

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI  
OLIV VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI**

**BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI**

**T.H.RASULOV, Z.N.HAMDAMOV, E.B.DILMURODOV**

**MATEMATIKADAN OLIMPIADA  
MASALALARI**



**Toshkent, "Navro'z" nashriyoti, 2016**

**UO`K: 515.4.7.9**  
**KBK: 67.12(5O'zb)7**  
**M47**

**T.H.Rasulov, Z.N.Hamdorov, E.B.Dilmurodov. Matematikadan olimpiada masalalari. O'quv-uslubiy qo'llanma. 2016 yil.**

**Taqrizchilar:**

**Durdiyev Durdimurod Qalandarovich** – *Buxoro davlat universiteti o'quv ishlari prorektori, fizika-matematika fanlari doktori, professor.*

**Jo'rayev Ilhom Muhitdinovich** – *Buxoro davlat universiteti "Matematika" kafedrasi dotsenti, fizika-matematika fanlari nomzodi.*

Qo'llanmada matematikadan olimpiada masalalarini yechish bo'yicha uslubiy ko'rsatmalar o'z aksini topgan. Olimpiada masalalari va testlarini yechish usullari hamda o'quvchilar mustaqil ishlashi uchun topshiriqlar berilgan. Bundan tashqari, olimpiada tarixi, 1991-2015 yillarda xalqaro matematika olimpiadasida tushgan masalalar va bir nechta muhim tengsizliklar keltirilgan. Qo'llanmadan o'rta umum ta'lim maktablari, akademik litsey, kasb-hunar kollejlari o'quvchilarni olimpiadalarga tayyorlashda foydalanish mumkin.

Mazkur qo'llanma Buxoro davlat universiteti fizika-matematika fakul'teti Kengashining qarori bilan nashrga tavsiya etilgan (2016 yil 7 apreldagi navbatdan tashqari majlis bayonnomasi).

**ISBN 978-9943-3824-9-7**

## KIRISH

Keyingi paytlarda Respublikamiz hukumati tomonidan umumta'lim maktablari, akademik litsey va kasb-hunar kollejlari o'quvchi yoshlarining bilim darajasini yanada yuksaltirish, ularning fan olimpiadalarida faol ishtirokini ta'minlash va sovrinli o'rinlarni egallashlariga imkon darajasida yordam berish, jahon miqyosidagi ilmiy salohiyati yuqori yoshlar qatoridan joy egallashlariga ko'maklashishga katta e'tibor qaratilmoqda. Buning natijasida mamlakatimizda har tomonlama uyg'un va barkamol rivojlangan, mustaqil fikrlaydigan, intellektual salohiyatga, chuqur bilim va zamonaviy dunyoqarashga ega, Vatanimizning taqdiri va kelajagi uchun mas'uliyatni o'z zimmasiga olishga qodir bo'lgan yosh avlod tarbiyalab voyaga yetkazilmoqda. Iqtidorli yoshlarning individual xususiyatlarini aniqlash va yanada rivojlantirish, ularning xalqaro fan olimpiadalarida ishtirokini ta'minlash O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2014 yil 19 fevraldagi PQ-2133-son Qarori bilan tasdiqlangan "Sog'lom bola yili" dasturiga kiritilganini ta'kidlab o'tamiz.

Agar o'quvchi, hech bo'lmaganda bir marta o'zi mustaqil ravishda birorta matematik masalani hal qilsa, u albatta, unitilmas hayajonli damlarni boshidan kechiradi va g'alaba nashidasini suradi. Bunday "kichik" g'alabalar, ayniqsa bolalik chog'ida yuz bersa, inson bu onlarni hayotining oxirigacha xotirasida saqlab qoladi.

O'quvchilar ustozlari bilan birgalikda birorta qiziqarli masalani hal etib, uni to'liq o'zlashtirib olganlaridan so'ng, mustaqil ravishda masala yechish, matematika bilan shug'ullanish xuddi tennis o'ynash yoki futbol o'ynash kabi maroqli bo'lishi mumkinligini anglashlari mumkin. Natijada, ajab emas, ular matematika bilan butun umr do'stlashib qolishsa, yoki hayotlarida matematikani o'zlariga kasb qilib olishsa, yoki matematika ko'p ishlatiladigan kasb egasi bo'lishsa!

Mazkur o'quv-uslubiy qo'llanmada matematika fani bo'yicha olimpiadada asosan Buxoro viloyat bosqichida tushgan masala va testlar tahlil qilingan. Avvalo olimpiada tarixi, xususan, O'zbekiston milliy jamoasining xalqaro matematika olimpiadalaridagi ishtiroki va yutuqlari bayon qilingan bo'lib, unda Buxoro yoshlarining yutuqlari alohida ta'kidlab o'tilgan. Bundan tashqari, O'zbekiston umumta'lim maktablarida tahsil olayotgan 7-8-sinf o'quvchilarining 2014-2015 yillarda Xalqaro matematika musobaqasida erishgan yutuqlari haqida batafsil ma'lumotlar berilgan. Mustaqillik yillarida xalqaro matematika olimpiadasida tushgan masalalar keltirilgan. Bundan tashqari, matematikadan olimpiada masalalarini yechida ko'p qo'llaniladigan muhim tengsizliklar isbotsiz bayon qilingan.

Albatta, olimpiada ishtirokchilarini muntazam tayyorlab borish, ularni olimpiada masala va testlari bilan tanishtirib turish hamda savodxonliklarini yanada oshirish uchun maxsus adabiyotlar, misol va masalalar to'plamlari mavjud. Ayniqsa yosh matematiklarni tarbiyalashda A.A'zamov va B.Haydarovlarning "Matematika sayyorasi", Y.Perelmanning "Qiziqarli matematika", M.Mirzaaxmedov va D.Sotiboldiyev "O'quvchilarni matematik

olimpiadalarga tayyorlash” va h.k. qo’llanmalarining ahamiyati katta. Mazkur qo’llanma sanab o’tilgan qo’llanmalardan farqli o’laroq, mualliflarning turli yillarda matematika fan olimpiadasining Buxoro viloyati bosqichida hakamlar hay’ati sifatida ishtiroki jaroyinida o’quvchilarda kuzatilgan kamchiliklarni bartaraf qilish nuqtai nazardan yozilgan bo’lib, unda olimpiada tarixi va Buxoro viloyat boshqichi bilan bog’liq masalalar ham o’z aksini topgan.

Mazkur qo’llanma quyidagi bo’limlardan tashkil topgan. Birinchi bo’lim “Olimpiada tarixi” deb nomlangan bo’lib, unda matematika bo’yicha fan olimpiadasining paydo bo’lish va rivojlanish tarixi bayon qilingan (Bunda olimlarning ismi sharifi o’z tilidagi kabi keltirilgan). Xususan, xalqaro matematika olimpiadasi, Bolqon matematika olimpiadasi, maktab o’quvchilari uchun xalqaro matematika musobaqalari hamda ularda O’zbekiston milliy jamoasining ishtiroki haqida ma’lumotlar keltirilgan. Bundan tashqari, olimpiadachilarga bir qator foydali maslahatlar bayon qilingan. Bu bo’limda keltirilgan ma’lumotlar asosan XMO ning rasmiy veb-sahifasi va O’zbekiston matematika olimpiadasining rasmiy veb-sahifasidan olingan. Ikkinchi bo’lim “Olimpiada masalalari” deb nomlangan bo’lib, u ikki qismdan: “Algebra” va “Geometriya” qism bo’limlaridan iborat. Har bir qism bo’limda asosan Buxoro viloyat bosqichida tushgan masalalardan namunaviy misollar yechib ko’rsatilgan hamda mustaqil ishlash uchun bir nechta topshiriqlar tavsiya qilingan. Bundan tashqari, turli yillarda Respublika boshqichida va xalqaro matematika olimpiadasida ishtirok qiluvchilarni tanlashda ishlatilgan masalalar hamda “Fizika, matematika va informatika” jurnalida chop qilingan olimpiada masalalari o’z aksini topgan. Uchinchi bo’lim “Olimpiada testlari” deb atalgan bo’lib, unda ham namunaviy testlar yechimi bilan, hamda mustaqil ishlash uchun bir qator testlar berilgan. To’rtinchi bo’lim “1991-2015 yillarda Xalqaro matematika olimpiadasida tushgan masalalar” deb nomlangan. Beshinchi bo’lim “Ajoyib tengsizliklar” deb nomlangan bo’lib, unda olimpiada masalalarini yechishda keng qo’llaniladigan bir nechta muhim tengsizliklar keltirilgan. Qo’llanma so’ngida matematika olimpiadasiga tayyorgarlik ko’rish uchun o’zbek, rus va ingliz tilidagi adabiyotlar to’plami va elektron resurs manbalari bayon qilingan.

Ushbu o’quv-uslubiy qo’llanma yoshlarimizning matematikaga qiziqishlarini uyg’otishga ozgina bo’lsa ham xizmat qilsa, mualliflar o’z maqsadlariga erishgan bo’lar edi.

Mualliflar ushbu qo’llanmani nashrga tayyorlashda qimmatli maslahatlarini ayamagan BuxDU o’quv ishlari prorektori, fizika-matematika fanlari doktori, professor D.Q.Durdiyevga va BuxDU “Matematika” kafedrasida dotsenti, fizika-matematika fanlari nomzodi I.M.Jo’rayevga o’z minnatdorchiliklarini bildiradilar.

Qo’llanma yuzasidan fikr-mulohaza va takliflaringizni Buxoro davlat universiteti “Matematika” kafedrasining **math\_bukhsu@mail.ru** elektron manziliga yuborishingizni so’raymiz.

## 1. OLIMPIADA TARIXI

**Matematik olimpiada** – bu mos ravishda maktab o'quvchilari orasida, akademik litsey va kasb-hunar kollejlari talabalari yoki oliy ta'lim muassasalari talabalari orasida nostandart matematik masalalarni yechish bo'yicha o'tkaziladigan fan musobaqasidir. “Odatdagi” misol va masalalardan farqli o'laroq “olimpiada” masalalari umumiy yechish algoritmiga ega bo'lmaydi. Bu turdagi har bir masalani yechish uchun alohida g'oya talab qilinib, maxsus bilimlarni talab qilmaydi, ya'ni ularni yechish uchun maktab, akademik litsey yoki kasb-hunar kollejlari hamda oliy ta'lim muassasalarida olingan bilimlar yetarli.

Quyida biz matematik olimpiadalarning kelib chiqish va rivojlanish tarixi haqida batafsil ma'lumotlar beramiz.

Yunonistonning eng baland tog'lari tizmasi “Olimp” deb ataladi. Tizmadagi eng baland cho'qqi 2917 metrgacha boradi. Qadimgi yunon mifologiyasida Olimp Zevs (xudolar otasi) boshchiligidagi xudolarning makoni hisoblangan. Shu yerda joylashgan Olimpiya shahrida eramizdan avvalgi 776-yildan boshlab har 4 yilda Zevs sharafiga Umumyunon tantanalari va musobaqalari o'tkazib turilgan va olimpiada o'yinlari deb nomlangan. Eramizning 394-yiligacha davom etgan bu an'ana asosida 1896-yildan boshlab har 4 yilda o'tkaziladigan umumjahon sport musobaqalari ham olimpiada o'yinlari deb atala boshlangan.

Matematik turnirlar va musobaqalar uzoq yillik tarixga ega. Masalan, kubik tenglamalarni yechish uchun Tartalya-Kardano formulasi kashf etilishi tarixi shunday turnirlar bilan bog'liq. 1530-yilda Nicolo Tartaglia (1500-1557) ikki turdagi, aniqrog'i  $x^3 + mx = n$  va  $x^3 + mx^2 = n$  ko'rinishdagi kubik tenglamalarni yecha olishini ma'lum qiladi. Keyinchalik bu Italyan matematigi Scipione del Ferro (1465-1526) bilan musobaqalashuviga sabab bo'ladi. Har ikkala ishtirokchi ma'lum miqdorda pul tikib, raqibiga bir nechta masala taqdim qilgan. 30 kun ichida qaysi ishtirokchi ko'p masala yechsa, g'olib ishtirokchi pulning hammasini olishga kelishgan. Tartaglia  $x^3 + mx = n$  ko'rinishdagi tenglamalarni olib, ularni umumiy usulda ishlagan. Fiore esa  $x^3 + mx^2 = n$  ko'rinishdagi tenglamalarni olib, ularni yechishda muammolarga duch kelgan. Natijada musobaqada Tartaglia yutib chiqqan. Gerolamo Kardano (1501-1576) esa kubik tenglamani  $x^3 + mx = n$  ko'rinishga keltirish usulini topadi. Keyinchalik Kardano Tartagliani  $x^3 + mx = n$  ko'rinishdagi kubik tenglamalarni yechish sirlarini ochishga ko'ndirgan. 1539-yilda Tartaglia Kardanoga sirni boshqa birovga aytmaslik va kubik tenglama haqida kitob yozsa natijalarni chop qilishga vaqt berish sharti bilan kubik tenglama yechish usulini aytgan. Biroz vaqt o'tgach Kardano Ferroning usulini o'rganib, 1545-yilda o'zining “Ars Magna” kitobida Ferroning usulini chop qilgan. Tartagliaga esa natijalarini chop qilish uchun 6 yil muhlat bergan. Kardano unga natijalarini chop qilmaslikga va'da bergan va uni bajarish maqsadida Ferroning natijalarini chop qilish bilan cheklangan. Shundan so'ng, Tartaglia Kardanoni musobaqalashishga chorlagan, Kardano esa buni rad etgan.

Kardanoning Lodovico Ferrari (1522-1565) ismli shogirdi bahslashishga rozi bo'lib, Tartagliadan kuchli ekanligini nomoyon qilgan. Shu tariqa Tartaglia ham obro'yidan ham daromadidan ayrilgan.

Masalalar yechishni, musobaqalashishni yaxshi ko'radigan, ammo zamonaviy matematika cho'qqilarini hali zabt eta olmaganlar nima qilishlari kerak? Bunday kishilar uchun fan olimpiadalarida qatnashib g'olib bo'lish, matematika cho'qqilarini zabt etishda dastlabki qadam vasifasini o'taydi. Ular uchun matematik olimlar, oliy o'quv yurtining o'qituvchilari va talabalari har yili yangi masalalar o'ylab topishadi va olimpiadalarga taklif etishadi.

Matematik olimpiadalar turli avlod vakillari bo'lgan matematiklar, o'quvchilar, yaqindagina olimpiada qatnashchilari bo'lgan talabalar, to'garak rahbarlari, muallimlar va yosh olimlar, oliy o'quv yurtlari pedagog-xodimlarining birgalikdagi bayrami bo'lib qoldi.

Olimpiadaning asosiy maqsadi birgina g'oliblarni aniqlash bo'lib qolmay, balki barcha qatnashchilarni masalalar bilan qiziqtirish, matematik to'garaklar mashg'ulotlariga muntazam qatnashishga, ma'ruzalar eshitishga, kitob bilan mustaqil ishlashga jalb qilishdir.

Matematika "olimpiya shohsupasi"ning eng yuqori pog'onasiga chiqishga ozchilikgina muvaffaq bo'la olishi barchaga ma'lum albatta. Bu muvaffaqiyat nafaqat alohida qobiliyatdan, balki ham tirishqoqlik, ham yangi masalaga tezda kirisha olish, fikrini sozlay olishdan dalolatdir. Olimpiada g'oliblari mukofotlar, faxriy yorliqlar, turli o'quv muassasalariga yo'llanmalar bilan taqdirlanadilar.

Olimpiadaning hamma chempionlari ham kelajakda yirik matematik olimlar bo'lishmagan, ammo, ham Respublikamizda, ham xorijda mashhur bo'lgan bir qator olimlarni sanash mumkin-ki, ularning fan yo'lidagi birinchi qadamlari olimpiada mukofotlari bilan yo'g'rilgan. Ular orasida turli avlodga mansub bo'lgan uch matematik: B.U.Arnold, Yu.U.Matichevskiy, B.M.Xarlamovlar bor. Ularning har biri XIX–XX asr bo'sag'asida qo'yilgan "Gilbert muammolari"dan birini yechish bilan shuhrat qozongan edi.

Fan olimpiadasi beshta bosqichdan iborat:

Birinchi bosqich–maktabda bo'lib o'tadigan olimpiadalar;

Ikkinchi bosqich–tuman va shahar olimpiadalari;

Uchinchi bosqich–viloyat olimpiadalari;

To'rtinchi bosqich–Respublika olimpiadalari;

Beshinchi (yakunlovchi) bosqich–xalqaro olimpiada.

Birinchi bosqich – maktab olimpiadalarida barcha xoxlovchi o'quvchilar qatnashishi mumkin bo'lsa, keying bosqichlar uchun avvalgi turlardagi g'oliblardan guruhlar tuzuladi.

Uchinchi bosqich – viloyat olimpiadasidan ancha avval maxsus guruh masalalarni to'play va o'ylay boshlaydilar. U ikki turda o'tkaziladi. Birinchi turda olimpiada qatnashchilariga 5 soatda yechish uchun mazmuni va qulaylik darajasi turlicha 5 ta masala taklif etiladi, bu masalalar maktab dasturidagi materiallarni bilishdan ham ko'proq fikrlashning qulay yo'lini topishdagi mahorat, odatdan

tashqari holatda mantiqan aniq mulohazalar yuritish qobiliyatini talab qiladi. Har bir masala uchun maksimum 10 ball beriladi (jami 50 ball). Ishlar tekshirib bo'lingach, masalalar muhokama qilinadi, eng yaxshi yechimlar va xarakterli xatolar tahlil etiladi. Bu jarayon, odatda, ma'ruza tarzida o'tadi. Har bir qatnashchi o'z ishini hay'at a'zolari bilan muhokama qilishi, o'zi yo'l qo'ygan kamchiliklarni aniqlashtirib olishi mumkin. Ikkinchi turda 40 ta test, 30 tasi javobi berilgan (ochiq test) va 10 tasi javobsiz (yopiq test) test topshiriqlariga 2 soat vaqt ajratilib, har bir to'g'ri javob 1.25 ball bilan baholanadi (jami 50 ball). 1-, 2-, 3-o'rinlarni egallagan ishtirokchilar to'rtinchi tur – respublika olimpiadasida qatnashish uchun tavsiya qilinadilar. Bundan tashqari, olimpiada so'ngida xalqaro matematika olimpiadasiga ishtirokchilarning dastlabki saralashini o'tkazish maqsadida tuzilgan yozma ish topshiradilar.

### **Xalqaro matematika olimpiadasi haqida**

Xalqaro matematika olimpiadasi (XMO, inglizcha IMO–International Mathematical Olympiad) – matematika fanidan o'quvchilar orasida har yili bo'lib o'tadigan musobaqa. U fan olimpiadalari orasida eng nufuzli va ko'p yillik tarixga ega musobaqadir.

Xalqaro matematika olimpiadasi ilk bor 1959 yilda Ruminiyaning Brashov shahrida bo'lib o'tgan. Bu olimpiadada Bolgariya, Vengriya, Polsha, Ruminiya, sobiq SSSR, GDR va Chexoslovakiya davlatlari jamoalari ishtirok etgan. Keyinchalik bu olimpiada geografiyasi kengayib borgan. Oxirgi yillardagi vaziyat qo'yidagicha:

49-XMO (2008 y., Madrid, Ispaniya) – 97 davlatdan 535 nafar ishtirokchi;

50-XMO (2009 y., Bremen, Germaniya) – 104 davlatdan 565 nafar ishtirokchi;

51-XMO (2010 y., Almati, Qozog'iston) – 96 davlatdan 517 nafar ishtirokchi;

52-XMO (2011 y., Amsterdam, Niderlandiya) – 101 davlatdan 564 nafar ishtirokchi;

53-XMO (2012 y., Mar-del-Plata, Argentina) – 100 davlatdan 548 nafar ishtirokchi;

54-XMO (2013 y., Santa-Marta, Kolumbiya) – 97 davlatdan 527 nafar ishtirokchi;

55-XMO (2014 y., Keyptaun, Janubiy Afrika Respublikasi) – 101 davlatdan 560 nafar ishtirokchi;

56-XMO (2015 y., Chiang Mai, Tailand)– 104 ta davlatdan 577 nafar ishtirokchi.

XMO individual musobaqa hisoblanib, unda har bir davlatdan 6 nafar o'quvchi, ilmiy rahbar va uning yordamchisidan iborat jamoa ishtirok etishi mumkin. O'quvchilar yoshi 20 dan oshmasligi va ular hech qanday oliy ta'lim muassasasida o'qimasligi lozim.

O'quvchilarga ikki kun ichida jami bo'lib 6 ta masala taklif etiladi (har kuni uchta masala). Har bir masala maksimal 7 ball bilan baholanadi, ya'ni o'quvchi ikki kun ichida maksimal 42 ball to'plashi mumkin. Masalalar nostandart xarakterga ega bo'lib, elementar matematikaning asosan geometriya, sonlar nazariyasi, algebra va kombinatorika kabi bo'limlaridan tanlab olinadi. Ular

formal ravishda murakkablik darajasi bo'yicha quyidagicha taqsimlanadi: birinchi va to'rtinchi masalalar nisbatan oson, ikkinchi va beshinchi masalalar o'rtacha, uchunchi va oltinchi masalalar esa murakkab.

Murakkab masalalar yechimi haqida quyidagi ma'lumotni keltirish mumkin: 2009 yilda bo'lib o'tgan 50-XMOda 104 davlatdan kelgan 565 nafar ishtirokchilardan faqat uchtasi uchunchi va oltinchi masalalarni yechishga muvaffaq bo'lishgan.

Aytib o'tish joizki, olimpiada nizomiga ko'ra, ko'pi bilan 50 foiz qatnashchilar medallar bilan taqdirlanishi belgilangan, bunda medallar qiymatiga qarab 1:2:3 nisbatda taqsimlanadi. Bundan tashqari, biror masalani to'liq yechgan, ammo medallarni qo'lga kiritmagan qatnashchilar rag'batlantiruvchi diplomlar (faxriy yorliqlar) bilan taqdirlanishi ko'zda tutilgan.

2007-2010 yillarda Vetnam, Ispaniya, Germaniyada va Qozog'istonda bo'lib o'tgan Xalqaro matematika olimpiadalarida 6 ta kumush va 10 ta bronza medallar egallandi. Shunday qilib, O'zbekiston o'quvchilari Xalqaro matematika olimpiadalarida 1997 yildan boshlab 2015 yilga qadar to'liq jamoa sifatida, jami bo'lib 14 marta ishtirok etib, 8 ta kumush, 25 ta bronza medallarni hamda 24 ta rag'batlantiruvchi diplomni qo'lga kiritganlar.

Xususan, 2010 yili bo'lib o'tgan 51-XMO da 96 davlatdan 517 nafar ishtirokchi qatnashgan va bu olimpiadada O'zbekiston milliy jamoasining 6 nafar o'quvchisi 4 ta kumush, 1 ta bronza medalga hamda 1 ta rag'batlantiruvchi diplomiga sazovor bo'lishdi. Natijada O'zbekiston milliy jamoasi 26-o'rinni egallagan.

Albatta, bunday natija Respublikamizning barcha hududlaridagi iqtidorli o'quvchilarni quvontirib, ularni yuksak olimpiada chuqqilarni zabt etishga chorladi.

Shuni aytish joizki, 2007 yilgacha Xalqaro matematika olimpiada g'oliblarining yashayotgan hududlari geografiyasi o'ta tor bo'lgan. Medallarning asosiy qismi Buxoro viloyati Qorako'l tumanidagi ixtisoslashtirilgan litsey – internat (hozirda bu litsey-internat BuxDU qoshidagi 3-son akademik litsey maqomini olgan) o'quvchilari tomonidan qo'lga kiritilgan edi. 2007 yildan boshlab esa g'oliblar qatoriga Samarqand, Namangan, Qashqadaryo va Navoiy viloyati o'quvchilari kirgan.

Xalqaro matematika olimpiadasi ishtirokchilarini tanlash 2009 yil 12 iyundan kuchga kirgan O'zbekiston Respublikasi Oliy va O'rta maxsus ta'lim vazirligining O'rta maxsus, kasb-hunar ta'limi Markazi, Xalq ta'limi Vazirligi, Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Davlat Test Markazi tomonidan tasdiqlangan "Akademik litseylar, kasb-hunar kollejlari va umumta'lim maktablari o'quvchilarining umumta'lim fanlari bo'yicha Respublika olimpiadalarini o'tkazish va xalqaro fan olimpiadalarini ishtirokchilarini tanlash to'g'risida Nizom"ida belgillangan tartib asosida ikki bosqichda amalga oshiriladi.

Respublika fan olimpiadasining III bosqichida umumta'lim fanlaridan 1-5 o'rinlarni egallagan akademik litsey va kasb-hunar kollejlarining 2-3 kurs o'quvchilari xalqaro fan olimpiadasida qatnashish uchun tanlovda ishtirok etishi ko'zda tutilgan.

Tanlangan O'zbekiston milliy jamoasini tayyorlash ilg'or davlatlar tajribalarini inobatga olgan holda tegishli maxsus dastur asosida har yilning iyun oyida olib boriladi. Tayyorlanish jarayonida eng yangi o'quv materiallar internet va boshqa manbaalardan olinib, o'quvchilar bilan birga muhokama qilinadi.

**1959-2015 yillarda o'tkazilgan 1-56-XMO lar haqida ma'lumotlar:**

- 1-XMO (1959 yil, Brashov, Buxarest, Ruminiya).
- 2-XMO (1960 yil, Sinaya, Ruminiya).
- 3-XMO (1961 yil, Vespren, Vengriya).
- 4-XMO (1962 yil, Cheske-Budeyovitse, Chexoslovakiya).
- 5-XMO (1963 yil, Varshava, Vrotslav, Polsha).
- 6-XMO (1964 yil, Moskva, Sobiq SSSR).
- 7-XMO (1965 yil, Berlin, Germaniya).
- 8-XMO (1966 yil, Sofiya, Bolgariya).
- 9-XMO (1967 yil, Tsetine, Yugoslaviya).
- 10-XMO (1968 yil, Moskva, Sobiq SSSR).
- 11-XMO (1969 yil, Buxarest, Ruminiya).
- 12-XMO (1970 yil, Kestxey, Vengriya).
- 13-XMO (1971 yil, Jilina, Chexoslovakiya).
- 14-XMO (1972 yil, Torun, Polsha).
- 15-XMO (1973 yil, Moskva, Sobiq SSSR).
- 16-XMO (1974 yil, Erfurt, Berlin, Germaniya).
- 17-XMO (1975 yil, Burgas, Sofiya, Bolgariya).
- 18-XMO (1976 yil, Lients, Avstriya).
- 19-XMO (1977 yil, Belgrad, Yugoslaviya).
- 20-XMO (1978 yil, Buxarest, Ruminiya).
- 21-XMO (1979 yil, London, Buyuk Britaniya).

**1980 yil Mongoliyada o'tkazilishi rejalashtirilgan XMO o'tkazilmagan.**

- 22-XMO (1981 yil, Vashington, AQSh).
- 23-XMO (1982 yil, Budapesht, Vengriya).
- 24-XMO (1983 yil, Parij, Fransiya).
- 25-XMO (1984 yil, Praga, Chexoslovakiya).
- 26-XMO (1985 yil, Yoytsa, Finlyandiya).
- 27-XMO (1986 yil, Varshava, Polsha).
- 28-XMO (1987 yil, Gavana, Kuba).
- 29-XMO (1988 yil, Kanberra, Avstraliya).
- 30-XMO (1989 yil, Braunshveyg, Germaniya).
- 31-XMO (1990 yil, Pekin, Xitoy Xalq Respublikasi).
- 32-XMO (1991 yil, Sigtuna, Shvetsiya).
- 33-XMO (1992 yil, Moskva, Rossiya).

- 34-XMO (1993 yil, Istambul, Turkiya).  
 35-XMO (1994 yil, Gonkong).  
 36-XMO (1995 yil, Toronto, Kanada).  
 37-XMO (1996 yil, Mumbay, Hindiston).  
 38-XMO (1997 yil, Mar-del-Plata, Argentina).  
 39-XMO (1998 yil, Taypey, Xitoy Respublikasi).  
 40-XMO (1999 yil, Buxarest, Ruminiya).  
 41-XMO (2000 yil, Tedjon, Janubiy Koreya).  
 42-XMO (2001 yil, Vashington, AQSh).  
 43-XMO (2002 yil, Glazgo, Buyuk Britaniya).  
 44-XMO (2003 yil, Tokio, Yaponiya).  
 45-XMO (2004 yil, Afina, Gretsiya).  
 46-XMO (2005 yil, Merida, Meksika).  
 47-XMO (2006 yil 6-18 iyul, Lyublyana, Sloveniya).  
 48-XMO (2007 yil 18-30 iyul, Xanoy, Vetnam).  
 49-XMO (2008 yil 10-22 iyul, Madrid, Ispaniya).  
 50-XMO (2009 yil 10-22 iyul, Bremen, Germaniya).  
 51-XMO (2010 yil 6-12 iyul, Ostona, Qozog'iston).  
 52-XMO (2011 yil 12-24 iyul, Amsterdam, Niderlandiya).  
 53-XMO (2012 yil 4-16 iyul, Mar-del-Plata, Argentina).  
 54-XMO (2013 yil 21-28 iyul, Santa-Marta, Kolumbiya).  
 55-XMO (2014 yil 3-13 iyul, Keyptaun, Janubiy Afrika Respublikasi).  
 56-XMO (2015 yil 4-16 iyul, Chiang Mai, Tailand).

**Rejalashtirilayotgan 57-60-XMOlar haqida ma'lumot:**

- 57-XMO (2016 yil, Gongkong).  
 58-XMO (2017 yil, Braziliya).  
 59-XMO (2018 yil, Ruminiya).  
 60-XMO (2019 yil, Buyuk Britaniya).

**Kuchli jamoalar.** XMOdagi kuchli jamoalar sifatida Xitoy Xalq Respublikasi, AQSh, Rossiya va Janubiy Koreya jamoalarini aytib o'tish mumkin. Oxirgi yillardagi g'olib jamoalarning ko'rsatkichi quyidagi jadvalda o'z aksini topgan (qavs ichida jamoa a'zolari to'plagan ballar yig'indisi ko'rsatilgan):

<b>Yil</b>	<b>Birinchi o'rin</b>	<b>Ikkinchi o'rin</b>	<b>Uchinchi o'rin</b>
2015	AQSh (185)	Xitoy Xalq Respublikasi (181)	Janubiy Koreya (156)
2014	Xitoy Xalq Respublikasi (201)	AQSh (193)	Xitoy Respublikasi (192)
2013	Xitoy Xalq Respublikasi (208)	Janubiy Koreya (204)	AQSh (190)
2012	Janubiy Koreya (209)	Xitoy Xalq Respublikasi (195)	AQSh (194)
2011	Xitoy Xalq Respublikasi (189)	AQSh (184)	Singapur (179)

2010	Xitoy Xalq Respublikasi (197)	Rossiya (169)	AQSh (168)
2009	Xitoy Xalq Respublikasi (221)	Yaponiya (212)	Rossiya (203)
2008	Xitoy Xalq Respublikasi (217)	Rossiya (199)	AQSh (190)
2007	Rossiya (184)	Xitoy Xalq Respublikasi (181)	Vetnam va Janubiy Koreya (168)
2006	Xitoy Xalq Respublikasi (214)	Rossiya (174)	Janubiy Koreya (170)
2005	Xitoy Xalq Respublikasi (235)	AQSh (213)	Rossiya (212)
2004	Xitoy Xalq Respublikasi (220)	AQSh (212)	Rossiya (205)
2002	Xitoy Xalq Respublikasi (212)	Rossiya (204)	AQSh (171)
2001	Xitoy Xalq Respublikasi (225)	Rossiya va AQSh (196)	
2000	Xitoy Xalq Respublikasi (218)	Rossiya (215)	AQSh (184)

**O'zbekiston milliy jamoasining 56–Xalqaro matematika olimpiadasida ishtiroki to'g'risida**

56 – Xalqaro matematika olimpiadasi 2015 yilning 4-16 iyul kunlari Tailandning Chiang Mai shahrida bo'lib o'tdi. Unda 104 ta davlatdan 577 nafar iqtidorli o'quvchilar ishtirok etdi. O'zbekiston milliy jamoasi ushbu nufuzli olimpiadada 3 yil tanaffusdan so'ng ishtirok etdi.

O'zbekiston Respublikasi O'rta maxsus, kasb-hunar ta'limi Markazi tomonidan tashkil etilgan ikki bosqichli saralash jarayoni natijasida quyidagi 6 nafar o'quvchidan O'zbekiston milliy jamoasi shakllandi:

Sardor Bazarbayev, Ruslanbek Ozodboyev, Xurshid Jo'rayev (O'zbekiston Milliy Universiteti qoshidagi S.X.Sirojiddinov nomidagi akademik litseyining o'quvchilari), Jamshid Yaxshiyev, Abbas Muhammedov (Buxoro davlat universiteti qoshidagi 3-son akademik litseyining o'quvchilari), G'ayrat Toshpulatov (Samarqand davlat universiteti qoshidagi akademik litseyining o'quvchisi).

Milliy jamoa rahbarlari etib O'zbekiston Jahon tillari universiteti dotsenti Shuhrat Ismailov va O'zbekiston Milliy Universiteti qoshidagi S.X.Sirojiddinov nomidagi akademik litsey o'qituvchisi Umid Raxmonov tayinlandilar.

Milliy jamoa O'zbekiston Milliy Universiteti qoshidagi S.X.Sirojiddinov nomidagi akademik litseyi bazasida maxsus tayyorgarlik ko'rdilar. Bunda olimpiada masalalarini yechishga oid eng zamonaviy usullarni o'rgatishga fizika-

matematika fanlari nomzodi, dotsent Shuhrat Ismailov, tajribali yosh murabbiylar, sobiq olimpiadachilar Umid Raxmonov, Xakimboy Hudayberganov, Sardor G'afforov va O'tkir Boltayevlar jalb qilindilar.

Yil mobaynida milliy jamoa a'zolari 2015 yil yanvar oyida Qozog'istonda bo'lib o'tgan Xalqaro Jautikov olimpiadasida, "Mathematical Reflections" (AQSh), "Crux Mathematicorum with Mayhem (Kanada)", "Kvant" (Rossiya) jurnallarida, Math Links nomli internet foydalanuvchilar matematik forumida (<http://www.mathlinks.ro>) taqdim etilgan nostandart masalalarni yechish bo'yicha bellashuvlarda ishtirok etib, o'z mahoratlarini oshirdilar.

2015 yil 4 iyul kuni jamoalarning ilmiy rahbarlaridan tashkil topgan Xalqaro hakamlar hay'ati o'z ishini boshladi. Ular musobaqaga taklif qilingan masalalarni tubdan o'rganib chiqib, ovozga qo'yish yo'li bilan 6 ta masalani tanladilar, baholash mezonlarini tasdiqladilar va topshiriq matnini ishtirokchilarning ona tillariga tarjima qildilar. Tanlangan masalalar matematikaning geometriya, algebra, sonlar nazariyasi hamda kombinatorika bo'limlaridan tanlangan bo'lib, ular murakkab harakterga ega bo'ldi.

2015 yil 9 iyul kuni olimpiadaning ochilish marosimi, 10-11 iyul kunlari esa bevosita matematik musobaqa bo'lib o'tdi. Unda har kuni 4,5 soat vaqt ichida 3 ta masalani yechish ko'zda tutilgan. Har bir masalaning to'liq yechimiga 7 ball ajratildi. 12-13 iyul kunlari jamoalarning rahbarlari o'z o'quvchilarining ishlarini tasdiqlangan baholash mezonlari negizida ko'rib chiqdilar va xalqaro ekspertlar oldida himoya qildilar. Umumiy kelishuvdan keyingina o'quvchilarning ishlari baholandi. Natijalar 14 iyul kuni xalqaro hay'at yig'ilishida tasdiqlandi.

2015 yilgi XMODA sovrinlarning ballar bo'yicha taqsimoti quyidagicha bo'ldi:

39 ta oltin medal: 26-42 ballar;

100 ta kumush medal: 19-25 ballar;

143 ta bronza medal: 14-18 ballar;

126 ta rag'batlantiruvchi diplom.

56-Xalqaro matematika olimpiadasida O'zbekiston milliy jamoasi a'zolari Sardor Bazarbayev, Jamshid Yaxshiyev, Abbos Muhammedovlar bronza medallarni, Ruslanbek Ozodboyev, Xurshid Jo'rayevlar esa rag'batlantiruvchi diplomlarni qo'lga kiritdilar. Uch yil tanaffusdan so'ng olingan bu natijani yaxshi deb baholash mumkin.

Aytish joizki, taqdim etilgan sonlar nazariyasiga oid ikkinchi masalani to'liq yechgan ishtirokchilar soni 31 nafarni, funksional tenglamaga oid beshinchi masalani esa to'liq yechgan ishtirokchilar soni esa 30 nafarni tashkil etgani ma'lum bo'ldi. Shu ishtirokchilar ichida O'zbekiston milliy jamoasi a'zolaridan Sardor Bazarbayev va Jamshid Yaxshiyevlar borligini ta'kidlab o'tamiz.

Xulosa qilib aytganda O'zbekiston milliy jamoasi 1997 yildan boshlab 2015 yilgacha Xalqaro matematika olimpiadalarida 8 ta kumush, 25 ta bronza medallarni hamda 24 ta faxriy yorliqni qo'lga kiritganlar.

O'zbekiston milliy jamoasiga 2006 yildan hozirgi kunga qadar O'zbekiston Jahon tillari universiteti dotsenti Shuhrat Ismailov ilmiy rahbarlik qilib kelmoqda.

