallel = sup_n \parallel a_n \parallel$.

Приведем основной результат раздела:

Теорема III.1.5. Если $\mathcal{M}$ - собственно бесконечная алгебра фон Неймана и τ - точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$, то любое дифференцирование

$$\delta: S(\mathcal{M},\tau) \to S(\mathcal{M},\tau)$$

является непрерывным в топологии сходимости по мере.

Замечание III.1.6. Если $\mathcal{M}$ - фактор типа I_∞ с точным нормальным полуконечным следом τ (единственным, с точностью до множителя), то $S(\mathcal{M},\tau) = \mathcal{M}$ и топология t_τ совпадает с равномерной топологией (C^*-нормы) на $\mathcal{M}$. Поэтому в этом случае результат Теоремы III.1.5 непосредственно вытекает из классической Теоремы Сакаи-Кадисона.

Раздел III.2 главы III, названный **«Непрерывность дифференцирований на собственно бесконечной $*$-алгебре локально измеримых операторов»**, посвящен доказательству непрерывности произвольного дифференцирования на алгебре $LS(\mathcal{M})$ в случае собственно бесконечной алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$.

Для доказательства используются следующие вспомогательные утверждения:

Предложение III.2.1. Если $x_\alpha \in LS(\mathcal{M}), 0 \neq z \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{M}))$, то
$$zx_\alpha \stackrel{t(\mathcal{M})}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow zx_\alpha \stackrel{t(z\mathcal{M})}{\longrightarrow} 0.$$

Следствие III.2.2. Если $\{z_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{M}))$ и $z_\alpha \downarrow 0$ то $z_\alpha \stackrel{t(\mathcal{M})}{\longrightarrow} 0$.

Предложение III.2.3. Для сети $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ и f из $L^0(\Omega,\Sigma,\mu)$ следующие условия эквивалентны:

(i). $f_\alpha \stackrel{t(L^\infty(\Omega))}{\longrightarrow} f$;

(ii). $f_\alpha\chi_{A_i} \stackrel{t(L^\infty(A_i))}{\longrightarrow} f\chi_{A_i}$ для всех $i \in I$.

Предложение III.2.4. Пусть $\mathcal{M}$ - произвольная алгебра фон Неймана, $x_\alpha, x \in LS(\mathcal{M})$, $0 \neq z_i \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{M})), z_iz_j = 0$ где $i \neq j$, $sup_{i\in I} z_i = \mathbf{1}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

(i). $x_\alpha \stackrel{t(\mathcal{M})}{\longrightarrow} x$;

(ii). $z_ix_\alpha \stackrel{t(z_i\mathcal{M})}{\longrightarrow} z_ix$ для всех $i \in I$.

Замечание III.2.5. Из Предложения III.2.4 следует, что топология $t(\mathcal{M})$ совпадает с тихоновским произведением топологий $t(z_i\mathcal{M}), i \in I$.

Следствие III.2.6. Пусть $\mathcal{M}$, $\{z_i\}_{i\in I}$ - центральное разбиение единицы в $\mathcal{M}$. Пусть $T: LS(\mathcal{M}) \to LS(\mathcal{M})$ - такой линейный оператор, что $T(z_ix) = z_iT(x)$ для всех $x \in LS(\mathcal{M}), i \in I$. Тогда следующие условия эквивалентны:

(i). Отображение $T: (LS(\mathcal{M}), t(\mathcal{M})) \to (LS(\mathcal{M}), t(\mathcal{M}))$ непрерывно;

(ii). Отображения $T_{z_i}: (LS(z_i\mathcal{M}), t(z_i\mathcal{M})) \to (LS(z_i\mathcal{M}), t(z_i\mathcal{M}))$ непрерывны для всех $i \in I$.

Лемма III.2.7. Пусть $\mathcal{A}$ - подалгебра в $LS(\mathcal{M})$. Если $\mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{M})) \subset \mathcal{A}$, $\delta: \mathcal{A} \longrightarrow LS(\mathcal{M})$ - дифференцирование и $z \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{M}))$, то $\delta(z) = 0$ и $\delta(zx) = z\delta(x)$ для всех $x \in \mathcal{A}$.