**Quyidagi jadvalda O'zbekiston milliy jamoasi a'zolarining qo'lga kiritgan yutuqlari keltirilgan:**

Yil	Ishtirokchi	M1	M2	M3	M4	M5	M6	Jami	Reyting		Sovrinlar
									Abs.	Nisb.	
2015	Sardor Bazarbaev	0	7	1	7	1	0	16	183	68,40%	Bronza medali
2015	Khurshid Juraev	1	0	0	7	1	0	9	365	36,81%	Faxriy yorliq
2015	Abbos Muhammedov	4	2	0	7	1	0	14	257	55,56%	Bronza medali
2015	Ruslanbek Ozodboev	1	0	0	7	1	0	9	365	36,81%	Faxriy yorliq
2015	Gayrat Toshpulatov	0	0	0	2	0	0	2	508	11,98%	
2015	Jamshid Yakshiev	0	0	0	7	7	0	14	257	55,56%	Bronza medali
2011	Mukhayyo Akhmadova	6	0	1	1	3	1	12	321	43,16%	
2011	Jasurbek Berdikobilov	7	0	0	7	0	1	15	282	50,09%	Faxriy yorliq
2011	Sardor Gafforov	7	0	0	0	7	0	14	303	46,36%	Faxriy yorliq
2011	Zarif Ibragimov	1	0	1	2	1	0	5	450	20,25%	
2011	Javlon Isomurodov	7	0	2	0	7	0	16	253	55,24%	Bronza medali
2010	Jafar Abdurahimov	7	7	0	7	0	0	21	106	79,89%	Kumush medali
2010	Ibrokhimbek Akramov	7	7	0	7	0	0	21	106	79,89%	Kumush medali
2010	Jasurbek Bahramov	0	1	0	7	0	0	8	402	23,18%	Faxriy yorliq
2010	Zarif Ibragimov	7	7	0	7	0	0	21	106	79,89%	Kumush medali
2010	Umidakhon Juraeva	7	7	0	7	0	0	21	106	79,89%	Kumush medali
2010	Azizkhon Nazarov	6	7	0	7	0	0	20	152	71,07%	Bronza medali
2009	Gulomjon Abdurashitov	1	6	0	5	0	0	12	296	47,70%	

Yil	Ishtirokchi	M1	M2	M3	M4	M5	M6	Jami	Reyting		Sovrinlar
									Abs.	Nisb.	
2009	Ibrokhimbek Akramov	0	7	0	5	0	0	12	296	47,70%	Faxriy yorliq
2009	Jasurbek Bahramov	0	0	0	5	0	0	5	429	24,11%	
2009	Azizkhon Nazarov	3	7	0	6	0	0	16	233	58,87%	Bronza medali
2009	Abror Pirnapasov	7	6	0	2	1	0	16	233	58,87%	Bronza medali
2009	Diyora Salimova	7	7	1	6	3	0	24	130	77,13%	Kumush medali
2008	Alisher Eshonkulov	7	7	0	4	0	0	18	186	65,36%	Bronza medali
2008	Farhod Haydarov	7	7	0	4	0	0	18	186	65,36%	Bronza medali
2008	Elbek Kurbonov	3	4	0	4	0	0	11	320	40,26%	
2008	Abror Pirnapasov	1	6	0	4	0	0	11	320	40,26%	
2008	Sherzod Safojev	7	7	0	4	0	0	18	186	65,36%	Bronza medali
2008	Diyora Salimova	7	7	0	4	0	0	18	186	65,36%	Bronza medali
2007	Bahriddin Abdiev	0	7	0	7	0	0	14	226	56,65%	Bronza medali
2007	Utkir Boltaev	3	7	0	7	5	0	22	93	82,27%	Kumush medali
2007	Rustam Bosimov	0	2	0	7	1	0	10	322	38,15%	Faxriy yorliq
2007	Hamrozjon Chuyanov	3	7	0	7	1	0	18	145	72,25%	Bronza medali
2007	Alisher Eshonkulov	0	0	0	7	1	0	8	365	29,87%	Faxriy yorliq
2007	Ozod Zoyirov	1	7	0	7	1	0	16	171	67,24%	Bronza medali
2006	Umid Azimov	7	0	0	7	0	0	14	254	49,09%	Faxriy yorliq
2006	Utkir Boltaev	7	1	0	7	2	0	17	150	70,02%	Bronza medali
2006	Javlonbek Bozorov	7	1	0	7	0	0	15	189	62,17%	Bronza medali

Yil	Ishtirokchi	M1	M2	M3	M4	M5	M6	Jami	Reyting		Sovrinlar
									Abs.	Nisb.	
2006	Anvar Ibrahimov	0	0	0	2	0	0	2	459	7,85%	
2006	Jasur Kuchkarov	4	0	1	7	1	0	13	291	41,65%	Faxriy yorliq
2006	Olimjon Sadinov	0	0	0	7	0	0	7	408	18,11%	Faxriy yorliq
2004	Shohruh Holmatov	0	7	0	5	0	0	12	281	42,27%	Faxriy yorliq
2004	Zafar Jumaev	7	5	0	7	4	0	23	124	74,64%	Bronza medali
2004	Afzal Qulmurodov	0	0	0	0	0	0	0	469	3,51%	
2004	Jalol Qurbonov	7	5	0	0	4	0	16	229	52,99%	Bronza medali
2004	Sobit Sobirov	7	1	0	0	4	0	12	281	42,27%	Faxriy yorliq
2004	Bekzod Tillaev	7	1	0	7	1	0	16	229	52,99%	Bronza medali
2003	Maksim Bulatov	2	1	0	1	0	0	4	363	20,61%	
2003	Shohruh Holmatov	0	0	0	3	0	0	3	386	15,57%	
2003	Aziz Jurakulov	0	5	0	7	1	0	13	197	57,02%	Bronza medali
2003	Doniyor Nafasov	0	7	0	7	7	0	21	83	82,02%	Kumush medali
2003	Jalol Qurbonov	0	0	0	7	0	0	7	320	30,04%	Faxriy yorliq
2003	Sherhon Sirojiddinov	0	1	0	0	0	0	1	427	6,58%	
2002	Khamza Davletov	0	6	1	0	1	0	8	308	35,77%	
2002	Aziz Jurakulov	0	7	0	4	1	0	12	249	48,12%	Faxriy yorliq
2002	Doniyor Nafasov	0	6	0	1	1	0	8	308	35,77%	
2002	Aleksey Pak	6	0	1	1	1	0	9	294	38,70%	
2002	Shohruh Ruzikulov	0	6	0	4	1	0	11	266	44,56%	

Yil	Ishtirokchi	M1	M2	M3	M4	M5	M6	Jami	Reyting		Sovrinlar
									Abs.	Nisb.	
2002	Farruh Shahidi	0	7	0	4	1	0	12	249	48,12%	Faxriy yorliq
2001	Khamza Davletov	0	7	0	0	2	0	9	262	44,70%	Faxriy yorliq
2001	Zulfiddin Kamolov	7	0	1	0	7	4	19	121	74,58%	Bronza medali
2001	Nozim Komilov	2	0	0	7	4	0	13	199	58,05%	Bronza medali
2001	Umiddjon Radjabov	0	7	1	2	7	0	17	140	70,55%	Bronza medali
2001	Umid Rakhmonov	7	7	1	1	7	0	23	73	84,75%	Kumush medali
2001	Otabek Samatov	0	2	0	0	7	1	10	243	48,73%	Faxriy yorliq
2000	Zulfiddin Kamolov	7	7	0	1	0	2	17	138	70,22%	Bronza medali
2000	Nozim Komilov	7	0	0	1	0	0	8	287	37,83%	Faxriy yorliq
2000	Umid Rakhmonov	7	6	0	0	0	5	18	130	71,96%	Bronza medali
2000	Artur Sharipov	7	0	0	0	2	0	9	260	43,70%	Faxriy yorliq
2000	Murodjon Umarov	7	1	0	1	0	0	9	260	43,70%	Faxriy yorliq
2000	Dmitry Zanin	7	1	0	1	0	0	9	260	43,70%	Faxriy yorliq
1999	Bekhzod Aliyev	2	2	2	2	1	1	10	248	44,99%	
1999	Umriuzok Ganiyev	2	1	0	2	3	0	8	292	35,19%	
1999	Bekzod Jolbekov	2	0	0	2	0	0	4	394	12,47%	
1999	Umid Rakhmonov	1	1	0	3	1	0	6	344	23,61%	
1999	Murodjon Umarov	1	0	1	2	1	1	6	344	23,61%	
1999	Shukhrat Yakubov	4	0	0	2	1	1	8	292	35,19%	

Yil	Ishtirokchi	M1	M2	M3	M4	M5	M6	Jami	Reyting		Sovrinlar
									Abs.	Nisb.	
1997	Odiljon Sooltonov	0	3	1	1	7	0	12	258	44,01%	Faxriy yorliq
1997	Turgun Tokhirov	1	0	0	0	7	0	8	322	30,07%	Faxriy yorliq
1997	Kodir Turakhonov	0	1	0	0	2	0	3	391	15,03%	

Bunda M1-M6 lar masalalarning tartib raqamini, Abs. – absolyut reyting, Nisb. – nisbiy reytingni bildiradi. Ishtirokchilarning familiyasi va ismi rasmiy veb-sahifada qanday yozilgan bo'lsa, shunday qoldirishga qaror qildik.

Yutuqlari yuqoridagi jadvalda berilgan ishtirokchilardan Jamshid Yaxshiyev, Abbas Muhammedov, Sardor G'afforov, Javlon Isomurodov, Azizxon Nazarov, Abror Pirnapasov, Elbek Qurbonov, Sherzod Safoyev, O'tkir Boltayev, Hamrozjon Cho'yanov, Alisher Eshonqulov, Ozod Zoirov, Umid Azimov, Javlonbek Bozorov, Jasur Qo'chqorov, Zafar Jumayev, Jalol Qurbonov, Sobit Sobirov, Bekzod Tillayev, Aziz Jo'raqulov, Doniyor Nafasov, Shohruh Jo'raqulov, Zulfiddin Kamolov, Umid Raxmonov, Murodjon Umarov, Umriuzoq G'aniyevlar Buxoro yoshlari vakillari ekanligini mamnuniyat bilan eslatib o'tamiz.

Odatda olimpiadada bir nechta sovrinli o'rinlar bo'ladi (masalan, 5 ta birinchi o'rin, 15 ta ikkinchi o'rin, 25 ta uchinchi o'rin). Respublika fan olimpiadasida faxrli birinchi o'rinni egallagan ishtirokchilar mos yo'nalish bo'yicha Respublikamizdagi istalgan oliy o'quv yurtiga to'g'ridan-to'g'ri davlat granti asosida talabalikka qabul qilinadilar.

2010 yilda Qozog'istonda bo'lib o'tgan XMOda kumush medal sohibasi bo'lgan O'zbekiston milliy jamoasi a'zosi Umidaxon Jo'rayeva 2011 yil Zulfiya nomidagi davlat mukofoti laureati bo'lgan.

XMOda 2008 yilda bronza medali, 2009 yilda esa kumush medali sohibasi bo'lgan Diyora Salimova 2010 yilda yuqori mukofotga loyiq deb topilgan.

Ma'lumki, xalqaro matematika olimpiadasining ko'plab sobiq g'oliblari va dunyoning bir qator iqtidorli talabalari tanlov asosida Germaniyaning Bremen shahrida joylashgan Bremen Yakobi universitetida talabalikka qabul qilinadilar. Bu universitetda Xudoyor Mamayusupov (PhDni tugatgan), Orif Ibragimov (magistraturani tugatgan), Rustam Turdibayev (magistraturani tugatgan), Diyora Salimova (bakalavriatni tugatgan), Nasiba Zokirova (bakalavriatni tugatgan) lar tahsil olgan, Ibrohimbek Akramov esa hozirda shu universitetning magistraturasida tahsil olmoqda.

## **Bolqon Matematika Olimpiadasi**

Bolqon Matematika Olimpiadasi (BMO) – Bolqon mintaqasi davlatlaridagi maktablarda tahsil oladigan o‘quvchilar uchun har yili o‘tkazilib turiladigan nufuzli matematika musobaqasidir. Oxirgi yillarda bu musobaqalarga mehmon sifatida Evroosiyoning boshqa mintaqalaridagi davlat vakillari ham taklif qilinmoqda.

### **Hozirgi kunga qadar jami 32 ta BMO o‘tkazilgan:**

- 1-BMO (1984 yil, Afina, Gretsiya).
- 2-BMO (1985 yil, Sofiya, Bolgariya).
- 3-BMO (1986 yil, Buxarest, Ruminiya).
- 4-BMO (1987 yil, Afina, Gretsiya).
- 5-BMO (1988 yil, Nikosiya, Kipr).
- 6-BMO (1989 yil, Yugoslaviya).
- 7-BMO (1990 yil, Sofiya, Bolgariya).
- 8-BMO (1991 yil, Konstantsa, Ruminiya).
- 9-BMO (1992 yil, Afina, Gretsiya).
- 10-BMO (1993 yil, Nikosiya, Kipr).
- 11-BMO (1994 yil, Novi Sad, Yugoslaviya).
- 12-BMO (1995 yil, Plodiv, Bolgariya).
- 13-BMO (1996 yil, Bakay, Ruminiya).
- 14-BMO (1997 yil, Kalambaka, Gretsiya).
- 15-BMO (1998 yil, Nikosiya, Kipr).
- 16-BMO (1999 yil, Ohrid, Makedoniya Respublikasi).
- 17-BMO (2000 yil, Kishinyov, Moldova).
- 18-BMO (2001 yil, Belgrad, Yugoslaviya).
- 19-BMO (2002 yil, Antaliya, Turkiya).
- 20-BMO (2003 yil, Tirana, Albaniya).
- 21-BMO (2004 yil, Pleven, Bolgariya).
- 22-BMO (2005 yil, Iasi, Ruminiya).
- 23-BMO (2006 yil, Agros, Kipr).
- 24-BMO (2007 yil, Rodes, Gretsiya).
- 25-BMO (2008 yil, Ohrid, Makedoniya Respublikasi).
- 26-BMO (2009 yil, Kragujevas, Serbiya).
- 27-BMO (2010 yil, Kishinyov, Moldoviya).
- 28-BMO (2011 yil, Iasi, Ruminiya).
- 29-BMO (2012 yil, Antaliya, Turkiya).
- 30-BMO (2013 yil, Agros, Kipr).
- 31-BMO (2014 yil, Pleven, Bolgariya).
- 32-BMO (2015 yil, Afina, Gretsiya).

### **O‘zbekiston maktab o‘quvchilarning 2014-2015 yillardagi Xalqaro matematika musobaqasida ishtiroki to‘g‘risida**

2014 yilning 21-26 iyul kunlari Koreya Respublikasining Tedjon shahrida maktab o‘quvchilari orasida Xalqaro matematika musobaqasi bo‘lib o‘tdi.

Mazkur nufuzli musobaqasida 31 ta davlatdan 600 nafarga yaqin iqtidorli o'quvchilar ishtirok etdi.

Musobaqaning asosiy maqsadlari quyidagilardan iborat:  
iqtidorli o'quvchilar uchun matematikadan xalqaro nufuzdagi tanlovni tashkil etish;

iqtidorli o'quvchilarning yuqori darajali intellektual qobiliyatlarini rivojlantirishga qaratilgan matematika o'qitishning metodikalarini takomillashtirish;

ishtirokchi davlatlar o'quvchilariga matematikadan bilim va malakalari almashinuvlariga imkoniyatlar yaratish;

xalqaro standartlarga muvofiq ta'lim muassasalarining o'quv rejaları va dasturlarini yangilash.

2014 yil Xalqaro matematika musobaqasi tashkiliy qo'mitasi O'zbekiston milliy jamoasini ilk bor ishtirok etish uchun rasman taklif etdi.

O'zbekiston Respublikasi Xalq ta'limi vazirligi tomonidan «Bilimlar bellashuvi» musobaqasining viloyat bosqichi g'oliblari orasida maxsus ikki bosqichli tanlov uyushtirildi va quyidagi tarkida eng iqtidorli o'quvchilardan iborat bo'lgan terma jamoa shakllantirdi:

1. Sardor Saitqulov – Samarqand viloyati Bulung'ur tumani 15-sonli umumta'lim maktabining 7-sinf o'quvchisi.

2. Jasurbek Imomov – Farg'ona viloyati Buvayda tumani 2-sonli ixtisoslashtirilgan maktab-internati 7-sinf o'quvchisi.

3. Yulduz Neymatova –Qashqadaryo viloyati Kitob tumani 1-sonli ixtisoslashtirilgan maktab-internati 8-sinf o'quvchisi.

4. Davrbek Oltiboyev – Buxoro viloyati Olot tumani 31-sonli ixtisoslashtirilgan maktab-internati 8-sinf o'quvchisi.

Milliy jamoaga 40 kun mobaynida Avloniy nomidagi malaka oshirish instituti bazasida matematik olimlar ishtirokida maxsus mashg'ulotlar tashkil etildi. Bunga Respublikamiz olimlari tomonidan yaratilgan iqtidorli o'quvchilarning qobiliyatlarini yanada yuksaltirish, ularni fan olimpiadalari va musobaqalarga tayyorlash bo'yicha ilmiy asoslangan va natijalarni kafolatlaydigan metodikalar qo'llanilganligini qayd etish joyiz.

Jumladan, uyushtirilgan mashg'ulotlarda o'quvchilarga murakkabligi yuqori bo'lgan algebra, geometriya, sonlar nazariyasi, matematik mantiq, kombinatorika va to'plamlar nazariyasiga oid masalalarni yakka-tartibda va jamoa tarkibida yechishning eng ilg'or usullari o'rgatildi.

2014 yil 23 iyul kuni O'zbekiston milliy jamoasi Tedjon shahrida musobaqaning individual va jamoaviy bellashuvlarida qatnashdilar.

Xalqaro hay'at tomonidan individual turga jami bo'lib 15 ta masala, jamoaviy turga esa 10 masala taqdim etildi.

Individual bellashuvda Jasurbek Imomov kumush medalni, Yulduz Neymatova va Davrbek Oltiboyevlar yechimlarning o'ta sifatli bajarganligini tasdiqlovchi sertifikatlarni qo'lga kiritdilar.

Jamoalar bellashuvida barcha 4 nafar o‘quvchilarimiz 10 ta masaladan 8 tasini yechib, 2-darajali diplomni egalladilar va musobaqaning medallariga sazovor bo‘ldilar.

Yilda bir marta turli davlatlarda an’anaviy tarzda o‘tkaziladigan Xalqaro matematika musobaqasi 2015 yilning 27 iyulidan 1 avgustiga qadar Xitoy Xalq Respublikasining Chanchun shahrida bo‘lib o‘tdi. Unda 29 ta davlatdan 627 nafar o‘quvchilar ishtirok etdi.

Musobaqada qatnashadigan O‘zbekiston milliy jamoasini saralash maqsadida 2001 yil 1 avgustdan keyin tug‘ilgan, “Bilimlar bellashuvi”ning tuman (shahar) bosqichida 1-5-o‘rinlarni egallagan 300 nafardan ortiq 6-7-8 sinf o‘quvchilari orasida ikki bosqichli tanlov o‘tkazildi. Tanlov natijalariga ko‘ra quyidagi 4 nafar g‘olib o‘quvchilardan milliy jamoa shakllandi:

1. To‘raev Jahongir – Samarqand viloyati, Kattaqo‘rg‘on shahri, 17-sonli IDUM 8-sinf o‘quvchisi;
2. Sayliev Abbas – Buxoro viloyati, Qorako‘l tumani, 1-sonli IDUM 8-sinf o‘quvchisi;
3. Murodullaev Saydali – Qashqadaryo viloyati, Qarshi shahri, 2-sonli DIMI 7-sinf o‘quvchisi;
4. Chestnov Robert– Toshkent shahri, 50-sonli IDUM 8-sinf o‘quvchisi.

2015 yilning iyun-iyul oylarida shakllangan milliy jamoa a‘zolariga A.Avloniy nomidagi xalq ta’limi xodimlarini qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirish markaziy institutida maxsus mashg‘ulotlar tashkil etildi.

Xalqaro matematika musobaqasi ikki bosqichda o‘tkazildi: shaxsiy bellashuv va jamoalar orasida bellashuv. Shaxsiy bellashuvga 15 ta masala taqdim etildi. Shaxsiy bellashuv natijalariga ko‘ra barcha o‘quvchilarimiz g‘olib deb topilib, To‘rayev Jahongir – kumush medal bilan, Sayliyev Abbas – kumush medal bilan, Murodullayev Saydali – fahriy yorliq bilan, Chestnov Robert— fahriy yorliq bilan taqdirlandilar.

Jamoalar bellashuvida birgalikda yechish uchun 10 ta masala taqdim etildi. Ikkita bellashuv natijasida to‘plangan ballarni inobatga olib jamoalar reytingi tuzildi. Natijada umumiy hisobda O‘zbekiston milliy jamoasi ikkinchi o‘rinni egallab, kubok bilan taqdirlandi.

### **Olimpiadachiga maslahatlar**

1. Topshiriqni olganiningizda barcha masalalar shartini o‘qib chiqing va ularni qaysi ketma-ketlikda yechishingizni aniqlang. Ko‘pincha masalalar murakkablik bo‘yicha o‘sish tartibida joylashganligini inobatga oling.
2. Agar masala sharti, fikringizcha, bir nechta turli talqinga ega bo‘lsa, hay‘at a‘zolariga murojaat qiling. O‘zingiz uchun turli talqinlarda eng osonini tanlamasdan, hakamga savolingiz bilan yozma ravishda murojaat qiling. Bunda savolni shunday qo‘yish kerakki, tegishli javobni bir yoki ikki so‘z bilan ifodalash imkoniyati bo‘lsin (masalan “ha” yoki “yo‘q” ko‘rinishda).

3. Masalaning juda oson yechilishi shubhali holat hisoblanadi, bunda siz yo masala shartini noto‘g‘ri tushungan bo‘lishingiz mumkin, yoki biror joyda xato qilgan bo‘lishingiz mumkin.
4. Agar masalaning yechimi chiqmasa, uni soddalashtirishga harakat qiling (kichikroq sonlarni oling, xususiy hollarni qarang va h.k.) yoki uni “teskarisidan” yeching, yoki sonlarni harflar bilan almashtiring, va h.k.
5. Agar biror tasdiqning to‘g‘ri yoki noto‘g‘ri ekanligini aniqlashga qiynalsangiz, ketma-ket ravishda dastlab uni to‘g‘riligini, keyin esa noto‘g‘riligini isbotlashga harakat qiling va h.k. (A.N.Kolmogorov maslahati).
6. Bitta masala atrofida “aylanib yurmang”: e’tiboringizni uzib, umumiy holatni baholang. Agar kichik bo‘lsa ham muvaffaqiyatlarga erishgan bo‘lsangiz, u holda davom ettiring. Agar fikringiz baribir aylana bo‘yicha “yursa”, vaqtincha boshqa masalaga o‘ting.
7. Agar charchasangiz, bir necha minut dam oling (masalan, deraza oynasiga yoki biror nuqtaga qarang).
8. Yechimning har qadami oson bo‘lsa ham muhim qadamlarni ajratib, ularni alohida matematik hukm yoki lemma ko‘rinishda yozishga harakat qiling. Bu narsa masala tekshirilishini va tarjima qilishni osonlashtiradi.
9. Formulalarni raqamlashga va yechimni yozganingizda bu raqamlarga murojaat qilishga harakat qiling. Matematikada qabul qilingan simvollardan (belgilardan) foydalaning. Bu narsa masalani tekshirilishini va tarjima qilishni osonlashtiradi.
10. Sifatli va to‘g‘ri bajarilgan chizma – geometrik masalaning yechimining “yarmi” hisoblanadi.
11. Ayrim hisob-kitoblar yordamida yechiladigan geometrik masalalar yechimi chiqmasa, “oxirgi” natijasini formula ko‘rinishda yozishga harakat qiling va bu formulani keltirish yo‘llarini izlang.
12. Biror kitobda siz ko‘rgan matematik tasdiqni (ayniqsa nomli bo‘lsa) isbotlamang. Agar bu matematik tasdiq birorta olimpiadada uchragan bo‘lsa, u olimpiada nomini keltirib, isbotini sxematik tarzda bering. Bu holatlarda “ma’lumki” yoki “ravshanki” so‘zlarini ishlatang.
13. Masalani yechsangiz, boshqa masalaga o‘tmasdan uni tezda rasmiylashtiring. Bu narsa yechimning to‘g‘riligini aniqlashtirishga yordam beradi va e’tiboringizni boshqa masalalarga tayyorlaydi.
14. Yechimni topshirishdan oldin, uni “o‘zbek tilini bilmaydigan tekshiruvchilar nigohida” qarab chiqing. Yechimingizni tushunish osonmikan?

## 2. OLIMPIADA MASALALARI.

### 2.1. ALGEBRA

1.  $x_{n+1} = \lambda x_n + y_n$ ,  $y_{n+1} = \lambda y_n - x_n$ ,  $\lambda \neq 0$  bo'lsin. Agar  $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$  bo'lsa, u holda  $x_n^2 + y_n^2 \rightarrow \infty$  ekanligini isbotlang.

$$\text{Isbot: } \begin{cases} x_{n+1} = \lambda x_n + y_n \\ y_{n+1} = \lambda y_n - x_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{n+1}^2 = \lambda^2 x_n^2 + 2\lambda x_n y_n + y_n^2 \\ y_{n+1}^2 = \lambda^2 y_n^2 - 2\lambda x_n y_n + x_n^2 \end{cases} \Rightarrow$$
$$x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = \lambda^2 (x_n^2 + y_n^2) + x_n^2 + y_n^2$$
$$x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = (x_n^2 + y_n^2)(\lambda^2 + 1)$$

bu yerdan  $x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 > x_n^2 + y_n^2$  ekanligi ko'rinadi.

Aytaylik,  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x_n^2 + y_n^2) = a$  bo'lsin. U holda  $a = a(\lambda^2 + 1)$ ;  $\lambda^2 + 1 = 1$ ;

$\lambda = 0$  bo'lar edi. Lekin bu  $\lambda \neq 0$  shartga zid. Demak,  $x_n^2 + y_n^2 \rightarrow \infty$ .

2. Tekislikda qizil rangli  $A_1, A_2, \dots, A_n$  va ko'k rangli  $B_1, B_2, \dots, B_n$  nuqtalar berilgan. Ixtoyoriy ikkita ko'k rangli nuqta orasidagi masofa  $d$  sonidan kichik emas, bunda  $d > 0$ .  $A_i B_j < \frac{1}{3}d$  shartni qanoatlantiruvchi  $A_i B_j$  kesmalar soni  $n$  dan katta emasligini isbotlang.

**Isbot.**  $A_i B_j < \frac{1}{3}d$  shartni qanoatlantiruvchi  $A_i$  qizil rangli nuqtalar soni 1 tadan ko'p emas.

Aytaylik,  $A_i B_j < \frac{1}{3}d$ ,  $A_i B_n < \frac{1}{3}d$  bo'lsin. U holda  $A_i B_j + A_i B_n < \frac{2}{3}d$

bo'ladi.  $A_i, B_j, B_n$  nuqtalar tekislikda uchburchak tashkil qiladi.

$$A_i B_j + A_i B_n > B_j B_n. \text{ Demak, } B_j B_n < \frac{2}{3}d < d.$$

Ammo bu shartga zid. Chunki istalgan ikkita ko'k rangli nuqta orasidagi masofa  $d$  dan kichik emas. Demak,  $A_i B_j < \frac{1}{3}d$  shartni qanoatlantiruvchi  $A_i$  nuqta ko'pi bilan bitta, ammo,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  bo'lishi mumkin. Bundan esa, masala sharti kelib chiqadi.

3. Tenglamani yeching:  $x = \{x\} \cdot [x]$ .

$$\text{Yechim: } x = \{x\} + [x] \quad \{x\} + [x] = \{x\} \cdot [x]$$

$$[x] = \{x\} \cdot [x] - \{x\} \quad \{x\} = [x] \cdot \{x\} - [x]$$

$$[x] = \{x\} \cdot ([x] - 1) \quad \{x\} = [x] \cdot (\{x\} - 1)$$

$$\{x\} = \frac{[x]}{[x]-1} \quad [x] = \frac{\{x\}}{\{x\}-1}$$

Bizga ma'lumki  $\{x\}-1 < 0$ . Demak,  $[x] < 0$ .  $[x] = -N$  bo'lsin.

Hisoblashda davom etsak:

$$-N = \frac{\{x\}}{\{x\}-1}$$

$$N - N \cdot \{x\} = \{x\}, \quad N = \{x\} \cdot (N+1)$$

$$\{x\} = \frac{N}{N+1} \quad \text{va} \quad x = \{x\} + [x] \quad \text{ekanligidan}$$

$$x = -N + \frac{N}{N+1} = -\frac{N^2}{N+1} \quad \text{ekanligi kelib chiqadi.}$$

**Javob:**  $x = \frac{N^2}{N+1}$ .

**4.** Nollardan va birlardan iborat ketma-ketlikda toq o'rinda turgan barcha hadlar o'chirildi. Natijada dastlabki ketma-ketlik bilan bir xil ketma-ketlik hosil bo'ldi. Shunday xususiyatli ketma-ketliklarning barchasini toping.

**Yechim:** Agar ketma-ketlik faqat nollardan yoki faqat birlardan iborat ketma-ketlik bo'lsa, shart bajariladi. Ammo bizda bir ketma-ketlikda 0 va 1 raqami uchrashi lozim. Aytaylik bu ketma-ketlikning birinchi hadi 0 bo'lsin. U holda bu ketma-ketlikning ikkinchi hadi ham nol bo'ladi. Chgunki agar ikkinchi hadi 1 bo'lsa edi, biz bu ketma-ketlikning barcha toq hadlarini o'chirsak, oldingi ketma-ketlik bilan bir xil ketma-ketlik hosil bo'lmaydi. Demak, ketma-ketlikning birinchi ikkita hadi 0. U holda bu ketma-ketlikning uchinchi hadi ham 0 bo'lishi shart. Agar 1 bo'lsa edi, birinchi ketma-ketlik 0, 0 bilan, ikkinchi ketma-ketlik 0, 1 bilan boshlanadi. Demak biz bu ketma-ketlikning barcha hadi nolga tengligini shu mulohazani davom ettirib isbotlaymiz.

Birinchi hadi 1 bilasn boshlansa ham shu mulohazani yuritishimiz mumkin. Bundan shartda keltirilgan xususiyatga ega 0 va 1 kasrdan iborat ketma-ketlik mavjud emasligi kelib chiqadi.

**Javob:** Bunday xususiyatli ketma-ketlik mavjud emas.

**5.** Tengsizlikni isbotlang:

$$\frac{1}{n+1} \left( 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n+1} \right) > \frac{1}{n} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right), (n \in \mathbb{N}).$$

**Isbot:**  $n \in \mathbb{N}$  dan  $n \geq 1$  ligi kelib chiqadi.

$$S_1 = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} \quad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$2n+1 = 1 + 2(k-1) \quad 2n = 2 + 2(m-1); m = n$$

$$\frac{1}{n+1} \left( 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right) + \frac{1}{(n+1)(2n+1)} > \frac{1}{n} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right).$$

$S_1 = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1}$  da  $n$  ta qo'shiluvchi bor.

$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}$  da ham  $n$  ta qo'shiluvchi bor.

$S_1$  dagi  $k$ -qo'shiluvchi kasr maxrajidagi son.

$S_2$  dagi  $k$ -qo'shiluvchi kasr maxrajidagi sondan bitta kam, bu yerda,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

$$\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{3(n+1)} - \frac{1}{4n}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(2n-1)(n+1)} - \frac{1}{2n^2}\right) + \frac{1}{(n+1)(2n+1)} > 0$$

ko'rinishda yozamiz.

$$\frac{n-1}{2n(n+1)} + \frac{n-3}{4n \cdot 3(n+1)} + \dots + \frac{1-n}{2n(2n-1)(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(2n+1)} > 0$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \text{ deb olamiz.}$$

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}; \left(S_{2n} - \frac{1}{2}S_n\right) \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n} \cdot \frac{d}{2} S_n;$$

$$S_1 = S_{2n} - \frac{1}{2}S_n; S_{2n} - S_n > \frac{1}{2n} \cdot S_n;$$

$$S_{2n} - \frac{1}{2}S_n > \frac{n+1}{2n} \cdot S_n; S_{2n} - S_n > \left(\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2}\right) S_n;$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n} > \frac{1}{2n} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{4n} + \dots + \frac{1}{2n^2}$$

Tengsizlik to'liq isbotlandi.

**6.** Moskva-Leningrad poyezdida Ivanov, Petrov va Sidorov familiyasi yo'lovchilar ketmoqdalar. Shunday familiyalarga poyezd mashinisti, kohegari va konduktori ham ega. Quyidagilar ma'lum:

1. Yo'lovchi Ivanov Moskvada yashaydi;
2. Konduktor Moskva-Leningrad yo'lining yarmida yashaydi;
3. Konduktor bilan bir xil familiyasi yo'lovchi Leningradga yashaydi;
4. Yo'lovchilardan konduktorga yaqin joyda yashaydigan yo'lovchi bir oyda konduktordan uch marta ko'p ish haqi oladi;
5. Yo'lovchi Petrov 2000 so'm oladi;
6. Poyezd brigadasidan Sidorov kohegarni tennisda yutdi.

Mashinistning familiyasini toping.

**Yechim:** 6-shartdan kohegar Sidorov emasligi kelib chiqadi. Konduktorga yaqin joyda Petrov yashamaydi. Chunki,  $2000/3 \notin N$ .

1- va 3-shartlardan konduktor Ivanov emasligi kelib chiqadi. Konduktorga eng yaqin yo'lovchi Ivanov emas. Chunki, konduktor uyidan Moskvagacha bo'lgan masofa, konduktor uyidan Leningradgacha bo'lgan masofaga teng.

Demak, konduktorga yaqin joyda Sidorov yashaydi. Bundan konduktor Sidorov emasligi kelib chiqadi. Chunki Sidorov Leningradda yashamaydi. Bundan konduktor Petrov ekanligi kelib chiqadi. Kochegar Sidorov emas, demak u Ivanov. Bundan mashinist Sidorov ekanligi kelib chiqadi.

7. Agar  $a, b, c$  - musbat sonlar bo'lsa,

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

ekanligini isbotlang.

**Isbot:**  $f(a) = \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} - \frac{a+b+c}{2}$  funksiyani  $(0; +\infty)$  oraliqda tekshiramiz.  $a \geq b \geq c$  bo'lsin.

$$f'(a) = \left( \frac{a^2}{b+c} \right)' + \left( \frac{b^2}{a+c} \right)' + \left( \frac{c^2}{a+b} \right)' - \left( \frac{a+b+c}{2} \right)'$$

$(0; +\infty)$  da

$$f''(a) = \frac{2}{(b+c)^4} - \frac{b^2(2a+2c)}{(a+c)^4} - \frac{c^2(2a+2b)}{(a+b)^4}$$

$f''(a) \geq 0$ ,  $2b \leq a+c$  bo'lsin.

$$f'(a) = \left( \frac{a}{b+c} - \frac{b^2}{(a+c)^2} - \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{a}{b+c} - \frac{c^2}{(a+b)^2} - \frac{1}{4} \right)$$

$$\frac{a}{b+c} > \frac{b^2}{(a+c)^2} + \frac{1}{4}$$

$$4a(a+c)^2 > (b+c)(4b^2 + (a+c)^2)$$

$$\begin{cases} 2a > b+c \\ 2(a+c)^2 > 4b^2 + (a+c)^2 \end{cases} \text{ dan kelib chiqadi.}$$

Demak,  $f'(a) > 0$ ,  $f(0) = \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{b} - \frac{b+c}{2}$ .

$f(a)$  o'suvchi.

$$(b^3 + c^3)2 > (b+c)bc; (b+c)(2b^2 - 2bc + 2c^2) > 0$$

Demak,  $f'(a) > 0$  bo'lgani uchun  $f(a)$  funksiya  $(0; +\infty)$  da o'suvchi.  $f(a) > 0$

$$\begin{aligned} & 2b > a+c \\ & \frac{a^2}{b+c} + \frac{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{\frac{a+c}{2} + a+c}{2} \\ & \frac{a^2}{b+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+c}{2} \end{aligned}$$

$$2a^2(a+b) + 2c^2(b+c) \geq (a+c)(b+c)(a+b).$$

8. Tengsizlikni isbotlang:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 \geq 0.$$

**Yechim:**

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 &= \frac{x_1^2}{4} - x_1x_2 + x_2^2 + \frac{x_1^2}{4} - x_1x_3 + \frac{x_1^2}{4} - x_1x_4 + \\ + x_4^2 + \frac{x_1^2}{4} - x_1x_5 + x_5^2 &= \left(\frac{x_1}{2} - x_2\right)^2 + \left(\frac{x_1}{2} - x_3\right)^2 + \left(\frac{x_1}{2} - x_4\right)^2 + \left(\frac{x_1}{2} - x_5\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

**9. Parametr  $k$  ning qanday qiymatlarida**

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{1984}^2 = k \\ x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{1984}^3 = k \\ x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{1984}^4 = k \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi

- 1) 1ta yechimga;
- 2) 1984 ta yechimga
- 3) Yechimga ega bo'lmaydi.

**Yechim:** Sistemaning 1- va 3- tenglamalarini o'zaro qo'shib, undan ikkinchi tenglamaning ikkilanganligini ayiramiz.

$$\begin{aligned} (x_1^4 - 2x_1^3 + x_1^2) + (x_2^4 - 2x_2^3 + x_2^2) + \dots + (x_{1984}^4 - 2x_{1984}^3 + x_{1984}^2) &= 0 \\ x_1^2(x_1^2 - 2x_1 + 1) + x_2^2(x_2^2 - 2x_2 + 1) + \dots + x_{1984}^2(x_{1984}^2 - 2x_{1984} + 1) &= 0 \\ x_1^2(x_1 - 1)^2 + x_2^2(x_2 - 1)^2 + \dots + x_{1984}^2(x_{1984} - 1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Oxirgi tenglamadan barcha  $x_i$  lar uchun 1 yoki 0 ekanligi kelib chiqadi.

**Javob:**

- A)  $k \in \{0; 1984\}$
- B)  $k \in \{1; 1984\}$
- C)  $k < 0$  va  $k > 1984$

**10. Agar  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$  bo'lsa,  $x^4 + y^4 \leq \frac{x^6}{y^2} + \frac{y^6}{x^2}$  tengsizlikni isbotlang.**

$$\begin{aligned} \text{Yechim: } \frac{x^6}{y^2} + \frac{y^6}{x^2} - x^4 - y^4 &= \frac{x^8 - x^6y^2 - x^2y + y^8}{x^2y^2} = \frac{x^6(x^2 - y^2) - y^6(x^2 - y^2)}{x^2y^2} = \\ &= \frac{(x^2 - y^2)(x^6 - y^6)}{x^2y^2} = \frac{(x^2 - y^2)(x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)}{x^2y^2} = \\ &= \frac{(x^2 - y^2)^2(x^4 + x^2y^2 + y^4)}{x^2y^2} \geq 0 \end{aligned}$$

**11. Shunday  $n$  natural sonni topingki, u shu songacha bo'lgan toq sonlarning yig'indisidan 50 marta kichik bo'lsin.**

**Yechim:** a)  $n = 2k$ ,  $k \in N$  bo'lsa, u holda shartga ko'ra

$$2k = \frac{1}{50}(1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)) \text{ yoki } 100k = \frac{1 + (2k - 1)}{2} \cdot k, \text{ ya'ni } k^2 - 100k = 0.$$

Bundan  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 100$   $k \in N$  bo'lgani uchun  $n = 2 \cdot 100 = 200$ . Demak, izlangan natural son 200 bo'ladi

b)  $n = 2k - 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$  bo'lsa, u holda masala shartiga ko'ra

$$2k - 1 = \frac{1}{50}(1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1))$$

$$50(2k - 1) = k^2$$

$$k^2 - 100k + 50 = 0$$

Bu tenglamaning  $k \in \mathbb{N}$  bo'ladigan yechimlari yo'q. Shunday qilib  $n = 200$  masala shartini qanoatlantiradigan yagona natural son bo'lar ekan.

**12.** Ixtiyoriy natural  $a, b, c$  sonlar uchun  $a(b^3 - c^3) + b(c^3 - a^3) + c(a^3 - b^3)$  yig'indi  $a + b + c$  ga karrali ekanligini isbotlang.

**Yechim:** 1-usul.  $p = a(b^3 - c^3) + b(c^3 - a^3) + c(a^3 - b^3)$  deb belgilaymiz, u holda

$$\begin{aligned} p &= ab^3 - ac^3 + bc^3 - ba^3 + ca^3 - cb^3 = a^3(c - b) - a(c^3 - b^3) + bc(c^2 - b^2) = \\ &= a^3(c - b) - a(c - b)(c^2 + cb + b^2) + bc(c - b)(c + b) = \\ &= (c - b)(a^3 - a(c^2 + cb + b^2) + bc(c + b)) = (c - b)(a(a^2 - c^2) - cb(a - c) - b^2(a - c)) = \\ &= (c - b)(a - c)(a(a + c) - bc - b^2) = (c - b)(a - c)(a^2 - b^2 + ac - bc) = \\ &= (c - b)(a - c)((a - b)(a + b) + c(a - b)) = (c - b)(a - c)(a - b)(a + b + c). \end{aligned}$$

Demak,  $p$  yig'indi  $a + b + c$  ga karrali ekan.

2-usul.  $p = a^3(c - b) + b^3(a - c) + c^3(b - a)$  shaklida yozib olamiz, u holda

$$\begin{aligned} p &= a^3(c - b) + a^2(c^2 - b^2) + b^3(a - c) + b^2(a^2 - c^2) + c^3(b - a) + c^2(b^2 - a^2) = \\ &= a^2(c - b)(a + b + c) + b^2(a - c)(b + a + c) + c^2(b - a)(c + b + a) = \\ &= (a + b + c)(a^2(c - b) + b^2(a - c) + c^2(b - a)) \end{aligned}$$

Ya'ni  $p$  yig'indi  $a + b + c$  ga karrali ekan. Shuni isbot qilish talab qilingan edi.

**13.** Ushbu

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{x}{y}\right)^3 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = 0$$

Tenglamaning yechimi mavjudmi?

**Yechim:**  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = z \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = z^2 - 2$ ,  $\left(\frac{x}{y}\right)^3 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = z^3 - 3z$  lar hosil

bo'ladi. Ravshanki,  $x$  va  $y$  lar noldan farqli

$$z + z^2 - 2 + z^3 - 3z = 0 \text{ ga ega bo'lamiz.}$$

$$(z + 1)(z^2 - 2) = 0$$

bu yerdan

$$z_1 = -1$$

$$z_2 = -\sqrt{2}$$

$$z_3 = \sqrt{2}$$

larni topamiz.

$a > 0$  da  $a + \frac{1}{a} \geq 2$  va  $a < 0$  da esa  $a + \frac{1}{a} \leq -2$  larga ega bo'lamiz ya'ni

$$\left(a + \frac{1}{a}\right) \geq 2.$$

$z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$  bo'lgani uchun  $|z| \geq 2$ , ya'ni  $z \leq -2$ ,  $z \geq 2$  bo'lishi mumkin.

Shuning uchun  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = -\sqrt{2}$ ,  $z_3 = \sqrt{2}$  lar yechim bo'la olmaydi.

**14.**  $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$  bo'lsin, u holda  $f(f(f(x))) = x$  tenglama  $x = 1$  yagona yechimga ega ekanligini isbotlang.

**Yechim:** Faraz qilaylik,  $x = 1$  dan ham boshqa yechimi mavjud bo'lsin. Ravshanki,  $x \leq 0$  shartni qanoatlantiradigan yechimlar bo'lishi mumkin emas.

a)  $x > 1$  shartni qanoatlantiradigan yechimi  $x_0$  bo'lsin. U holda  $f(x_0) = \sqrt{x_0^2 - x_0 + 1} < x_0$  ga ega bo'lamiz.

$x_1 = f(x_0)$  desak  $x_1 < x_0$  va  $x_1 > 1$  bo'lishi kerak.  $f(x_1) = \sqrt{x_1^2 - x_1 + 1} < x_1$  bo'ladi, chunki  $x_1 > 1$  bo'lgani uchun  $x_2 = f(x_1)$  bo'lganda  $x_2 < x_1$  bo'ladi

$f(x_2) = \sqrt{x_2^2 - x_2 + 1} < x_2$  chunki  $f(f(f(x_0))) = x_0$  bo'lgani uchun

$x_0 = f(x_2) < x_2 < x_1 < x_0$  ya'ni  $x_0 < x_0$  zidlikka kelamiz.

b) Xuddi shuningdek,  $0 < x < 1$  shartni bajaruvchi yechimi bor deb faraz qilamiz. Uni  $\bar{x}_0$  deb belgilaylik, u holda

$$f(\bar{x}_0) = \sqrt{\bar{x}_0^2 - \bar{x}_0 + 1} > \bar{x}_0$$

bo'lishi ravshan.

$$\bar{x}_1 = f(\bar{x}_0) > \bar{x}_0 \text{ va } \bar{x}_0 < 1 \text{ bo'lgani uchun } 0 < \bar{x}_1 < 1,$$

$$f(\bar{x}_1) = \sqrt{\bar{x}_1^2 - \bar{x}_1 + 1} > \bar{x}_1$$

bo'ladi.

$$\bar{x}_2 = f(\bar{x}_1) > \bar{x}_1 \text{ ya'ni } \bar{x}_2 > \bar{x}_1$$

$$f(\bar{x}_2) = \sqrt{\bar{x}_2^2 - \bar{x}_2 + 1} > \bar{x}_2, \quad 0 < \bar{x}_2 < 1$$

$$\bar{x}_0 = f(\bar{x}_2) > \bar{x}_2 > \bar{x}_1 > \bar{x}_0, \text{ bundan } \bar{x}_0 > \bar{x}_0$$

zidlikka kelamiz. Yuqorida yuritilgan mulohazalardan ko'rinadiki, haqiqatdan ham berilgan tenglama uchun  $x = 1$  yagona yechim bo'lar ekan.

**15.** Sinfda 42 ta o'quvchi o'qiydi.  $A_1$  o'quvchi qiz 7 ta o'g'il bola bilan do'stlashgan,  $A_2$  - 8 ta o'g'il bola bilan,  $A_3$  - 9 ta o'g'il bola bilan va hokazo,  $A_k$  o'quvchi qiz sinfdagi barcha o'g'il bolalar bilan do'stlashgan. Bu sinfdan nechta o'quvchi qiz bor?

**Yechim:**  $A_1$  - 7, ya'ni 6+1 o'g'il bola bilan

$A_2$  - 8, ya'ni 6+2 o'g'il bola bilan

$A_3$  - 9, ya'ni 6+3 o'g'il bola bilan

.....

$A_k$  -, 6+k o'g'il bola bilan do'stlashgan.

Demak, sinfdan 6+k ta o'g'il bola, qiz bolalar soni esa  $k$  ta. Demak, o'g'il bolalar 42 - k ta tenglama tuzamiz.  $42 - k = 6 + k$ ;  $k = 18$  ta qiz.

**16.** Hech bir natural  $n$  va  $m$  larda

$$x^2 + 1983^n \cdot x + 1985^m = 0$$

kvadrat tenglama butun ildizlarga ega emasligini isbotlang.

**Yechim:** Viyet teoremasiga binoan  $x_1$  va  $x_2$  ildizlar

$$x_1 + x_2 = -1983^n$$

$$x_1 \cdot x_2 = 1985^m$$

munosabatlar bilan bog'langan.

$x_1 \cdot x_2 = 1985^m$  dan ko'rinadiki,  $x_1$  va  $x_2$  lar toq sonlar bo'lishi kerak, lekin  $x_1 + x_2 = -1983^n$  ning o'ng tomoni toq son chap tomoni esa juft son. Ziddiyatga keldik, demak berilgan kvadrat tenglama  $n$  va  $m$  natural son bo'lganda butun yechimlarga ega emas.

**17.** Agar  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  ekanligi ma'lum bo'lsa, u holda  $-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1$  ekanligini isbotlang.

**Yechim:** Berilgan tengsizlikni

$$-\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \leq ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$$

shaklida yozish mumkin. Chunki,

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1;$$

$$-\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \leq ab + bc + ca;$$

$$-a^2 - b^2 - c^2 \leq 2ab + 2bc + 2ca;$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \geq 0$$

ligi kelib chiqadi. Bundan esa  $(a + b + c)^2 \geq 0$ . Demak, chap tengsizlik isbotlandi.

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$$

tengsizlikni isbotlaymiz. Uni ikkiga ko'paytirib quyidagicha yozib olamiz;

$$2ab + 2bc + 2ca \leq 2a^2 + 2b^2 + 2c^2$$

yoki

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0;$$

$$(a - b)^2 \geq 0, (b - c)^2 \geq 0, (c - a)^2 \geq 0$$

bo'lgani uchun ko'rsatilgan tengsizlik o'rinalidir. Berilgan tengsizlik to'liq isbotlandi.

**18.** Ixtoyoriy tub sonni 30 ga bo'lganda qoldiq yana tub son yoki bir bo'lishini isbotlang.

**Yechim:** Natural sonni 30 ga bo'lishdan chiqqan  $r$  qoldiq 30 dan kichik. Agar u murakkab son bo'lganda edi, u holda uning bo'luvchilari orasida 2, 3, 5 sonlaridan kamida bittasi mavjud bo'lar edi. Haqiqatdan, 30 dan kichik son 5 dan katta tub bo'luvchilarga ega bo'lishi mumkin emas, ya'ni 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 bo'luvchilarga ega bo'lishi mumkin emas va bunda 2, 3, 5 sonlaridan kamida bittasiga karrali.  $Q = PD + r$  ekanligi ma'lum. Bu tenglikdan bo'luvchi 30 bilan qoldiqning ikkalasi 2 ga yoki 3 ga yoki 5 ga bo'linsa, u holda bo'linuvchi ham 2 ga yoki 3 ga yoki 5 ga bo'linishi kelib chiqadi, bu esa shartga zid. ( $Q$ -tub son). Demak,  $r$  tub son yoki 1 deb qabul qilish kerak.

**19.** Tengsizlikni isbotlang:

$$\sqrt{20 + \sqrt{20 + \dots + \sqrt{20 + \sqrt{20}}}} < 5.$$

Bu yerda ildizlar 2016 ta.

**Yechim:**  $\sqrt{20} < \sqrt{25} = 5$  bo'lganligidan  $\sqrt{20 + \sqrt{20}} < \sqrt{20 + 5} = 5$  ekanligi kelib chiqadi, u holda

$$\sqrt{20 + \sqrt{20 + \dots + \sqrt{20 + \sqrt{20}}}} < \sqrt{20 + \dots + \sqrt{20 + \sqrt{25}}} = 5.$$

**20.** Agar uchburchak tomonlarining uzunliklari  $a, b, c$  va yarim premetri  $p$  bo'lsa, u holda

$$\sqrt{(p-a)(p-b)} + \sqrt{(p-a)(p-c)} + \sqrt{(p-b)(p-c)} \leq p$$

ekanligini isbotlang.

**Yechim:**  $x \geq 0, y \geq 0$  da  $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$  bo'lgani uchun

$$\sqrt{(p-a)(p-b)} \leq \frac{(p-a) + (p-b)}{2} = \frac{2p-a-b}{2} = \frac{c}{2};$$

$$\sqrt{(p-a)(p-c)} \leq \frac{b}{2};$$

$$\sqrt{(p-b)(p-c)} \leq \frac{a}{2}.$$

Bu yerda  $2p = a + b + c$ .

Demak,

$$\sqrt{(p-a)(p-b)} + \sqrt{(p-a)(p-c)} + \sqrt{(p-b)(p-c)} \leq \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = \frac{a+b+c}{2} = p.$$

**21.**  $2^{p^2}$  sonini 13 ga bo'lgandagi qoldiqni toping. Bu yerda  $p$  - tub son.

**Yechim:**  $p > 3$  bo'lsa,  $p^2 - 1$  ning 12 ga bo'linishini ko'rsatish mumkin. U holda  $2^{p^2} = 2^{p^2-1} \cdot 2 = 2^{12n} \cdot 2 = 4096^n \cdot 2 = (13 \cdot 315 + 1)^n \cdot 2 = 13m + 2$ .

Shunday qilib,  $p > 3$  bo'lsa, qoldiq 2 ga teng bo'lar ekan. Undan tashqari  $p = 2$  va  $p = 3$  bo'lsa, mos ravishda 3 va 5 qoldiqlar hosil bo'ladi.

**22.**  $2^{99} + 2^9$  sonning 41 ga bo'linishini ko'rsating.

**Yechim:**  $2^{99} + 2^9$  sonning 41 ga bo'linishini isbotlaymiz.

$$2^{99} + 2^9 = (2^{33})^3 + (2^3)^3 = (2^{33} + 2^3)(2^{66} - 2^{36} + 2^6) = ((2^{11})^3 + 2^3)(2^{66} - 2^{36} + 2^6) =$$

$$= (2^{11} + 2)(2^{22} - 2^{12} + 2^2)(2^{66} - 2^{36} + 2^6)$$

$$2^{99} + 2^9 = (2^{11} + 2)(2^{22} - 2^{12} + 2^2)(2^{66} - 2^{36} + 2^6) = 2050(2^{22} - 2^{12} + 2^2)(2^{66} - 2^{36} + 2^6).$$

**23.**  $\left[ \frac{1^2}{1980} \right]; \left[ \frac{2^2}{1980} \right]; \left[ \frac{3^2}{1980} \right]; \dots; \left[ \frac{1980^2}{1980} \right]$  ketma-ketlikda nechta turlicha natural

sonlar uchraydi, bu yerda  $[x] - x$  ning butun qismi.

**Yechish:** Ixtiyoriy  $k$  uchun

$$(n-1)1980 \leq k^2 < n \cdot 1980;$$

$$(k+1)^2 < (n+1)1980.$$

Bu tengsizliklardan quyidagi kelib chiqadi.

$$k < 990, a = 990, a^2 = 980100;$$

$$\left[ \frac{a^2}{1980} \right] = 495, \quad b = 991, \quad b^2 = 982081;$$

$$b^2 - a^2 > 1980; \quad c = 989, \quad c^2 - a^2 < 1980;$$

$$(n+1)^2 - n^2 > n^2 - (n-1)^2, \quad 2n+1 > 2n-1.$$

U holda 495 gacha bo'lgan barcha butun sonlar ketma-ketlik bo'ladi. Har bir  $k > 990$  ga bittadan butun son mos keladi. Barcha turlicha natural sonlar  $C = 1 + 495 + 990 = 1486$  ta uchraydi.

**24.** Barcha butun koeffitsientli  $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$  ko'rinishidagi va  $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)$  ayniyat o'rinli bo'lgan ko'phadlarni toping.

**Yechim:** Agar  $x = 0$  bo'lsa, u holda  $a_3 = -a_1a_2a_3$  ligi kelib chiqadi.

1.  $a_3 \neq 0$  bo'lganda  $a_1 \cdot a_2 = -1$  bo'lib,  $a_1 = 1, a_2 = -1$  yoki,  $a_1 = -1, a_2 = 1$  largina bo'lishi kelib chiqadi.

a)  $a_1 = 1, a_2 = -1$  da  $x^3 + x^2 - x + a_3 = (x-1)(x+1)(x-a_3)$  tenglik ayniyat bo'lgani uchun

$$x = 2 \text{ da } 8 + 4 - 2 + a_3 = 1 \cdot 3(2 - a_3), \text{ bundan } a_3 = -1 \text{ ni topamiz.}$$

Demak,  $x^3 + x^2 - x - 1$  ko'phadga ega bo'lamiz.

b)  $a_1 = -1, a_2 = 1$  da  $x^3 + x^2 - x + a_3 = (x+1)(x-1)(x-a_3)$  ayniyatda  $x = 2$  desak,  
 $8 + 4 - 2 + a_3 = 3 \cdot 1(2 - a_3) \Rightarrow a_3 = 0.$

Biroq  $a_3 = 0$  shartlarga binoan bunday bo'lishi mumkin emas.

2.  $a_3 = 0$  bo'lsa u holda  $x^3 + a_1x^2 + a_2x = (x - a_1)(x - a_2)$ .  $x$  dan  $x^2 + a_1x + a_2 = (x - a_1)(x - a_2)$  kelib chiqadi. Keyingi ayniyatdan esa

$$\begin{cases} a_1 = -a_1 - a_2 \\ a_2 = a_1a_2 \end{cases}$$

ni hosil qilamiz. Bu tenglamani yechib  $a_1 = 0, a_2 = 0$  hamda  $a_1 = 1, a_2 = -2$  yechimlarni topamiz. Bu holda  $x^3 + x^2 - 2x$  va  $2x^3$  ko'phadlarga ega bo'lamiz.

**Javob:**  $x^3 + x^2 - x - 1, x^3 + x^2 - 2x$  va  $2x^3$  ko'phadlar.

**25.** Agar  $a$  va  $b$  musbat sonlar va  $a \neq b$  bo'lsa

$$\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\ln a - \ln b} < \frac{a+b}{2}$$

tengsizlikni isbotlang.

**Yechim:** Umumiylikka putur yetkazmasdan  $0 < b < a$  deb hisoblash mumkin. U holda  $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b > 0$ .

Berilgan qo'sh tengsizlikni quyidagicha yozib olamiz.

$$2 \frac{a-b}{a+b} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{\sqrt{ab}}.$$

a) Avvalo chap tomonidagi tengsizlikni isbotlaymiz.

$$2 \frac{a-b}{a+b} < \ln \frac{a}{b}.$$

Buning uchun  $x = \frac{a}{b}$  desak, u holda  $2 \frac{x-1}{x+1} < \ln x$  bunda  $x > 1$  bo'ladi.

$x \geq 1$  bo'lganida  $f(x) = \ln x - 2 \frac{x-1}{x+1}$  funksiyani qaraylik.

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} > 0.$$

Demak,  $f(x)$  funksiya  $x \geq 1$  da o'suvchi. U holda

$$f(x) > f(1) = 0.$$

b) O'ng tengsizlik  $\ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{\sqrt{ab}}$  ni isbotlash uchun  $x^2 = \frac{a}{b} > 1$  deb olamiz

va quyidagi almashtirishni bajaramiz:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} - \ln \frac{a}{b} = x - \frac{1}{x} - \ln x^2 > 0.$$

Faraz qilaylik,  $g(x) = x - \frac{1}{x} - \ln x^2$ , u holda

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{(x-1)^2}{x^2} > 0 \quad \text{bundan } x > 1. \quad \text{Demak, } g(x) \text{ funksiya } x \geq 1$$

qat'iy o'suvchi funksiyadir. U holda  $g(x) > g(1) = 0$  tengsizlik isbotlandi.

**26.** Musbat  $x_1, x_2, y_1, y_2$  sonlar  $x_1 y_1 < x_2 y_2$ ,  $x_1 \geq y_1$ ,  $x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2$  shartlarni qanoatlantiradi. Quyidagi tengsizlikni isbotlang:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2}.$$

**Yechim:** Tengsizlik shaklini almashtiramiz:

$$\frac{1}{y_1} - \frac{1}{x_1} + \frac{1}{y_2} - \frac{1}{x_2} \geq 0;$$

$$\frac{x_1 - y_1}{x_1 y_1} + \frac{x_2 - y_2}{x_2 y_2} \geq 0;$$

$$\frac{x_1 - y_1}{x_1 y_1} - \frac{x_1 - y_1}{x_1 y_1} + \frac{x_2 - y_2}{x_2 y_2} + \frac{x_1 - y_1}{x_1 y_1} \geq 0;$$

$$(x_1 - y_1) \left( \frac{1}{x_1 y_1} - \frac{1}{x_2 y_2} \right) + \frac{x_1 + x_2 - (y_1 - y_2)}{x_2 y_2} \geq 0.$$

(1)

Lekin shartga ko'ra  $\frac{1}{x_1 y_1} \geq \frac{1}{x_2 y_2}$ . (1) tengsizlikning chap tomoni manfiy

bo'lmagan ifodalar ustida bajarilgan amallar natijasi bo'lgani uchun (1) tengsizlik o'rinli. Bundan talab qilingan tengsizlik o'rinliligi kelib chiqadi.

**27.** Agar  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$  bo'lsa,

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} > 2$$

tengsizlikni isbotlang.

**Yechim:**  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$  tengsizlikka binoan

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}} = \sqrt{\frac{x^2}{x(y+z)}} = \frac{x}{\sqrt{x(y+z)}} \geq \frac{2x}{x+y+z}$$

tenglik  $x = y+z$  da bo'ladi.

Xuddi shuningdek,

$$\sqrt{\frac{y}{z+x}} \geq \frac{2y}{x+y+z};$$

$$\sqrt{\frac{z}{x+y}} \geq \frac{2z}{x+y+z};$$

tengsizliklarni hosil qilamiz. Bulardan esa

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} \geq \frac{2x+2y+2z}{x+y+z} = 2$$

kelib chiqadi. Tenglik belgisi  $x = y+z$ ,  $y = z+x$ ,  $z = x+y$  bo'lgandagina bajariladi. Ularni qo'shsak,

$$x+y+z = 2(x+y+z), \text{ ya'ni } x+y+z = 0.$$

Bunday bo'lishi mumkin emas, chunki musbat sonlar yig'indisi musbat bo'ladi.

$$\text{Demak, } \sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} > 2.$$

**28.**  $a, b, c$  sonlar  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  intervalda yotadi hamda  $\cos a = a$ ,  $\sin(\cos b) = b$ ,  $\cos(\sin c) = c$  tengliklarni qanoatlantiradi. Bu sonlarni o'sish tartibida joylashtiring.

**Yechim:** Ma'lumki, barcha musbat  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  larda  $\sin x < x$ ,  $\cos x$  esa  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  bo'lganda kamayuvchidir. Shuning uchun  $\sin(\cos x) < \cos x < \cos(\sin x)$  bo'ladi. Bu yerdan

$$b = \sin(\cos b) < \cos b;$$

$$\cos c < \cos(\sin c) = c;$$

ya'ni

$$\cos b - b > 0 = \cos a - a > \cos c - c.$$

Ammo  $y = \cos x - x$  funksiya  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  oraliqda kamayuvchi. Shuning uchun  $b < a < c$ .

**Javob:**  $b < a < c$ .

**29.** Tenglamani yeching;

$$\frac{x}{2 + \frac{x}{2 + \frac{x}{1 + \sqrt{1+x}}}}} = 1.$$

**Yechim:**  $\sqrt{x+1}-1 = \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}$  bo'lgani uchun  $x > -1$  da ko'p zanjir kasr  $\sqrt{x+1}-1$  ga aynan teng bo'ladi.  $\sqrt{x+1}-1=1$  tenglamadan  $x=3$  ni topamiz.

**Javob:**  $x=3$

**30.** Birinchi raqami o'chirilganda 57 marta kichrayadigan son mavjudmi?

**Yechim.** Berilgan sonni  $k+1$  xonali deb olamiz va uning birinchi raqamini  $x$  orqali, qolgan qismini  $y$  orqali belgilaymiz. U holda, masala shartiga ko'ra  $x \cdot 10^k + y = 57y$  bo'ladi. Bundan  $x \cdot 10^k = 56y$  yoki  $x \cdot 5^k \cdot 2^k = 56y$  kelib chiqadi. Endi  $56 = 7 \cdot 8$  bo'lgani uchun  $x=7$ , shuningdek,  $8 = 2^3$  bo'lgani uchun  $k=3$  va  $y=125$  bo'lishini aniqlaymiz.

**Javob.** Mavjud va biz qidirayotgan son 7125 ga teng.

**31.** Ixtiyoriy  $n$  natural soni uchun  $n^5 - 5n^3 + 4n$  ifodaning 120 ga qoldiqsiz bo'linishini isbotlang.

**Yechim.** Berilgan ifodani ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^4 - 5n^2 + 4) = n(n^2 - 1)(n^2 - 4) = n(n-1)(n-2)(n+1)(n+2) = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2).$$

Ko'rinib turibdiki, oxirgi ifoda 5 ta ketma-ket kelgan natural sonlar ko'paytmasidan iborat.

Ularning biri albatta 5 ga bo'linadi, uchta ketma-ket kelgan natural sonlardan biri 3 ga bo'linadi, to'rtta ketma-ket kelgan natural sonlardan biri 4 ga, yana biri 2ga bo'linadi. Shuning uchun hosil bo'lgan ko'paytma 120 ga bo'linadi.

**32.** Har biri qolgan ikkisi ayirmasining kvadratiga teng bo'lgan uchta sonni toping.

**Yechim.** Masala shartiga ko'ra, qidirilayotgan sonlar manfiy emas, chunki ularning har biri biror soning kvadratiga teng. Umumiylikka ziyon yetkazmagan holda ularni  $x$ ,  $y$  va  $z$  orqali belgilaymiz va  $x \geq y \geq z \geq 0$  deb olamiz.

U holda  $x-z \geq y-z \geq 0$  bo'ladi. Bundan  $(x-z)^2 \geq (y-z)^2$  kelib chiqadi. Ammo,  $(x-z)^2 = y$ ,  $(y-z)^2 = x$ . Demak, bir tomondan  $x \geq y$ , ikkinchi tomondan  $y \geq x$  bo'ladi. Shuning uchun  $x=y$  degan xulosaga kelamiz. Bu munosabatlardan  $z=0$  va  $x=x^2$ , ya'ni,  $x=0$  yoki  $x=1$  bo'lishi kelib chiqadi.

**Javob.** Uchchalasi ham 0 yoki biri 0, qolgan ikkitasi 1 ga teng.

**33.**  $\frac{1}{7}$  ning o'nli kasr yozuvida, verguldan keyin 100-xonada turgan raqam topilsin.

**Yechim.** 1 ni 7 ga "ustun" usulida bo'lamiz, ya'ni  $\frac{1}{7}$  ni o'nli kasrga aylantiramiz. Natijada, davriy kasr hosil bo'lib, verguldan keyin, davrida 6 ta raqam takrorlanib keladi:  $\frac{1}{7}=0,(142857)$ .

Masala shartiga ko'ra 100 ni 6 ga bo'lib, 4 qoldiqni aniqlaymiz. Demak, davrning 4-xonasida turgan raqam izlangan raqam bo'ladi.

**Javob.** 8.

**34.**  $p^3 - q^7 = p - q$  tenglamani qanoatlantiruvchi barcha  $p, q$  tub sonlarni toping.

**Yechim.1-usul.** Ravshanki,  $p^3 - 1 > p^3 - p = q(q^6 - 1) > q^6 - 1 > q^3 - 1$ , demak,  $p > q$ . Shundan  $p^3 - q^7 = p - q > 0$  bo'gani bois  $p > q^{\frac{7}{3}}$  tengsizlikka ega bo'lamiz. Tenglamani quyidagicha yozamiz:

$$q(q^2 - 1)(q^2 - q + 1)(q^2 + q + 1) = p(p^2 - 1). \quad (*)$$

$p$  sonning tubligidan hamda  $p > q$  tengsizligidan quyidagi uchta hol vujudga kelishi mumkin:  $q^2 - 1 : p$  yoki  $q^2 - q + 1 : p$  yoki  $q^2 + q + 1 : p$ . Barcha hollarda

$$q^2 + q + 1 \geq pq^{\frac{7}{3}}.$$

Agar  $q \geq 5$  bo'lsa, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$q > 1,5^3, q^{\frac{7}{3}} > 1,5q^2, 0,5q^2 - q - 1 < 0.$$

Oxirgi tengsizlikdan  $q < 1 + \sqrt{3}$ . Ziddiyat. Demak,  $q \leq 3$ .

**1-hol.**  $q = 2$  bo'lsa,  $p^3 - p = 126$  tenglama hosil bo'ladi. Ravshanki,  $p = 2, 3, 5$  qiymatlar uni qanoatlantirmaydi.  $x^3 - x$  funksiya  $x \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$  uchun o'suvchi, demak,

$q \geq 7$  larda  $p^3 - 3 \geq 7^3 - 1 > 126$ . Demak,  $q = 2$  holda yechim yoq.

$q = 3$  bo'lsa,  $p^3 - p = 2184$  tenglama hosil bo'ladi. Ravshanki, bu tenglamani faqat  $p = 13$  qanoatlantiradi, chunki  $p > 13$  uchun  $p^3 - p > 2184$  bo'ladi.

**2-usul.** Xuddi birinchi yechimdagidek,  $p > q^{\frac{7}{3}} > q^2$ , bundan  $p > q, p > q^2 - q + 1$ . Demak,  $q^2 + q + 1 : p$ . Bundan,  $2p > 2q^2 > q^2 + q + 1$  bo'lgani uchun  $q^2 + q + 1$  (1) tenglamani hosil qilamiz.

(\*) tenglamadan

$$q(q-1)(q^2 - q + 1) = (q^2 + q)(q^2 + q + 2),$$

yoki

$$q^3 - 2q^2 + 2q - 1 = q^2 - q - 2.$$

Demak,  $q^3 - 3q^2 + q - 3 = (q^2 + 1)(q - 3) = 0$  va  $q = 3$ . (1) dan  $p = 3^2 + 3 + 1 = 13$  qiymatni hosil qilamiz.

**Javob:**  $p = 13, q = 3$ .

**35.** Doskada  $1, 2, \dots, n$  sonlar yozilgan (bu yerda  $n > 2$ ). Har minutda doskadan ikkita son o'chirilib, ularning o'rniga yig'indining eng kichik tub bo'luvchisi yoziladi. Ma'lumki, oxirida faqat 97 qoldi.  $n$  eng kami bilan nechaga teng bo'ladi?

**Yechim. 1-qadam.** Doskada 97 ni hosil qilishimiz uchun, eng avvalo doskadagi sonlar yig'indisi 97 dan kichik bo'lmasligi lozim.

Demak  $1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2 \geq 97$ , ya'ni  $n \geq 14$ .

**2-qadam.** Endi doskadagi sonlar yig'indisini toq ekanini isbotlaymiz.

Agar biz tanlagan ikkita sonning yig'indisi toq bo'lsa, biz ular o'rniga 2 ni yozamiz. Agar biz tanlagan ikkita sonning yig'indisi toq bo'lsa, biz ular o'rniga

toq son (eng kichik tub bo'luvchisi) ni yozamiz. Ya'ni biz juft sonning o'rniga juft sonni, toq sonni o'rniga toq sonni yozayapmiz. Demak biz doskada 97 ni hosil qilishimiz uchun doskadagi sonlar yig'indisi toq son bo'lishi kerak (aks holda, oxirgi qadamda doskada 2 hosil bo'ladi).

**3-qadam.**  $n=14$  bo'lmasligini isbotlaymiz. Faraz qilaylik,  $n=14$  bo'lsin. Biz 97 ni hosil qilishimiz uchun qandaydir bitta toq son va juft sonlardan foydalanishimiz kerak. Ya'ni har bir qadamdan keyin tub son hosil qilish orqali maqsadimizga tez erishamiz. Lekin biz doskaga eng ko'pi bilan  $13+2+4+6+8+10+12+14+2+2+2=75$  ni hosil qilishimiz mumkin, xolos (oxirgi 2 lar 1,3,5,7,11 lardan hosil qilingan). Demak,  $n=14$  bo'lganda masala yechimga ega emas.

**4-qadam.**  $n=15$  va  $n=16$  da doskadagi sonlar yig'indisi juft sonidir. Demak, bu hollar ham 2-qadamga ko'ra ziddiyatdir. Demak,  $n \geq 17$ .

**5-qadam.**  $n=17$  da bo'lmasligini isbotlaymiz.  $n=17$  da 17 dan kichik bo'lgan barcha toq sonlar juft-jufti bilan to'rtta 2 ni hosil qiladi:

$$(1,3) \rightarrow 2, (5,7) \rightarrow 2, (9,11) \rightarrow 2, (13,15) \rightarrow 2.$$

Demak, biz 17,4,6,8,10,12,14,16,2,2,2,2,2 sonlarini ketma-ket qo'shish orqali 97 ni hosil qilib bo'lmasligini isbotlaymiz.

Jarayon 17 dan boshlanadi va har bir qadamda tub son hosil bo'lishi kerak. 17 dan 97 gacha bo'lgan tub sonlar orasida 2 ga teng tub sonlar beshta va quyidagilar: (17;19), (29;31), (41;43), (59;61), (71;73). Demak, biz yig'indimizda shu sonlarni hosil qilamiz va 2 larni shu sonlar o'rtasiga qo'yamiz. Endi quyidagi sonlarga qaraymiz: (19;29), (31;41), (61;71) bu sonlar o'rtasida ayirma 10 ga teng 3 ta son kerak. Lekin bizda atigi 2ta 10 bor ( $6+4=10$  va 10). Demak,  $n=17$  da ham hosil qilib bo'lmaydi.

**6-qadam.**  $n=18$  bo'lsin.

Dastlab (3,5); (7;9); (11;13) va (15;17) juftliklardan to'rtta 2 ni hosil qilamiz. Bundan keyin quyidagicha ish tutamiz: (1,2)  $\rightarrow$  3; (3,2)  $\rightarrow$  5; (5,2)  $\rightarrow$  7; (7,4)  $\rightarrow$  11; (11,2)  $\rightarrow$  13; (13,6)  $\rightarrow$  19; (19,10)  $\rightarrow$  29; (29,8)  $\rightarrow$  37; (37,16)  $\rightarrow$  53; (53,14)  $\rightarrow$  67; (67,12)  $\rightarrow$  79; (79,18)  $\rightarrow$  97. Javob  $n=18$ .

**36.** Ushbu  $\sqrt{|40\sqrt{2}-57|} - \sqrt{40\sqrt{2}+57}$  ifoda butun son ekanini ko'rsating va uni toping.

**Yechim.** Bu masalani yechish uchun to'la kvadrat ajratishni bilish kerak:

$$\sqrt{40\sqrt{2}+57} = \sqrt{25+40\sqrt{2}+32} = \sqrt{(5+4\sqrt{2})^2} = 5+4\sqrt{2}.$$

Xuddi shuningdek,  $\sqrt{|40\sqrt{2}-57|} = \sqrt{(5-4\sqrt{2})^2} = -5+4\sqrt{2}$ .

Bu ikki munosabatdan

$$\sqrt{|40\sqrt{2}-57|} - \sqrt{40\sqrt{2}+57} = -5+4\sqrt{2} - (5+4\sqrt{2}) = -10$$

kelib chiqadi.

**37.** 10 ta qopda tangalar bo'lib, haqiqiy tanganing og'irligi 1gr. Bitta qopdagi tangalarning barchasi qalbaki va har biri 0.9gr. Tarozida, bir marta tortib ko'rish yordamida qaysi qopdagi tangalar qalbaki ekanligini qanday aniqlash mumkin.

**Yechim.** Qoplarni 1 dan 10 gacha nomerlab chiqamiz. 1-qopdan 1ta, 2-qopdan 2ta va hokazo 10-qopdan 10 ta tanga olamiz. Olingan barcha tangalar soni 55 ta bo'ladi. Tabiiyki, tangalarning barchasi haqiqiy bo'lganda, ajratilgan tangalarning og'irligi 55gr chiqishi lozim edi. Ajratilgan tangalarni tortamiz va chiqqan og'irlikka qarab qalbaki tangalar qaysi qopdaligini aniqlaymiz. Masalan, agar ajratilgan tangalar og'irligi 54,6gr chiqqan bo'lsa, u holda qalbaki tangalar 4-qopda bo'ladi. Chunki, farq 0.4gr bo'lyapti. Bu esa qaysi qopdan 4ta olgan bo'lsa, shunga mos keladi.

**38.**  $x, y, z \in N$  bo'lsa,

$$\begin{cases} \text{EKUB}(x, y, z) = 30 \\ \text{EKUK}(x, y, z) = 720 \end{cases}$$

sistema nechta yechimga ega?

**Yechim.** Berilgan 30 va 720 sonlarini tub ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$  va  $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ . U holda  $x, y, z$  sonlar ushbu ko'rinishda bo'ladi:  $x = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$ ;  $y = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$ ;  $z = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$

Bundan,

$$\begin{aligned} \max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} &= 4, & \min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} &= 1; \\ \max\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} &= 2, & \min\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} &= 1; \\ \max\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\} &= 1, & \min\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\} &= 1. \end{aligned}$$

Oxirgi ikkita tenglikdan  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1$  ekani ravshan.  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  sonlar quyidagi-cha bo'lishi mumkin: (1,1,4) va (1,2,2) –bu uchliklarning har biri 3tadan, jami 6ta yechimni beradi.  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  sonlar esa shunday bo'lishi mumkin:

(1,1,4), (1,2,4),

(1,3,4), (1,4,4) bu uchliklarmos ravishda, 3ta yechimni, jami 18ta yechimni beradi.

Demak, jami mumkin bo'lgan yechimlar soni  $6 \cdot 18 = 108$  ta. Javob:108 ta yechim.

**39.**  $A, B, C$  qishloqlar orasidagi yo'llar – to'g'ri yo'llardir.  $A, B$  yo'lga tomoni uzunligi  $\frac{1}{2} \cdot |AB|$ ga teng bo'lgan kvadrat maydon,  $BC$  yo'lga tomoni uzunligi  $|BC|$ ga teng kvadrat maydon tutashgan. O'rmonning maydoni kvadrat maydonlar yuzlarining yig'indisidan  $20 \text{ km}^2$  ga ortiq. O'rmon qancha maydonni egallagan?

**Yechim.**  $|AB| = x, |BC| = y, |AC| = z$  deylik. Uholda masala shartiga muvofiq,  $4z - \left(\frac{x^2}{4} + y^2\right) = 20$  yoki  $z = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + 5$  tenglamaga (uch noma'lumli tenglamaga) ega bo'lamiz. Ammo,  $x, y, z$  miqdorlar orasida  $x + y \geq z, x + z \geq y, y + z \geq x$  tengsizliklar o'rinli. Bu tengsizliklarda “=” tenglik bo'lganda  $\triangle ABC$  kesmaga aylanadi. Shunday qilib,  $x + y \geq \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + 5$ .

Bundan,  $\left(\frac{x}{4} - 2\right)^2 + \left(\frac{y}{2} - 1\right)^2 \leq 0$ . Demak,  $x = 8, y = 2, z = 10$ .  $x + y = z$  bo'lgani uchun  $A, B, C$  qishloqlar bitta to'g'ri yo'lga joylashgan.

**Javob:**  $40\text{km}^2$ .

**40.** Mis bilan qo'rg'oshinning ikkita turli qotishmasi bor. Ikkala qotishmadan 1 kgdan olib, ularni qo'shib eritilsa, ularning tarkibida 65% mis bo'lgan qotishma hosil bo'ladi. Birinchi qotishmadan A bo'lak, ikkinchi qotishmadan B bo'lak olindi. A va B bo'laklarning birgalikdagi massasi 7 kg. Agar A va B bo'laklar birgalikda eritilsa, hosil bo'lgan qotishmada mis 60% bo'ladi. Birinchi qotishmadan B bo'lakning mas-sasiga teng bo'lak, ikkinchi qotishmadan A bo'lakning massasiga teng bo'lak ajratib olindi. Bu ikkala bo'lak birgalikda eritilsa, hosil bo'lgan qotishmada necha kg mis bo'ladi?

**Yechim.** Birinchi qotishmada mis  $p\%$  ni, ikkinchi qotishmada esa  $q\%$  ni tashkil qilsin deylik.  $(\frac{p}{100}, \frac{q}{100})$ -misning bu qotishmalaridagi konsentratsiyasi). A bo'lakning massasi  $x$  kg, B bo'lakning massasi  $y$  kg bo'lsin. U holda masala shartiga muvofiq,

$$\begin{cases} \frac{1 \cdot \frac{p}{100} + 1 \cdot \frac{q}{100}}{2} = \frac{65}{100}, \\ x + y = z \\ \frac{x \cdot \frac{p}{100} + y \cdot \frac{q}{100}}{x + y} = \frac{60}{100} \end{cases}$$

Yoki

$$\begin{cases} p + q = 130 & (1) \\ x + y = z & (2) \\ px + qy = 420 & (3) \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi kelamiz (To'rt noma'lumli 3ta tenglama).

Birinchi qotishmada  $y$  kg, ikkinchi qotishmada  $x$  kg olib eritilsa, hosil bo'ladigan qotishmaning massasi  $m = y \cdot \frac{p}{100} + x \cdot \frac{q}{100} = \frac{qx+py}{100}$  ga teng bo'ladi. Sistemaning (1) va (2) tenglamalarini hadma –had ko'paytiramizva natijadan (3) ni ayiramiz. U holda  $(c + q) \cdot (x + y) - (cx + qy) = 490$ .  $qx + cy = 490$  ga kelamiz.

Bundan  $m = \frac{490}{100} = 4,9$ . Javob:4,9kg.

### Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Duskada bir nechta son yozilgan. Ma'lumki, yozilgan sonlar orasidagi ixtiyoriy sonning kvadrati qolgan sonlar orasidagi ixtiyoriy ikkita sonning ko'paytmasidan katta. Duskada ko'pi bilan nechta son yozilgan bo'lishi mumkin?
2. Ma'lumki ushbu  $x^2 + ax + b, x^2 + cx + d, x^2 + ex + f$  kvadrat uchhadlarning ixtiyoriy ikkitasining yig'indisidan tuzilgan kvadrat uchhadlar ildizga ega emas. Yuqoridagi uchala kvadrat uchhadning yig'indisidan tuzilgan kvadrat uchhad ildizga egami?
3. Haqiqiy  $a, b, c, d$  sonlar  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$  tenglikni qanoatlantirsa,  $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \leq 8$  tengsizlikni isbotlang.
4. Ushbu  $4x^2 + 4x^2y - 15xy^2 - 18y^2 - 12x^2 + 6xy + 36y^2 + 5x - 10y = 0$  tenglamani qanoatlantiruvchi barcha  $(x, y)$  butun sonlar juftliklarini toping.

5. Uchta keltirilgan kvadrat tenglamaning diskriminantlari 1, 4 va 9. Bu tenglamalarning har birini bittadan ildizlarini shunday tanlash mumkinligini isbotlangki, bularning ildizlari qolgan ildizlarining yig'indisiga teng bo'ladi.

6.  $a, b, c, d$ -nomanfiy haqiqiy sonlar bo'lib,  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$  tenglikni qanoatlantirsa,  $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \geq abcd$  tengsizlikni isbotlang.

7. Agar  $a, b, c$ -nomanfiy sonlar bo'lsa, u holda

$$2(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq (a+1)(b+1)(c+1)(abc+1)$$

tengsizlikni isbotlang.

8. Ushbu  $P(x^2) + x(3P(x) + P(-x)) = (P(x))^2 + 2x^2, \forall x \in R$  tenglikni qanoatlantiruvchi, barcha haqiqiy koeffitsientli  $P(x)$  ko'phadlarni toping.

9.  $x, y$ -natural sonlar shundayki,

$$\frac{x^2 - 1}{y + 1} + \frac{y^2 - 1}{x + 1}$$

kasrlar yig'indisining qiymati butun son bo'ladi. Ko'rsatilgan kasrlarning har birining qiymati butun son bo'lishini isbotlang.

10. Yig'indini hisoblang:  $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{99}{100!}, (n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n)$ .

11.  $a$  ning eng katta qiymatini toping, bunda  $x^3 + 5x^2 + ax + b = 0$  tenglama butun koeffitsientli, uchta turli haqiqiy ildizga ega va bu ildizlardan biri -2 bo'lsin.

12. Tengsizlikni isbotlang:  $x^{10} + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1 > 0$ .

13.  $(1+x)^n$  yoyilmaning beshinchi, oltinchi va yettinchi hadlari arifmetik progressiya hosil qiladi.  $n$  ni toping.

14. Agar  $x > -1, y > -1$  va  $z > -1$  bo'lsa, u holda  $S = \frac{1+x^2}{1+y+z^2} + \frac{1+y^2}{1+z+x^2} + \frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq 2$

tengsizlikni isbotlang.

15. Tenglamaning barcha yechimlarini toping:

$$\frac{x^2}{x-1} + \sqrt{x-1} + \frac{\sqrt{x-1}}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}$$

16. Musbat  $a, b, c$  haqiqiy sonlar  $ab + bc + ca = 3$  tenglikni qanoatlantirsa

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)} + \frac{1}{1+b^2(c+a)} + \frac{1}{1+c^2(a+b)} \leq \frac{1}{abc}$$

tengsizlikni isbotlang.

17.  $\{a_n\}$ -ketma-ketlik  $\forall n \in N, n \geq 1$  uchun  $a_1 = 1$  va  $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+na_n}$  tengliklarni

qanoatlantiradi. U holda  $a_{1001}$  ni hisoblang.

18. Funksiyaning eng kichik qiymatini toping:

$$f(x, y) = |x - y| + \sqrt{(x+y)^2 + (y-4)^2}$$

19. Yig'indini hisoblang:  $\frac{1 \cdot 3!}{3} + \frac{2 \cdot 4!}{3^2} + \dots + \frac{n(n+2)!}{3^n}$ .

20. Agar  $\alpha$  soni  $x^5 + 2013x + 1 = 2014x^2$  tenglamaning ildizi bo'lsa,  $x^5 + 1 = 2014x^3 - 2013x^4$  tenglamaning ildizlaridan birini toping.

21. Agar  $p$  tub son bo'lsa, u holda har bir natural  $n$  uchun  $n^p - n$  ifoda  $p$  ga bo'linishini isbotlang.

22.  $a, b, c$  musbat sonlar uchun  $\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}$  tengsizlikni isbotlang.

23. Natural sonlarning shunday biror  $(a, b)$  juftligini tanlangki, unda

- 1)  $ab(a+b)$  ifodaning qiymati 7 ga bo'linmasin;
- 2)  $(a+b)^7 - a^7 - b^7$  ifodaning qiymati  $7^7$  ga bo'linsin.

24.  $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$  tenglamani qanoatlantiradigan butun sonlarning barcha  $(x, y)$  juftliklarini toping.

25. Agar  $a, b, c \geq 0$  bo'lsa, u holda  $4(a+b+c)^3 \geq 27(a^2b + b^2c + c^2a)$  tengsizlikni isbotlang.

26.  $3 + 33 + 333 + 3333 + \dots + \underbrace{33\dots3}_{n\text{ta}}$  yig'indini hisoblang.

27.  $\overline{xyz}^y = \overline{yz}^{y+1}$  tenglikni qanoatlantiruvchi  $x, y, z$  raqamlarini toping.

28.  $a, b, c$  ixtiyoriy uchburchakning tomonlari bo'lsin.

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$$

tengsizlikni isbotlang

29.  $P_n(x)$  ko'phad  $P_1(x) = x^2 - 2$ ,  $P_k(x) = P_1(P_{k-1}(x))$ ,  $k = 2, 3, \dots$  tengliklar bilan aniqlanadi.