Приведем основной результат раздела:

Теорема III.2.8. Если $\mathcal{M}$ - собственно бесконечная алгебра фон Неймана, то любое дифференцирование $\delta: LS(\mathcal{M}) \longrightarrow LS(\mathcal{M})$ непрерывно в топологии сходимости локально по мере.

Замечание III.2.9. Если $\mathcal{M}$ - фактор типа I_∞ или III, то $LS(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ и топология $t(\mathcal{M})$ совпадает с равномерной топологией (C^*-нормы) на $\mathcal{M}$. Поэтому в этом случае результат Теоремы III.2.8 непосредственно вытекает из классической Теоремы Сакаи-Кадисона.

Глава IV, названная **«Коммутаторные оценки в алгебрах локально измеримых операторов»**, посвящена исследованию дифференцирований, действующих из произвольной алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ в идеал алгебры $\mathcal{M}$. Эти результаты являются следствием важной коммутаторной оценки, имеющей и самостоятельный интерес.

Пусть $\mathcal{M}$ - алгебра фон Неймана, $a \in \mathcal{M}$, и пусть δ_a - внутреннее дифференцирование на $\mathcal{M}$, порожденное элементом a. Тогда δ_a есть ограниченный линейный оператор на $(\mathcal{M}, \|.\|_\mathcal{M})$, где $\|.\|_\mathcal{M}$ - C^*-норма на $\mathcal{M}$. Хорошо известно существование такого элемента $c \in \mathcal{Z}(\mathcal{M})$, для которого верна следующая оценка:

$$\| \delta_a \| \geq 2 \| a - c \|_{\mathcal{M}}.$$

В связи с этим неравенством, возникает естественный вопрос: существует ли такое $c \in \mathcal{Z}(\mathcal{M})$, что для всех

$$y \in \mathcal{M}, \| y \|_{\mathcal{M}} \leq 1,$$

верна операторная оценка

$$C|[a, y]| \geq |a - c|$$

для фиксированной константы C? Оказалось, что для самосопряженного (необязательно ограниченного) элемента a этот вопрос имеет следующий положительный ответ: если $a \in LS_h(\mathcal{M})$, то найдется такой элемент

$$c \in \mathcal{Z}_h(LS(\mathcal{M}))$$

и такое семейство унитарных элементов

$$\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \in \mathcal{U}(\mathcal{M}),$$

что

$$|\delta_a(u_\varepsilon)| \geq (1 - \varepsilon)|a - c|, \forall \varepsilon > 0.$$

Этот результат излагается в **разделе IV.1**, названном **«Основная теорема о коммутаторных оценках»**. Вот его точная формулировка:

Теорема IV.1.1. Пусть $\mathcal{M}$ - алгебра фон Неймана, и пусть

$$a = a^* \in LS(\mathcal{M}).$$

Тогда

1. Если $\mathcal{M}$ - конечная алгебра фон Неймана или чисто бесконечная σ-конечная алгебра фон Неймана, то найдутся такие

$$c_0 = c_0^* \in \mathcal{Z}(LS(\mathcal{M}))$$

и

$$u_0 = u_0^* \in \mathcal{U}(\mathcal{M}),$$

что

$$|[a, u_0]| = u_0^*|a - c_0|u_0 + |a - c_0|;$$

2. Существует такое

$$c_0 = c_0^* \in \mathcal{Z}(LS(\mathcal{M}))$$

и такое семейство

$$\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset \mathcal{U}(\mathcal{M}),$$

что

$$|[a, u_\varepsilon]| \geq (1 - \varepsilon)\left|a - c_0\right|, u_\varepsilon^* = u_\varepsilon, \forall\, \varepsilon > 0.$$

В **разделе IV.2**, названном **«Приложения к дифференцированиям с образом в идеалах»**, даются приложения теоремы IV.1.1. к дифференцированиям с образом в идеалах.