Isbotlang:

Ixtiyoriy natural  $n$  uchun  $P_n(x) = x$  tenglamaning barcha ildizlari:

- a) haqiqiy;
- b) bir-biriga teng emas.

30. Hisoblang:  $1 + 4 \cdot 2 + 7 \cdot 2^2 + \dots + 67 \cdot 2^{22}$

31.  $x^2 - 3y^2 = 1$  tenglamani butun sonlarda yeching.

32. Agar  $a \geq b \geq 0$  bo'lsa,  $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt[3]{a^3 + b^3} + \sqrt[4]{a^4 + b^4} \leq 3a + b$  tengsizlikni isbotlang. Tenglik qachon bajariladi?

33. Agar  $x^5 - kx^3 + x - 1$  ko'phad darajalari 0 dan katta bo'lgan ikki butun koeffitsiyentli ko'phadlar ko'paytmasiga teng bo'lsa,  $k$  ni toping.

34. Barcha hadlar yig'indisi ixtiyoriy hadiga qoldiqsiz bo'linadigan 2011 ta natural sonlar ketma-ketligi mavjudmi? Javobingizni asoslab bering.

35. Ixtiyoriy natural  $n$  soni uchun  $I = (n^2, n^2 + n + 3\sqrt{n})$  oraliq qaralmoqda.  $\frac{ab}{c}$

natural son bo'ladigan  $a \in I, b \in I, c \in I$  natural sonlar mavjudligini isbotlang.

36.  $a > 0, b > 0, c > 0, a + b + c \geq 6$  bo'lsa,

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{a}{b^2 + c + 1} + \frac{b}{c^2 + a + 1} + \frac{c}{a^2 + b + 1}$$

ifodaning eng kichik qiymatini toping.

37. Barcha haqiqiy  $x, y$  sonlar uchun  $f(x+f(y))+f(2+f(y)-x)=y(x-1)f(y)$  tenglikni qanoatlantiruvchi barcha sonli  $f:R \rightarrow R$  funksiyalar topilsin.

38.  $2^n - m^3 = m^2 - 16$  munosabatni qanoatlantiruvchi barcha butun  $m, n$  sonlarni toping.

39. Musbat  $x, y, z, p, q, r$  sonlar  $p+q+r=1$  va  $x^p y^q z^r = 1$  shartlarni qanoatlantirsa, u holda

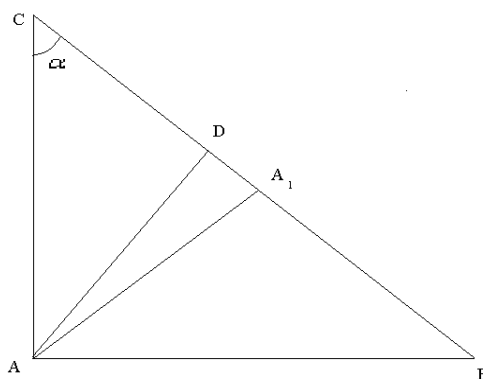
$$\frac{p^2 x^2}{qy+rz} + \frac{q^2 y^2}{rz+px} + \frac{r^2 z^2}{px+qy} \geq \frac{1}{2}$$

tengsizlikni isbotlang.

40. Barcha hadlari natural sonlardan iborat bo'lgan  $a_1, a_2, \dots$  va  $b_1, b_2, \dots$  arifmetik progressiyalar berilgan. Ma'lumki,  $a_1 = b_1$ . Agar ixtiyoriy natural  $n$  soni uchun  $a_n$  va  $b_n$  sonlari  $n$  ga bo'lganda bir xil qoldiq bersa, u holda bu progressiyalar ustma-ust tushishini isbotlang.

## 2.2. Geometriya.

1. To'g'ri burchakli uchburchakning to'g'ri burchak bissektrisasi gipotenuzani 1:2 nisbatda bo'ladi. To'g'ri burchakdan tushirilgan balandlik gipotenuzani qanday nisbatda bo'ladi?



1-chizma.

**Yechim:**  $\frac{CA_1}{BA_1} = \frac{1}{2}; \quad \frac{CA_1}{AC} = \frac{BA_1}{AB}; \quad \frac{CA_1}{BA_1} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2};$

$$CD = AC \cdot \cos \alpha \quad BD = AB \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha}{BD} = \frac{CD}{BD} \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{1}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{CD}{BD}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{BD}{AD}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{AD}{CD}; \quad \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{BD}{CD}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{BD}{CD}}$$

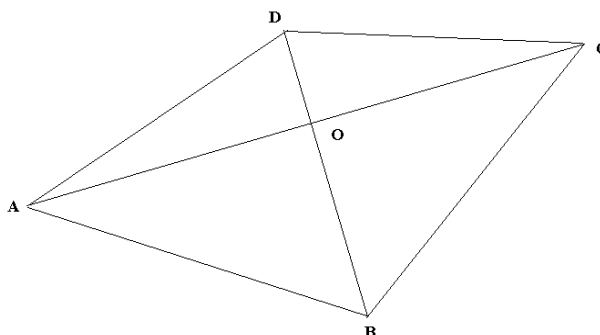
$$\frac{1}{2 \sqrt{\frac{BD}{CD}}} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{1}{4}$$

**Javob:**  $\frac{CD}{BD} = \frac{1}{4}.$

2.  $ABCD$  qavariq to'rtburchakning diagonallari  $O$  nuqtada kesishadi. To'rtburchak tomonlari kvadratlarning yig'indisi  $O$  nuqtadan to'rtburchak

uchlarigacha masofalar kvadratlari yig'indisidan ikki marta katta. U holda diagonallar o'zaro perpendikulyar bo'lishini yoki  $O$  nuqtada diagonallarining kamida bittasi teng ikkiga bo'linishini isbotlang.

**Yechim:**



2-chizma

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 2 \cdot (OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2)$$

$$\angle BOC = \alpha$$

$$BO^2 + OC^2 - 2 \cdot CO \cdot BO \cdot \cos \alpha = BC^2$$

$$AO^2 + BO^2 + 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos \alpha = AB^2$$

$$OC^2 + OD^2 + 2 \cdot OC \cdot OD \cdot \cos \alpha = CD^2$$

$$AO^2 + OD^2 - 2 \cdot AO \cdot OD \cdot \cos \alpha = AD^2$$

$$2 \cdot (OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2) + 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos \alpha - 2 \cdot BO \cdot OC \cdot \cos \alpha +$$

$$+ 2 \cdot OC \cdot OD \cdot \cos \alpha - 2 \cdot AO \cdot OD \cdot \cos \alpha = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$$

$$\cos \alpha (BO(AO - OC) - OD(AO - OC)) = 0$$

$$\cos \alpha (BO - OD)(AO - OC) = 0$$

Bundan  $\cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$  va  $BO = OD$  yoki  $AO = OC$  ekanligi kelib chiqadi.

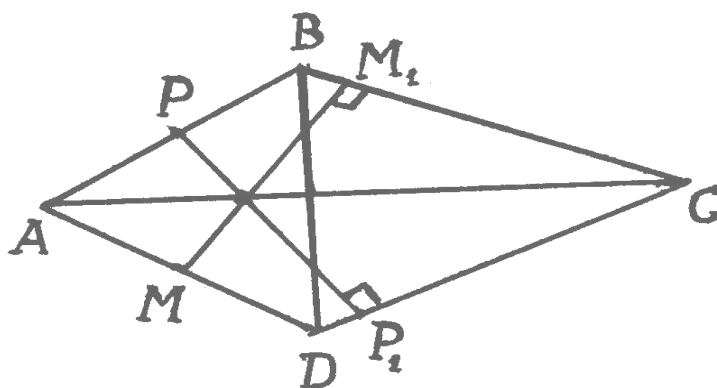
**3.**  $ABCD$  qavariq to'rtburchakning diagonallari o'zaro perpendikulyar.  $AB$  va  $AD$  tomonlari o'rtalarining qarama-qarshi tomonlarga perpendikulyar to'g'ri chiziqlar o'tkazilgan. Bu ikki to'g'ri chiziq  $AC$  ustida kesishishini isbotlang.

**Isbot:**  $K$  nuqta  $AC$  to'g'ri chiziqning o'rtasi bo'lsin.

$$MK = \frac{1}{2}CD, \quad MP = \frac{1}{2}BD, \quad PK = \frac{1}{2}BC, \quad AK \perp BD, \quad BD \parallel MP, \quad MP \perp AK,$$

$$MM_1 \perp BC, \quad BC \parallel PK, \quad PK \perp MM_1, \quad PP_1 \perp CD, \quad CD \parallel MK$$

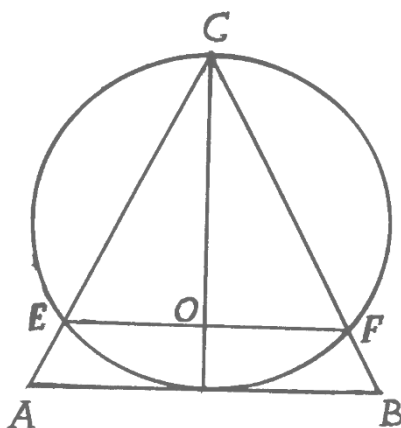
Demak,  $PP_1, MM_1, AC$  to'g'ri chiziqlar  $\triangle MPK$  ning balandliklari mos ravishda o'z ichiga oladi. Uchburchak balandliklari bir nuqtada kesishadi. Demak  $PP_1$  va  $MM_1$  lar diagonal ustida kesishadi.



3-chizma

4.  $ABC$  uchburchakda  $CH$  balandlik tushirilgan hamda  $AC$  va  $BC$  tomonlariga mos ravishda  $HE$  va  $HF$  perpendikulyar o'tkazilgan. Agar  $CH$  balandlik  $EF$  kesmani teng ikkiga bo'lsa, u holda  $ABC$  teng yonli uchburchak ekanligini isbotlang.

**Isbot:**  $CH \perp AB$   $EO = OF$



4-chizma

$$\angle CAB = \beta \quad \angle CBH = \alpha$$

$$\angle ACH = 90^\circ - \beta \quad \angle BCH = 90^\circ - \alpha \quad \angle AHE = 90^\circ - \beta \quad \angle EHO = \beta$$

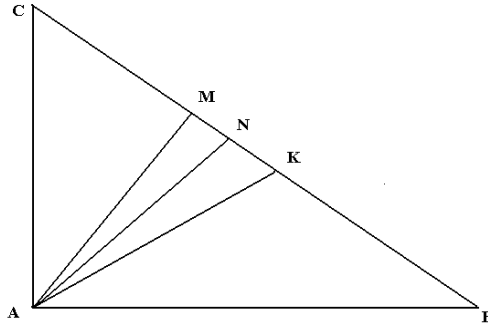
$$\angle CEH + \angle CFH = 180^\circ \Rightarrow \angle CEH + \angle CFH = \angle ECF + \angle EHF = 180^\circ$$

Demak,  $CEHF$  ga tashqi aylana chizish mumkin.

$$\angle HCF = \angle FEH = 90^\circ - \beta \quad \angle EOH = \angle COH = \angle COE = \angle FOH = 90^\circ \quad \alpha = \beta$$

5. To'g'ri burchakli uchburchakning to'g'ri burchagidan o'tkazilgan bissektrisa gipotenuzaga o'tkazilgan mediana va balandlik orasidagi burchakni teng ikkiga bo'lishini isbotlang.

**Isbot:**



5-chizma

$AN$  -bissektrisa,  $AB = a$

$AK$  -mediana,  $AC = b$

$AM$  -balandlik.  $BC = c$

$\angle ANK = \alpha$   $\angle KAN = \beta$

$$\frac{AK}{\sin \alpha} = \frac{KN}{\sin \beta}; \sin \beta = \frac{KN \cdot \sin \alpha}{AK}; \angle AKM = 180^\circ - \alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha = \frac{AM}{AN}$$

$$\sin \beta = \frac{KN \cdot AM}{AK \cdot AN}$$

$$\angle NAM = 90^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha - 90^\circ$$

$$\cos(\alpha - 90^\circ) = \frac{AM}{AN}; \quad \sin(\alpha - 90^\circ) = \frac{MN}{AN};$$

$$\sin \alpha = \frac{AM}{AN}; \quad \sin(\alpha - 90^\circ) = \sin \beta \text{ ekanligini isbotlaymiz.}$$

$$\frac{KN \cdot AM}{AK \cdot AN} = \frac{MN}{AN} \quad KN \cdot AM = MN \cdot AK$$

$$\frac{BN}{AB} = \frac{BC - BN}{AC}; \frac{BN}{a} = \frac{c - BN}{b}; BN = \frac{ac}{a+b};$$

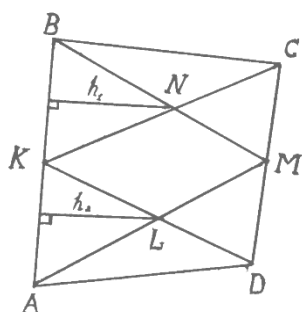
$$BM = \sqrt{a^2 - \frac{a^2 b^2}{c^2}} = a \sqrt{1 - \frac{b^2}{c^2}}; \frac{BM}{BA} = \frac{AB}{BC}; BM = \frac{a^2}{c}; MN = \frac{a^2}{c} - \frac{ac}{a+b};$$

$$\frac{c(a-b)}{2(a+b)} \cdot \frac{ab}{c} = a \left( \frac{a}{c} - \frac{c}{a+b} \right) \cdot \frac{c}{2};$$

$$\frac{(a-b)b}{a+b} = \frac{a(a-b)}{a+b} \Rightarrow \sin \angle KAN = \sin \angle NAM \Rightarrow \angle KAN = \angle NAM.$$

6.  $ABCD$  qavariq to'rtburchakning  $AB$  va  $CD$  tomonlarida mos ravishda  $K$  va  $M$  nuqtalar olingan.  $MA$  va  $KD$  kesmalar kesishish nuqtasi  $L$ ,  $KC$  va  $BM$  kesmalar kesishish nuqtasi  $N$  bo'lsin.  $K$  va  $M$  nuqtalar  $AB$  va  $CD$  kesmalarning o'rtasi bo'lsa,  $S_{KLMN} < \frac{1}{3} S_{ABCD}$  ekanligini isbotlang.

$$\text{Isbot: } S_{KLMN} < \frac{1}{2} S_{ABCD}$$



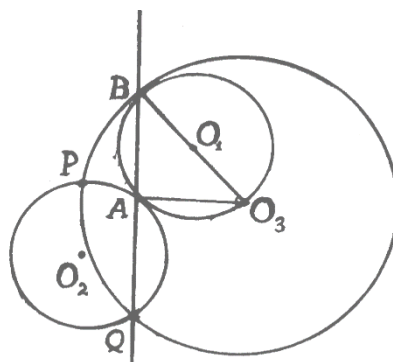
6-chizma

$$\begin{aligned}
 S_{KLMN} &< \frac{1}{2} S_{ABCD} - (S_{CMN} + S_{AKL}) \\
 2S_{KLMN} &< S_{ABCD} - 2(S_{CMN} + S_{AKL}) \\
 S_{CMN} + S_{AKL} &= S_{BKN} + S_{MLD} \Rightarrow \\
 \Rightarrow 2(S_{CMN} + S_{AKL}) &= S_{CMN} + S_{AKL} + S_{BKN} + S_{MLD} \\
 2S_{KLMN} &= S_{ABCD} - (S_{CMN} + S_{AKL} + S_{BKN} + S_{MLD}) \\
 S_{CMN} + S_{AKL} + S_{BKN} + S_{MLD} &= S_{ABCD} - S_{KLMN} - S_{BNC} - S_{ALD} \\
 2S_{KLMN} &= S_{ABCD} - S_{ABCD} + S_{KLMN} + S_{BCN} + S_{ALD} \\
 S_{KLMN} &= S_{BCN} + S_{ALD}; \\
 S_{CMN} + S_{AKL} + S_{BKN} + S_{MLD} &> S_{KLMN} \\
 S_{BKN} &= \frac{AB}{4} h_1; S_{AKL} = \frac{AB}{4} h_2 \\
 S_{BKN} + S_{AKL} &= \frac{AB}{4} (h_1 + h_2) \Rightarrow S_{ABCD} > 3S_{KLMN}
 \end{aligned}$$

Masala shartida tengsizlikning to'g'riligini isbotlash talab qilingan edi. Tengsizlik isbotlandi.

**7.** Ikkita teng aylana  $A$  nuqtada urinadi. Radiusi ikki barobar katta aylana bu aylanalarning birini o'z ichiga olib, u bilan  $B$  nuqtada urinadi, ikkinchi aylana bilan esa  $P$  va  $Q$  nuqtalarda kesishadi.  $AB$  to'g'ri chiziqning yoki  $P$  yoki  $Q$  nuqtadan o'tishini isbotlang?

**Yechim:**  $O_1, O_2$  -kichik aylanalarning,  $O_3$  -katta aylananing markazi bilan masalaning shartidan  $O_3B$  kesma  $O_1$  markazli aylananing diametric ekanligi kelib chiqadi. Shuning uchun  $\angle BAO_3 = 90^\circ$ . Birinchidan  $O_3A \perp AB$  bo'lganligi uchun  $B$  nuqtaga  $O_3A$  to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik nuqta  $O_3$  markazi aylanada yotadi.



7-chizma

Ikkinchidan,  $O_1, O_2$  markazli aylanalar  $A$  nuqtaga nisbatan simmetrik bo'lgani uchun  $B$  nuqtaga  $A$  markazga nisbatan simmetrik nuqta  $O_2$  markazli aylanada yotadi.

Demak, bu nuqta  $O_2$  va  $O_3$  markazli aylanalarning kesishish nuqtasi ekan.

8. Agar  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  va  $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$  bo'lsa, u holda  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$  bo'lishini isbotlang. ( $\alpha, \beta, \gamma$  -lar musbat bo'lishi shart emas).

**Yechim:**  $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \beta - \alpha) = \sin(\beta + \gamma) = \sin \beta \cdot \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma$  bo'lgani uchun

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} = k \text{ dan } \sin \alpha = ka, \sin \beta = kb, \sin \gamma = kc$$

$$ka = kb \cdot \cos \gamma + \cos \beta \cdot kc \text{ bundan } a = b \cdot \cos \gamma + c \cdot \cos \beta \quad b = a \cdot \cos \gamma + c \cdot \cos \alpha$$

$$c = a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos \alpha$$

Hosil qilingan munosabatlardan birinchisini  $a$  ga, ikkinchisini  $(-b)$  ga, uchinchisini  $(-c)$  ga ko'paytirib qo'shamiz.

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cdot \cos \alpha \text{ ya'ni } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha.$$

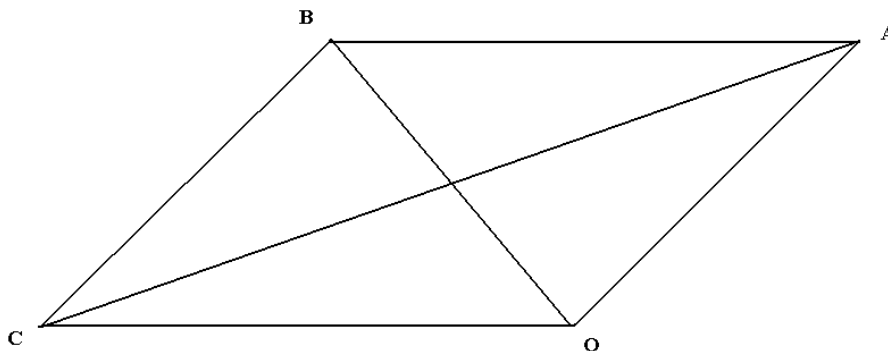
9. Agar  $a, b, c$  lar musbat sonlar bo'lsa,

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}$$

tengsizlikni isbotlang. Masalaning geometrik yechimini ko'rsating.

**Yechim:** Masalaning geometrik yechimini ko'rsatamiz.

$$OA = a, \quad OB = b, \quad OC = c.$$



### 8-chizma

$\angle AOB = 60^\circ$ ,  $\angle BOC = 60^\circ$  unda  $\angle AOC = 120^\circ$  bo'ladi.

$\triangle OAB$ ,  $\triangle OBC$  va  $\triangle OAC$  uchlarining kosinuslar teoremasiga binoan quyidagilarni hosil qilamiz.

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 60^\circ = a^2 + b^2 - ab$$

$$BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2 \cdot OB \cdot OC \cdot \cos 60^\circ = b^2 + c^2 - bc$$

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2 \cdot OA \cdot OC \cdot \cos 120^\circ = a^2 + c^2 + ac$$

$$AB = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$$

$$BC = \sqrt{b^2 - bc + c^2}$$

$$AC = \sqrt{a^2 + ac + c^2}$$

$\triangle ABC$  dan  $AB + BC > AC$ . Lekin  $B$  nuqta  $AC$  ustida bo'lib qolishi ham mumkin, u holda tenglik ro'y beradi.

Demak,  $AB + BC \geq AC$ . Yuqorida topilganlarni o'rniga qo'ysak,

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}$$

hosil bo'ladi.

**10. Tenglamani yeching:**

$$(x^2 - 2x)^3 + x\sqrt{x(x-2)^3} = 2.$$

**Yechim:** Agar  $x \geq 0$  bo'lsa, u holda  $(x^2 - 2x)^3 + x\sqrt{x(x-2)^3} = 2$  bo'ladi.

$\sqrt{(x^2 - 2x)^3} = y$  desak, u holda  $y^2 + y - 2 = 0$  bundan  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = -2$  lekin  $y \geq 0$  bo'lgani uchun  $y_1 = 1$  ni olamiz. Bu holda  $\sqrt{(x^2 - 2x)^3} = 1$  yoki  $(x^2 - 2x)^3 = 1$

$$x^2 - 2x = 1$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x = 1 \pm \sqrt{2}$$

Ammo  $x \geq 0$ , unda  $x = 1 + \sqrt{2}$ .

Berilgan tenglamaning yo'l qo'yiladigan qiymatlari to'plami  $x$  ning  $x(x-2)^3 \geq 0$  ni qanoatlantiradigan qiymatlari to'plamidan iborat. Bu  $x \leq 0$  va  $x \geq 2$  ya'ni  $x \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$  dan iborat. Demak,  $x = 1 + \sqrt{2}$  bu tenglamada yechim bo'ladi. Agar  $x < 0$  bo'lsa, u holda  $(x^2 - 2x)^3 - x\sqrt{x(x-2)^3} = 2$  (bu yerda  $x = -(-x) = -\sqrt{(-x)^2} = -\sqrt{x^2}$  yozuvidan foydalaniladi).  $\sqrt{(x^2 - 2x)^3} = z$  desak, u holda  $z^2 - z - 2 = 0$  hosil bo'ladi. ( $z \geq 0$ )

$z_1 = 2$ ,  $z_2 = -1$  ni topamiz. Lekin,  $z \geq 0$  shuning uchun  $z_1 = 2$  ni olamiz.

$\sqrt{(x^2 - 2x)^3} = 2$ . Bundan esa

$$(x^2 - 2x)^3 = 4$$

$$(x^2 - 2x) = \sqrt[3]{4}$$

$$x^2 - 2x - \sqrt[3]{4} = 0$$

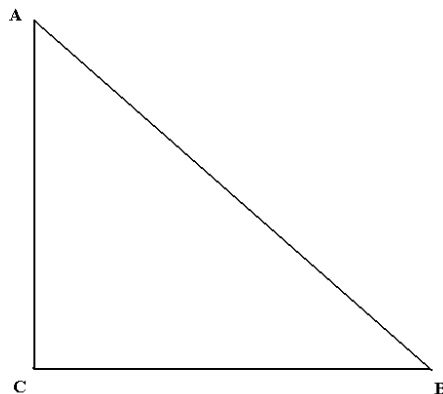
$$x = 1 \pm \sqrt{1 + \sqrt[3]{4}}$$

$x < 0$  bo'lgani uchun  $x = 1 - \sqrt{1 + \sqrt[3]{4}}$ .

**Javob:**  $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ ,  $x_2 = 1 - \sqrt{1 + \sqrt[3]{4}}$ .

11. To'g'ri burchakli uchburchakning yuzi  $\frac{\sqrt{3}}{12}(a^2 + 3b^2)$  kvadrat birlikka teng. Uning burchaklarini aniqlang. Bunda  $a$  va  $b$  lar uchburchakning tomonlari.

**Yechim:**  $CB = a, AC = b, AB = c$  belgilashlar kiritamiz.



9-chizma

$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$ . Masala shartiga ko'ra

$$S = \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2 + 3b^2) \Rightarrow \frac{1}{2}ab \cdot \sin C = \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2 + 3b^2)$$

$$6ab \cdot \sin C = \sqrt{3}(a^2 + 3b^2)$$

$$2\sqrt{3} \cdot ab \cdot \sin C = a^2 + 3b^2$$

$$\sin C = \frac{a^2 + 3b^2}{2\sqrt{3}ab}$$

$$(a + \sqrt{3}b)^2 = a^2 + 2\sqrt{3}ab + b^2$$

$$\frac{a^2 + 3b^2}{2\sqrt{3}ab} \geq 1$$

Lekin  $-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{a^2 + 3b^2}{2\sqrt{3}ab} = 1$

$$a^2 + 3b^2 = 2\sqrt{3}ab \quad \text{Kvadratga oshiramiz. } (\sin C = 1, C = 90^\circ)$$

$$a^4 + 6a^2b^2 + 9b^4 = 12a^2b^2 \quad \Rightarrow a^4 + 9b^4 - 6a^2b^2 = 0$$

$$(a^2 - 3b^2)^2 = 0, \quad a^2 - 3b^2 = 0, \quad a^2 = 3b^2 \Rightarrow a = 1; \quad b = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad c^2 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$c = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$a = c \cdot \sin A \quad \sin A = \frac{a}{c} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad B = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

**Javob:**  $C = 90^\circ$ ;  $A = 60^\circ$ ;  $B = 30^\circ$

**12.** Uchburchak tomonlari  $a, b, c$  va yuzi  $S$  bo'lsa,  $S < \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{a+b+c} \cdot \sqrt{abc}$  tengsizlikni isbotlang.

**Yechim:**  $r$  va  $R$  uchburchakka ichki va tashqi chizilgan aylanalarning radiuslari  $\gamma$  esa  $c$  tomon qarshisidagi burchak bo'lsin. U holda

$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c), \quad c = 2R \sin \gamma, \quad S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \gamma$$

formulalardan foydalanib,  $a+b+c = \frac{2S}{r}$ ,  $abc = 4RS$  tengliklarni hosil qilamiz.

Bularni hamisha o'rinli  $1 < \sqrt{\frac{R}{r}}$  tengsizlikka qo'yib,  $S < \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{a+b+c} \cdot \sqrt{abc}$  tengsizlikni hosil qilamiz.

**13.**  $S$  yuzli uchburchak bissektirialari  $l_a, l_b, l_c$  bo'lsin.  $S \geq \frac{l_a \cdot l_b \cdot l_c}{p}$  ni isbotlang. Bu yerda  $p$  yarim perimetr. Qanday uchburchaklar uchun tenglik o'rinli?

**Yechim:** Bissektrisani hisoblash formulasiga ko'ra:

$$l_a = \frac{\sqrt{bc}}{b+c} \cdot \sqrt{(b+c)^2 - a^2} = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \cdot \sqrt{p(p-a)};$$

$$l_b = \frac{\sqrt{ac}}{a+c} \cdot \sqrt{(a+c)^2 - b^2} = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c} \cdot \sqrt{p(p-b)};$$

$$l_c = \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \cdot \sqrt{(a+b)^2 - c^2} = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c} \cdot \sqrt{p(p-c)}.$$

Ixtiyoriy musbat  $x$  va  $y$  sonlari uchun  $2\sqrt{xy} \leq x+y$  tengsizlik o'rinli. Shuning uchun  $l_a \leq \sqrt{p(p-a)}$ ,  $l_b \leq \sqrt{p(p-b)}$ ,  $l_c \leq \sqrt{p(p-c)}$  tengsizliklar o'rinli. U holda oxirgi tengsizliklarni hadma-had ko'paytirib

$$l_a \cdot l_b \cdot l_c \leq p \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = p \cdot S$$

munosabatni hosil qilamiz. Bundan esa

$$S \geq \frac{l_a \cdot l_b \cdot l_c}{p}$$

ekanligi kelib chiqadi. Shuni isbotlash talab qilingan edi.

**14.** Muntazam uchburchak tomonlari kichikroq 5 ta bir xil muntazam uchburchaklar bilan qoplangan bo'lsa, u holda shu uchburchakni ulardan to'rttasi bilan ham qoplash mumkinligini isbotlang.

**Yechim:** Teng tomonli uchburchaklarning 6 ta nuqtasini uchlarini va tomonlarining o'rtalarini belgilaylik. Qoplaydigan uchburchaklar 5 ta bo'lgani uchun ularning kamida bittasi 2 ta nuqtani qoplaydi. Shuning uchun o'sha uchburchakning tomoni katta uchburchak tomonining yarmidan kichik emas. Bunday uchburchaklardan to'rttasi bilan katta uchburchakni qoplash mumkin.

**15.** Ikkita bir xil ( $8 \times 8$ ) shaxmat taxtasi umumiy markazga ega va biri ikkinchisioga nisbatan markaz atrofida  $45^\circ$  burchakka burilgan holda joylashgan.

Agar har bir katak yuzi birga teng bo'lsa, u holda ikkala shaxmat taxtasi qora kataklari kesishmasi yuzidan yig'indisini toping?

**Yechim:** Yuqorida joylashgan doskaningqora kataklari bilan ostki doska qora kataklari kesishmasining yuzini  $S_{qq}$  orqali ustki doskaning qora kataklari bilan ostki doskaning oq kataklari kesishmasining yuzini  $S_{qo}$  orqali belgilaymiz. Xuddi shunday  $S_{qo}$  va  $S_{oo}$  belgilashlarni kiritamiz. U holda  $S_{kk} + S_{qo} + S_{oq} + S_{oo} = S$  bu yerda  $S$  shtrixlangan sakkizlikning yuzi. Agar ustki doskani boshlang'ich holatidan markaz atrofida  $90^0$  ga bursak u holda qora kataklar oq kataklarga, oq kataklar qora kataklarga o'tadi. Demak,  $S_{qq} = S_{oo}$  va  $S_{qo} = S_{oq}$ . Agar berilgan holatga nisbatan ikkala doskani ham markaz atrofida  $90^0$  ga bursak, u holda ikkala doskaga ham qora kataklar oq kataklarga o'tadi. Demak,  $S_{qo} = S_{oq}$  va  $S_{qq} = S_{oo}$ . Shuning uchun  $S_{qq} = \frac{1}{4}S$ .

**Javob:**  $32(\sqrt{2}-1)$ .

**16.** Bir xil kublardan paralleloiped yasali, uning umumiy uchga ega bo'lgan uchta yog'i bo'lgani ma'lum bo'ladi. Bitta yog'i bo'yalgani ma'lum bo'ldi. Nechta kubning yog'i bo'lgan.

**Yechim:** Kubning tomonlari 1 ga teng deb faraz qilamiz. Paralleloiped  $m \times n \times k$  o'lchovlarga ega bo'lsin, bu yerda  $m \geq n \geq k$ . U holda paralleloipedni tashkil qiluvchi kubiklar soni  $\frac{1}{2}mnk$  ga bo'yalmagan kubiklar soni  $(m-1)(n-1)(k-1)$  ga teng. Shartga ko'ra  $mnk = 2(m-1)(n-1)(k-1)$  ko'rinib turibdiki  $k > 2$ . Bundan tashqari  $k \geq 5$  da yuqoridagi tenglik o'rinli emas, chunki

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 = 0,512 \text{ va } 2(m-1)(n-1)(k-1) = 2mnk\left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{k}\right) \geq 2mnk\left(\frac{4}{5}\right)^3 > mnk$$

$k = 3$  da tenglik quyidagi ko'rinishni oladi:  $3mn = 4(m-1)(n-1)$  yoki shakl almashtirsak,  $(m-4)(n-1) = 12$  hosil bo'lgan

$$\begin{cases} (m-4)(n-1) = 12 \\ m \geq n \geq 3 \end{cases}$$

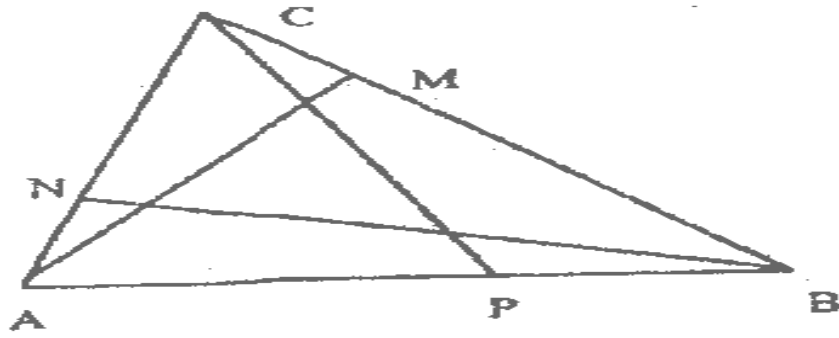
sistema yechimlari (16;5), (10;6) va (8;4) bo'ladi.

$k = 4$  da esa

$$\begin{cases} (m-3)(n-3) = 6 \\ m \geq n \geq 4 \end{cases}$$

bu sistemaning yechimlari (9;4), (6;5) bo'ladi. Shunday qilib bo'yalgan kubiklar soni 60, 72, 84, 90, 120 dan biriga teng bo'ladi.

**17.**  $ABC$  uchburchakda  $M, N, P$  nuqtalar mos ravishda  $BC$ ,  $AC$  va  $AB$  tomonlarda yotsa  $p < AM + BN + CP < 3p$  bo'lishini isbotlang ( $p$  - uchburchak yarim perimetri).



10-chizma

**Yechim:** Uchburchak tengsizligiga ko'ra  $PC > AC - AP$  va  $PC > CB - BP$ . Bu tengsizliklarning mos qismlarini qo'shsak,  $2PC > AC + CB - AP - BP = AC + CB - AB$  ya'ni  $PC > \frac{1}{2}(AC + CB - AB)$  bo'ladi.

Shuningdek,  $BN > \frac{1}{2}(AB + CB - AC)$  va  $AM > \frac{1}{2}(AC + AB - CB)$  u holda

$$AM + BN + CP > \frac{1}{2}(AC + AB + AB + CB + CB + AC - AB - AC - CB) = \frac{AB + BC + AC}{2} = p$$

$CBP$  uchburchakdan  $CP < CB + PB$  va  $ACP$  uchburchakdan  $CP < AC + AP$ .

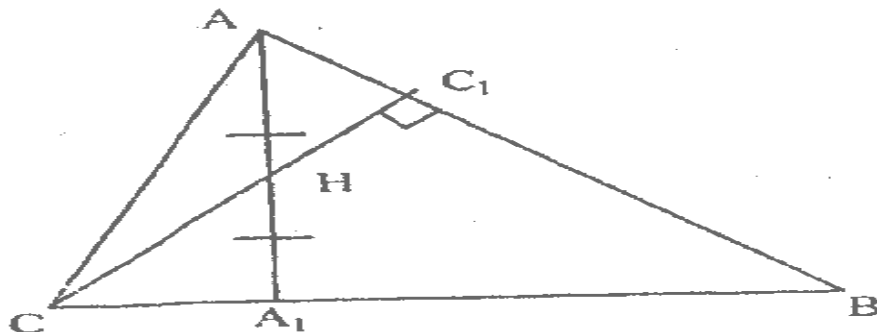
Bulardan

$$CP < \frac{1}{2}(AC + CB + PB + PA) = \frac{AB + BC + AC}{2}$$

yoki  $CP < p$  ni topamiz.

Shuningdek,  $BN < p$  va  $AM < p$ . Ulardan  $AM + BN + CP < 3p$  ni keltirib chiqaramiz. Shunday qilib,  $p < AM + BN + CP < 3p$

**18.**  $ABC$  uchburchakning  $AA_1$  va  $CC_1$  balandliklari uchburchak ichidagi  $H$  nuqtada kesishadi.  $HA = HA_1$  va  $CH = 2HC_1$  ekanligi ma'lum.  $B$  burchakni kattasini toping.



11-chizma

**Yechim:**  $\angle HCA_1 = \angle HAC_1$  ga ko'ra  $\sin \angle HCA_1 = \frac{HA_1}{CH} = \sin \angle HAC_1 = \frac{C_1H}{AH}$  yoki  $\frac{HA_1}{CH} = \frac{C_1H}{AH}$ . U holda berilgan tengliklardan  $HA_1 = \sqrt{2}HC_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}HC$  tenglikni hosil qilamiz.

$HCA$  uchburchakdan  $\sin \angle HCA_1 = \frac{HA_1}{CH} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ya'ni  $\angle HCA_1 = 45^\circ$ . U holda  $\angle B = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ .

**Javob:**  $45^\circ$ .

**19.** Muntazam  $ABC$  uchburchakning  $BC$  tomonini kesib o'tuvchi  $AP$  nurda  $P$  nuqta shunday olinganki,  $\angle APB = 20^\circ$  va  $\angle APC = 80^\circ$  bo'lsa,  $\angle BAP$  ni toping.

**Yechim:** Aytaylik  $\angle BAP = x$  bo'lsin, u holda  $\triangle APB$  va  $\triangle APC$  uchburchaklar uchun Sinuslar teoremasini qo'llaymiz.

$$\frac{AB}{\sin 20^\circ} = \frac{AP}{\sin(180^\circ - (20^\circ + x))} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 20^\circ} = \frac{AP}{\sin(20^\circ + x)}$$

$$\frac{AC}{\sin 30^\circ} = \frac{AP}{\sin(180^\circ - (30^\circ + 60^\circ - x))}$$

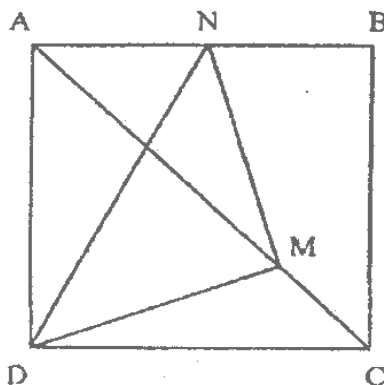
$$2AC = \frac{AP}{\cos x} \text{ bu tengliklarga ko'ra } \frac{AP}{2\cos x} = AC = AB = \frac{AP \cdot \sin 20^\circ}{\sin(20^\circ + x)} \text{ yoki}$$

$$\sin(20^\circ + x) = 2\cos x \sin 20^\circ; \sin(20^\circ - x) = 0 \Rightarrow x = 20^\circ.$$

**Javob:**  $\angle BAP = 20^\circ$ .

**20.**  $N$  nuqta  $ABCD$  kvadrat  $AB$  tomonining o'rtasi,  $AC$  diagonalning biror  $M$  nuqtasi uchun  $AC = 4CM$  bo'lsa, u holda  $\angle DMN = 90^\circ$  ekanligini isbotlang.

**Yechim:**



12-chizma

Kvadratning tomoni  $a$  bo'lsin. U holda  $AC = \sqrt{2}a$ .  $AM = AC = \frac{AC}{4} = \frac{3\sqrt{2}a}{4}$

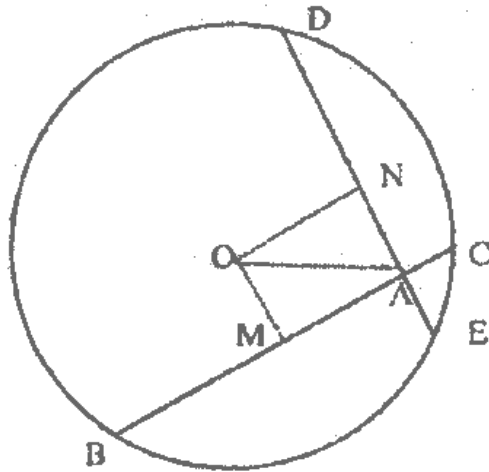
$ADM$  uchburchakda kosinuslar teoremasigako'ra

$$DM^2 = a^2 + \frac{9a^2}{2} - 2a \frac{3\sqrt{2}a}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5a^2}{8}$$

Shuningdek,  $ANM$  uchburchakda  $NM^2 = \frac{5a^2}{8}$ ,  $ADN$  uchburchakda  $DN^2 = \frac{5a^2}{4}$  va  $DMN$  uchburchakda  $DM^2 + MN^2 = \frac{5a^2}{8} + \frac{5a^2}{8} = \frac{5a^2}{4} = DN^2$ . Demak,  $\angle DMN = 90^\circ$ .

**21.** Markazi  $O$  nuqtada bo'lgan  $r$  radiusli aylananing ichida  $A$  nuqta ( $OA < r$ ) belgilangan.  $A$  nuqtadan o'tuvchi o'zaro perpendikulyar  $BC$  va  $DE$  vatarlarning qanday holatida  $BC + DE$  yig'indining qiymati eng katta bo'ladi.

**Yechim:** Aytaylik,  $M$  va  $N$  nuqtalar mos ravishda  $BC$  va  $DE$  vatarlarning o'rtalari bo'lsin. U holda  $OM \perp BC$  va  $ON \perp DE$  bo'ladi.