Теорема IV.2.1. Пусть $\mathcal{M}$ - алгебра фон Неймана, и пусть $\mathcal{I}$ - идеал в $\mathcal{M}$. Если $\delta: \mathcal{M} \to \mathcal{I}$ - дифференцирование, то существует такой элемент $a \in \mathcal{I}$, что

$$\delta = \delta_a = [a, \cdot].$$

Пусть $\mathcal{A}$ - алгебра и $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ - идеалы в $\mathcal{A}$. Положим

$$\mathcal{I}: \mathcal{J} = \{x \in \mathcal{A}: x\mathcal{J} \subset \mathcal{I}\}$$

и

$$D(\mathcal{J}, \mathcal{I}) = \{x \in \mathcal{A}: [x, y] \in \mathcal{I}, \forall y \in \mathcal{J}\}.$$

Легко видеть, что $\mathcal{I}:\mathcal{J}$ - идеал в $\mathcal{A}$. Действительно, пусть $x \in \mathcal{I}:\mathcal{J}, y \in \mathcal{A}$, тогда

$$(yx)\mathcal{J} = y(x\mathcal{J}) \subset y\mathcal{I} \subset \mathcal{I},$$
$$(xy)\mathcal{J} = x(y\mathcal{J}) \subset x\mathcal{J} \subset \mathcal{I}.$$

Если $\mathcal{A}$ - комплексная $*$-алгебра, в которой любой идеал является $*$-идеалом (все алгебры фон Неймана обладают этим свойством), то $\{x \in \mathcal{A}: \mathcal{J}x \subset \mathcal{I}\} = (\mathcal{I}:\mathcal{J})^* = \mathcal{I}:\mathcal{J}$.

Предложение IV.2.2. Пусть $\mathcal{A}$ - комплексная $*$-алгебра с единицей **1**, в которой любой идеал является $*$-идеалом. Тогда следующие условия эквивалентны:

(i). $[a,\mathcal{A}] \subset \mathcal{I} \Rightarrow a \in \mathcal{I} + \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ для любого идеала $\mathcal{I}$ в $\mathcal{A}$ и любого элемента $a \in \mathcal{A}$;

(ii). $D(\mathcal{J},\mathcal{I}) = \mathcal{I}:\mathcal{J} + \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ для любых идеалов $\mathcal{I},\mathcal{J}$ в $\mathcal{A}$;

(iii). $\pi_{\mathcal{I}}^{-1}(\mathcal{Z}(\mathcal{A}/\mathcal{I})) = \mathcal{I} + \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ для любого идеала $\mathcal{I}$ в $\mathcal{A}$ (здесь $\pi_{\mathcal{I}}: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I}$ - канонический эпиморфизм).

Теорема IV.2.1. имеет следующую эквивалентную формулировку:

Следствие IV.2.3. Пусть $\mathcal{M}$- алгебра фон Неймана, $\mathcal{I}$ - идеал в $\mathcal{M}$, $\pi_{\mathcal{I}}: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}/\mathcal{I}$ - канонический эпиморфизм. Тогда

$$\pi_{\mathcal{I}}^{-1}(\mathcal{Z}(\mathcal{M}/\mathcal{I})) = \mathcal{Z}(\mathcal{M}) + \mathcal{I}.$$

В случае, когда $\mathcal{M} = B(\mathcal{H})$, где $\mathcal{H}$ - сепарабельное гильбертово пространство, утверждение следствия IV.2.3 совпадает с Theorem 2.9 из работы Калкина [Calkin J. Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space. Ann. of Math. **42** (1941), 839–873]. Таким образом, следствия IV.2.3 является распространением классической теоремы Калкина на произвольные алгебры фон Неймана.

Также из Теоремы 2.1 и Предложения 2.2 вытекает

Следствие IV.2.4. Для произвольной алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ и любых идеалов $\mathcal{I},\mathcal{J}$ в $\mathcal{M}$ выполняется

$$D(\mathcal{J},\mathcal{I}) = \mathcal{I}:\mathcal{J} + \mathcal{Z}(\mathcal{M}).$$

Далее мы рассмотрим дифференцирования с образом в симметрических идеалах.

Теорема IV.2.5. Пусть $\mathcal{M}$ - алгебра фон Неймана, и пусть $\mathcal{I}$ - симметрический операторный идеал в $\mathcal{M}$. Если $\delta: \mathcal{M} \to \mathcal{I}$ - самосопряженное дифференцирование, то существует такой элемент

$$a = -a^* \in \mathcal{I},$$

что

$$\delta = \delta_a = [a,\cdot]$$

и

$$\| a \|_{\mathcal{I}} \leq \| \delta \|_{\mathcal{M}\to\mathcal{I}}.$$

В **Главе V**, названной **«Совпадение классов непрерывных и внутренних дифференцирований»**, показывается, что для алгебры $S(\mathcal{M},\tau)$ τ-измеримых операторов и алгебры $LS(\mathcal{M})$ локально измеримых операторов свойства дифференцирований быть непрерывными и внутренними эквивалентны.

В **разделе V.1**, названном **«Непрерывные дифференцирования на $*$-алгебре $\boldsymbol{\tau}$-измеримых операторов – внутренние»**, основным результатом является следующая

Теорема V.1.1. Если дифференцирование
$$\delta: S(\mathcal{M},\tau) \to S(\mathcal{M},\tau)$$
непрерывно в топологии сходимости по мере, то
$$\delta = [d,\cdot]$$
для некоторого $d \in S(\mathcal{M},\tau)$.

Из Теорем III.1.5 и V.1.1 вытекает

Теорема V.1.7. Если $\mathcal{M}$ - собственно бесконечная алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом τ, то любое дифференцирование на алгебре $S(\mathcal{M},\tau)$ является внутренним.

В **разделе V.2**, названном **«Непрерывные дифференцирования на $*$-алгебре локально измеримых операторов – внутренние»**, основным результатом является следующая

Теорема V.2.6. Каждое непрерывное в топологии сходимости локально по мере дифференцирование на алгебре $LS(\mathcal{M})$ является внутренним дифференцированием.

Из Теорем III.2.8 и V.2.6 вытекает

Теорема V.2.7. Если $\mathcal{M}$ - собственно бесконечная алгебра фон Неймана, то любое дифференцирование на $*$-алгебре $LS(\mathcal{M})$ является внутренним.

В **разделе V.3**, названном **«Однозначность продолжения дифференцирования, заданного на подалгебре алгебры локально измеримых операторов»**, приводится конструкция продолжения любого дифференцирования, действующего на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ со значениями в $LS(\mathcal{M})$, до дифференцирования из $LS(\mathcal{M})$ в $LS(\mathcal{M})$. С помощью этого продолжения устанавливается, что, в случае собственно бесконечной алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, любое дифференцирование $\delta: \mathcal{A} \longrightarrow LS(\mathcal{M})$ для подалгебры $\mathcal{A} \supset \mathcal{M}$ в $LS(\mathcal{M})$ является непрерывным относительно топологии сходимости локально по мере.

Основным результатом этого раздела является

Теорема V.3.8. Пусть $\mathcal{A}$ - произвольная подалгебра в $LS(\mathcal{M})$, $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$, и пусть $\delta: \mathcal{A} \to LS(\mathcal{M})$ - произвольное дифференцирование. Тогда существует единственное дифференцирование
$$\delta_{\mathcal{A}}: LS(\mathcal{M}) \to LS(\mathcal{M}),$$
для которого
$$\delta_{\mathcal{A}}(x) = \delta(x)$$
для всех $x \in \mathcal{A}$.

Следствие V.3.9. Пусть $\mathcal{M}$ - собственно бесконечная алгебра фон Неймана, $\mathcal{A}$ - подалгебра в $LS(\mathcal{M})$, для которой $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$. Тогда любое дифференцирование $\delta: \mathcal{A} \to LS(\mathcal{M})$ является непрерывным относительно топологии сходимо сти локально по мере.