13-chizma

Ulardan  $BC = 2BM = 2\sqrt{r^2 - OM^2}$ ;  $DE = 2DN = 2\sqrt{r^2 - ON^2}$  bu tengliklardan foydalansak,

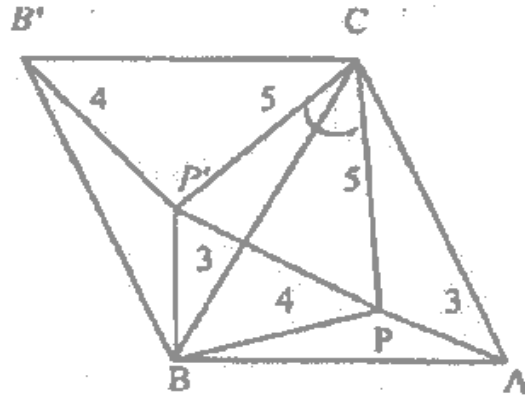
$$\begin{aligned} (BC + DE)^2 + (BC - DE)^2 &= 2(BC^2 + DE^2) = 8(r^2 - OM^2 + r^2 - ON^2) = \\ &= 8(2r^2 - OM^2 - ON^2) = 16r^2 - 8AO^2 \end{aligned}$$

bo'ladi. Demak,  $(BC + DE)^2 = 16r^2 - 8AO^2 - (BC - DE)^2$ .

Bundan  $AO$  uzunlik o'zgarmas bo'ganligi uchun  $BC + DE$  ifoda o'zining eng katta qiymati  $2\sqrt{4r^2 - 2AO^2}$  ga faqatgina  $BC - DE = 0$  yoki  $BC = DE$  bo'lganda erishishi kelib chiqadi.

**22.** Teng tomonli uchburchakning ichida olingan nuqtadan uchburchak uchlarigacha bo'lgan masofalar 3, 4, 5 birlikka ega. Uchburchakning yuzini toping.

**Yechim:**  $ABC$  berigan muntazam uchburchak bo'lsin.  $P$  esa uning ichidagi nuqta.  $PA = 3, PB = 4, PC = 5$  bo'lsin.  $ABC$  uchburchakning  $C$  uchi atrofida  $60^\circ$  ga bursak,  $A$  nuqta  $B$  nuqtaga,  $P$  nuqta  $P'$  nuqtaga o'tadi. U holda  $P'B = PA = 3, P'B' = PB = 4, P'C = PC = 5$  va  $CPP'$  uchburchak teng tomonli bo'ladi.



14-chizma

Demak,  $BPP'$  to'g'ri burchakli uchburchak, chunki  $PB'^2 + BP^2 = PP'^2$ .  $APB$  va  $BP'B'$  uchburchaklardan  $\angle ABP + \angle BAP = \angle ABP + \angle B'BP' = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$ . Bundan  $\angle APB = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ . Kosinuslar teoremasiga ko'ra,

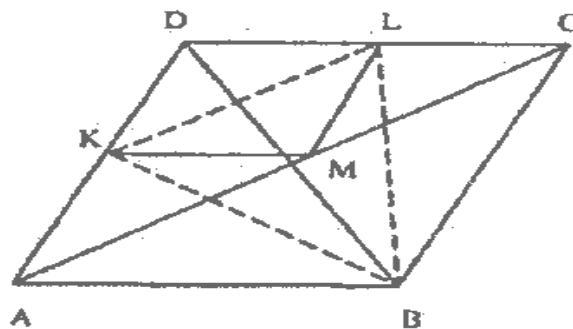
$$AB^2 = BP^2 + PA^2 - 2BP \cdot PA \cdot \cos \angle BPA = 25 + 12\sqrt{3}.$$

U holda,  $S = \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2 = \frac{36 + 25\sqrt{3}}{4}$ .

**Javob:**  $S = \frac{36 + 25\sqrt{3}}{4}$ .

**23.**  $ABCD$  rombda  $\angle DAB = 60^\circ$  bo'lsin. Rombning  $AD$  va  $DC$  tomonlarida mos ravishda  $K$  va  $L$  nuqtalar,  $AC$  diagonalidan esa  $M$  nuqta shunday tanlanganki,  $KDLM$  parallelogramm bo'ladi.  $KBL$  uchburchak teng tomonli ekanligini isbotlang.

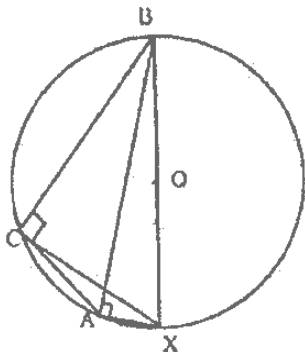
**Yechim:** Shartga ko'ra  $ML \parallel AD$  va  $ADC$  teng yonli uchburchak bo'lgani uchun  $KD = LM = LC$  bo'ladi. Demak,  $\square KBD = \square LBC$  yoki  $BK = BL$  bo'ladi, chunki  $\angle KDB = \angle LCB = 60^\circ$ ,  $BD = BC$ . Bundan tashqari  $\angle KBD = \angle LBC$  va  $\angle KBL + \angle KBD + \angle DBL = \angle LBC + \angle DBL = 60^\circ$ . Shunday qilib,  $KBL$ -teng tomonli uchburchak.



15-chizma

**24.** Tomonlari  $a, b, c$  va tashqi chizilgan aylana radiusi  $R$  bo'lgan uchburchak  $a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2$  bo'lganda va faqat shu holdagina to'g'ri burchakli bo'lishini isbotlang.

**Yechim:** Tomonlari  $a, b, c$  bo'lganda  $ABC$  uchburchak markazi  $O$  nuqtada va radiusi  $R$  bo'lgan  $BX$  diametrli aylana ichki chizilgan.  $AX = h$  va  $CX = k$  bo'lsin. Agar  $h = 0$ ,  $k = 0$  bo'lsa, u holda  $\angle CAB = 90^\circ$  va  $8R^2 = (2R)^2 + (2R)^2 = c^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$ .  $k \neq 0$  va  $h \neq 0$  bo'lsin. U holda  $\angle BAX = \angle BCX = 90^\circ$  ekanligidan  $h^2 + c^2 = 4R^2$  va  $k^2 + a^2 = 4R^2$  yoki  $8R^2 = a^2 + c^2 + k^2 + h^2$ . Agar  $a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2$  bajarilsa,  $k^2 + h^2 = b^2$  ham bajariladi. Bu yerdan esa  $\angle CXA = 90^\circ$  va  $\angle CXA = \angle CBA$  tenglikdan  $ABC$  uchburchak to'g'ri burchakli uchburchak ekanligi kelib chiqadi.



16-chizma

**25.** Har bir tomoni 1 santimetrdan kichik bo'lgan uchburchakning yuzi, har bir tomoni 100 metrdan katta bo'lgan uchburchak yuzidan katta bo'lishi mumkinmi?

**Yechim.** Masala shartini tekshirish uchun bitta misol keltirish yetarli. Birinchi uchburchak sifatida, tomoni  $\frac{1}{2}$  santimetr bo'lgan muntazam uchburchakni olamiz.

Uning yuzi  $\frac{\sqrt{3}}{16} \text{ sm}^2$  ga teng.

Ikkinchi uchburchak sifatida asosi 200 metr va balandligi  $10^{-7}$  metr bo'lgan teng yonli uchburchakni olamiz. Uning yon tomoni asosining yarmidan katta, ya'ni 100 metrdan oshiq. Bu uchburchakning yuzi  $10^{-7} \text{ m}^2$  ga teng.

**Javob.** Mumkin.

**26.** Ichki chizilgan  $ABCD$  to'rtburchakda  $AB = AD \cdot BC$  va  $CD$  tomonlarda  $MN = BN + DM$  tenglikni qanoatlantiradigan mos ravishda  $N$  va  $M$  nuqtalar olingan. Ma'lumki,  $AM$  va  $AN$  to'g'ri chiziqlar  $ABCD$  ga tashqi chizilgan aylananani ikkinchi marta  $P$  va  $Q$  nuqtalarda kesadi.  $APQ$  uchburchak balandliklarining kesishish nuqtalari  $MN$  kesmada yotishini isbotlang.

**Yechim.**  $MD$  kesmani  $D$  nuqtaning davomida  $DK = NB$  tenglikni qanoatlantiruvchi  $K$  nuqtani olaylik. Demak,  $\angle KDA = 180^\circ - \angle ADC = \angle ABN$ ,  $DA = AB$  va  $DK = NB$  bundan  $\triangle KDA = \triangle NBA$ . Demak,  $KA = AN$  va  $MK = MD + DK = MD + NB = MN$ . Bundan  $\triangle KMA = \triangle NMA$  va  $\angle DMA = \angle NMA$  munosabatlarni hosil qilamiz. Xuddi shunday,  $\angle MNA = \angle BNA$  tenglikni hosil qilishimiz mumkin.

$MN$  kesmada  $MH = MD$  tenglikni qanoatlantiradigan  $H$  nuqtani olamiz. Ravshanki,  $NH = BN$ .  $\angle DMA = \angle HMA$  va  $MD = MH$  bo'lgani uchun  $D$  va  $H$

nuqtalar AP ga nisbatan simmetrik. Xuddi shunday, B va H nuqtalar AN ga nisbatan simmetrik. Demak,  $\angle DAB = 2\angle MAN$  va

$$\angle HPA = \angle DPA = \angle ABD = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle DAB = 90^\circ - \angle MAN.$$

Bundan  $PH \perp AQ$ . Xuddi shunday,  $QH \perp AP$  bo'lishi isbotlanadi. Bundan APQ uchburchak balandliklari H nuqtada yotishi kelib chiqadi.

**27.** Katakli qog'oz chiziqlari yordamida hosil qilingan to'g'ri to'rtburchak quyidagi figuralarga bo'lingan:

1) asosi ikkita katakdan hosil qilingan teng yonli to'g'ri burchakli uchburchaklar;

2) bitta katakdan hosil qilingan kvadratlar;

3) kataklarning ikkita tomoni va ikkita diagonalidan hosil qilingan parallelogrammdir.

(Barcha figuralar yuzalari 1 ga teng bo'lib, ixtiyoriycha oriyentirlangan bo'lishi mumkin).

Uchinchi tur figuralar soni juft bo'lishini isbotlang.

**Yechim. 1-usul.** Barcha parallelogrammlarni ikkita guruhga ajratamiz: vertikal va gorizontal. Quyidagi gorizontal bo'yashni qaraymiz:

Ravshanki, bu bo'yashda oq va qora sohalarning yuzalari teng.

E'tibor bersak, ikkinchi turdagi figuralar (ya'ni kvadratlar) qora va oq

qismlarining yuzalari  $\frac{1}{2}$  ga teng. Boshqa tarafdin uchburchaklardagi qora

qismining yuzasi yoki  $\frac{3}{4}$  ga (bu holda biz uchburchakni deyarli qora deb ataymiz)

yoki  $\frac{1}{4}$  ga teng (bu holda biz uchburchakni deyarli oq deb ataymiz) bo'lishi

mumkin. Xuddi shunday, parallelogramdagi qora qismining yuzasi yoki  $\frac{3}{4}$  ga (bu

holda biz parallelogramni deyarli qora deb ataymiz) yoki  $\frac{1}{4}$  ga teng (bu holda

parallelogramni deyarli oq deb ataymiz) bo'lishi mumkin.

Faraz qilamiz, bizda a ta kvadrat, b ta gorizontal parallelogram, c ta vertikal parallelogram va d ta uchburchak mavjud bo'lsin.  $b+c$  sonining juft ekanligini

isbotlash yetarli.  $c = c_1 + c_2, d = d_1 + d_2$  bo'lsin, bu yerda  $c_1, c_2, d_1, d_2$  sonlar mos

ravishda deyarli oq vertikal parallelogramlar, deyarli qora vertikal

parallelogramlar, deyarli oq uchburchaklar va deyarli qora uchburchaklar sonlari.

Oq va qora sohalari yuzalari teng bo'lganligi uchun

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{3}{4}c_1 + \frac{1}{4}c_2 + \frac{3}{4}d_1 + \frac{1}{4}d_2 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c_1 + \frac{3}{4}c_2 + \frac{1}{4}d_1 + \frac{3}{4}d_2$$

demak,  $c_1 + d_1 = c_2 + d_2$ .

Xuddi shunday, agar biz vertikal bo'yashni qarasak,  $b_1 + d_3 = b_2 + d_4$

tenglikka ega bo'lamiz, bu yerda  $b_1$  va  $b_2$  sonlar yangi bo'yash natijasida hosil

bo'lgan, mos ravishda deyarli oq va deyarli qora gorizontal parallelogramning

sonlari.  $(b_1 + b_2 = b)$ ,  $d_3$  va  $d_4$  sonlar yangi bo'yash natijasida hosil bo'lgan mos ravishda deyarli oq va deyarli qora uchburchaklar sonlari  $(d_3 + d_4 = d = d_1 + d_2)$ .

Yuqorilardagidan

$$b + c = b_1 + b_2 + c_1 + c_2 = 2b_2 + 2c_2 + d_4 + d_2 - (d_1 + d_3) = 2b_2 + 2c_2 + 2d - 2d_3 - 2d_1$$

tenglikni hosil qilamiz, ya'ni  $b+c$  soni juft son ekan.

**2-usul.** Berilgan jadvalni har bir katagini dioganallar o'tkazish orqali to'rtta bir xil teng yonli to'g'ri burchakli uchburchakka ajratamiz. Endi hosil qilingan uchburchakning ichiga 0 va 1 sonlarini quyidagicha tartibda joylashtirib chiqamiz.

Ko'rib turganingizdek, har bir katakning ichida 0 va ikkita 1 sonlari joylashgan. Demak, har bir katak ichidagi sonlar yig'indisi 2 ga teng. Bundan berilgan jadval ichidagi barcha sonlar yig'indisi juft ekanligi kelib chiqadi.

Endi har bir shakl ichidagi sonlar yig'indisini aniqlaymiz. Ravshanki, bunda

a) har bir kvadrat ichidagi sonlar yig'indisi 2 ga teng, ya'ni juft son.

b) har bir teng yonli, to'g'ri burchakli uchburchak ichidagi sonlar yig'indisi 0, 2 yoki 4 ga teng.

Bundan kelib chiqadiki, har bir uchburchak ichidagi sonlar yig'indisi juft son ekan.

c) Har bir parallelogramm ichidagi sonlar yig'indisi toq son ekan.

Demak, har bir parallelogramm ichidagi sonlar yig'indisi toq son ekan.

Jadvaldagi barcha sonlar yig'indisi ham, barcha kvadratlar va uchburchaklar ichidagi sonlar yig'indisi ham juft ekanligidan barcha parallelogrammlar ichidagi sonlar yig'indisi juft bo'lishi kelib chiqadi.

Endi faraz qilaylik, jadval ichidagi parallelogrammlar soni toq bo'lsin. U holda c) dan barcha parallelogrammlar ichidagi sonlar yig'indisi toq son ekanligi kelib chiqadi. Demak, parallelogrammlar soni juftdir.

**28.** Muntazam  $n$ -burchakning har bir uchida bittadan fishka joylashgan. Bitta yurishda ixtiyoriy ikkita qo'shni fishkalar joylari bilan almashtirmoqda. Eng kam bilan nechta qadamda har bir fishkani soat strelkasi bo'yllab  $\left[\frac{n}{2}\right]$  ta pozitsiyaga siljitish mumkin.

**Yechim.** Juft va toq hollarni alohida-alohida ko'rib chiqamiz.

1)  $n$ -juft son bo'lsin. Bu holda  $n=2k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Masala shartiga ko'ra, har bir fishka soat yo'nalishi bo'yicha  $k$  ta o'rin almashishi kerak. Demak har bir fishkalar uchun eng kamida  $2k \cdot k = k^2$  ta o'rin almashtirishi kerak. Har bir qadamda ikkita yonma-yon fishkaning o'rnini almashtiramiz. Demak, har bir qadamda ikkita o'rin almashtirishga egamiz. Masala shartini qanoatlantirishi uchun eng kamida  $\frac{2k \cdot k}{2} = k^2$  ta qadam kerak. Endi  $k^2$  ta qadamda bajarish mumkinligini ko'rsatib beramiz.

Fishkalarini tartib bilan 1 dan  $2k$  gacha raqamlab chiqamiz. Endi  $1, 2, 3, \dots, k$  larni soat strelkasiga qarshi navbat bilan  $k$  qadamdan yuritimiz. Bu holda biz jami  $k^2$  qadamni amalga oshirdik. Biz aytilgan natijaga erishdik va qadamlar soni ham  $k^2$  ga tengdir. Demak,  $n=2k$  bo'lsa, eng kamida  $k^2$  ta qadamda amalga oshirish mumkin.

2)  $n$  toq son bo'lsin. Bu holda  $n=2k+1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Eslatish joizki, yuqorida  $n$  juft bo'lgan holda birorta fishkani aytilgan joyga kelishi uchun soat strelkasi bo'yicha ham, soat strelkasiga qarama-qarshi harakati ham bir xil sondagi (faqat  $k$  ta) qadamni talab qilar edi. Lekin  $n$  toq bo'lgani uchun bu jarayonga soat strelkasi bo'yicha  $k$  ta, soat strelkasiga qarshi esa  $k+1$  ta qadam kerak bo'ladi. Bundan tashqari, bitta fishkaning soat strelkasi bo'yicha harakati ikkinchisining qarama-qarshi harakatlanishiga olib keladi. Ya'ni bitta qadamda bitta fishka soat strelkasi bo'yicha harakatlanadi, ikkinchisi esa soat strelkasiga qarshi harakatlanadi. Demak, kamida bitta fishka topiladiki, u yangi holatga o'tish uchun soat strelkasi bo'yicha harakatlangan. O'sha fishka nomeri 1 bo'lsin. U holda bu fishka kamida  $k$  ta fishkani soat strelkasiga qarshi harakatlantiradi. Demak, kamida  $k$  ta fishka yangi holatga o'tishi uchun kamida  $k+1$  ta harakat qilishi kerak.

Ixtiyoriy  $m$  ta fishka  $k+1$  ta harakat bilan,  $2^k + 1 - m$  tasi esa  $k$  ta harakat bilan yangi joyga o'tgan bo'lsin. U holda kamida  $[m(k+1) + (2k+1-m)k]/2$  ta qadam kerak bo'ladi. (1) ga ko'ra  $m \geq k$ , demak,  $[m(k+1) + (2k+1-m)k] \geq k^2 + k$ .

Endi  $k^2 + k$  ta qadamda mazkur jarayonni amalga oshirish mumkinligini ko'rsatib beramiz.

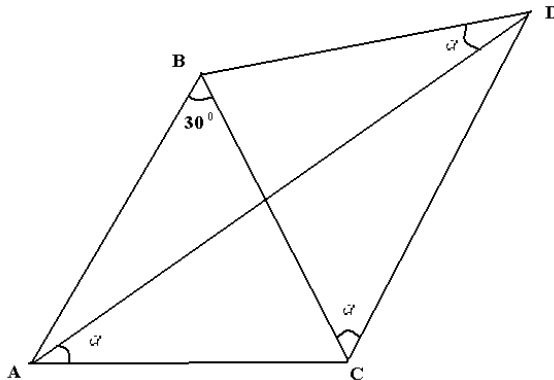
$1, \dots, k$  sonlarini soat strelkasiga qarama-qarshi  $k+1$  qadamdan navbat bilan yuritimiz. Buning natijasida har bir fishka o'z holatini soat strelkasi bo'yicha  $k$  taga o'zgartiradi va qadamlar soni ham  $k(k+1) = k^2 + k$  ga teng.

Ikkala hol uchun ham masala to'liq yechiladi. Javobni umumiy holda yozadigan bo'lsak,  $\left[ \frac{n}{2} \right] \cdot \left[ \frac{n+1}{2} \right]$  ga teng.

**Javob:**  $\left[ \frac{n}{2} \right] \cdot \left[ \frac{n+1}{2} \right]$

29.  $\triangle ABC$  da  $\angle B = 30^\circ$ ,  $\angle A = \angle C = 75^\circ$ .  $D$  nuqta shundan tanlanganki,  $\angle DAC = \angle DCB = \angle BDA = \alpha$  tenglik o'rinli.  $\alpha$  ni toping.

**Yechimi.**  $\angle CBD = 75^\circ$ ,  $\angle BAD = 75^\circ - \alpha$ ,  $\angle ADC = 105^\circ - 2\alpha$



17-chizma

$\Delta BDC$  dan, sinuslar teoremasiga ko'ra,

$$\frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\sin(75^\circ + \alpha)},$$

bundan

$$\frac{BD}{BC} = \frac{\sin \alpha}{\sin(75^\circ + \alpha)} \quad (1)$$

Shunga o'xshash,  $\Delta ABD$  dan sinuslar teoremasiga ko'ra,

$$\frac{AB}{BD} = \frac{\sin \alpha}{\sin(75^\circ - \alpha)} \quad (2)$$

(1) va (2) tengliklarni hadma-had ko'paytiramiz:

$$\sin 2\alpha = \sin(75^\circ - \alpha) \cdot \sin(75^\circ + \alpha),$$

Bundan esa:

$$\frac{1 - \cos^2 \alpha}{2} = \frac{1}{2} (\cos^2 \alpha - \cos 150^\circ),$$

$$2 \cos 2\alpha = 1 - \cos 30^\circ, \quad \cos 2\alpha = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}.$$

Demak, javob:  $\alpha = \frac{1}{2} \arccos \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$ .

**Eslatma:** Ixtiyoriy  $ABC$  uchburchakda  $P_1$  va  $P_2$  nuqtalar uchun  $\angle P_1AC = \angle P_1CB = \angle P_1BA = \gamma_1$ ,  $\angle P_2AB = \angle P_2BC = \angle P_2CA = \gamma_2$  bo'lsa (2-shakl),  $P_1$  nuqta o'ng Broker nuqtasi,  $P_2$  nuqta esa chap Broker nuqtasi deyiladi.  $\gamma_1$  va  $\gamma_2$  burchaklar mos ravishda o'ng va chap Broker burchaklari deyiladi. Broker burchaklari uchun  $\operatorname{ctg} \gamma_1 = \operatorname{ctg} \gamma_2 + \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma$  tenglik o'rinli, bunda  $\alpha, \beta, \gamma$  lar  $ABC$  uchburchakning burchaklaridir. (chizma)

**30.** Bir nuqtadan o'tuvchi va umumiy to'g'ri chiziqqa ega bo'lmagan 4 ta tekislik, fazoni necha qismga ajratadi?

**Yechim.** Uchta  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  tekislik fazoni 8 qismga ajratadi. Masalan, fazodagi koordinatalar sistemasi. Agar to'rtinchi  $\alpha_4$  tekislikni ularning umumiy nuqtasidan o'tkazsak,

Bu tekislik avvalgi uchta bilan shu nuqtadan o'tuvchi uchta to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi. Bu to'g'ri chiziqlar  $\alpha_4$  tekislikni 6 ta burchakka ajratadi.

Demak,  $\alpha_4$  tekislik  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  tekisliklar hosil qilgan 8 ta qismning 6 tasi bilan kesi-shadi va har birini 2 ta qismga ajratadi. Shuning uchun yana 6 ta qism qo'shiladi.

**Javob:** 4 ta tekislik, fazoni 14 ta qismga ajratadi.

### Mustaqil yechish uchun masalalar

**1.** O'tkir burchakli  $ABC$  uchburchakning barcha tomonlari har xil.  $O, I, H$  nuqtalar mos ravishda  $ABC$  ga tashqi chizilgan aylana markazi, ichki chizilgan aylana markazi va balandliklarni kesishish nuqtasi bo'lsin. Quyidagilarni isbotlang:

a)  $\angle OIH > 90^\circ$

b)  $\angle OIH > 135^\circ$

**2.** Uchburchak  $ABC$  ning ichida  $O$  nuqta shunday olinganki, bunda

$\angle ABO = \angle CAO, \angle BAO = \angle BCO, \angle BOC = 90^\circ$ . U holda  $AC : OC$  nisbatni hisoblang.

**3.**  $ABC$  teng yonli bo'lmagan va o'tkir burchakli uchburchak bo'lib,  $C_0$  va  $B_0$  nuqtalar mos ravishda  $AB$  va  $AC$  tomonlarni o'rtalaridir.  $O$  nuqta  $ABC$  uchburchakka tashqi chizilgan aylana markazi,  $H$  nuqta esa balandliklar kesishgan nuqtadir.  $BH$  va  $OC_0$  to'g'ri chiziqlar  $P$  nuqtada,  $CH$  va  $OB_0$  to'g'ri chiziqlar esa  $Q$  nuqtada kesishadi. Agar  $OPHQ$  to'rtburchak romb bo'lsa, u holda  $A, P$  va  $Q$  nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotishini isbotlang.

**4.** Uchburchak  $ABC$  ning  $BB_1$  va  $CC_1$  bissektrisalari o'tkazilgan. Ma'lumki, uchburchak  $BB_1C_1$  ga tashqi chizilgan aylana markazi  $AC$  to'g'ri chiziqda yotadi.  $ABC$  uchburchakning  $C$  burchagini toping.

**5.**  $ABCD$  qavariq to'rtburchakda  $AB \cdot CD = AD \cdot BC$  tenglik o'rinli bo'lsa, u holda  $\angle BAC + \angle CBD + \angle DCA + \angle ADB = 180^\circ$  tenglikni isbotlang.

**6.**  $ABC$  uchburchakka ichki chizilgan aylananing  $O$  markazidan  $AO$  to'g'ri chiziqqa perpendikulyar o'tuvchi to'g'ri chiziq  $BC$  to'g'ri chiziqni  $M$  nuqtadan kesib o'tadi.  $O$  nuqtadan  $AM$  to'g'ri chiziqqa  $OD$  perpendikulyar tushirilgan.  $A, B, C$  va  $D$  nuqtalar bitta aylanada yotishini isbotlang.

**7.** Teng yonli bo'lmagan  $ABC$  o'tkir burchakli uchburchakda  $AA'$  va  $CC'$  balandliklar o'tkazilgan.  $H$  balandliklarning kesishish nuqtasi,  $O$ -tashqi chizilgan aylana markazi,  $B_0 - AC$  tomonning o'rtasi.  $BO$  to'g'ri chiziq  $AC$  tomonni  $P$  nuqtada kesib o'tadi,  $BH$  va  $A_1C_1$  to'g'ri chiziqlar esa  $Q$  nuqtada kesishadi.  $HB_0$  va  $PQ$  to'g'ri chiziqlar parallel ekanligini isbotlang.

**8.** Rombning tomoni diagonallarining o'rta geometrigiga teng bo'lsa, rombning o'tkir burchagini toping.

**9.** To'g'ri burchakli uchburchakning  $a, b, c$  tomonlari geometrik progressiya tashkil qiladi va  $abc = 1$ . Uchburchak tomonlarini toping.

**10.**  $ABCD$  trapetsiyada ( $BC \parallel AD$ ),  $2AB = CD, BC < AD, \angle BAD + \angle CDA = 120^\circ$  munosabatlar o'rinli bo'lsa, trapetsiyalarning burchaklarini hisoblang.

**11.** Yuzasi  $S_1$  va perimetri  $P_1$  bo'lgan uchburchakning ichida yuzasi  $S_2$  va perimetri  $P_2$  bo'lgan boshqa uchburchak joylashgan. Ushbu  $2 \cdot \frac{S_1}{P_1} > \frac{S_2}{P_2}$  tengsizlikni isbotlang.

**12.** Markazi  $O$  nuqtada bo'lgan aylanada  $AB$  va  $CD$  O'zaro perpendikulyar vatarlar  $E$  nuqtada kesishadi.  $N$  va  $T$  nuqtalar mos ravishda  $AC$  va  $BD$  kesmalarning o'rtalari bo'lsa,  $ENOT$  to'rtburchak parallelogram ekanligini isbotlang.

**13.** Tomonlari uzunliklari  $a, b, c$  bo'lgan uchburchak yuzi  $S$  bo'lsin.  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$  tengsizlik o'rinli bo'lishini isbotlang. Qaysi hollarda tenglik o'rinli bo'ladi?

**14.**  $ABC$  uchburchakning  $AP$  va  $BQ$  bissektrisalari o'tkazilgan. Agar  $\angle BAC = 60^\circ$  va  $AB + BC = AQ + QB$  bo'lsa,  $ABC$  uchburchak burchaklarini toping.

**15.** Qavariq to'rtburchakning yuzi  $32 \text{ sm}^2$ , ikki qarama-qarshi tomoni va bitta diogonalni yig'indisi  $16 \text{ sm}$  ga teng. Ikkinchi diogonalni qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlarini toping.

**16.**  $I$  nuqta  $ABC$  uchburchakka ichki chizilgan aylananing markazi bo'lsin. Uchburchakning ichida  $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$  tenglikni qanoatlantiruvchi  $P$  nuqta tanlangan.  $AP \geq AI$  tengsizlik va  $AP = AI$  tenglik bajarilishi uchun  $P = I$  bo'lishi zarur va yetarli ekanligini isbotlang.

**17.** Muntazam uchburchakli piramidani kesuvchi tekislik  $S$  uchidan boshlab hisoblaganda  $SA, SB, SC$  yon qirralarini mos ravishda  $2:3, 3:2, 4:5$  nisbatda kesib o'tadi. Shu tekislik uning balandligini qanday nisbatdagi kesmalarga ajratadi.

**18.**  $ABC$  teng yonli uchburchakning ( $AB = BC$ )  $AB$  tomoniga  $M$  nuqtada urinuvchi aylana chizilgan.  $CM$  kesma aylana bilan  $N$  nuqtada,  $BD$  balandlik esa  $P$  nuqtada kesishadi.  $MN : NC = 13 : 5$  munosabat o'rinli ekanligini bilgan holda,  $MP : PN$  nisbatni toping.

**19.** Agar aylanaga barcha burchaklari o'zaro teng bo'lgan qavariq beshburchak ichki chizilgan bo'lsa uning muntazam beshburchak ekanligini isbotlang?

**20.** Dioganallari o'zaro perpendikulyar bo'lgan trapetsiyaning balandligi  $4$  ga teng. Agar bu trapetsiyaning dioganallaridan birining uzunligi  $5$  ga teng bo'lsa, uning yuzini toping?

**21.**  $ABC$  uchburchakda  $\angle ACB = 90^\circ$ .  $D$  nuqta  $AC$  tomonda,  $K$  nuqta  $BD$  kesmada shunday olinganki, bunda  $\angle ABC = \angle KAD = \angle AKD$ .  $BK = 2DC$  tenglik bajarilishini isbotlang.

**22.**  $ABC$  uchburchakda  $B_0$  nuqta  $AC$  tomonning o'rtasi.  $A_1$  va  $C_1$  nuqtalar mos ravishda  $ABB_0$  va  $CBB_0$  uchburchaklarga ichki chizilgan aylanalar markazlari.  $A_2$  nuqta  $ABB_0$  uchburchakning  $AB$  tomoniga urinuvchi ichki-tashqi aylanasi markazi.  $C_2$  nuqta  $CBB_0$  uchburchakning  $CB$  tomoniga urinuvchi ichki-tashqi aylanasi markazi.  $A_1A_2C_2C_1$  to'rtburchak aylanaga ichki chizilgan ekanligini isbotlang.

**23.**  $O$  nuqta  $ABC$  uchburchakka tashqi chizilgan aylana markazi.  $\omega$  aylana  $A$  va  $C$  nuqtalardan o'tadi, hamda  $AO$  va  $CO$  to'g'ri chiziqlarga urinadi.  $BA$  va  $BC$  to'g'ri chiziqlar  $\omega$  aylanani mos ravishda  $M$  va  $N$  nuqtalarda kesadi.  $MN$  kesma  $\omega$  aylananing diametri ekanligini isbotlang.

**24.**  $ABC$  uchburchakka ichki chizilgan aylana uning  $BC, CA, AB$  tomonlariga mos ravishda  $A_1, B_1, C_1$  nuqtalarda urinadi.  $AA_1$  kesma ichki

chizilgan aylanani ikkinchi marta  $Q$  nuqtada kesadi.  $l$  to'g'ri chiziq  $A$  nuqtadan o'tadi va  $BC$  ga parallel. Agar  $A_1C_1$  va  $A_1B_1$  to'g'ri chiziqlar  $l$  to'g'ri chiziqni mos ravishda  $P$  va  $R$  nuqtalarda kesib o'tsa,  $\angle PQR = \angle B_1QC_1$  tenglikni isbotlang.

**25.**  $SA \leq 4$ ,  $SB \geq 7$ ,  $SC \geq 9$ ,  $AB = 5$ ,  $BC \leq 6$ ,  $AC \leq 8$  shartlarni qanoatlantiradigan  $SABC$  piramida hajmining eng katta qiymatini toping.

**26.**  $ABCD$  trapetsiyada  $BC = 4$ ,  $AD = 9$ ,  $BC \parallel AD$ . Mos ravishda  $AB$  va  $CD$  tomonlariga tegishli  $K$  va  $L$  nuqtalar uchun  $\angle BCK = \angle ACK$ ,  $\angle CAL = \angle DAL$  va  $KL \parallel AD$ .  $AC$  diagonal uzunligini toping.

**27.**  $O$  nuqta  $ABCD$  to'rtburchakga ichki chizilgan aylananing markazi. Agar  $AOB$ ,  $BOC$  va  $COD$  uchburchaklarning perimetrlari o'zaro teng bo'lsa,  $ABCD$  to'rtburchak romb ekanligini isbotlang.

**28.** O'tkir burchakli  $ABC$  uchburchakda  $AA_1$  va  $BB_1$  balandliklar o'tkazilgan. Ma'lumki,  $ABC$  uchburchakka tashqi chizilgan aylana markazi  $A_1B_1$  kesmada yotadi.  $\sin \angle A \cdot \sin \angle B \cdot \cos \angle C$  ko'paytmaning qiymatini toping.

**29.** Agar berilgan  $ABC$  uchburchakning  $A$  burchagi  $75^\circ$ ,  $CN$  balandligi  $AB$  tomon yarimiga teng bo'lsa, u holda  $CAB$  burchak topilsin.

**30.** Ikkita aylana  $K$  nuqtada tashqi tomondan urinadi.  $AB$  to'g'ri chiziq birinchi aylanaga  $A$  nuqtada ikkinchi aylanaga esa  $B$  nuqtada urinadi.  $BK$  to'g'ri chiziq birinchi aylanani  $D$  nuqtada,  $AK$  to'g'ri chiziq ikkinchi aylanani  $C$  nuqtada kesib o'tadi. Agar birinchi va ikkinchi aylanalarning radiuslari mos ravishda 4 va 1 ga teng bo'lsa,  $AKB$  uchburchak yuzasini hisoblang.

### 3. OLIMPIADA TESTLARI

#### Olimpiada testlari va ularning yechimlari

**1.**  $4^x = 125$ ,  $8^y = 5$  bo'lsa,  $\frac{2x-y}{y}$  ni toping?

**A)** 8      **B)** -6      **C)** 1      **D)** 6

**Yechish:**  $4^x = 125$

$$x = \log_4 125 = \frac{3}{2} \log_2 5$$

$$8^y = 5$$

$$y = \log_8 5 = \frac{1}{3} \log_2 5$$

$$\frac{2x-y}{y} = \frac{2x}{y} - 1 = \frac{2 \cdot \frac{3}{2} \log_2 5}{\frac{1}{3} \log_2 5} - 1 = 9 - 1 = 8.$$

**2.** Hisoblang?  $\frac{10^{n+1} - 10^{n-1}}{10^{n+1} + 10^n}$

**A)**  $\frac{99}{100}$       **B)**  $\frac{9}{100}$       **C)**  $\frac{11}{9}$       **D)**  $\frac{9}{10}$

**Yechish:**  $\frac{10^{n+1} - 10^{n-1}}{10^{n+1} + 10^n} = \frac{10^{n-1}(10^2 - 1)}{10^n(10 + 1)} = \frac{1}{10} \cdot \frac{99}{11} = \frac{9}{10}$

3. Natural  $m$  va  $n$  sonlar uchun  $\frac{m}{4} + n = 8$  bo'lsa,  $m$  qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlar ichida eng kattasini toping?

A) 16      B) 20      C) 24      **D) 28**

**Yechish:**  $m$  eng katta qiymatni qabul qilishi uchun  $n$  eng kichik natural qiymatni qabul qilishi kerak.  $\frac{m}{4} + 1 = 8$ ,  $\frac{m}{4} = 7$ ,  $m = 28$

4.  $133^2 - 129^2 = 2x$  bo'lsa,  $x$  ni toping?

A) 131      B) 262      C) 346      **D) 524**

**Yechish:**  $133^2 - 129^2 = (133 - 129)(133 + 129) = 4 \cdot 262 = 2x$ ;  $x = 524$

5.  $x^2 + px + 6 = 0$  tenglama ildizlari ayirmasining kvadrati 40 ga teng.  $p$  ning qiymatini toping?

**A) -8;8**      B) 8      C) -8      D) 4

**Yechish:**  $x^2 + px + 6 = 0$

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = 6$$

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 40$$

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = p^2$$

$$x_1 + x_2 = p^2 - 12$$

$$p^2 - 12 - 12 = 40$$

$$p^2 = 64$$

$$p = \pm 8$$

6. Agar  $\sqrt{25 - x^2} - \sqrt{15 - x^2} = 2$  bo'lsa,  $\sqrt{25 - x^2} + \sqrt{15 - x^2}$  yig'indi nimaga teng?

A) -5      B) 3      **C) 5**      D)  $\frac{2}{3}$

**Yechish:**  $\sqrt{25 - x^2} = 2 + \sqrt{15 - x^2}$

$$25 - x^2 = 4 + 4\sqrt{15 - x^2} + 15 - x^2$$

$$6 = 4\sqrt{15 - x^2}$$

$$3 = 2\sqrt{15 - x^2}$$

$$9 = 4(15 - x^2)$$

$$\frac{9}{4} = 15 - x^2 \quad x^2 = 15 - \frac{9}{4} \quad x^2 = \frac{51}{4}$$

$$\sqrt{25 - x^2} + \sqrt{15 - x^2} = \sqrt{25 - \frac{51}{4}} + \sqrt{15 - \frac{51}{4}} = \sqrt{\frac{49}{4}} + \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

7. Berilgan to'rtta sonning har biri uchni qo'shib, so'ngra ularning har birini ikkiga ko'paytirib chiqqach, hosil bo'lgan sonlar yig'indisi 70 ga teng bo'lgan. Berilgan sonlar yig'indisi nechaga teng?

A) 18      **B) 19**      C) 23      D) 21

**Yechish:**  $x, y, z, k$

$$2(x+3) + 2(y+3) + 2(z+3) + 2(k+3) = 70$$

$$x + y + z + k + 12 = 35$$

$$x + y + z + k = 23$$

8.  $\sqrt{9-x}(x^2 - 21x + 110) = 0$  tenglamaning ildizi nechta?

- A) 1                      **B) 2**                      C) 3                      D) 0

**Yechish:**  $\sqrt{9-x} = 0$                        $9-x = 0$                        $x = 9$

$$x^2 - 21x + 110 = 0$$

$$D = 441 - 440 = 1$$

$$x_1 = 11 \qquad x_2 = 10$$

9.  $\operatorname{tg} \alpha = 8$  bo'lsa,  $\frac{-7 \sin \alpha - 8 \cos \alpha}{-6 \sin \alpha + 5 \cos \alpha}$  ni hisoblang?

- A)  $-\frac{71}{34}$**                       B)  $\frac{71}{34}$                       C)  $-\frac{34}{71}$                       D)  $\frac{34}{71}$

**Yechish:**  $\frac{-7 \sin \alpha - 8 \cos \alpha}{-6 \sin \alpha + 5 \cos \alpha} = \frac{-7 - 8 \operatorname{tg} \alpha}{-6 + 5 \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{-7 - 8 \cdot 8}{-6 + 5 \cdot 8} = -\frac{71}{34}$

10. Romb dioganallarining tomonlari bilan hosil qilgan burchaklari kattaliklarining nisbati 2 : 7 gat eng. Rombning kichik burchaklarini toping?

- A)  $40^\circ$**                       B)  $20^\circ$                       C)  $30^\circ$                       D)  $60^\circ$

**Yechish:**  $2x + 7x = 90^\circ$

$$9x = 90^\circ$$

$$x = 10^\circ$$

$$\alpha = 20^\circ$$

$$2\alpha = 40^\circ$$

11. O'tkir burchakli uchburchakning ikki tomoni 5 sm va 6 sm. Agar uchburchakning yuzi  $12 \text{ sm}^2$  bo'lsa, u holda uchburchakning uchinchi tomonini toping?

- A) 4,5                      B) 3                      **C) 5**                      D) 4

**Yechish:**  $12 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin \alpha$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5} \qquad \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

$$c^2 = 25 + 36 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{3}{5} = 25$$

$$c^2 = 25$$

$$c = 5$$

12. To'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasiga parallel o'rta chizig'i uni perimetrlari 6 va 11 sonlariga proporsional bo'lgan ikkita ko'pburchakka ajratadi. Katetlari nisbatini toping?

- A)  $\frac{2}{3}$                       B)  $\frac{5}{2}$                       C)  $\frac{1}{3}$                       **D)  $\frac{3}{4}$**

**Yechish:**  $\frac{a+b+c}{2} = 6x$                        $\frac{a+b+c}{2} + c = 11x$                        $6x + c = 11x$

$$c = 5x$$

$$a : b = 3 : 4$$

13. Parallelogrammning o'tkir burchagini sinusi  $\frac{3}{5}$  ga teng. Shu parallelogrammni o'tmas burchagi kosinusini toping?