Основным результатом **раздела V.4**, названного **«Дифференцирования**

из алгебры фон Неймана в банахов бимодуль локально измеримых операторов – внутренние», является

Теорема V.4.6. Пусть $\mathcal{M}$ - алгебра фон Неймана, и пусть $\mathcal{E}$ - банахов $\mathcal{M}$ -бимодуль локально измеримых операторов. Тогда любое дифференцирование $\delta: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{E}$ является внутренним, т.е. существует такой элемент $d \in \mathcal{E}$, что

$$\delta(x) = [d, x]$$

для всех $x \in \mathcal{M}$, при этом,

$$\| \mathrm{d} \| \leq 2 \| \delta \|_{\mathcal{M} \to \mathcal{E}}.$$

Если $\delta^* = \delta$ или $\delta^* = -\delta$, то элемент d можно выбрать так, чтобы

$$\| d \| \leq \| \delta \|_{\mathcal{M} \to \mathcal{E}}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена изучению дифференцирований на алгебрах измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана. Основными вопросами исследования были следующие: в каких случаях такие дифференцирования являются внутренними, а в каких - непрерывными.

В работе получены следующие новые результаты:

1. Доказано, что любое нерасширяющее дифференцирование, заданное на подалгебре алгебры измеримых функций, продолжается до дифференцирования, заданного на всей алгебре;
2. Дан критерий существования ненулевых дифференцирований на алгебрах измеримых функций, дано описание пространства всех дифференцирований на алгебре измеримых функций;
3. Дана нижняя оценка размерности пространства всех дифференцирований на алгебре $S[0,1]$ измеримых функций на отрезке $[0,1]$;
4. Описано максимальное расширение подалгебры в алгебре измеримых функций, на которое произвольное дифференцирование, заданное на этой подалгебре, продолжается до дифференцирования единственным образом. Показано, что таким расширением для алгебры всех почти всюду дифференцируемых функций на отрезке $[0,1]$ является алгебра всех почти всюду аппроксимативно дифференцируемых функций;
5. Доказано, что произвольное дифференцирование на алгебре $S(\mathcal{M}, \tau)$ всех τ -измеримых операторов, присоединенных к собственно бесконечной алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ с точным нормальным полуконечным следом τ, является непрерывным в топологии сходимости по мере;
6. Доказано, что произвольное дифференцирование на алгебре $LS(\mathcal{M})$ всех локально измеримых операторов, присоединенных к собственно бесконечной алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, является непрерывным в топологии сходимости локально по мере;
7. Доказано, что любое дифференцирование $\delta_0: \mathcal{A} \longrightarrow LS(\mathcal{M})$, заданное на подалгебре $\mathcal{A}$ алгебры $LS(\mathcal{M})$ всех локально измеримых операторов

операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, такой, что $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$, продолжается до дифференцирования $\delta: LS(\mathcal{M}) \longrightarrow LS(\mathcal{M})$ единственным образом;

8. Получена коммутаторная оценка одного специального центрального сдвига произвольного самосопряженного локально измеримого оператора, присоединенного к алгебре фон Неймана;
9. Доказано, что любое дифференцирование на алгебре фон Неймана с образом в произвольном идеале этой алгебры порождается элементом этого идеала; в случае нормированного идеала дается оценка нормы этого элемента;
10. Получено расширение классических теорем Калкина и Хоффмана, известных для алгебр $B(\mathcal{H})$, на произвольные алгебры фон Неймана;
11. Доказано, что произвольное непрерывное в топологии сходимости по мере дифференцирование, заданное на алгебре $S(\mathcal{M}, \tau)$, является внутренним;
12. Доказано, что произвольное непрерывное в топологии сходимости локально по мере дифференцирование на алгебре $LS(\mathcal{M})$ является внутренним;
13. Доказано, что любое дифференцирование из алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ в банахов $\mathcal{M}$-бимодуль локально измеримых операторов является внутренним.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.30.09.2019.FM.01.01 AT NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

INSTITUTE OF MATHEMATICS

BER ALEKSEY FELIKSOVICH

DERIVATIONS ON THE ALGEBRAS OF MEASURABLE OPERATORS

01.01.01 – Mathematical analysis
(Physical and Mathematical Sciences)

DISSERTATION ABSTRACT
of doctoral dissertation (DSc) on physical and mathematical sciences

Tashkent – 2019

The theme of doctoral dissertation (DSc) was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2019.3.DSc/FM143.

Dissertation has been prepared at Institute of Mathematics.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://fti-kengash.uz/ and on the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific adviser:	**Chilin Vladimir Ivanovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Ganikhodzhaev Rasul Nabievich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Zakirov Botir Sabitovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Arzikulov Farkhodjon Nematjonovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**Crimean Federal University named after V.I.Vernadsky, Russia**

Defense will take place «____» _____________2019 at _____ at the meeting of Scientific Council number DSc.30.09.2019.FM.01.01 at National University of Uzbekistan. (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №____) (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 246-02-24.)

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2019 year.
(Mailing report № ___________on «____» _______________2019 year).

A.A.Azamov
Vice Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academician

N.K.Mamadaliev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees,
PhD in Math. and Physics

A.S.Sadullaev
Vice Chairman of Scientific seminar under Scientific
Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academician

INTRODUCTION (abstract of DSc thesis)

The urgency and relevance of the dissertation topic. The theory of derivations of $C*$ and W^*- algebras was originated by Kaplansky, which in 1953 showed that each derivation δ on the von Neumann algebra M of type I is inner, i.e. $\delta(a) = [d, a] = da - ad, a \in \mathcal{M},$ for some fixed $d \in \mathcal{M}$. In 1960, Sakai proved that any derivation on a $C*$ -algebra is continuous. Then, in 1966, Sakai and Kadison showed that an arbitrary derivation δ on any von Neumann algebra M is inner, i.e. $\delta(a) = [d, a]$, and, in addition, the inequality $\| d \|_{\mathcal{M}} \leq \| \delta \|_{\mathcal{M} \to \mathcal{M}}$ holds. Although on an arbitrary $C*$ -algebra any derivation is continuous, it is not necessarily inner. In the case of commutative algebra, an inner derivation necessarily vanishes. In particular, it is well known that an arbitrary derivation on a commutative $C*$ -algebra is zero (i.e., inner).

The above facts of the study of derivation on operator algebras naturally suggest the following two questions of particular interest:

whether an arbitrary derivation (on a given subclass of algebras) is inner?

if the answer to the question above is negative, then is it continuous?

Due to the recent and rapid development of the theory of algebras of measurable and locally measurable operators a the question stated above are of particular interest ha in the study of derivations on such algebras. The main tasks in this direction were set by academician Sh.A. Ayupov in 2000. These tasks are directly connected, first of all, with the two above-mentioned questions.

The aim of the research work is to determine criteria that ensure the continuity or innerness of arbitrary derivations acting in the algebras of measurable operators.

The tasks of research work:

obtaining a criterion for the existence of nonzero derivations on commutative algebras of measurable operators;

the proof of the continuity of arbitrary derivation on the algebras $S(\mathcal{M}, \tau)$ and $LS(\mathcal{M})$ in the case of the properly infinite von Neumann algebra;

proof of the innerness of any continuous derivation on the algebras $S(\mathcal{M}, \tau)$ and $LS(\mathcal{M})$;

a proof of the innerness of any derivation acting from a von Neumann algebra $\mathcal{M}$ into a Banach $\mathcal{M}$ -bimodule of locally measurable operators.

The object of the research work is algebras of measurable and locally measurable operators, derivations, ideals in von Neumann algebras, bimodules over von Neumann algebras, regular (according to von Neumann) rings, inverse semigroups, approximative derivatives.

Scientific novelty of the research work is a follows:

a criterion for the existence of nonzero derivations on the algebras of measurable functions is given; a description of the space of all differentiations on the algebra of measurable functions is given;

it is proved that arbitrary differentiation on the algebra of all measurable (with respect to the trace) operators attached to the actually infinite von Neumann algebra with the exact normal semi-finite trace is continuous in the topology of convergence in measure;

it is proved that arbitrary differentiation on the algebra of all locally measurable operators associated with the infinite von Neumann algebra is continuous in the topology of convergence locally in measure;

it is proved that any differentiation given on a subalgebra of the algebra of all locally measurable operators of operators adjoined to the von Neumann algebra containing this algebra itself continues to differentiation on the whole algebra of locally measurable operators uniquely;

it is proved that arbitrary continuous differentiation on the algebra of measurable (with respect to the trace) operators is internal

it is proved that arbitrary continuous differentiation on the algebra of locally measurable operators is internal;

It is proved that any differentiation from a von Neumann algebra to a Banach bimodule of locally measurable operators is internal.