A) 2

B)  $\pm \frac{4}{5}$

C)  $-\frac{4}{5}$

D) -2

**Yechish:**  $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{4}{5}$

14. Agar  $\sqrt{5} = a$  bo'lsa,  $\sqrt{9,8}$  ni toping?

A)  $2a$

B)  $7a$

C)  $\frac{7}{a}$

D)  $\frac{2}{a}$

**Yechish:**  $\sqrt{9,8} = \sqrt{\frac{49}{5}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{5}} = \frac{7}{a}$

15.  $4x^2 - 9x + a = 0$  tenglamaning ildizlari ko'paytmasi eng katta bo'lishi uchun  $a$  qanday bo'lishi kerak?

A)  $\frac{9}{4}$

B)  $\frac{81}{16}$

C)  $\frac{81}{4}$

D)  $\frac{48}{81}$

**Yechish:**  $x_1 = x_2$

$$D = 0$$

$$D = 81 - 4 \cdot 4 \cdot a = 0$$

$$16a = 81$$

$$a = \frac{81}{16}$$

16. Agar  $20^x$  ni 20% i  $2^6 \cdot 5^a$  bo'lsa,  $a$  ni toping?

A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

**Yechish:** Agar  $20^x \leftrightarrow 100$   
 $2^6 \cdot 5^a \leftrightarrow 20$

$$2^6 \cdot 5^a \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 2^2 \cdot 5 \cdot 2^{2x} \cdot 5^x$$

$$2^8 \cdot 5^{a+2} = 2^{2(1+x)} \cdot 5^{x+1}$$

$$2 + 2x = 8$$

$$x = 3$$

$$a + 2 = 4$$

$$a = 2$$

17. Agar  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$  bo'lsa,  $\frac{a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}}{\sqrt{abc}}$  ifodani soddalashtiring?

A)  $\sqrt{a+b+c}$

B)  $a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a}$

C)  $\sqrt{abc}$

D)  $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$

**Yechish:**  $\frac{\sqrt{abc}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})}{\sqrt{abc}} = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$

18. Agar  $m + \frac{6}{n} = 11$  va  $m - \frac{6}{n} = 5$  bo'lsa,  $n$  ni toping?

A) 2

B) 3

C) 4

D) 6

**Yechish:**  $m + \frac{6}{n} = 11$

$$m - \frac{6}{n} = 5$$

$$\frac{12}{n} = 6$$

$$n = 2$$

**19.**  $a, b$  va  $c$  manfiy sonlar bo'lib,  $ab = \frac{5}{4}$ ,  $bc = \frac{6}{5}$ ,  $ca = \frac{7}{6}$  bo'lsa, ularni o'sish tartibida joylashtiring?

A)  $a < b < c$       B)  $a < c < b$       C)  $c < a < b$       **D)  $c < b < a$**

**20.**  $\sin x + \cos x = 2a$  bo'lsa, u holda  $\sin 2x$  ni toping?

A)  $2a^2 - 1$       B)  $2a^2 + 1$       **C)  $4a^2 - 1$**       D)  $4a^2 + 1$

**Yechish:**  $(\sin x + \cos x)^2 = 4a^2$

$$1 + 2\sin x \cos x = 4a^2 \quad \sin 2x = 4a^2 - 1$$

**21.** Onaning yoshi qiznikidan uch marta katta. O'n yildan keyin qiznikidan ikki marta katta bo'ladi. Onaning yoshi o'n yildan keyingi yoshini toping?

A) 25      B) 30      C) 35      **D) 40**

**Yechish:**      Ona       $3x$

Qiz       $x$

$$3x + 10 = 2(x + 10)$$

$$x = 10$$

**22.**  $\begin{cases} -\frac{a}{5} = \frac{4}{b} = c \\ a + b + c = 0 \end{cases}$  bo'lsa,  $c^2$  ni toping?

**A) 1**      B) 0      C)  $-\frac{5}{4}$       D)  $\sqrt{2}$

**Yechish:**  $-5c + \frac{4}{c} + c = 0$

$$-5c^2 + 4 + c^2 = 0$$

$$4c^2 = 4$$

$$c^2 = 1$$

**23.** Agar  $0 \leq m \leq 6$  va  $3 \leq n \leq 9$  bo'lsa,  $\frac{m-n}{m+n}$  ning eng kichik qiymatini toping?

A) -3      **B) -1**      C)  $-\frac{1}{4}$       D) 0

**24.** Arifmetik progressiyada  $a_1 = 4$ ,  $a_2 = 7$  bo'lsa,  $a_9$  ni toping?

A) 22      B) 24      C) 25      **D) 28**

**Yechish:**  $d = a_2 - a_1 = 7 - 4 = 3$

$$a_9 = a_1 + 8d = 4 + 8 \cdot 3 = 28$$

**25.**  $a$  ning qanday qiymatlarida  $\begin{cases} 3|x| + y = 2 \\ |x| + 2y = a \end{cases}$  yagona yechimga ega?

A) 0      **B) 4**      C) 2      D) -2

**Yechish:**  $|x|$  bo'lgani sababli  $x > 0$ ,  $x < 0$  qiymatlarni qabul qiladi. Yagona yechim so'ralyapti shu sababli  $x = 0$  deb olsak  $a = 4$

**26.150** dan katta bo'lmagan 7 ga karrali barcha natural sonlarning yig'indisini toping?

- A) 1228                      **B) 1617**                      C) 1423                      D) 1512

**Yechish:**  $a_1 = 7$ ,  $a_2 = 14$ , ...,  $a_n = 147$

$$d = 7$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$147 = 7 + 7n - 7$$

$$7n = 147$$

$$n = 21$$

$$S_{21} = \frac{2a_1 + 20 \cdot d}{2} \cdot 21 = (7 + 70) \cdot 21 = 77 \cdot 21 = 1617$$

**27.**  $\alpha$  birinchi chorak burchagi bo'lib,  $\sin \alpha = \frac{20}{29}$  ekanligi ma'lum bo'lsa,

$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}(\pi + \alpha)$  ni toping?

- A)  $-\frac{400}{841}$                       B)  $\frac{400}{841}$                       C)  $-\frac{400}{441}$                       **D)  $\frac{400}{441}$**

**Yechish:**  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\frac{400}{841}}{1 - \frac{400}{841}} = \frac{400}{441}$

**28.** Uchburchakning o'rta chizig'i 5 sm, balandligi 4 sm. Uchburchakning yuzasini toping?

- A) 15                      B) 20                      **C) 25**                      D) 30

**Yechish:**  $a = 2l = 2 \cdot 5 = 10$

$$S = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{10 \cdot 5}{2} = 25$$

**29.**  $x, y, z$  sonlar ko'rsatilgan tartibda geometrik progressiyani,  $x + y, y + z, z + x$  sonlari esa arifmetik progressiyani tashkil qilsa, geometrik progressiyaning maxrajini toping.

- A) -3; 1                      **B) -2; 1**                      C) 2,3                      D) -2; -1

**Yechish:**  $y^2 = x \cdot z$   $z = \frac{y^2}{x}$                        $\frac{y}{x} = q = ?$

$$x + y = a$$

$$x + z = a + d$$

$$y + x = a + 2d$$

$$2(y + z) = x + y + z + x$$

$$2y + 2z = 2x + y + z$$

$$y + z = 2x$$

$$y + \frac{y^2}{x} = 2x$$

$$xy + y^2 = 2x^2$$

$$\frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} - 2 = 0$$

$$\frac{y}{x} = 1 \quad \frac{y}{x} = -2$$

30. Agar  $a = \frac{59}{66} + \frac{71}{77} + \frac{81}{88} + \frac{92}{99}$  bo'lsa,  $\frac{7}{66} + \frac{6}{77} + \frac{7}{88} + \frac{7}{99} = ?$

- A)  $7a-6$                       B)  $a-4$                       C)  $4-a$                       D)  $6a-7$

**Yechish:**  $\frac{7}{66} + \frac{6}{77} + \frac{7}{88} + \frac{7}{99} = \frac{66}{66} - \frac{59}{66} + \frac{77}{77} - \frac{71}{77} + \frac{88}{88} - \frac{81}{88} + \frac{99}{99} - \frac{92}{99} = 4 - a$

31. Sinf o'quvchilarini  $a$  foizi futbol,  $b$  foizi voleybol,  $c$  foizi tennis o'ynashni biladi. O'quvchilarni necha foizi uchta o'yinni ham o'ynashni biladi?

**Yechim.** O'quvchilarni sonini  $N$  deb olaylik. U holda o'quvchilarning  $\frac{aN}{100}$  qismi

futbol,  $\frac{bN}{100}$  qismi voleybol,  $\frac{cN}{100}$  qismi tennis o'ynashni biladi. Agar  $\frac{a}{100} + \frac{b}{100} \leq 1$

bo'lsa, u holda uchchala o'yinni ham biladigan o'quvchi bo'lmasligi mumkin.

Agar  $\frac{a}{100} + \frac{b}{100} > 1$  bo'lsa, u holda ham futbol, ham voleybol o'ynashni biladigan

o'quvchilarning soni  $\left(\frac{a}{100} + \frac{b}{100} - 1\right)N$  ta bo'ladi. Xuddi shu kabi fikr yuritib

$\frac{a}{100} + \frac{b}{100} - 1 + \frac{c}{100} \leq 1$  bo'lganda uchchala o'yinni ham biladigan o'quvchi

bo'lmasligi mumkin debgan xulosaga kelamiz.

Demak,  $\frac{a}{100} + \frac{b}{100} - 1 + \frac{c}{100} > 1$  bo'lganda uchchala o'yinni ham biladigan

o'quvchilar soni  $\left(\frac{a}{100} + \frac{b}{100} + \frac{c}{100} - 2\right)N$  ta bo'ladi.

**Javob:**  $\left(\frac{a}{100} + \frac{b}{100} + \frac{c}{100} - 2\right)N$ .

32. Ushbu  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)$  yig'indini hisoblang.

**Yechim.** Quyidagi munosabat o'rinli ekanligini tekshirish qiyin emas:

$$3k \cdot (k+1) = k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1).$$

Bu tenglikni  $k=1, 2, \dots, n$  uchun yozib chiqaylik:

$$3(1 \cdot 2) = 1 \cdot 2 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \cdot 2$$

$$3(2 \cdot 3) = 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3$$

$$3(3 \cdot 4) = 3 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 4$$

-----

$$3(n-1) \cdot n = (n-1)n(n+1) - (n-2)(n-1)n$$

$$3n \cdot (n+1) = n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1)$$

Bularni qo'shib

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \text{ bo'lishini topamiz.}$$

**Javob:**  $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

**33. Soddalashtiring:**  $\cos \alpha - \frac{1}{2} \cos 3\alpha - \frac{1}{2} \cos 5\alpha$

**Yechish:**

$$\begin{aligned} \cos \alpha - \frac{1}{2} \cos 3\alpha - \frac{1}{2} \cos 5\alpha &= \cos \alpha - \frac{1}{2} (\cos 3\alpha - \cos 5\alpha) = \cos \alpha - 2 \cdot \frac{1}{2} \cos 4\alpha \cdot \cos \alpha = \\ &= \cos \alpha (1 - \cos 4\alpha) = \cos \alpha (\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha - \cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha) = \cos \alpha \sin^2 2\alpha = \\ &= 2 \cos \alpha \cdot (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 = 8 \cos^3 \alpha \cdot \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

**Javob:**  $8 \cos^3 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$ .

**34.**  $2x - 17y = 9$  tenglamani butun sonlarda yeching.

Yechish.  $2x - 17y = 9 \Rightarrow 2x = 9 + 17y \Rightarrow x = \frac{9 + 17y}{2} = 4 + 8y + \frac{1 + y}{2}$ ;

$$\frac{1 + y}{2} = z \Rightarrow y = 2z - 1, z \in \mathbb{Z};$$

$$x = 4 + 8(2z - 1) + \frac{1 + 2z - 1}{2} = 17z - 4$$

**Javob:**  $(17z - 4; 2z - 1), z \in \mathbb{Z}$ .

**35.**  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  funksiya  $f(x + y) = f(x) + f(y) + 10$  tenglikni qanoatlantiradi va  $f(10) = 20$  bo'lsa,  $f(12)$  ni toping.

Yechish.  $y = 1$  bo'lsin, u holda  $f(x + 1) = f(x) + f(1) + 10$ ;

$$x = 1 \Rightarrow f(2) = 2f(1) + 10;$$

$$x = 2 \Rightarrow f(3) = f(2) + f(1) + 10 = 3f(1) + 20;$$

$$x = 3 \Rightarrow f(4) = f(3) + f(1) + 10 = 4f(1) + 30;$$

...

$$x = 9 \Rightarrow f(10) = f(9) + f(1) + 10 = 10f(1) + 90.$$

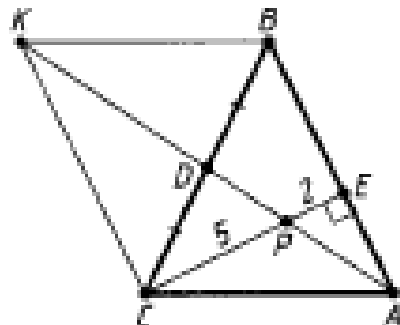
Shartga ko'ra  $10f(1) + 90 = 20$ , bundan  $f(1) = -7$ .

$$x = 11 \Rightarrow f(12) = f(11) + f(1) + 10 = 12f(1) + 110 = 12 \cdot (-7) + 110 = 26.$$

**Javob:**  $f(12) = 26$ .

**36.** Teng yonli ABC ( $AB = BC$ ) uchburchakning AD medianasi va CE balandligi P nuqtada kesishadi. Agar  $CP = 5$ ,  $PE = 2$  bo'lsa, ABC uchburchakning yuzini toping.

**Yechish.** AD mediananing davomidan AD ga teng bo'lgan DK kesmani joylashtiramiz. U holda ABKC to'rtburchak parallelogram bo'ladi, chunki AK va BC diagonallar D nuqtada kesishadi va teng ikkiga bo'linadi.



$$AB = BC = 2x \text{ bo'lsin. U holda } CK = AB = 2x. \triangle APE \cong \triangle KPC \Rightarrow$$

$$AE = CK. \frac{PE}{PC} = \frac{2}{5}. 2x = \frac{4}{5}x, BE = AB - AE = 2x - \frac{4}{5}x = \frac{6}{5}x$$

Pifagor teoremasiga ko'ra  $BC^2 = BE^2 + CE^2$  yoki  $4x^2 = \frac{36}{25}x^2 + 49$ , bu yerdan  $x = \frac{35}{8}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CE = x \cdot 7 = \frac{35}{8} \cdot 7 = \frac{245}{8}$$

**Javob:**  $\frac{245}{8}$

**37.** Tengsizlikni yeching:  $2\sqrt{x-1} + 5x \geq \sqrt{(x^2+4)(x+24)}$ .

**Yechish.** Quyidagi  $\vec{a}(2;x)$  va  $\vec{b}(\sqrt{x-1};5)$  vektorlarni qaraylik. U holda

$$\vec{a}\vec{b} = 2\sqrt{x-1} + 5x$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2+4}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{x+4},$$

Tengsizlikni  $\vec{a}\vec{b} \geq |\vec{a}| |\vec{b}|$  ko'rinishida yozishimiz mumkin. U holda  $\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \geq 1$ .

Bizga ma'lumki  $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$  va  $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) \leq 1$ .

Demak,  $\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = 1$ ,  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  vektorlar o'zaro koleniar. Koleniarlik shartidan

foydalansak  $\frac{2}{\sqrt{x-1}} = \frac{x}{5} > 0$ .

$$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{x-1}} = \frac{x}{5} \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\sqrt{x-1} = 10 \\ x > 0 \end{cases}$$

$x\sqrt{x-1} = 10$  tenglamani yechamiz.

$$x^2(x-1) = 100 \Rightarrow x^3 - x^2 - 100 = 0 \Rightarrow x^3 - 125 - x^2 + 25 = 0 \Rightarrow$$

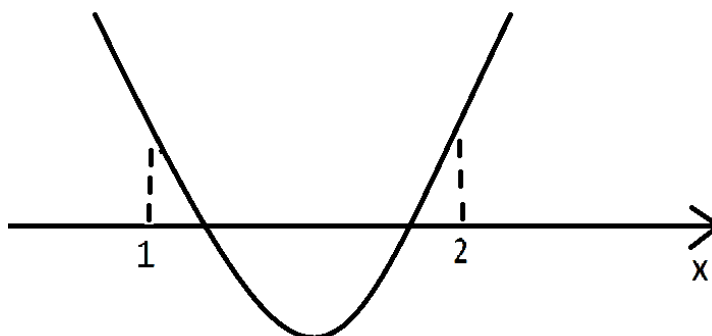
$$(x-5)(x^2 + 5x + 25) - (x-5)(x+5) = 0 \Rightarrow (x-5)(x^2 + 5x + 25 - x - 5) = 0 \Rightarrow$$

$(x-5) = 0$  yoki  $x^2 + 4x + 20 = 0$ . Birinchi tenglikdan  $x = 5$ , ikkinchi tenglik esa yechimga ega emas.

**Javob:**  $x = 5$ .

**38.**  $a$  parametrning qanday qiymatlarida  $(a^2+1)x^2 + ax - 3a = 0$  tenglamaning ikkala ildizi ham  $(1;2)$  intervalga tegishli bo'ladi?

**Yechim.**  $y = (a^2+1)x^2 + ax - 3a$  funksiyani qaraymiz.  $a^2+1 > 0$  bo'lganligi uchun funksiya grafigi shoxlari yuqoriga qaragan paraboldan iborat. Bu funksiyaning nollari  $(1;2)$  intervalda bo'lishini talab qilamiz. Masala shartiga mos chizma chizamiz.



Bu chizmadan foydalanib quyidagi tengsizliklar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} D > 0 \\ y(1) > 0 \\ y(2) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 12a(a^2 + 1) > 0 \\ a^2 + 1 + a - 3a > 0 \\ 4(a^2 + 1) + 2a - 3a > 0 \end{cases}$$

Sistemaning har bir tengsizligi yechimini alohida topaylik:

1)  $a(a+12a^2+12) > 0$ ;  $12a^2 + a + 12$  ifoda ixtiyoriy  $a$  uchun musbat bo'lganligi uchun tengsizlikning yechimi:  $a > 0$ .

2)  $a^2 - 2a + 1 > 0 \Rightarrow (a-1)^2 > 0 \Rightarrow a \neq 1$ .

3)  $4a^2 - a + 4 > 0$  ifoda ixtiyoriy  $a$  uchun musbat.

Bu uchta tengsizlikning yechimlarini kesishtirish natijasida sistemaning yechimiga erishamiz:  $(0;1) \cup (1;\infty)$ .

**Javob:**  $(0;1) \cup (1;\infty)$ .

**39.**  $ABCD$  to'rtburchakning  $AC$  va  $BD$  diagonallari o'zaro perpendikulyar va  $P$  nuqtada kesishadi.  $C$  uch va  $AD$  tomon o'rtasi  $M$  ni tutashtiruvchi kesma uzunligi  $\frac{5}{4}$  ga teng,  $AP = 1$ .  $P$  nuqtadan  $BC$  gacha bo'lgan masofa  $\frac{1}{2}$  ga teng. Agar

$ABCD$  to'rtburchakga tashqi aylana chizish mumkin bo'lsa  $AD$  ni toping.

**Yechim.**  $MP$  to'g'ri chiziq  $BC$  tomonni  $K$  nuqtada kesib o'tsin.

$\angle ADB = \angle ACB = \alpha$  belgilash kiritamiz.

$PM$ -to'g'ri burchakli uchburchak  $APD$  ning to'g'ri burchagi uchidan tushirilgan medianasi bo'lganligi uchun:  $PM = MA = MD$ ,

$\angle BPK = \angle DPM = \angle ADB = \alpha$ ,  $\angle CBP = 90^\circ - \alpha$ , u holda  $\angle BKP = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ$ , ya'ni

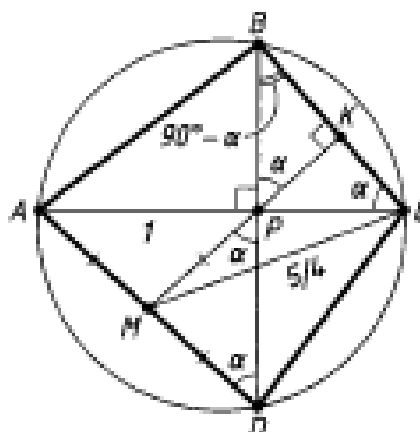
$PK \perp BC$ . Demak,  $PK = \frac{1}{2}$ .  $\triangle APD$  va  $\triangle CKP$

to'g'ri burchakli uchburchaklardan

$$MP = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} \cdot \frac{AP}{\sin \alpha} = \frac{1}{2 \sin \alpha},$$

$$CK = KP \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$\text{Shuning uchun, } MK = MP + KP = \frac{1}{2 \sin \alpha} + \frac{1}{2}.$$



$\triangle MKC$  uchburchak uchun Pifogor teoremasini qo'llasak

$$\left(\frac{1}{2\sin\alpha} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha\right)^2 = \frac{25}{16}.$$

Bundan,  $\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{3\sqrt{6}-2}{4}$ .  $AD = \frac{AP}{\sin\alpha} = \frac{3\sqrt{6}-2}{4}$ .

**Javob:**  $\frac{3\sqrt{6}-2}{4}$

**40.**  $ABC$  uchburchakga tashqi aylana chizilgan.  $AD$  mediana davomi aylananing  $E$  nuqtada kesadi.  $PM$ ,  $\angle BAD = 60^\circ$ ,  $AE = 6$  bo'lsa,  $ABC$  uchburchakning yuzasini toping.

**Yechim.**  $AE$  kesmaning  $A$  uchi davomidan  $AB$ ga teng bo'lgan  $AB_1$  kesmani joylashtiramiz. U holda

$$B_1D = B_1A + AD = BA + AD = DE.$$

Natijada,  $B_1BEC$  - to'rtburchakning parallelogram ekanligi kelib chiqadi. U holda

$$\angle ABC = \angle B_1EC = \angle BB_1A = 30^\circ, \angle ADB = 90^\circ.$$

Demak,  $AE$  aylananing diametri bo'ladi,  $\angle ABE = 90^\circ$ ,  $AC = AB = \frac{1}{2}AE = 3$ .

Bundan,  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \sin 120^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{4}$ .

**Javob:**  $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ .

## MUSTAQIL YECHISH UCHUN TESTLAR

### 1-variant

**1.**  $BE$  kesma  $ABC$  uchburchakni o'xshashlik koeffitsienti  $\sqrt{3}$  ga teng bo'lgan ikkita o'xshash uchburchaklarga ajratsa,  $B$  burchakni toping.

A)  $60^\circ$                       B)  $30^\circ$                       C)  $90^\circ$                       D)  $45^\circ$

**2.**  $ABCD$  parallelogramning  $A$  o'tkir burchagidan  $BC$  va  $CD$  tomonlarga mos ravishda  $AH_1$  va  $AH_2$  perpendikulyarlar o'tkazilgan. Agar  $\angle H_1AH_2 = 130^\circ$  bo'lsa,  $A$  burchakni toping.

A)  $40^\circ$                       B)  $45^\circ$                       C)  $50^\circ$                       D)  $55^\circ$

**3.**  $\sin x = \frac{x}{100}$  tenglamaning nechta haqiqiy ildizi bor?

A) 63                      B) 57                      C) 48                      D) 43

**4.**  $a = 3^{100} + 4^{100}$  va  $b = 5^{100}$  sonlari orasidagi munosabatni aniqlang.

A)  $a = b + 2^{100}$                       B)  $a < b$                       C)  $a > b$                       D)  $a \geq b + 1$

**5.**  $y = \frac{9}{\pi} \arccos \frac{3\sqrt{2} + \sin x - \cos x}{4\sqrt{2}}$  funksiyaning qiymatlar to'plamini toping.

A)  $[0; 3)$                       B)  $[0; 1; 3)$                       C)  $[0; 3]$                       D)  $[0; 1)$

6.  $x-2 = \sqrt{2(b-1)x+1}$  tenglama yagona yechimga ega bo'ladigan  $b$  ning barcha qiymatlarini toping.

- A)  $b \in (0; +\infty)$       B)  $b \in (1; +\infty)$       C)  $b \in \left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$       D)  $b \in \left[-\frac{2}{3}; +\infty\right)$

7. Hisoblang:  $2^{\sqrt{\log_2 3}} - 3^{\sqrt{\log_3 2}}$

- A) 0      B) 1      C) -1      D) 3

8. Agar  $y = f(x)$  funksiyaning aniqlanish sohasi  $[-1; 2]$  dan iborat bo'lsa,  $y = f(2x)$  funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

- A)  $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$       B)  $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$       C)  $[0; 1]$       D)  $[-1; 2]$

9. Hisoblang:  $\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ$

- A)  $\sin 7^\circ$       B)  $\cos 7^\circ$       C)  $\operatorname{tg} 7^\circ$       D) 0

10. Ushbu  $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 30$  tenglamani qanoatlantiruvchi  $(x, y, z)$  butun sonlar uchliklari nechta.

- A) 3      B) 4      C) 2      D) 0

11.  $a$  ning qanday qiymatlarida  $2 \log_3^2 x - |\log_3 x| + a = 0$  tenglama to'rtta haqiqiy yechimga ega bo'ladi?

- A)  $\left[0; \frac{1}{8}\right]$       B)  $\left(0; \frac{1}{8}\right)$       C)  $(1; 3)$       D)  $[1; 3]$

12. Muntazam  $ABCDEF$  oltiburchakning tomoni 6 ga teng. Oltiburchakning  $C$  uchidan  $AE$  diagonalgacha bo'lgan masofani toping.

- A) 8      B) 9      C) 12      D) 7

13. Uchburchakka tashqi chizilgan aylana radiusi 2 ga teng bo'lsa, shu uchburchak medianalari kvadratlari yig'indisining eng katta qiymatini toping.

- A) 24      B) 4      C) 16      D) 27

14.  $3^{32} + 2^{41} - 5$  sonini 11 ga bo'lgandagi qoldiqni toping.

- A) 6      B) 4      C) 2      D) 0

15.  $y = -4 - \frac{1}{4 + 3^{\sin x}}$  funksiyaning maksimal qiymatini toping.

- A)  $-\frac{55}{13}$       B)  $-\frac{29}{7}$       C)  $-\frac{21}{5}$       D) -1

16.  $\sin b = -3t - 2, b \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$  bo'lgandan  $t$ -ning qiymatlarini toping.

- A)  $\left[-\frac{5}{6}; -\frac{1}{2}\right]$       B)  $\left[-\frac{5}{6}; \frac{1}{2}\right]$       C)  $\left(-\infty; -\frac{5}{6}\right]$       D)  $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

17. Arifmetik progressiyada  $S_3 = 6, S_6 = -42$  bo'lsa,  $S_9$  ni toping.

- A) -288      B) -144      C) -171      D) -285

18. Parametr  $a$  ning qanday qiymatida  $y = ax^2 + 3$  funksiya  $(4; -5)$  nuqtadan o'tadi?

- A) 0.5      B) 0.25      C) -0.5      D) 0.04

19.  $4(0.1x+1)-(-4)(1-2x)=4$  tenglamani yeching.  
 A)  $\frac{120}{76}$       B)  $\frac{40}{76}$       C)  $-\frac{120}{76}$       D)  $\frac{40}{19}$
20. Qanday  $a$  lar uchun  $\sqrt[3]{x-a}+\sqrt[3]{a-x}=2a$  tenglama ildizlarga ega?  
 A)  $a>0$       B)  $a=0$       C)  $a<0$       D)  $a\in R$
21.  $3-2n-(5n-26)>0$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi natural sonlar topilsin.  
 A) 1,2      B) 1,2,4      C) 1,2,3,4      D) 1,2,3
22.  $\begin{cases} a(x^4+1)=y+2-|x| \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$  tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo'ladigan  $a$  ning barcha qiymatlari yig'indisini toping.  
 A) 3      B) 2      C) 4      D) 9
23.  $|x-1|\leq-6$  tengsizlikni yeching.  
 A)  $\emptyset$       B)  $[1;\infty)$       C)  $(-\infty;-6)\cup(6;\infty)$       D)  $(-\infty;\infty)$
24.  $3-2n-(5n-26)>0$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi natural sonlar nechta?  
 A)  $\emptyset$       B) 2      C) 3      D) 4
25. Ushbu  $(1+x+x^2+x^3+\dots+x^{100})^3$  ko'phadning yoyilmasidagi  $x^{100}$  oldidagi koeffitsientni toping.  
 A) 5151      B) 3218      C) 3131      D) 1028
26. Agar  $1+\frac{20}{1+\frac{20}{1+\frac{20}{\vdots}}}=x$  bo'lsa,  $x$  ning qiymatini toping.  
 A) 2      B) 3      C) 4      D) 5
27.  $x_1$  va  $x_2$  sonlar  $x^2-11x-15=0$  tenglamaning haqiqiy ildizlari bo'lsa,  $\frac{x_1}{x_1-3x_2}+\frac{x_2}{x_2-3x_1}$  ifodani qiymatini toping.  
 A)  $\frac{161}{169}$       B)  $\frac{121}{169}$       C)  $\frac{121}{225}$       D)  $\frac{161}{201}$
28. Tomonlarining uzunliklari 39,65 va 52 bo'lgan uchburchakka tashqi chizilgan aylana markazi bilan ichki chizilgan aylana markazi orasidagi masofani toping.  
 A)  $\frac{13}{2}\sqrt{5}$       B)  $\frac{15}{2}\sqrt{5}$       C) 4      D)  $\frac{\sqrt{845}}{3}$
29.  $y=\log_{0,2}\frac{80}{13+\log_5(125+x^4)}$  funksiyaning qiymatlar to'plamini toping.  
 A)  $[-1;+\infty)$       B)  $[0,1;+\infty)$       C)  $[1;+\infty)$       D)  $(-\infty;+\infty)$
30. Agar  $k=2010^2+2^{2010}$  bo'lsa,  $(k^2+2^k)$  ning oxirgi raqamini toping.  
 A) 0      B) 2      C) 4      D) 6      E) 8
31.  $ABCD$  to'g'ri to'rtburchakning  $A$  va  $B$  uchidan o'tuvchi aylananing diametri  $\sqrt{10}$  ga teng.  $C$  uchidan aylanaga o'tkazilgan urinmaning uzunligi 3 va  $AB=1$  bo'lsa,  $BC$  tomon uzunligini toping.

32. Hisoblang:  $\int_0^{2016} x(x-4)(x-8)\dots(x-2016)dx$

33.  $P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x + 3$  ko'phadni  $x^2 + 2$  ga bo'lgandagi qoldiqni toping.

34. Tomoni 4 ga teng bo'lgan  $ABCD$  kvadratga tashqi chizilgan aylana  $AB$  va  $BC$  yo'ylar o'rtalari mos ravishda  $P$  va  $Q$  bo'lsin. Agar  $DP$  va  $DQ$  kesmalar  $AB$  va  $BC$  ni mos ravishda  $M$  va  $N$  nuqtalarda kessa  $MN$  kesma uzunligini toping.

35.  $a$  ning qanday qiymatida  $x^3 - ax + 2$  va  $x^2 + ax + 2$  ko'phadlar umumiy idizga ega bo'ladi?

36.  $[\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + \dots + [\sqrt[3]{x^3 - 1}] = 400$  tenglamani yeching.

37.  $x, y \in \mathbb{Z}^+, x^2 + 84x + 2008 = y^2$  bo'lsa,  $(x+y)$  ni toping?

38.  $a, b, c \in \mathbb{R}^+, a^{\log_3 7} = 27, b^{\log_7 11} = 49, c^{\log_{11} 25} = \sqrt{11}$  bo'lsa  $a^{(\log_3 7)^2} + b^{(\log_7 11)^2} + c^{(\log_{11} 25)^2}$  ni toping?

39.  $\arctg \frac{1}{3} + \arctg \frac{1}{4} + \arctg \frac{1}{5} + \arctg \frac{1}{n} = \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{N}?$

40.  $ABC$  uchburchakda  $AB=7, BC=6$  va  $CA=5$  bo'lsin.  $ABC$  uchburchakka ichki chizilgan aylana  $AB, BC, CA$  tomonlarga mos ravishda  $C_1, A_1, B_1$  nuqtalarda urinsa,  $A_1B_1C_1$  uchburchakning yuzini toping.

### 2-variant

1.  $P(x) = (1+x+x^2+\dots+x^{27})(1+x+x^2+\dots+x^{14})^2$  ko'phadning  $x^{28}$  hadi oldidagi koeffisientini toping.

A)195 B)196 C)224 D)378 E)405

2.  $ABC$  uchburchakda  $AC=3, BC=4$  va  $AB=5$ .  $D$  nuqta  $AB$  kesmadan shunday olinganki bunda  $CD$  kesma to'g'ri burchak bissektrissasi.  $ADC$  va  $BCD$  uchburchaklarning ichki chizilgan aylana radiuslari  $r_a$  va  $r_b$  bo'lsa,  $\frac{r_a}{r_b}$  ni

hisoblang.

A)  $\frac{1}{28} (10 - \sqrt{2})$  B)  $\frac{3}{56} (10 - \sqrt{2})$  C)  $\frac{1}{14} (10 - \sqrt{2})$  D)  $\frac{3}{28} (10 - \sqrt{2})$

3.  $f(x)$  funksiya  $[0,2]$  oraliqda aniqlangan bo'lsa,  $g(x) = 1 - f(x+1)$  funksiya qaysi oraliqda aniqlangan?

A)[-1,1] B)[0,1] C)[0,2] D)[1,3] E)[0,3]

4.  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), \dots$  nuqtalar uchun  $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (\sqrt{3}a_n - b_n, \sqrt{3}b_n + a_n)$  va  $(a_{100}, b_{100}) = (2, 4)$  munosabat o'rinli bo'lsa,  $(a_1 + b_1)$  ni toping

A)  $\frac{1}{2^{97}}$  B)  $\frac{1}{2^{96}}$  C) 0 D)  $\frac{1}{2^{98}}$

5.  $ABCD$  trapetsiyada  $AB \parallel CD, AB=11, BC=5, CD=19$  va  $DA=7$ .  $\angle A$  va  $\angle D$  ning bissektrissalari  $P$  nuqtada,  $\angle B$  va  $\angle C$  ning bissektrissalari esa  $Q$  nuqtada kesishsa,  $S_{ABQCDP}$  ni toping.

A)  $28\sqrt{3}$  B)  $30\sqrt{3}$  C)  $32\sqrt{3}$  D)  $35\sqrt{3}$

6.  $7^{x+7} = 8^x$  tenglama ildizi  $x = \log_b 7^7$  bo'lsa,  $b$  ni toping.

A) 7/15 B) 7/8 C) 8/7 D) 15/8 E) 15/7

7.  $\{a_n\}$  va  $\{b_n\}$  ketma- ketliklar butun koeffisientli arifmetik progressiya tashkil qiladi.

$a_1 = b_1 = 1 < a_2 \leq b_2$  va  $a_n b_n = 2010$  bo'lsa,  $n \in N$  -ning eng kichik qiymatini toping.

A)2 B)3 C)8 D)288

8.  $f(x) = |x-1| + |2x-1| + |3x-1| + \dots + |119x-1|$  bo'lsa,  $f(x)$  ning eng kichik qiymatini toping.

A)49 B)59 C)51 D)52

9. ABC uchburchakda  $\cos(2A-B) + \sin(A+B) = 2$  va  $AB = 4$  bo'lsa, BC ni toping.

A)  $\sqrt{2}$  B)  $\sqrt{3}$  C) 2 D)  $2\sqrt{2}$

10. ABCD- to'rtburchakda  $AB = 5$ ,  $BC = 17$ ,  $CD = 5$ ,  $DA = 9$  va BD butun son bo'lsa, BD ni toping.

A)11 B)12 C)13 D)14

11.  $i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + ni^n = 48 + 49i$  bo'lsa  $n \in N$  ni toping. (bunda  $i^2 = -1$ )

A)24 B)48 C)49 D)97

12.  $\{a_n\}$  ketma-ketlikda  $a_1 = 1$  va  $a_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{1 - a_n a_{n+1}}$ ,  $|a_{2009}|$  ni toping.

A) 0 B)  $2 - \sqrt{3}$  C)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  D) 1

13. a va b haqiqiy sonlar uchun,  $a * b = (a-b)^2$  bo'lsa.  $(x-y)^2 * (y-x)^2$  ni toping.

A) 0 B)  $x^2 + y^2$  C)  $2x^2$  D)  $2y^2$

14. ABCD-trapetsiyada  $AD \parallel BC$ ,  $BD = 1$ ,  $\angle DBA = 230^\circ$  va  $\angle BDC = 46^\circ$ ,  $BC/AD = 9/5$  bo'lsa, CD ni toping.

A) 7/9 B) 4/5 C) 13/15 D) 8/9

15. ABC-uchburchakda  $A = (3; 0)$ ,  $B = (0; 3)$  va C uchi  $x + y = 7$  to'g'ri chiziqda bo'lsa,  $S_{ABC}$  ni toping.

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12

16. a, b, c, d, e-natural sonlar uchun  $a + b + c + d + e = 2010$ , M-  $a + b$ ;  $b + c$ ;  $c + d$ ;  $d + e$  sonlar uchun mumkin bo'lgan eng katta yig'indi. M ning mumkin bo'lgan eng kichik qiymatini toping.

A) 670 B) 671 C) 802 D) 804

17. a, b, c, d, e-lar bir-biridan farqli butun sonlar hamda  $(6-a)(6-b)(6-c)(6-d)(6-e) = 45$  bo'lsa,  $a + b + c + d + e = ?$

A) 5 B) 17 C) 25 D) 27

18. Nechta (a, b) butun sonlar jufti uchun  $EKUB(a, b) = 1$  va  $\frac{a}{b} + \frac{14b}{9a}$  -butun son bo'ladi?

A)4 B)6 C)9 D)12

19.  $x^2 + y^2 + ay = 0$  ( $a > 0$ ) aylana markazidan  $y = 2(a-x)$  to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani toping.

A)  $\frac{a\sqrt{5}}{4}$  B)  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$  C)  $\frac{a\sqrt{5}}{2}$  D)  $\frac{\sqrt{5}}{2a}$

20.  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^7 x \cos^7 x dx$  nimaga teng?

A) -1/7 B) 0 C) 1/7 D) 1/49

21.  $|\sin x| > |\cos x|$  tengsizlikni yeching

A)  $(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n)$  B)  $(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n)$  C)  $(-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n)$  D)  $(\pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n)$

22.  $\int_0^1 f(x) dx = a$  bo'lsa  $\int_0^1 xf(x^2) dx$  ni hisoblang

A) a/2 B) a C) a<sup>2</sup> D) 2a

23. Shunday n- natural sonni topingki, shu songacha bo'lgan toq sonlar yig'indisidan 50 marta kichik bo'lsin.

A) 100 B) 200 C) 300 D) 250 E) 150

24.  $x^2 - y^2 = 1985$  tenglama butun sonlarda nechta yechimga ega?

A) 12 ta B) 8 ta C) 10 ta D) 9 ta

25. Diagonallari o'zaro perpendikulyar bo'lgan trapetsiyaning balandligi 4 ga teng. Agar bu trapetsiyaning diagonallaridan birining uzunligi 5 ga teng bo'lsa, uning yuzini toping.

A)  $16\frac{2}{3}$  B) 15 C)  $15\frac{2}{3}$  D)  $16\frac{1}{3}$

26. Tekislikning biror nuqtasidan to'g'ri to'rtburchakning uchlarigacha bo'lgan masofalar 5, 12, 13 ga teng. To'g'ri to'rtburchakning yuzini toping?

A) aniqlab bo'lmaydi B) 55 C)  $\sqrt{780}$  D) 60

27. Quyidagi ifodaning butun qismini toping.

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2010 + \sqrt{2010 + \sqrt{2010 + \dots + \sqrt{2010 + \sqrt{2010}}}}}}}}}}$$

A) 43 B) 44 C) 45 D) 46

28. Ifodani soddalashtiring  $\frac{a^3(c-b) + b^3(a-c) + c^3(b-a)}{a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a)}$

A) a-b+c B) a-b-c C) a+b-c D) a+b+c

29.  $2^{p^2}$  sonini 18 ga bo'lgandagi qoldiqni toping ( p>3-tub son )

A) 2 B) 3 C) 5 D) 2 va 3

30. Tenglamani yeching:  $(x^2 - 2x)^3 + x\sqrt{x(x-2)^3} = 2$

A)  $1 + \sqrt{1 + \sqrt[3]{4}}$  B)  $1 + \sqrt{3}$  C)  $\sqrt{2} - 1$  D)  $1 \pm \sqrt{2}$

31. Hisoblang:  $1 + 4 \cdot 2 + 7 \cdot 2^2 + \dots + 67 \cdot 2^{22}$

32. a, b, c sonlar  $(0, \frac{\pi}{2})$  intervaldan olingan va  $\cos a = a$ ,  $\sin(\cos b) = b$ ,  $\cos(\sin c) = c$

tengliklarni qanoatlantirsa, bu sonlarni o'sish tartibida joylashtiring.

33. P(x)-haqiqiy koeffisientli kvadrat uchhad uchun

$x^2 - 2x + 2 \leq P(x) \leq 2x^2 - 4x + 3$ .  $\forall x \in R$  da  $P(11) = 181$  bo'lsa, P(16) ni toping.

34. Teng yonli uchburchakning asosi 8 ga, asosiga tushirilgan balandligi esa 3 ga teng. Asos yon tomonlariga urunuvchi aylana uchun vatar bo'lsa, bu aylananing radiusini toping.

35.  $x^4 + 4x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x - \frac{3}{16} = 0$  tenglamaning haqiqiy ildizlari joylashgan oraliqni toping.