Summary of the dissertation.

The dissertation is devoted to the study of derivation on algebras of measurable and locally measurable operators associated with the von Neumann algebra. The main research questions are: in which cases such derivations are inner, and in which cases they are continuous.

Implementation of the research results.

Findings of the criteria for the interior of differentiation on the algebra of measurable functions were used in the project under the number DP150100920 “Schur decompositions and related problems in operator theory” to prove that non-zero differentiation exists on the algebra of measurable functions on a segment (Certificate of July 9, 2019, University of New South Wales, Australia). Application of scientific results made it possible to describe the largest subalgebra in the algebra of measurable functions on a segment onto which the ordinary derivative extends uniquely;

The continuity theorems for differentiations on algebras of measurable and locally measurable operators were used in the project under the number FL170100052 “Breakthrough methods for noncommutative calculus” to prove the continuity of differentiations on properly infinite algebras (Certificate of July 9, 2019, University of New South Wales, Australia). The application of scientific results made it possible to prove the interior of such differentiations;

The theorem on commutator estimates was used in the international project 16-11-10125 “Operator Equations in Function Spaces and Applications to Nonlinear Analysis” to reduce the proof of the interior of differentiations on subalgebras of the algebra of locally measurable operators to the consideration of differentiations defined on the whole algebra (Reference No. 9- 29-286 of August 27, 2019 of the Crimean Federal University, Russia). The application of scientific results made it possible to find criteria for the interior of differentiations on various algebras of measurable operators depending on the type of von Neumann algebra.

The outline of the thesis. The dissertation consists of an introduction, five chapters, a conclusion and bibliography. The volume of the dissertation is 188 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (Часть I; Part I)

1. Бер А. Ф., Чилин В. И., Сукочев Ф. А. Дифференцирования в коммутативных регулярных алгебрах. // Мат. Заметки **75** (2004) No. 3, 453–454. English translation: Derivations in Commutative Regular Algebras // *Math. Notes*, 75(2004), 418-419. (3. Scopus. IF=0.208).

2. Бер А. Ф., де Пагтер Б., Сукочев Ф. А. Некоторые замечания о дифференцированиях в алгебрах измеримых операторов. // Мат. Заметки **87** (2010) No. 4, 502–513. English translation: Notes on derivations on algebras of measurable operators // *Math. Notes*, **87** (2010) No. 4, 475–484. (3. Scopus. IF=0.384).

3. Бер А. Ф. Непрерывность дифференцирований на собственно бесконечных $*$-алгебрах τ-измеримых операторов. // Мат. Заметки **90** (2011) No. 5, 776–780. English translation: Continuity of derivations on properly infinite *-algebras of τ-measurable operators // *Math. Notes*, **90** (2011) No. 5-6, 758–762. (3. Scopus. IF=0.383).

4. Бер А. Ф., Левитина Г. Б., Чилин В. И. Дифференцирования со значениями в квазинормируемых бимодулях локально измеримых операторов. // Мат. труды, т.17 (2014), №1, 3-18. English translation: A. F. Ber, V. I. Chilin and G. B. Levitina Derivations with Values in Quasi-Normed Bimodules of Locally Measurable Operators // Siberian Adv. in Math., Vol. 25, No. 3, 2015, 169-170 (3. Scopus. IF=0.419)

5. Бер А. Ф. О дифференцированиях в коммутативных регулярных алгебрах. // Мат. труды, т.13 (2010), No. 1, 3-14. English translation: A.F. Ber. Derivations on Commutative Regular Algebras // Siberian Adv. in Math., Vol. 21, No. 3, 2011, 161-170 (3. Scopus. IF=0.531).

6. Бер А. Ф. Непрерывные дифференцирования на $*$-алгебрах τ-измеримых операторов - внутренние. // Матем. заметки, 93:5 (2013), 658-664. English translation: Continuous derivations on *-algebras of τ-measurable operators are inner // *Math. Notes*, **93** (2013) No. 5, 658–664. (3. Scopus. IF=0.384).

7. Ber A. F., Chilin V. I., Sukochev F. A. Non-trivial derivations on commutative regular algebras. // Extracta Math. **21** (2006), 107-147. (3. Scopus. IF=0.30).

8. Ber A. F., Chilin V. I., Sukochev F. A. Continuity of derivations of algebras of locally measurable operators. // Integr. Equ. Oper. Theory, **75** (2013), 527-557. (3. Scopus. IF=0.652).

9. Ber A. F., de Pagter B., Sukochev F. A. Derivations in algebras of operator-valued functions. // J. Operator Theory,66 (2011), No 2, 261–300. (3. Scopus. IF=0.681).

10. Ber A. F., Sukochev F. A. Commutator estimates in W^*-algebras. // Journal of Functional Analysis, 262 (2012), 537-568. (3. Scopus. IF=1.76).

11. Ber A. F., Sukochev F. A. Commutator estimates in W^*-factors. // Trans. Amer. Math. Soc., Vol.364, N.10, 2012, 5571-5587. (3. Scopus. IF=1.019).

12. Бер А. Ф., Сукочев Ф. А. Коммутаторные оценки в алгебрах фон Неймана. // Функц. анализ и его прил., 2013, том 47, выпуск 1, 62–63. English translation: Commutator estimates in von Neumann algebras // Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya, 2013, Vol. 47, No. 1, 77-79 (3. Scopus. IF=0.587).

13. Ber A. F., Chilin V. I. and Sukochev F. A. Continuous derivations on algebras of locally measurable operators are inner. // Proc. London Math. Soc.(3) 109 (2014) 65-89. (3. Scopus. IF=1.112).

II бўлим (Часть II; Part II)

14. Ber A. F., Chilin V. I. and Sukochev F. A. Derivations on Banach $*$-ideals in von Neumann algebras. // Vladikavkaz Math. J., 2018. Vol. 20. Issue 2, 23-28. (3. Scopus. IF=0.243).

15. Бер А. Ф. О наибольшем однозначном продолжении дифференцирования в коммутативной регулярной алгебре. // В сборнике "Spectral and evalution problems", 16-th Crimean Autumn Mathematical School-Symposium, Vol.16, Симферополь, 2006, 47-50.

16. Бер А. Ф. Алгебраическая независимость и дифференцирования в коммутативных регулярных алгебрах. // В сборнике тезисов докладов "Operator algebras and quantum probability", Ташкент, 2005, 46-47.

17. Бер А. Ф. Продолжение дифференцирований на алгебрах измеримых операторов. // В сборнике тезисов “Операторные алгебры и смежные проблемы”, Ташкент, 12-14 сентября 2012 г., 112-113.

18. Бер А. Ф. Замкнутость идеала tau-компактных операторов. // Тезисы докладов конференции с участием зарубежных учёных «Проблемы современной топологии и её приложения», Ташкент, 11-12 мая 2017 , 153-154.

19. Ber A. F., Chilin V. I. Commutative property for normal measurable operators. // Тезисы докладов конференции «Modern problems of dynamical systems and their applications», May 1-3, 2017, 228-229.

20. Ber A. F., Chilin V. I. Laterally complete commutative regular algebras. // Тезисы докладов конференции «Contemporary problems in mathematics and physics», October 6-10, 2017, 42-46.

21. Ber A. F., Chilin V. I. and Sukochev F. A. Automatic continuity of derivations on banach ideals in von Neumann algebras. // Abstracts of the conference "Mathematical Analysis and its Application to Mathematical Physics". 17-20 September 2018, Samarkand. 40-41.

22. Ber A. F., Chilin V. I. Derivations with values in non-commutative L_1-spaces. // Abstracts of Uzbek-Israel Joint International Conference. Bukhara-Samarkand-Tashkent. May 2019. 31-32.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди (22.11.2019 йил).

Босишга рухсат этилди: 25.11.2019 йил
Ҳажми 2,5. «Times New Roman»
гарнитурада рақамли босма усулида босилди.
Шартли босма табоғи 3.375. Адади: 100. Буюртма: № 2511-R

ИП ООО ALLRUSTPACK INDUSTRIAL SYSTEMS босмахонасида чоп этилди
100208, г.Ташкент, Чиланзарский р-н, DIYDOR 6 TOR KO'CHASI, 71-UY