36. Hisoblang  $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7}$

37.  $ABCD$  qavariq to'rtburchakning diagonallari  $E$  nuqtada kesishadi.  $ABE$  va  $DCE$  uchburchaklarning har birining yuzi 1 ga teng, to'rtburchakning yuzi esa 4 dan katta emas.  $AD=3$  bo'lsa,  $BC$  tomon uzunligini toping.

38.  $\varphi(n)$  orqali  $n$  dan kichik va  $n$  bilan o'zaro tub sonlar sonini belgilasak,  $\varphi(2010)$  ni toping.

39. Berilgan kvadratni teng 49 ta kvadratlarga bo'lindi. Hosil bo'lgan shaklda nechta kvadrat hosil bo'ladi.

40.  $AC$  va  $BD$  diagonallari o'zaro perpendikulyar bo'lgan  $ABCD$  to'rtburchakka radiusi 2 ga teng bo'lgan aylana tashqi chizilgan, agar  $AB=3$  bo'lsa,  $CD$  ni toping.

### 3-variant

1.  $\left[ \frac{1^2}{2010} \right]; \left[ \frac{2^2}{2010} \right]; \dots; \left[ \frac{2009^2}{2010} \right]$  ketma-ketlikda nechta turli sonlar uchraydi ( $[x]$ - $x$  ning butun qismi)

A) 2010 B) 1005 C) 2009 D) 2011

2. Uchburchak tomonlarining uzunliklari  $a, b, c$ . Uchburchakning ichidagi biror nuqtadan o'tuvchi 3 ta kesishuvchi to'g'ri chiziq uchburchakning tomonlariga parallel. Kesishuvchi to'g'ri chiziqlarning tomonlari bilan kesishishdan hosil bo'lgan kesmalarining har biri  $x$  ga teng bo'lsa,  $x$  ni toping?

A)  $(ab+bc+ca)/(a+b+c)$  B)  $abc/(ab+bc+ca)$  C)  $2abc/(a^2+b^2+c^2)$  D)  $2abc/(ab+bc+ca)$

3.  $ABCD$  qavariq to'rtburchakda  $ABC, BCD, CDA, DAB$  uchburchaklarning og'irlik markazlari ketma-ket tutashtirilgan. Agar  $ABCD$  to'rtburchakning yuzi  $S$  bo'lsa, u holda hosil bo'lgan to'rtburchakning yuzini toping?

A)  $S/3$  B)  $S/5$  C)  $S/9$  D)  $S/7$

4. Tomoni  $n$  ga teng bo'lgan kvadrat vertikal va gorizontal bo'lgan  $n^2$  ta har xil kvadratlarga bo'lingan. Hosil bo'lgan chizmada nechta kvadrat sanash mumkin?

A)  $[n(n+1)(2n+1)]/6$  B)  $n(n+1)/3$  C)  $n(n+1)(n+2)/6$  D)  $[n(n+1)]/2$

5.  $ABC$  uchburchak va uning  $BC$  tomonida  $A_1$  nuqta berilgan.  $AC$  tomondan o'tgan to'g'ri chiziqda  $B_1$  nuqta  $AB$  tomondan to'g'ri chiziqda esa  $C_1$  nuqta shunday tanlanganki  $AA_1 // BB_1 // CC_1$  (o'zaro parallel).  $A_1B_1C_1$  uchburchak yuzining  $ABC$  uchburchak yuziga nisbatini toping?

A) 1.25 B) 3 C) 1.5 D) 2

6. p fazodagi kesmaning uzunligi. a,b,c-lar esa uning koordinata tekisliklardagi proyeksiyalari bo'lsin.  $[a+b+c]/p$  nisbatning mumkin bo'lgan eng katta qiymatini toping?

A)  $\sqrt{3}$  B)  $\sqrt{6}$  C)  $\sqrt{5}$  D)  $\sqrt{2}$

7. 994/49995 oddiy kasrning o'nli kasrga yoyilmasida 2010 o'rinda qaysi raqam turadi?

A) 0 B) 1 C) 9 D) 8 E) aniqlab bo'lmaydi

8. Balandliklari 4, 6, 4 bo'lgan uchburchakning yuzini toping.

A) 24 B) 12 C)  $12\sqrt{3}$  D)  $9\sqrt{2}$

9. 2010! songa 19 qanday daraja bilan kiradi.

A) 110 B) 101 C) aniqlab bo'lmaydi D) 120

10. Agar  $S_n$  arifmetik progressiyaning birinchi n ta hadining yig'indisi bo'lsa,  $(S_{n+3} - 3S_{n+2} + 3S_{n+1} - S_n)$  ni hisoblang.

A) 1 B)  $S_n$  C) n D) 0

11. Aylanaga ABCD to'rtburchak ichki chizilgan. Agar AB=3, BC=4, CD=7, AD=5 bo'lsa uning diogonallari ko'paytmasini toping.

A) 47 B) 43 C) 41 D) 42

12.  $(a,b,c)$  nuqtadan koordinata o'qlaridan a,b va c uzunlikdagi kesmalar ajratuvchi tekislikkacha bo'lgan masofani toping.

A)  $\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}$  B)  $\frac{2abc}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}$  C)  $\frac{4abc}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}$

D)  $\frac{3abc}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}$

13. ABC uchburchakning medianalari 9 va 12 ga teng. Medianalari bu uchburchakni 3 ta uchburchakka va 1 ta to'rtburchakka bo'ladi. Hosil bo'lgan to'rtburchakning yuzi 16 ga teng bo'lsa, berilgan uchburchak yuzini toping.

A) 32 B) 24 C)  $\frac{32}{3}$  D) 48

14. ABC uchburchakning medianalari 5, 6, 7 bo'lsa, bu uchburchak yuzini toping.

A)  $8\sqrt{6}$  B)  $6\sqrt{3}$  C)  $8\sqrt{3}$  D)  $6\sqrt{6}$

15.  $y = \arccos x$  funksiyaning juft va toq funksiyalar yig'indisi ko'rinishida yozilganda, hosil bo'lgan juft funksiya hosila oling.

A)  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  B)  $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  C) 0 D)  $\arcsin x$

16.  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  lar birlik vektorlar bo'lib,  $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0$  bo'lsa,  $\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}$  ni toping.

A) 0 B)  $\frac{3}{2}$  C)  $-\frac{3}{2}$  D) -1

17. Agar  $f(x) = x^2 + 14x + 42$  bo'lsa,  $f(f(f(f(x)))) = 0$  tenglamani yeching.

A) ildizi yo'q B)  $\pm \sqrt[9]{7} - 7$  C)  $\pm \sqrt[32]{7} + 7$  D)  $\pm \sqrt[9]{7} + 7$

18.  $y = 3x - 9$ ,  $y = 0$ ,  $x = 5$  chiziqlar bilan chegaralangan figurani  $Oy$  o'qi atrofida aylanishdan hosil bo'lgan jismni hajmini toping.

A)  $26\pi$  B)  $33\pi$  C)  $34\frac{2}{3}\pi$  D)  $52\pi$

19.  $\lambda$  - sonning  $\vec{a} = (\lambda + 2\sqrt{2}, 0, 2)$ ,  $\vec{b} = (4, \lambda - 2\sqrt{2}, 0)$ ,  $\vec{c} = (0, \lambda, 1)$  vektorlar komplanar bo'ladigan barcha qiymatlari ko'paytmasini toping.

A)  $2\sqrt{2} - 2$  B)  $-8$  C)  $2\sqrt{2} + 2$  D)  $0$

20. Agar  $(x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2}) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^2$  bo'lsa, u holda  $\frac{2x^2}{x-1}$  ni toping.

A)  $2$  B)  $\frac{8}{2\sqrt{2}-1}$  C)  $16$  D)  $8$

21.  $\sqrt{x^x} = x^{\sqrt{x}}$  tenglama yechimlarini yig'indisini toping.

A)  $1$  B)  $4$  C)  $3$  D)  $5$

22.  $2^{99} + 2^9$  sonini  $49$  ga bo'lgandagi qoldiqni toping.

A)  $9$  B)  $40$  C)  $39$  D)  $1$

23.  $|x| < 1$  bo'lsa,  $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$  ni toping

A)  $\frac{1}{(1-x)^2}$  B)  $-\frac{1}{(1-x)^2}$  C)  $\ln(1-x)$  D)  $\ln(1+x)$

24.  $a, b, c$  uchlik  $x^3 - x + 1 = 0$  ning ildizlari bo'lsa  $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}$  ni toping

A)  $2$  B)  $-2$  C)  $3$  D)  $-1$

25. ABC uchburchakning medianalari  $3, 4$  va  $5$  bo'lsa, uchburchak yuzi nimaga teng?

A)  $5$  B)  $10$  C)  $8$  D)  $4,5$

26. Agar  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  bo'lsa  $f(f(f(\dots f(2010)\dots)))$  ni hisoblang.

A)  $0$  B)  $\frac{1}{\sqrt{2011}}$  C)  $\frac{2010}{\sqrt{1+2010^3}}$  D)  $\frac{2010}{\sqrt{1+2010^2}}$

27. Agar  $x^3 - mx^2 + nx - 5$  ko'phad  $x^2 - 1$  ga bo'linsa  $m+n$  ni toping.

A)  $-6$  B)  $-5$  C)  $-7$  D)  $-14$

28. Hisoblang:  $\sum_{n=1}^{2010} i^n$  (i-mavhum birlik)

A)  $0$  B)  $i-1$  C)  $1005i$  D)  $1005$

29.  $a, b \in \mathbb{Z}^+$ ,  $a^2 - b^4 = 2009$  bo'lsa,  $a+b$  ni toping.

A)  $43$  B)  $47$  C)  $49$  D) aniqlab bo'lmaydi

30.  $(1+ix)^{2010}$  ning haqiqiy koeffitsiyentlari yig'indisi  $S$  bo'lsa  $\log_2 S$  ni toping

A)  $1005$  B)  $2010$  C)  $1004$  D)  $0$

31.  $\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y = 4$ ,  $\cos(x+y) = \frac{1}{5}$  bo'lsa,  $\operatorname{tg}(x+y)$  ni hisoblang.

32.  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  uchun  $x^2 + ax + b$ ,  $x^2 + bx + c$  ko'phadlar  $x+1$  ga bo'linsa  $x^3 - 4x^2 + x + 6$  ko'phad  $x^2 + ax + b$ ,  $x^2 + bx + c$  ko'phadlarga bo'linadi.  $a+b+c$  ni toping.

33.  $\lfloor \sqrt{20102011} \rfloor$  ni toping. ( $\lfloor x \rfloor$  -  $x$  ning butun qismi)

34. Radiuslari 4 va 3 ga teng bo'lgan aylanalarda biror to'g'ri chiziqqa mos ravishda  $M_1$  va  $M_2$  nuqtalarda urinadi va to'g'ri chiziqdan turli tomonlarda yotadi.  $O_1O_2:M_1M_2=2/\sqrt{3}$  munosabat o'rinli bo'lsa,  $O_1O_2$  kesmaning uzunligini toping.

35. Agar  $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$  ( $|x|\geq 2$ ) bo'lsa,  $f(x)$  ni toping.

36.  $a, b, x, y \in R$ ,  $ax+by=3, ax^2+by^2=7, ax^3+by^3=16, ax^4+by^4=42$  bo'lsa,  $ax^5+by^5$  ni toping.

37. Tomonlari 12, 18 va 18 ga teng bo'lgan teng yonli uchburchakning yon tomoni o'rtasidan otuvchi to'g'ri chiziq uni yuzalari nisbati 1:2 kabi bo'lgan ikki qismga ajratadi. Bu to'g'ri chiziqning uchburchak ichidagi qismi uzunligini toping.

38.  $x, y, z > 0, xyz = 10^{81}, (\lg x)(\lg yz) + (\lg y)(\lg z) = 468$ , bo'lsa,  $\sqrt{\lg^2 x + \lg^2 y + \lg^2 z} = ?$

39. Hisoblang:  $\frac{1}{2[\sqrt{1}]+1} + \frac{1}{2[\sqrt{2}]+1} + \dots + \frac{1}{2[\sqrt{100}]+1}$  (bunda  $[x]$ -x ning butun qismi)

40. Hisoblang  $\frac{\sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \dots + \sin 70^\circ + \sin 80^\circ}{\cos 5^\circ \cos 10^\circ \cos 20^\circ}$

#### 4-variant

1. a, b, c uchlik  $x^3-x+1=0$  ning ildizlari bo'lsa  $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}$  ni toping

A) 2 B) -2 C) 3 D) -1

2.  $x+y=3, x^2+y^2=6, x^4=y^4+24 \Rightarrow (x-y) = ?$

A)  $\frac{4}{5}$  B)  $\frac{5}{4}$  C)  $\frac{4}{3}$  D)  $\frac{3}{4}$

3.  $\log_{2010} \frac{1}{2} \log_{2009} \frac{1}{3} \dots \log_2 \frac{1}{2010}$  ni hisoblang

A) 1 B) -1 C) 0 D)  $\frac{1}{2010}$

4.  $P(x)$ -ko'phad uchun  $P(x)(27x^{27}+2x^2+1)=2010x^{2010}$  bo'lsa, ko'phadning barcha koeffitsiyentlari yig'indisini toping.

A) 30 B) 29 C) 58 D) 67

5.  $a=5^{56}, b=10^{51}, c=17^{35}, d=31^{28}$  o'sib borish tartibida joylashtiring

A) a, c, d, b B) a, d, c, b C) a, d, b, c D) a, b, c, d

6. Tenglama haqiqiy sonlarda nechta yechimi bor?  $(2x-1)(3x+1)(5x+1)(30x+1)=10$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 3

7. a, b, c, x, y, z sonlar uchun  $a = \frac{b+c}{x-2}, b = \frac{c+a}{y-2}, c = \frac{a+b}{z-2}$  ( $x, y, z \neq 2$ ) va  $xy+yz+zx=67$ ,

$x+y+z=2010$  bo'lsa,  $xyz$  ni toping.

A) 5892 B) -5892 C) 0 D) 1

8. Hisoblang:  $11^2-1^2+12^2-2^2+13^2-3^2+\dots+20^2-10^2$

A) 2100 B) 2010 C) 1000 D) 1005

9.  $x$  va  $y$  sonlari uchun  $x^2 + y^2 - 3y - 1 = 0$  bo'lsa,  $x+y$  ning eng katta qiymatini toping.

A) aniqlab bo'lmaydi    B)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$     C)  $\frac{\sqrt{26}+3}{2}$     D)  $\frac{8}{15}$

10. ABCD trapetsiyada ( $AD \parallel BC$ )  $\angle A = \angle D = 45^\circ$ ,  $\angle B = \angle C = 135^\circ$ ,  $AB = 6$  va  $S_{ABCD} = 30$  bo'lsa,  $BC = ?$

A)  $2\sqrt{2}$     B)  $3\sqrt{2}$     C)  $4\sqrt{3}$     D)  $2\sqrt{3}$

11. ABCD paralelogramning uchta uchining koordinatalari (1;2), (3;8), (4;1) bo'lsa, to'rtinchi uchining mumkin bo'lgan absissalari yig'indisini toping.

A) 8    B) 6    C) 2    D) 7

12. ABCD to'g'ri to'rtburchak ichidagi P nuqta uchun  $PA = 2$ ,  $PB = 3$ ,  $PC = 10$  bo'lsa,  $PD$  ni toping.

A)  $\sqrt{105}$     B) 11    C)  $\sqrt{91}$     D)  $\sqrt{95}$

13.  $|x| + |y| + |x+y| \leq 1$  sohaning yuzini toping.

A)  $\frac{3}{4}$     B)  $\frac{4}{3}$     C)  $\frac{3}{2}$     D)  $\frac{2}{3}$

14. ABCD-trapetsiyada ( $AD \parallel BC$ )  $AB = 6$ ,  $BC = 7$ ,  $CD = 8$ ,  $AD = 17$  bo'lsa, hamda  $AB$  va  $DC$  lar E nuqtada kesishsa  $\angle AED$  ni toping (gradusda)

A) 60    B) 90    C) 150    D) 120

15.  $x, y, z \in R^+$  sonlar uchun  $xy + z = (x+z)(y+z)$  bo'lsa,  $xyz$  ko'paytmaning qabul qilishi mumkin bo'lgan eng katta qiymatini toping.

A)  $\frac{1}{27}$     B)  $\frac{3}{2}$     C)  $\frac{1}{3}$     D)  $\frac{9}{4}$

16. ABC uchburchakda  $AB = 1$ ,  $BC = \sqrt{7}$  va  $CA = \sqrt{3}$ .  $l_1$  to'g'ri chiziq A nuqtadan o'tib  $AB$  ga perpendikulyar.  $l_2$  to'g'ri chiziq esa B nuqtadan o'tib  $AC$  ga perpendikulyar.  $l_1$  va  $l_2$  to'g'ri chiziqlar P nuqtada kesishadi, u holda  $PC$  ni toping.

A) 2    B) 1    C) 4    D) 3

17. Noldan farqli  $a, b, c$  sonlar uchun  $a+b+c=26$ ,  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 28$  bo'lsa

$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$  ni toping

A) 725    B) 726    C) 727    D) 728

18. Hisoblang:  $2010 + \frac{1}{2} \left( 2009 + \frac{1}{2} \left( 2008 + \dots + \frac{1}{2} \left( 3 + \frac{1}{2} \cdot 2 \right) \dots \right) \right)$

A) 2010    B) 2009    C) 4020    D) 4018

19. Hisoblang:  $\frac{\operatorname{tg}^2 20^\circ - \sin^2 20^\circ}{\operatorname{tg}^2 20^\circ \sin^2 20^\circ}$

A) -1    B)  $\frac{1}{2}$     C) 1    D) to'g'ri javob keltirilmagan

20.  $p, q$  - natural sonlar uchun  $\frac{2008}{2009} < \frac{p}{q} < \frac{2009}{2010}$  bo'lsa  $p$  ning qabul qilishi mumkin

bo'lgan eng kichik qiymatini toping.

A) aniqlab bo'lmaydi B) 4019 C) 4018 D) 4017

21.  $17^{17}$  nind oxirgi ikkita raqamini toping

A) 57 B) 77 C) 87 D) 67

22.  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ,  $f^{k+1}(x) = f(f^k(x))$ ,  $f^1(x) = f(x)$  bo'lsa  $f^{2010}(2010)$  ni toping

A)  $\frac{2009}{2010}$  B) 2010 C) 2009 D)  $\frac{2010}{2009}$

23. Hisoblang:  $\cos\left(\frac{2\pi}{18}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{18}\right) + \dots + \cos\left(\frac{34\pi}{18}\right)$

A) 0 B) -1 C) 1 D) aniqlab bo'lmaydi

24. Nechta  $p, q$  - tub sonlar juftligi uchun  $p^2 + pq + q^2$  biror natural sonning kvadrati bo'ladi?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

25.  $\{a_n\}$  ketma-ketlikda  $a_0 = \frac{6}{7}$  va  $a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n, & a_n < \frac{1}{2} \\ 2a_n - 1, & a_n \geq \frac{1}{2} \end{cases}$  bo'lsa, u holda  $a_{2010}$  ni toping

A)  $\frac{6}{7}$  B)  $\frac{5}{7}$  C)  $\frac{3}{7}$  D) aniqlab bo'lmaydi

26. 1000 dan oshmaydigan 29 ta bo'luvchisi bor sonni toping.

A) bunday son mavjud emas B) 720 C) 576 D) 432

27. ABC uchburchakda  $AB=13, BC=15$  va  $CA=14$  bo'lsin. D nuqta BC ning, E nuqta AD ning,

F nuqta BE ning va G nuqta DF ning o'rtalari bo'lsa EFG uchburchakning yuzini toping.

A) 21 B)  $\frac{21}{2}$  C)  $\frac{21}{4}$  D)  $\frac{21}{8}$

28.  $f(x) = \sin^6\left(\frac{x}{4}\right) + \cos^6\left(\frac{x}{4}\right)$  funksiyaning 2010-tartibli hosilasining  $x=0$

nuqtadagi qiymatini toping ya'ni  $f^{(2010)}(0)$  ni

A)  $\frac{5}{8}$  B)  $\frac{3}{8}$  C)  $-\frac{5}{8}$  D)  $-\frac{3}{8}$

29. Nechta  $(a, b)$  butun sonlar juftligi  $\begin{cases} a^2 + b^2 < 16 \\ a^2 + b^2 < 8a \\ a^2 + b^2 < 8b \end{cases}$  sistemani qanoatlantiradi?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8

30.  $(2010)! : ((n!))!$  shartni qanoatlantiruvchi  $n$ -natural sonni toping.

A) 5 B) 10 C) 3 D) 6

31. Hisoblang:  $\left[ \frac{2010^3}{2008 \cdot 2009} - \frac{2008^3}{2009 \cdot 2010} \right]$  (bunda  $[x]$ -x ning butun qismi)

32.  $a, b, c, d \in R$  sonlar uchun  $a \geq b \geq c \geq d$ ,  $a^2 + d^2 = 1$ ,  $b^2 + c^2 = 1$ ,  $ac + bd = \frac{1}{3}$  bo'lsa  $ab - cd$  ni toping

33.  $m \circ n = \frac{m+n}{mn+4}$  bo'lsa,  $((\dots((2016 \circ 2015) \circ 2008) \circ \dots \circ 1) \circ 0)$  ni toping.

34.  $\begin{cases} \log_{x-1}(x^2 - 12x + 36) \leq 0 \\ 4^{x-2} - 35 \cdot 2^{x-4} + 6 \leq 0 \end{cases}$  tengsizliklar sistemasini yeching.

35. ABC uchburchak tekisligida yotmaydigan S nuqta berilgan. Agar  $SA=2$ ,  $AB=AC=4$  va  $SB=SC=BC=2\sqrt{3}$  bo'lsa, S nuqtadan ABC tekisligigacha bo'lgan masofani toping.

36.  $\sin x \cdot 3^{\sin x + 2} = (\sqrt{3} - \sin x) \cdot 3^{\sqrt{3} + 2 - \sin x}$  tenglamani yeching.

37.  $x, y, k \in R^+$  sonlari uchun  $k^2 \left( \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right) + k \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) = 3$  bo'lsa, k ning qabul qilishi

mumkin bo'lgan eng katta qiymatini toping.

38. x haqiqiy son uchun  $x^3 + 4x = 8$  bo'lsa, u holda  $x^7 + 64x^2$  ifoda nimaga teng bo'ladi?

39. ACE uchburchakda B nuqta AC kesmada, D nuqta CE kesmada shunday olinganki, bunda  $AE \parallel BD$  va AE kesmadaki Y nuqta uchun CY va BD kesmalar X nuqtada kesishadi.  $CX=5$  va  $CY=8$  bo'lsa,  $\frac{S_{ABDE}}{S_{BCD}}$  nisbatni aniqlang.

40. Hisoblang:  $1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \dots + 2010 \cdot 3^{2009}$

### 5-variant

1.  $x^4 + (2-x)^4 = 34$  tenglama ildizlari yig'indisini toping.

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8

2. Taqqoslang:  $a = \log_{2008} 2009$  va  $b = \log_{2009} 2010$

A)  $a > b$  B)  $a < b$  C)  $a = b$  D) aniqlab bo'lmaydi

3.  $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq e \leq 100$  bo'lsa,  $\left( \frac{1}{5}(a+b+c+d+e) - c \right)$  ifodaning eng katta qiymatini toping.

A) 60 B) 40 C) 100 D) aniqlab bo'lmaydi

4. Aylanadagi A, B, C, D nuqtalar uchun  $AB=11$ ,  $CD=19$ , AB kesmadagi P nuqta uchun  $AP=6$  va CD kesmadagi Q nuqta uchun  $CQ=7$ . P va Q nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq aylanani X va Y nuqtalarda kesadi. Agar  $PQ=27$  bo'lsa, XY ni toping

A) 29 B) 30 C) 31 D) 32

5.  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + 2009 \cdot 2010$  ni hisoblang.

A)  $\frac{2009 \cdot 2010 \cdot 2011}{3}$  B)  $\frac{2009 \cdot 2010 \cdot 2008}{2}$  C)  $\frac{4021 \cdot 2010 \cdot 2009}{6}$  D) to'g'ri javob

yo'q

6.  $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$  bo'lsa  $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$  nimaga teng bo'ladi?

A) 1 B) 0 C)  $\sqrt{3}$  D) 2

7.  $100!$  ni 101 ga bo'lgandagi qoldiqni toping.

A) 0 B) 1 C) 9 D) 100

8.  $2^{2010}$  sonini  $(2^7-1)$  ga bo'lgandagi qoldiqni toping

A) 64 B) 12 C) 2 D) 32

9. Tenglamani yeching:  $x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$

A)  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  B)  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$  C)  $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$  D)  $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

10. Aylanaga ichki chizilgan ABCDEF oltiburchakda  $AB=BC=2$ ,  $CD=DE=9$ ,  $EF=FA=12$  bo'lsa, aylana radiusini toping.

A) 4 B) 16 C) 8 D) 6

11.  $\frac{2010!}{2010^n}$  butun son bo'ladigan n ning eng katta qiymatini toping

A) 201 B) 15 C) 30 D) 45

12.  $x_1, x_2, x_3$  sonlari  $x^3-ax^2+ax-a=0$  tenglamaning ildizlari bo'lsa,  $x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3$  ni toping

A)  $a^3-3a$  B)  $a^3-3a$  C)  $a^3+3a^2$  D)  $a^3-3a^2$

13.  $7^{2048}-1:2^n$  bo'ladigan n ning eng katta qiymatini toping.

A) 14 B) 16 C) 18 D) 20

14.  $a, b, c > 0$  sonlar bo'lsa  $\left[\frac{a+b}{c}\right] + \left[\frac{b+c}{a}\right] + \left[\frac{c+a}{b}\right]$  ifodaning eng kichik qiymatini toping.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6

15.  $3a+2b+4d=10$ ,  $6a+5b+4c+3d+2e=8$ ,  $a+b+2c+5e=3$ ,  $2c+3d+3e=4$  va  $a+2b+3c+d=7$  bo'lsa,

$a+b+c+d+e$  ifodaning son qiymatini toping.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7

16. ABCD qavariq to'rtburchakda  $AB=BC=7$ ,  $CD=5$ ,  $AD=3$  va  $\angle ABC=60^\circ$  bo'lsa, BD-?

A) 8 B) 12 C) 10 D) 15

17. ABC uchburchakda A burchagi to'g'ri. AB tomondagi D nuqta uchun  $CD=1$ . AE gipotenuzaga tushirilgan balandlik (E nuqta gipotenuzada) uchun  $BD=BE=1$  bo'lsa, AD-?

A) 2 B)  $\sqrt[3]{2}-1$  C)  $\sqrt{2}-1$  D)  $\frac{1}{2}$

18. ABCD to'rtburchakda E, F, G, H nuqtalar mos ravishda AB, BC, CD, DA tomonlarining o'rtalari.  $EG=12$ ,  $FH=15$  bo'lsa  $(S_{ABCD})_{\max}$  ni toping.

A) 150 B) 160 C) 170 D) 180

19. ABC uchburchakda E, F nuqtalar AC va AB dan olingan. BE va CF lar X nuqtada kesishadi.

$\frac{AF}{FB} = \left(\frac{AE}{EC}\right)^2$  va X nuqta BE kesmaning o'rtasi bo'lsa,  $\frac{CX}{XF} = ?$

A)  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  B)  $\sqrt{5}$  C)  $\frac{3}{2}$  D)  $\frac{2\sqrt{5}-1}{2}$

20.  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$  ko'phadning barcha ildizlari nomusbat butun va  $a + b + c + d = 2010$  bo'lsa,  $d$  ni toping.

A) 2010 B) 528 C) 2011 D) 0

21.  $x^3 - 9x^2 + 11x - 1 = 0$  tenglamaning ildizlari  $a, b, c$ .  $s = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$  bo'lsa,  $s^4 - 18s^2 - 8s - ?$

A) -36 B) -37 C) -38 D) -39

22. Hisoblang:  $\frac{\sqrt{31 + \sqrt{31 + \sqrt{31 + \dots}}}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$

A)  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  B)  $\frac{1 + 5\sqrt{5}}{2}$  C)  $6 - \sqrt{5}$  D)  $\frac{1 + 5\sqrt{5}}{4}$

23.  $a \neq b \in R$  sonlar uchun  $a^2 + b^2 = 8ab$  shart bajarilsa,  $\left| \frac{a+b}{a-b} \right|$  ni toping.

A)  $\frac{\sqrt{15}}{3}$  B)  $\frac{\sqrt{10}}{3}$  C)  $\frac{2\sqrt{5}}{3}$  D)  $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

24. Hisoblang:  $^{2019}\sqrt{3\sqrt{5} - 2\sqrt{11}} \cdot ^{4020}\sqrt{89 + 12\sqrt{55}}$

A) 2 B) 1 C) 3 D) 5

25.  $a, b \in Z^+$  sonlari uchun  $a + \sqrt{b} = \sqrt{15 + \sqrt{216}}$  shart bajarilsa,  $\frac{a}{b}$  ni yoping.

A)  $\frac{3}{2}$  B)  $\frac{9}{2}$  C)  $\frac{1}{3}$  D)  $\frac{1}{2}$

26.  $\sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{x^2 - 14x + 58}$  ifodaning eng kichik qiymatini toping.

A)  $\sqrt{41}$  B) 51 C)  $\sqrt[3]{25}$  D)  $\sqrt{43}$

27. Agar geometrik progressiyada  $b_2 + b_3 = 6$  va  $b_4 - b_2 = 24$  bo'lsa,  $b_4$  ni toping.

A) 125 B) 75 C) 225 D) 25

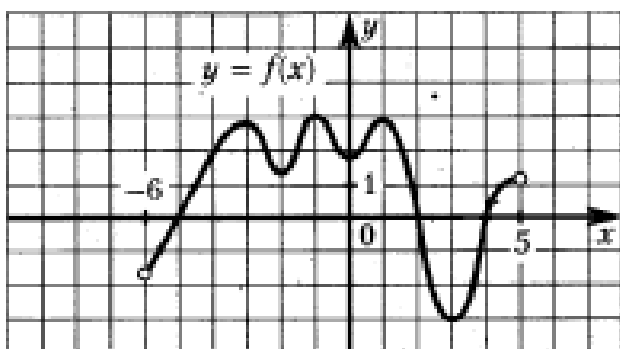
28. Tengsizlikni yeching:  $2^x + 2^{|x|} \geq 2\sqrt{2}$

A)  $(-\infty; \log_2(\sqrt{2} - 1)] \cup \left[\frac{1}{2}; \infty\right)$  B)  $[\log_2(2\sqrt{2} - 1); \infty)$

C)  $(-\infty; \log_2(9 - \sqrt{2})] \cup [4; \infty)$  D)  $(-\infty; -8\sqrt{2}] \cup \left[\frac{1}{2}; \infty\right)$

29.  $a$  ning qanday qiymatida  $x^2 + ax + 1 = 0$  va  $x^2 + x + a = 0$  tenglamalar umumiy ildizga ega?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1



30. Chizmada  $y = f(x)$  funksiya grafigi berilgan  $x$  ning  $[-6; 5]$  kesmadagi nechta butun qiymatida funksiyaning hosilasi nomanfiy bo'ladi?

A) 11 B) 9 C) 8 D) 6

31. Nechta  $(a,b,c,d,e) \in Z^+$  sonlari uchun  $abcde \leq a+b+c+d+e \leq 10$  tengsizlik bajariladi?

A) 116 B) 115 C) 106 D) 105

32. ABCD to'rtburchakda AD va BC tomonlari AB ga va AC diagonali DC ga perpendikulyar

AB=4, BC=3 bo'lsa, CD=?

33. ABC uchburchakning AB va BC tomonlari olingan D va E nuqtalar uchun AC=25, DB=6, BE=20 va AD=EC=x bo'lib,  $S_{DBE}=S_{ADEC}$  shart bajarilsa x ni toping.

34. Qanday n natural sonlarda  $n^3+2n^2+9n+8$  ifoda aniq kub bo'ladi?

35. ABC uchburchakda B burchagi to'g'ri burchak va BC tomondagi D nuqta uchun  $3 \angle BAD = \angle BAC$ , AC=2, CD=1 bo'lsa, BD ni toping.

36.  $231m^2=130n^2$  tenglama butun sonlar to'plamida nechta yechimga ega?

A) 3 B) 1 C) cheksiz ko'p D) aniqlab bo'lmaydi

37. p,q,r sonlar  $x^3+ax^2+bx+c=0$  tenglamaning ildizlari bo'lsa,  $(pq)^2+(qr)^2+(rp)^2$  ifodani a,b,c lar orqali ifodalang.

A)  $b^2+abc$  B)  $b^3-3abc$  C)  $b^2-2bc$  D)  $b^3+ac$

38. Nechta nomanfiy butun (a,b,c) uchligi  $2^a + 2^b = c!$  tenglamani qanoatlantiradi? Bunda  $(n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n)$

39. Musbat a,b,c sonlari uchun  $\log_a b + \log_b c + \log_c a = 0$  bo'lsa,  $(\log_a b)^3 + (\log_b c)^3 + (\log_c a)^3$  ni toping.

40. Hisoblang:  $\left\lfloor \frac{2010!+2007!}{2009!+2008!} \right\rfloor$  bunda  $([x]-x$  ning butun qismi,  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n)$

### Mustaqil yechish uchun testlarning javoblari

#### 1-variant

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	C	A	B	C	C	A	A	B	D
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	B	D	A	B	A	B	C	B	B
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
C	C	A	D	A	D	D	A	A	B
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$3\sqrt{2}(\sqrt{5} \pm 1)$	0	$x-5$	$8(\sqrt{2}-1)$	$a=3, a=-1$	5	80	469	47	$4(\sqrt{2}+1)$

#### 2-variant

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	D	A	D	B	C	A	B	C	C
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	A	A	B	A	D	C	C	C	B
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
A	A	B	B	A	D	C	D	A	D

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$2^{29} + 5$	$b < a < c$	406	$20\sqrt{3}$	$(-2; 1)$	$1\sqrt{2}$	3	528	140	$\sqrt{7}$

3-variant

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	C	A	C	A	B	D	A	D
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	B	D	A	C	C	B	D	B	D
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
D	A	A	D	D	C	A	B	B	A
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
20	-6	4483	14	$f(x) = x^2 - 2$	20	$\sqrt{97}$ yoki $\sqrt{57}$	75	$190\sqrt{21}$	$4\sqrt{2}$

4-variant

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	C	B	D	B	B	B	A	C	A
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	D	A	B	A	D	A	D	C	C
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
B	B	B	B	A	A	C	D	C	C
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
8	$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$1\sqrt{1}$ 2	$[\log_2 3; 2) \cup \{5\}$	$\frac{6}{\sqrt{13}}$	$x = \frac{(-1)^n \pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\sqrt{7} - 1}{2}$	$\frac{12}{8}$	$\frac{39}{2}$ 5	$\frac{1}{4}(4019 \cdot 2^{2010} + 1)$

5-variant

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	A	B	C	C	B	D	C	A	C
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	D	A	B	A	A	B	D	D	D
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
B	C	A	B	D	A	D	A	A	A
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
116	$20\sqrt{3}$	4	7	$3\sqrt{8}$	1	$b^2 - 2ac$	5	3	2009

## 4. XALQARO MATEMATIK OLIMPIADALARI

### XXXII Xalqaro matematik olimpiada

1991 yil, Shvetsiya, Sigtuna shahri

**1-masala.**  $ABC$  uchburchak berilgan. Agar  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  -  $ABC$  uchburchakning bissiktirialari,  $I$  - shu uchburchakka ichki chizilgan aylana markazi bo'lsin. Tengsizlikni isbotlang:

$$\frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \frac{8}{27}$$

**2-masala.** Natural  $n$  soni ( $n > 6$ ) hamdan  $n$  dan kichik va  $n$  bilan o'zora tub bo'lgan barcha natural sonlarning  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  to'plami berilgan bo'lsin. Agar  $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_k - a_{k-1}$  bo'lsa, unda  $n$  soni yo tub, yoki 2 ning biror natural darajasiga teng ekanligini isbotlang.

**3-masala.**  $S = \{1, \dots, 280\}$  va  $n$  - biror natural son.  $S$  to'plamning  $n$  ta elementli istalgan qism to'plami bir-biri bilan o'zora tub bo'lgan 5 ta sonni o'zi ichiga olishi lozim. Bunday  $n$  lardan eng kichigini toping.

**4-masala.**  $k$  ta qirrali bog'liq graf  $G$  berilgan. Uning qirralarini  $1, 2, \dots, k$  sonlar bilan raqamlab chiqish kerak. Bunda quyidagi shartlar bajarilishi talab etiladi:

- 1) turli qirralar turli raqamlar oladi;
- 2) grafning bir uchidan chiqqan qirralar raqamlarning umumiy bo'luvchisi 1 dan katta emas.

Bunday raqamlash mumkinligini isbotlang.

**5 -masala.**  $ABC$  uchburchak ichida  $P$  nuqta berilgan. Ushbu  $PAB$ ,  $PBC$ ,  $PCA$  burchaklardan kamida bittasi  $30^\circ$  dan katta emasligini isbotlang.

**6-masala.** Haqiqiy sonlarning cheksiz  $x_0, x_1, x_2, \dots$  ketma- ketligi qaraladi. Agar biror  $C$  musbat son uchun bu ketma-ketlikning barcha hadi  $|x_i| \leq C$  tengsizlikni qanoatlantirsa, u chegaralangan deyiladi. Haqiqiy  $a > 1$  son berilgan.  $i \neq j$  bo'lgan istalgan  $(i, j)$  juftik uchun  $|x_i - x_j| \geq |i - j|^a \geq 1$  tengsizlikni qanoatlantiradigan chegaralangan cheksiz  $x_0, x_1, x_2, \dots$  ketma-ketlik quring.

### XXXIII Xalqaro matematik olimpiada

1992 yil, Rossiya, Moskva shahri

**1-masala.**  $1 < a < b < c$  bo'lgan va  $(a-1)(b-1)(c-1)$  ko'paytma  $abc-1$  ning bo'luvchisi bo'ladigan barcha butun  $a, b, c$  sonlarni toping.

**2-masala.** Istalgan  $x, y \in R$  uchun

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$$

tenglikni qanoatlantiruvchi barcha  $f: R \rightarrow R$  funksiyalarni toping.

**3- masala.** Sferada to'qqizta nuqta berilgan. Ulardan istalgan to'rtasi bir tekislikda yotmaydi. Bu nuqtalar o'zoro qirralar (ya'ni kesmalar) bilan tutashtirilgan va har bir qirra ko'k yoki qizil rangga bo'yalgan, yoki bo'yalmasdan

qoldirilgan. Bo'yalgan qirralar soni  $n$  bo'lsin. Qirralar qanday tartibda bo'yalganidan qat'iy nazar tomonlari bir xil rangga bo'yalgan uchburchak topiladigan  $n$  ning qiymatlaridan eng kichigini toping.

**4- masala.** Tekislikda  $C$  aylana, bu aylanaga urinuvchi  $L$  to'g'ri chiziq va  $L$  to'g'ri chiziqqa  $M$  nuqta berilgan. Quyidagi xossaga ega bo'lgan  $P$  nuqtalarning geometrik o'rnini toping.  $L$  to'g'ri chiziqda shunday  $R$  va  $Q$  nuqtalar mavjudki,  $M$  nuqta  $RQ$  kesmaning o'rtasi va  $C$  aylana  $PQR$  uchburchakka ichki chizilgan bo'ladi.

**5- masala.** Uch o'lchovli fazonning chekli sondagi nuqtalardan tashkil topgan  $S$  to'plamning  $yz$ ,  $zx$ , va  $xy$  kordinata tekisliklariga ortogonal proyeksiyalarini

mos ravishda  $S_x$ ,  $S_y$  va  $S_z$  bilan belgilaymiz. Ushbu

$$|S|^2 \leq |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|$$

tengsizlikni isbotlang. ( $|A| - A$  to'plam elementlari soni; nuqtaning tekislikka ortogonal proyeksiyasi deb bu nuqtadan shu tekislikka tushirilgan perpendikulyar asosiga aytiladi).

**6- masala.** Natura  $n$  soniga ko'ra quyidagi xossaga ega eng kichik natural  $S(n)$  sonni qaraymiz:  $1 \leq k \leq S(n)$  shartni qanoatlantiruvchi har bir  $k$  uchun  $n^2$  ni  $k$  ta natural son kvadratlarining yig'indisi ko'rinishda yozish mumkin.

a) Har bir  $n \geq 4$  uchun  $S(n) \leq n^2 - 14$  ekanligini isbotlang.

b)  $S(n) \leq n^2 - 14$  bo'ladigan  $n$  ning biror qiymatini toping.

c) Cheksiz ko'p natural  $n$  uchun  $S(n) \leq n^2 - 14$  tenglik bajarilishini isbotlang.

### XXXIV Xalqaro matematik olimpiada

1993 yil, Turkiya, Istanbul shahri

**1- masala.**  $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$  funksiyani darjalari birdan kichik bo'lmagan ikkita butun koeffitsiyentli ko'bhadning ko'paytmasi ko'rinishida ifodalash mumkin emasligini isbotlang, bu yerda  $n$  ikkidan katta butun son.

**2- masala.** o'tkir burchakli  $ABC$  uchburchak va uning ichida  $D$  nuqta berilgan. Agar  $\angle ABD = \angle ACB + 90^\circ$  va  $AC \cdot BD = AD \cdot BC$  bo'lsa,

a) ushbu  $\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$  nisbatning qiymatini hisoblang;

b)  $ABC$  va  $BCD$  uchburchaklarga tashqi chizilgan aylanalarning  $C$  nuqtada o'tkazilgan urinmalar perpendikulyar bo'lishini ko'rsating.

**3- masala.** Cheksiz shaxmat taxtasida quyidagi qoidalar bo'yicha o'yin bormoqda. Dastlab  $n^2$  ta shashka  $x \times x$  maydonga joylashtirilgan (har bir katakka bittadan). Har bir yurishda istalgan bitta shashka vertical yoki gorizontal yo'nalishda qo'shni "band" katak ustidan uning ortidagi "bo'sh" katakka sakrashi mumkin. Bunda qaysi shashkaning ustidan sakrab o'tigan bo'lsa, o'sha shashka

shaxmat taxtasidan olib qo'yiladi. Taxtada faqat bitta shashka qoldirish mumkin bo'lgan  $n$  ning barcha qiymatlarini toping.

**4- masala.** Tekislikda berilgan  $P, Q, R$  nuqtalar uchun  $m(PQR)$  bilan  $PQR$  uchburchakning eng kichik balandligini belgilaymiz (agar bu nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotsa  $m(PQR)=0$ ). Tekislikda  $A, B, C$  va  $X$  nuqtalar berilgan bo'lsa,

$$m(ABC) \leq m(ABX) + m(ACX) + m(XBC)$$

ekanligini isbotlang.

**5- masala.** Istalgan  $n \in N$  uchun

$$f(f(n)) = f(n) + n, \quad f(n) < f(n+1)$$

hamda  $f(1)=2$  bo'ladigan  $f: N \rightarrow N$  funksiya mavjudmi?

**6- masala.** Aylana bo'ylab  $n$  ta  $L_0, L_1, \dots, L_{n-1}$  chiroq o'rnatilgan  $n$  birdan katta butun son. Har bir chiroq "on" yoki "off" holatda bo'lishi mumkin. Ketma-ket  $S_0, S_1, S_2, \dots$  amallar bajariladi. Bunda  $S_j$  amal faqat  $L_j$  chiroqning holatiga ta'sir qiladi (boshqa chiroqlar holatiga ta'sir qilmaydi): agar  $L_{j-1}$  "on" holtda bo'lsa, u holda  $S_j$  amal natijasida  $L_j$  chiroqning holati o'zgaradi (ya'ni "of" holatda bo'lsa "on" holatga o'tadi va aksincha); agar  $L_{j-1}$  "off" holatda bo'lsa, u holda  $S_j$  amal hech qanday o'zgarish qilmaydi. Chiroqlar raqamini  $n$  modil bo'yicha davom etiramiz, ya'ni  $L_n = L_0, L_{n+1} = L_1, L_{n+2} = L_2$  deb hisoblaymiz.

Agar dastlab hamma chiroqlar "on" holatda bo'lsa, quyidagilarni isbotlang;

a) biror  $M(n)$  qadamdan keyin barcha chiroqlar yana "on" holatda bo'ladi;

b) agar  $n$  soni  $2^n$  ko'rinishda bo'lsa, unda  $n^2 - 1$  qadamdan keyin barcha chiroqlar "on" holatda bo'ladi;

c) agar  $n$  soni  $2^k + 1$  ko'rinishda bo'lsa, unda  $n^2 - n + 1$  qadamdan keyin barcha chiroqlar "on" holatda bo'ladi.

### XXXIV Xalqaro matematik olimpiada

1994 yil, Honkong, Honkong shahri

**1-masala.**  $m$  va  $n$  natural sonlar olingan.  $a_1, a_2, \dots, a_m$  sonlar  $\{1, 2, \dots, n\}$  to'plamining turli elementlari bo'lsin. Bu sonlar quydagi xossaga ega: agar biror  $i$  va  $j$  ( $1 \leq i < j \leq m$ ) uchun  $a_i + a_j \leq n$  bo'lsa,  $a_i + a_j = a_k$  tenglikni qanoatlantiruvchi  $k$  ( $1 \leq k \leq m$ ) natural son mavjud. Isbotlang:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}$$

**2-masala.** Teng yonli  $ABC$  uchburchakda  $AB = AC$ . Quydagilar o'rinli deb faraz qilamiz:

1.  $M$  nuqta  $BC$  tomonning o'rtasi,  $MA$  to'g'ri chiziqda  $OB \perp AB$  bo'ladigan qilib  $O$  nuqta belgilanadi.

2.  $Q$  bilan  $BC$  kesmaning  $B$  va  $C$  nuqtalardan farqli ixtiyoriy nuqtasi belgilangan.

3.  $AB$  to'g'ri chiziqdan olingan  $E$  nuqta va  $AC$  to'g'ri chiziqdan olinga  $F$  nuqta  $Q$  bilan bir to'g'ri chiziqda yotadi.

$OQ$  va  $EF$  to'g'ri chiziqlar  $QE=QF$  bo'lganda va faqat shu holda o'zaro perpendikulyar bo'lishini isbotlang.

**3-masala.** Har bir musbat butun  $k$  uchun  $k+1, k+2, \dots, 2k$  sonlarni ikkilik sanoq sistemasidagi yozulari to'plamini qaraymiz. Bu to'plamning roppa-rosa uchta bir raqami qatnashadigan elementlari sonini  $f(k)$  bilan belgilaymiz.

a) istalgan butun musbat  $m$  uchun  $f(k)=m$  tenglikni qanoatlantradigan butun musbat  $k$  mavjudligini isbotlang.

b)  $f(k)=m$  tenglikni qanoatlantiruvchi yagona butun  $k$  mavjud bo'ladigan  $m$  ning barcha butun musbat qiymatlarini toping.

**4-masala.** Ushbu  $\frac{n^3+1}{mn-1}$  nisbat butun son bo'ladigan musbat butun sonlarning barcha  $(m,n)$  juftliklarini toping.

**5-masala.**  $S$  bilan  $-1$  dan qat'iy katta bo'lgan barcha haqiqiy sonlar to'plami belgilangan bo'lsin. Quyidagi ikkita shartni Qanoatlantiruvchi barcha  $f:S \rightarrow S$  funksiyalarni toping:

$$1) \text{ barcha } x, y \in S \text{ uchun } f(x+f(y)+xf(y))=y+f(x)+yf(x)$$

2)  $\frac{f(x)}{x}$  funksiya  $-1 < x < 0$  va  $x > 0$  oraliqlarning har birida qat'iy o'suvchi.

**6-masala.** Natural sonlar to'plamining quyidagi xossaga ega bo'lgan  $A$  qisim to'plami mavjudligini ko'rsatining: tub sonlar to'plamining har bir cheksiz  $S$  qism-to'plami uchun  $S$  to'plamning biror  $k(k \geq 2)$ ta elementining ko'paytmasi shaklida tasvirlash mumkin bo'lgan ikkita  $m \in A$  va  $n \in A$  natural sonlar mavjud.

### XXXVI Xalqaro matematik olimpiada

1995 yil, Kanada, Toronto shahri

**1-masala.**  $A, B, C$  va  $D$ -bir to'g'ri chiziqda shu tartibda joylashgan turli nuqtalar.  $AC$  va  $BD$  diametrli aylanalar  $X$  va  $Y$  nuqtalarda,  $XY$  va  $BC$  to'g'ri chiziqlar  $Z$  nuqtada kesishadi.  $XY$  to'g'ri chiziqda  $Z$  dan farqli  $P$  nuqta tanlangan bo'lsin.  $CP$  to'g'ri chiziq esa  $BD$  diametrli aylanani  $B$  va  $N$  nuqtalarda kesib o'tsin.  $MA, DN$  va  $XY$  to'g'ri chiziqlar bitta nuqtadan o'tishini isbotlang.

**2-masala.** Agar  $a, b, c$ -musbat haqiqiy sonlar va  $abc=1$  bo'lsa,

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

tengsizlik o'rinli bo'lishini isbotlang.

**3-masala.** Natural  $n(n \geq 4)$  soni uchun quyidagi xossani qaraymiz. Shunday  $r_1, r_2, \dots, r_n$  haqiqiy sonlar va bir tekislikda yotuvchi  $A_1, A_2, \dots, A_n$  nuqtalar mavjudki,

a) bu nuqtalardan hech qanday uchtasi bir to'g'ri chiziqda yotmaydi;

b) istalgan  $(i, j, k)$  uchlik uchun  $A_i, A_j, A_k$  uchburchakning yuzi  $r_i + r_j + r_k$  ga teng.

**4-masala.** Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi haqiqiy sonlarning  $x_0, x_1, \dots, x_{1995}$  ketma –ketligi mavjud bo’ladigan  $x_0$  ning eng katta qiymatini toping:

$$\begin{aligned} & \text{a) } x_0 = x_{1995} , \\ & \text{b) } x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}, \quad i=1, 2, \dots, 1995 \end{aligned}$$

**5- masala.** Qavariq  $ABCDEF$  oltiburchakda  $AB=BC=CD$ , va  $DE=EF=FA$  hamda  $\angle BCD = \angle EFA = 60^\circ$  bo’lsin. Oltiburchak ichida  $\angle AGB = \angle DHE = 120^\circ$  bo’ladigan qilib  $G$  va  $H$  nuqtalar olingan bo’lsa,  $AG+GB+GH+DH+HE > CF$  tengsizlik o’rinli ekanligini isbotlang.

**6- masala.** Ikkidan katta  $p$  tub son berilgan  $\{1, 2, \dots, 2p\}$  to’planning quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan nechta  $A$  qisim to’plami mavjudligini aniqlang.

a)  $A$  to’plam  $p$  ta elementga ega;

b)  $A$  to’plamning barcha elementlari yig’indisi  $p$  ga bo’linadi.

### XXXVII Xalqaro matematik olimpiada

1996 yil, Hindiston, Mumbay shahri

**1- masala.** Natural  $r$  soni va o’lchamlari  $AB=20$ ,  $BC=12$  bo’lgan  $ABCD$  to’g’ri to’rtburchak shaklidagi taxta berilgan. U to’g’ri chiziqlar bilan  $20 \times 12$  birlik kvadrat katakka bo’lingan. Taxta ustida quyidagicha harakatlanishga ruxsat beriladi: agar ikki katak markazlari orasidagi masofa  $\sqrt{r}$  bo’lsa, bu kataklarning biridan ikkinchisiga sakrab o’tish mumkin. Masala  $A$  uchli katakdan  $B$  uchli katakka borishi mumkin bo’lgan sakrashlar ketma –ketligini topishdan iborat.

a) Agar  $r$  soni 2 yoki 3 ga bo’linsa, masalaning yechimi yo’qligini isbotlang.

b) Agar  $r = 73$  bo’lsa, masala yechimga ekanligini isbotlang.

c)  $r = 97$  bo’lganda masala yechimga egami yoki yo’qmi?

**2- masala.**  $ABC$  uchburchak ichidagi  $P$  nuqta

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$$

tenglikni qanoatlantirsin.  $APB$  va  $APC$  uchburchaklarga ichki chizilgan aylanalar markazlarin mos ravishda  $D$  va  $E$  bilan belgilaymiz.  $AP, BD$  va  $CE$  to’g’ri ciziqlar bilan nuqtadan o’tishini isbotlang.

**3- masala.** Barcha manfiy bo’lmagan butun sonlar to’plami  $S$  deb belgilangan.  $S$  to’plamni o’ziga akislantiruvchi va istalgan  $m, n \in S$  uchun

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

tenglikni qanoatlantiradigan barcha  $f$  funksiyalarni toping.

**4- masala.**  $a$  va  $b$  natural sonlar bo’lib,  $15a+16b$  va  $16a-15b$  sonlarning har biri biror natural sonning kvadratiga teng. Bu ikki to’plam kvadratlardan kichigining mumkin bo’lgan eng kichik qiymatini toping.

**5 – masala.** Qavariq  $ABCDEF$  oltiburchakning  $AB$  tomoni  $DE$  tomoniga,  $BC$  tomoni  $EF$  tomoniga,  $CD$  tomoni esa  $FA$  tomoniga parallel.  $FAB$ ,  $BCD$  va  $DEF$

uchburchaklarga tashqi chizilgan aylanalar raduslarini mos ravishda  $R_A$ ,  $R_C$ , va  $R_E$  bilan belgilaymiz. Oltiburchak perimetri  $P$  bo'lsa, quyidagi tengsizlikni isbotlang:

$$R_A + R_C + R_E \geq \frac{P}{2}.$$

**6- masala.**  $p, q, n$  - natural sonlar va  $p, +q < n$  bo'lsin. Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi butun  $x_0, x_1, \dots, x_n$  sonlar berilgan:

a)  $x_0 = x_n = 0$ ;

b) har bir  $i$  uchun  $x_i - x_{i-1} = p$  yoki  $x_i - x_{i-1} = -q$  bu yerda  $1 \leq i \leq n$ .

U holda  $x_i = x_j$ ,  $i < j$  va  $(i, j) \neq (0, n)$  bo'ladigan  $i$  va  $j$  indekslar mavjudligini isbotlang.

### XXXVIII Xalqaro matematik olimpiada

1997 yil, Argintina, Mar-del-Plata shahri

**1- masala.** Tekislik birlik kvadrat kataklarga bo'lingan. Har bir kvadrat uchlarining koordinatalari butun sonlardir. Kvadratlar shaxmat doskasi tartibida oq va qora ranglarga bo'yalgan. Katetlari kataklarning tomonlari orqali o'tib,  $m$  va  $n$  ( $m$  va  $n$  - natural sonlar) uzunlikka ega bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchak qaraladi. Bu uchburchakning qora rangli qismining yuzi  $S_1$ , oq rangli qismining yuzi esa  $S_2$  bo'lsin.  $f(m, n) = |S_1 - S_2|$  belgilash kiritamiz:

a) Ikkalasi ham juft yoki ikkalasi ham toq bo'lgan barcha  $m$  va  $n$  uchun  $f(m, n)$  ni hisoblang.

b) barcha  $m$  va  $n$  uchun  $f(m, n) \leq 0,5 \max\{m, n\}$  ekanligini isbotlang.

c) Barcha natural  $m$  va  $n$  uchun  $f(m, n) \leq C$  tengsizlik bajariladigan o'zgarmas  $C$  soni mavjud emasligini isbotlang.

**2- masala.**  $ABC$  uchburchakning eng kichik burchagi  $A$  bo'lsin.  $B$  va  $C$  nuqtalar bu uchburchakka tashqi chizilgan aylanani ikkita yoyga ajratadi. Aytaylik,  $U$  - bu yoylardan  $A$  nuqtani o'z ichiga olmaganining ichki nuqtasi bo'lsin.  $AB$  va  $AC$  kesmalarning o'rta perpindikulyarlari  $AU$  to'g'ri chiziqni mos ravishda  $V$  va  $W$  nuqtalarda kesib o'tsin. Agar  $BV$  va  $CW$  to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi  $T$  bo'lsa,  $AU = TB + TC$  ekanligini isbotlang.

**3- masala.** Haqiqiy  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sonlar

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq 1, |x_i| \leq \frac{n+1}{2}, i = 1, 2, \dots, n$$

tengsizliklarni qanoatlantiradi. Bu holda  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ketma-ketlikning

$$|y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi  $y_1, y_2, \dots, y_n$  o'rin almashtirishi mavjudligini isbotlang.

**4- masala.** Har bir katagiga  $S = \{1, 2, \dots, 2n-1\}$  to'plamga tegishli bo'lgan biror son yozilgan  $n \times n$  o'lchamdagi jadval berilgan. Agar istalgan  $i = 1, 2, \dots, n$  uchun  $i$ -ustun bilan,  $i$ - satir birgalikda  $S$  to'plamdagi barcha sonlarni o'z ichiga olsa, unda bu jadval "kumush jadval" deyiladi. Isbotlang:

- a)  $n=1997$  bo'lganda "kumush jadval" mavjud emas;  
 b) "kumush jadval" mavjud bo'ladigan  $n$  lar cheksiz ko'p.

**5- masala.** Ushbu  $a^{(b^2)} = b^a$  tenglamani qanoatlantiradigan natural sonlarning barcha  $(a, b)$  juftliklarini toping.

**6- masala.** Istalgan natural  $n$  sonini  $2^k$  korinishidagi hadlar yig'indisi shaklida yozish mumkinligi ma'lum. Ana shunday yig'indilar sonini  $f(n)$  deb belgilaymiz ( bunda faqat qo'shiluvchilarning o'rnini bilan farq qiladigan yig'indilar bir xil hisoblanadi). Masalan,  $f(4)=4$ . Chunki 4 ni quyidagi to'rtta usulda 2 ning darajalariga yoyish mumkin: 4; 2+2; 2+1+1; 1+1+1+1. Istalgan butun  $n \geq 3$  uchun quyidagi tengsizlikni isbotlang:

$$2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}.$$

### XXXIX Xalqaro matematik olimpiada

1998 yil, Tayvan, Taypey shahri

**1- masala.** Qavariq  $ABCD$  to'rtburchakda  $AC$  va  $BD$  diogonallar perpendikulyar,  $AB$  va  $DC$  tomonlar parallel.  $AB$  va  $DC$  tomonlarning o'rta perpendikulyarlari  $P$  nuqtada kesishadi.  $ABCD$  to'rtburchakka  $ABP$  va  $CDP$  uchburchaklarning yuzlari teng bo'lganda va faqat shu holda tashqi aylana chizish mumkinligini isbotlang.

**2- masala.** Sport musobaqasida  $a$  ta o'yinchi ishtirok etdi va ularning chiqishlarini  $b$  ta hakam baholadi. Bu yerda  $b$ -toq son va  $b \geq 3$ . Har bir hakam har bir ishtirokchini "qoniqarli" yoki "qoniqarsiz" deb baholaydi. Musobaqa natijasiga ko'ra quyidagi xossa o'rinli bo'ladi: ixtiyoriy ikkita hakam uchun bu hakamlardan bir xil baholar olgan o'yinchilar soni  $k$  tadan oshmaydi ( $k$ -natural son). Isbotlang:

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

**3- masala.** Natural  $n$  sonining barcha natural bo'livchilari sonini ( $1$  va  $n$  ni ham hisobga olib)  $d(n)$  deb belgilaymiz. Biror  $n$  uchun  $d(n^2)/d(n) = k$  tenglik o'rinli bo'ladigan butun  $k$  larni toping.

**4- masala.**  $a^2b + a + b$  son  $ab^2 + b + 7$  ga bo'linadigan natural sonlarning barcha  $(a, b)$  juftliklarini toping.

**5- masala.**  $ABC$  uchburchakka ichki chizilgan aylana markazi  $I$  nuqta bo'lsin. bu aylananing  $BC, CA, AB$  tomonlarga urinish nuqtalarini mos ravishda  $K, L, M$  bilan belgilaymiz.  $B$  nuqtadan o'tuvchi va  $MK$  to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziq  $LM$  va  $LK$  to'g'ri chiziqlar bilan mos ravishda  $R$  va  $S$  nuqtalarda kesishsin  $RIS$  burchakning o'tkir ekanligini isbotlang.

**6- masala.** Natural sonlar to'plamida aniqlangan, natural qiymatlar qabul qiladigan va istalgan natural  $s$  va  $t$  sonlar uchun

$$f(t^2 f(s)) = s \cdot (f(t))^2$$

shartni qanoatlantiradigan barcha  $f$  funksiyalarni qaraymiz.  $f(1998)$  ning mumkin bo'lgan eng kichik qiymatini toping.

### **XL Xalqaro matematik olimpiada**

*1999 yil, Ruminiya, Buxarest shahri*

**1- masala.**  $S$  – tekislikdagi kamida uchta nuqtali to'plam bo'lsin. quyidagi shartni qanoatlantiradigan barcha  $S$  to'plamlarni toping:  $S$  to'plam uchlari  $S$  ga tegishli bo'lgan har bir kesmalarning o'rta perpindikulyariga nisbatan simmetrik.

**2- masala.** Tayin  $n$  qaraladi. Barcha manfiy bo'lmagan  $x_1, x_2, \dots, x_n$  haqiqiy sonlar uchun

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left( \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \right)^4$$

Tengsizlik bajariladigan eng kichik  $C$  sonni toping va  $C$  ning bu qiymatida qachon tenglik o'rinli bo'lishini aniqlang.

**3- masala.** Tekislikda  $n \times n$  ( $n$  – juft son) o'lchamli jadval berilgan. Uning ayrim kataklarini bo'yash kerak. bunda jadvalning har bir katagi (jumladan bo'yalganlari ham) kamida yana bir bo'yalgan katak bilan umumiy tomonga ega bo'lishi shart. Bo'yalishi zarur bo'lgan kataklar sonining eng kichik qiymatini toping.

**4- masala.**  $p$ - tup son,  $n$ - natural son va  $n \leq 2p$  bo'lsin.  $(p-1)^n + 1$  son  $n^{p-1}$  ga bo'linadigan barcha  $(n, p)$  juftliklarni toping.

**5- masala.** Berilgan  $G$  aylana ichida yotuvchi  $G_1$  va  $G_2$  aylanalar  $G$  aylanaga mos ravishda  $M$  va  $N$  nuqtalarda urinadi va  $G_2$  aylana markazi  $G_1$  aylanada yotadi.  $G_1$  va  $G_2$  aylanalarning umumiy vatari orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq  $G$  aylanani  $A$  va  $B$  nuqtalarda kesadi.  $MA$  va  $MB$  to'g'ri chiziqlar  $G_1$  aylanani ikkinchi marta  $C$  va  $D$  nuqtalarda kesadi.  $CD$  to'g'ri chiziqning  $G_2$  aylanaga urinishini isbotlang.

**6- masala.** Istalgan  $x \in R$  va  $y \in R$  uchun

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) + 1$$

Tenglikni qanoatlantiruvchi barcha  $f: R \rightarrow R$  funksiyalarni toping.

### **XLI Xalqaro matematik olimpiada**

*2000 yil, Janubiy Koreya, Tejong shahri*

**1- masala.**  $\Gamma_1$  va  $\Gamma_2$  aylanalar  $M$  va  $N$  nuqtada kesishadi.  $l$  to'g'ri chiziq  $\Gamma_1$  aylanaga  $A$  nuqtada,  $\Gamma_2$  aylanaga esa  $B$  nuqtada urinadi. Bu urinmaga  $M$  nuqta  $N$  nuqtaga qaraganda yaqinroq joylashgan.  $M$  nuqtadan o'tuvchi  $l$  ga parallel to'g'ri chiziq  $\Gamma_1$  aylanani  $C$  nuqtada,  $\Gamma_2$  aylanani esa  $D$  nuqtada kesadi.  $CA$  va  $DB$  to'g'ri chiziqlar  $E$  nuqtada,  $CD$  to'g'ri chiziq  $AN$  va  $BN$  to'g'ri chiziqlar bilan mos ravishda  $P$  va  $Q$  nuqtalarda kesishadi.  $EP = EQ$  bo'lishini isbotlang.

**2- masala.** Musbat  $a, b, c$  sonlar  $abc = 1$  shartni qanoatlantiradi. Isbotlang:

$$\left( a - 1 + \frac{1}{b} \right) \left( b - 1 + \frac{1}{c} \right) \left( c - 1 + \frac{1}{a} \right) \leq 1.$$

**3- masala.** Natural  $n$  soni berilgan. Gorizontal to'g'ri chiziqda  $n$  ta burga o'tiribti (hammasi bir nuqtada emas). Burgalar shu to'g'ri chiziq bo'ylab musbat soni bilan aniqlanadigan quyidagi qoida bo'yicha sakray boshlaydi. Ikkita burga  $A$  nuqtada va undan o'ngroqdagi  $B$  nuqtada o'tirgan bo'lsin. U holda  $A$  nuqtadagi burga  $B$  nuqtadan o'ngdagi  $BC=kAB$  shartni qanoatlantiradigan  $C$  nuqtaga sakraydi. Quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan barcha  $\mathbb{Z}$  sonlarini toping:  $n$  ta burganing dastlabki joylashishi qanday bo'lmasin va qaralayotgan to'g'ri chiziqdan  $M$  nuqta qanday tanlangan bo'lmasin, chekli sakrashlardan so'ng hamma burga  $M$  dan o'ng tomonga ko'chib o'tadi.

**4- masala.** Fokuschi 1 dan 100 gacha natural sonlar bilan raqamlangan 100 ta kartochka bor. Fokuschi kartochkalarni uchta qizil, oq va ko'k qutilarga taqsimlab soldi. Har bir qutida kamida bitta kartochka bor. Tomashabinlardan biri fokuschi ko'rsatmay qutilardan ikkitasini tanlaydi va ularning har biridan bittadan kartochkani olib ularga yozilgan sonlarning yig'indisini e'lon qiladi. Fokuschi yig'indiga qrab kartochka olinmagan qutini aniqlaydi. Bu fokus muvoffaqiyatli chiqadigan qilib nechta usilda kartochkalarni qutilarga taqsimlash mumkin? (Usul deganda kamida bitta kartochkaning har gal har xil qutiga tushishi tushiniladi.)

**5- masala.** Roppa –rosa 2000 ta har xil tub bo'luvchiga ega va  $2+1$  sonni  $n$  ga bo'ladigan  $n$  natural son mavjudmi?

**6- masala.** O'tkir burchakli  $ABC$  uchburchakning balandliklari  $AH_1, BH_2, CH_3$  bo'lsin.  $ABC$  uchburchakka ichki chizilgan aylana  $BC, CA, AB$  tomonlarga mos ravishda  $T_1, T_2, T_3$  nuqtalarda urinadi.

$l_1, l_2, l_3$  to'g'ri chiziqlar mos ravishda  $T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2$  to'g'ri chiziqlarga nisbatan  $H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2$  to'g'ri chiziqlarga simetrik.

$l_1, l_2, l_3$  to'g'ri chiziqlar uchlari  $ABC$  uchburchakka ichki chizilgan aylanada yotuvchi uchburchak hosil qilishini isbotlang.

## XLII Xalqaro matematik olimpiada

2001 yil, AQSH, Vashington shahri

**1- masala.** O'tkir burchakli  $ABC$  uchburchakka tashqi chizilgan aylananing markazi- $O$ ,  $AP$ -bu uchburchakning balandligi. Agar  $\angle BCA \geq \angle ABC + 30^\circ$  bo'lsa,  $\angle CAB + \angle COP < 90^\circ$  ekanligini isbotlang.

**2- masala.** Barcha haqiqiy musbat  $a, b$  va  $c$  sonlar uchun

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

tengsizlikni isbotlang.

**3- masala.** Yigirma bitta o'g'il bola va yigirma bitta qiz bola matematika musobaqasida qatnashdi. Natijada quyidagilar ma'lum bo'ldi:

- Har bir qatnashchining yechgan masalalari soni oltitadan oshmaydi;

- Har bir qiz bola va har bir o'g'il bola uchun ularning ikkalasi ham yechgan kamida bitta masala topiladi.

Kamida uchta qiz bola va kamida uchta o'g'il bola tomonidan yechilgan umumiy masalalar borligini isbotlang.

**4- masala.** Birdan katta toq natural  $n$  son va ixtiyoriy butun  $k_1, k_2, \dots, k_n$  sonlar berilgan bo'lsin. Ular vositasida  $1, 2, \dots, n$  sonlarning  $n!$  ta  $a=(a_1, a_2, \dots, a_n)$  o'rin almashtirishlarning har biri uchun

$$S(a) = \sum_{i=1}^n k_i a_i$$

Yig'indi tuzamiz.  $S(a)-S(b)$  ayirma  $n!$  ga bo'linadigan  $b$  va  $c$  ( $b \neq c$ ) o'rin almashtirishlar topilishini isbotlang.

**5- masala.**  $ABC$  uchburchakning  $AP$  va  $BQ$  bissektirialari o'tkazilgan. Agar  $\angle BAC = 60^\circ$  va  $AB+BP=AQ+QB$  bo'lsa  $ABC$  uchburchak burchaklarini toping.

**6- masala.**  $a, b, c$  va  $d$  butun sonlar va  $a > b > c > d > 0$ . Agar

$$ac+bd=(b+d+a-c)(b+d-a+c)$$

bo'lsa,  $ab+cd$  sonining murakab ekanligini isbotlang.

### XLIII Xalqaro matematik olimpiada

2002 yil, Buyik Britaniya, Glazgo shahri

**1- masala.** Natural  $n$  soni berilgan. Kordinatalari  $x+y < n$  shartni qanoatlantiruvchi nomanfiy  $x, y$  butun sonlar  $(x, y)$  nuqtalar to'plami  $T$  bo'lsin.  $T$  to'plamning har bir nuqtasi qizil yoki rangga bo'yaladi. Bunda, agar  $(x, y)$  nuqta qizil bo'lsa, u holda  $T$  to'plamning  $x' \leq x$  va  $y' \leq y$  shartni qanoatlantiruvchi barcha  $(x', y')$  nuqtalari ham qizil rangda bo'lishi zarur.  $x$  koordinatalari har xil bo'lgan  $n$  ta ko'k nuqtadan iborat to'plamni  $X$ - to'plam,  $y$  koordinatalari har xil bo'lgan  $n$  ta ko'k nuqtadan iborat to'plamni esa  $Y$ -to'plam deb ataymiz.  $X$ -to'plamlar miqdori  $Y$ -to'plamlar miqdoriga teng ekanligini isbotlang.

**2- masala.**  $\Gamma$  – markazi  $O$  nuqta hamda diametri  $BC$  ga teng aylana bo'lsin.  $\Gamma$  aylana  $A$  nuqta uchun  $0^\circ < \angle AOB < 120^\circ$  shart o'rinli.  $C$  nuqtani o'z ichiga olmaydigan  $AB$  yoyning o'rtasini  $D$  bilan belgilaymiz.  $O$  nuqtadan o'tuvchi  $DA$  kesmaga parallel to'g'ri chiziq  $AC$  to'g'ri chiziq bilan  $J$  nuqtada,  $OA$  kesmaning o'rta perpendikulyari  $\Gamma$  aylana bilan  $E$  va  $F$  nuqtalarda kesishsin.  $J$  nuqta  $CEF$  uchburchakka ichki chizilgan aylana markazi bo'lishini isbotlang.

**3- masala.** Quyidagi xossaga ega bo'lgan natural sonlarning barcha  $(m, n)$  juftliklarini aniqlang:  $m \geq 3$ ,  $n \geq 3$  hamda natural  $a$  parametirning cheksiz ko'p qiymatlarida

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

kasir butun son bo'ladi.

**4- masala.** 1 dan katta natural  $n$  soni berilgan. Bu sonning barcha  $d_1, d_2, \dots, d_n$  bo'luvchilari  $1=d_1 < d_2 < \dots < d_n=n$  tartibda raqamlangan. Belgilash kiritamiz:

$$D=d_1d_2+ d_2d_3+ \dots + d_{k-1}d_k.$$

a)  $D < n^2$  tengsizlikni isbotlang.

b)  $D$  son  $n^2$  ning bo'luvchisi bo'ladigan barcha  $n$  larni toping.

**5- masala.** Ixtiyoriy haqiqiy  $x, y, z, t$  sonlar uchun

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

tenglik o'rinli bo'ladigan barcha  $f : R \rightarrow R$  funksiyalarni toping.

**6- masala.** Tekislikda radiuslari 1 ga teng  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$  ( $n \geq 3$ ) aylanalarning markazlari mos ravishda  $O_1, O_2, \dots, O_n$  nuqtalarda joylashgan. Tekislikdagi istalgan to'g'ri chiziq bu ylanalarda ko'pi bilan ikkitasini kesib o'tishi ma'lum. Quyidagi tengsizlikni isbotlang:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{O_i O_j}.$$

#### **XLIV Xalqaro matematik olimpiada**

*2003 yil, Yaponiya, Tokio shahri*

**1- masala.**  $S = \{1, 2, \dots, 1000000\}$  to'plamning  $A$  qism-to'plami 101 ta elementga ega.  $S$  to'plamdan  $A_i = \{x + t_j : x \in A\}$  (bu yerda  $j = 1, 2, \dots, 100$ ) to'plamlarning har ikkitasi kesishmaydigan qilib  $t_i$  elementlar tanlash mumkinligini isbotlang.

**2- masala.**  $a, b$ - natural (butun musbat) sonlar.

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^2 + 1}$$

ifodaning qiymati natural son bo'ladigan barcha  $(a, b)$  juftliklarini toping.

**3- masala.** Quyidagi shartni qanoatlantiruvchi qavariq oltiburchak berilgan: har juft qarama –qarshi tomonlarning o'rtalari masofaning bu tomonlar uzunliklari yig'indisiga nisbati  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  ga teng. Berilgan iltiburchakning barcha burchaklari bir- biriga teng ekanligini isbotlang.

**4- masala.** Aylanaga ichki chizilgan  $ABCD$  to'rtburchak berilgan.  $D$  uchdan  $BC$ ,  $CA$  va  $AB$  to'g'ri chiziq'larga tushirilgan perpindikulyarning asoslari mos ravishda  $P, Q$  va  $R$  nuqtalar bo'lsin.  $PQ = QR$  tenglik  $ABC$  va  $ADC$  burchaklarning bissektirialari kesishish nuqtasi  $AC$  to'g'ri chiziqda yotganda va faqat shu holda o'rinli bo'lishini isbotlang.

**5- masala.**  $n$ - natural son va  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  shartni qanoatlantiruvchi  $x_1, x_2, \dots, x_n$  haqiqiy sonlar berilgan.

a) Quyidagi tengsizlikni isbotlang

$$\left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j| \right)^2 \leq \frac{2(n^2 - 1)}{3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2.$$

b)  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sonlar faqat arifmetik progressiya tashkil qilgandagina tenglik o'rinli bo'lishini ko'rsating.

**6- masala.**  $p$  tub soni berilgan. Isbotlang: shunday  $q$  tub son mavjudki, istalgan butun musbat  $n$  uchun  $n^p - p$  ayirma  $q$  ga bo'linmaydi.

#### **XLV Xalqaro matematik olimpiada**

*2004 yil, Gretsiya, Afina shahri*

**1- masala.** O'tkir burchakli  $ABC$  uchburchakda  $AB \neq AC$ . Diametri  $BC$  bo'lgan aylana  $AB$  va  $AC$  tomonlar bilan mos ravishda  $M$  va  $N$  nuqtalarda kesishadi.  $BC$  tomonning o'rtasini  $O$  bilan belgilaymiz.  $BAC$  va  $MON$  burchaklarning bissektirialari  $R$  nuqtada kesishsin.  $BMR$  va  $CNR$

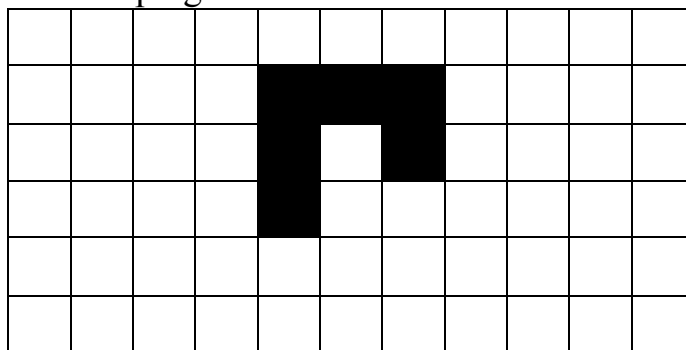
uchburchaklarga tashqi chizilgan aylanalar  $BC$  tomonida yotuvchi umumiy nuqtaga ega bo'lishini isbotlang.

**2- masala.**  $ab+bc+ca=0$  shartni qanoatlantiruvchi barcha  $a,b,c$  haqiqiy sonlar uchun

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$$

tenglik o'rinli bo'ladigan haqiqiy koeffitsiyentli barcha  $P(x)$  ko'phadlarni toping.

**3- masala.** Oltita birlik kvadratdan iborat 1-rasimda ko'rsatilgan figurani hamda uni burish va ag'darish natijasida hosil bo'lgan istalgan figurani ilgak deb ataymiz. Ilgaklar bilan bir sidra terib to'ldirish mumkin bo'lgan barcha  $m \times n$  o'lchovli to'g'ri to'rtburchaklarni toping.



1-rasm

**4-masala.** Natural  $n$  soni berilgan,  $n \geq 3$ . Musbat haqiqiy  $t_1, t_2, \dots, t_n$  sonlar uchun

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \dots + t_n) \left( \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n} \right)$$

tengsizlik o'rinli. Agar  $i, j, k$  indekslar  $1 \leq i \leq j \leq k \leq n$  shartlarni qanoatlantirsa, u holda  $t_i, t_j, t_k$  sonlar biror uchburchak tomonlarining uzunliklari bo'lishini isbotlang.

**5- masala.**  $ABCD$  qavariq to'rtburchak  $BD$  diagonalini  $ABC$  burchakning ham,  $CDA$  burchakning ham bissektrisasidan farqli.  $ABCD$  to'rtburchakning ichida yotuvchi  $P$  nuqta quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$\angle PBC = \angle DBA, \quad \angle PDC = \angle BDA.$$

$ABCD$  to'rtburchak faqat va faqat  $AP = CP$  tenglik bajarilganda aylanaga ichki chizilgan bo'lishini isbotlang.

**6-masala.** O'nli sanoq sistemasida yozilgan natural sonlar qaraladi. Agar istalgan ikkita qo'shni raqamdan biri juft, boshqasi esa toq bo'lsa, bu natural son "arra" deb ataladi. Qaysi  $n$  lar uchun  $n$  ga bo'linadigan "arra" mavjud?

### XLVI Xalqaro matematik olimpiada

2005 yil, Meksika, Merid shahri

**1-masala.** Teng tomonli  $ABC$  uchburchakning  $BC$  tomonidan  $A_1, A_2$  nuqtalar,  $CA$  tomonidan  $B_1, B_2$  nuqtalar,  $AB$  tomonidan esa  $C_1, C_2$  nuqtalar tanlandi. Bu nuqtalar tomonlarining uzunliklari teng bo'lgan  $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$  oltiburchakning uchlari.  $A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2$  to'g'ri chiziqlar bitta nuqtada kesishishini isbotlang.

**2-masala.** Butun sonlarning  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  ketma-ketligida musbat hadlar ham manfiy hadlar ham cheksiz ko'p. Istalgan  $n$  uchun  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sonlarni  $n$  ga bo'lganda hosil bo'lgan qoldiqlarning har xil ekanligi ma'lum. Berilgan ketma-ketlikda har bir butun son ko'pi bilan bir marta uchrashishini isbotlang.

**3-masala.** Musbat  $x, y$  va  $z$  sonlar  $xyz \geq 1$  shartni qanoatlantiradi. Isbotlang:

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

**4-masala.**  $a_1, a_2, \dots$  ketma-ketlik quyidagicha aniqlangan:

$$a^n = 2^n + 3^n + 6^n - 1, (n=1, 2, \dots).$$

bu ketma-ketlikning har bir hadi bilan o'zaro tub bo'lgan barcha natural sonlarni toping.

**5-masala.** Qavariq  $ABCD$  to'rtburchakda  $BC$  va  $AD$  tomonlar teng, lekin parallel emas.  $BC$  va  $AD$  kesmalardan mos ravishda  $E$  va  $F$  nuqtalar  $BE = DF$  bo'ladigan qilib tanlangan.  $AC$  va  $BD$  to'g'ri chiziqlar  $P$  nuqtada,  $BD$  va  $EF$  to'g'ri chiziqlar  $Q$  nuqtada,  $EF$  va  $AC$  to'g'ri chiziqlar esa  $R$  nuqtada kesishadi. Barcha  $E$  va  $F$  nuqtalar uchun hosil bo'lgan  $PQR$  uchburchaklarni qaraymiz. Bu uchburchaklarga tashqi chizilgan hamma aylana  $P$  nuqtadan boshqa yana bir umumiy nuqtaga ega bo'lishini isbotlang.

**6-masala.** Matematik olimpiadada ishtirokchilarga 6 ta masala berildi. Istalgan ikki masala juftligini ishtirokchilarning  $\frac{2}{5}$  qismidan ko'pi yechgan, lekin hech kim 6 ta masalaning hammasini yecha olgan emas. Kamida ikkita ishtirokchi 5 tadan masala yechganini isbotlang.

### XLVII Xalqaro matematik olimpiada

2006-yil, Sloveniya, Lyublyana shahri

**1-masala.**  $I$  nuqta  $ABC$  uchburchakka ichki chizilgan aylananing markazi bo'lsin. Uchburchakning ichida

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$$

Tenglikni qanoatlantiradigan  $P$  nuqta tanlangan.

Quyidagilarni isbotlang:

1)  $AP \geq AI$

2) Tenglik bajarilishi uchun  $P=I$  bo'lishi zarur va yetarli.

**2-masala.**  $P$ - mumtazam 2006-burchak bo'lsin.  $P$  ning dioganali yahshi deyiladi, agar bu diagonalning uchlari  $P$  ning chegarasini har biri soni toq bo'lgan tomonlardan tashkil topgan ikkita qisimga ajratsa.  $P$  ning tomonlarini ham yaxshi deb hisoblaymi.

$P$  ko'pburchak 2003 ta dioganallar yordamida uchburchaklarga shunday bo'linganki, bu dioganallardan ihtiyoriy ikkitasi berilgan ko'pburchakning ichiga tegishli umumiy nuqtaga ega bo'lmasin. Bunday bo'linishda ikkita tomoni yaxshi bo'lgan teng yonli uchburchaklar sonining eng katta qiymatini toping.

**3-masala.** Shunday eng kichik bo'lgan  $M$  haqiqiy son topilsinki,

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

tengsizlik barcha haqiqiy  $a, b$  va  $c$  sonlar uchun o'rinli bo'lsin.

**4-masala.**  $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$  tenglamani qanoatlantiradigan butun sonlarning barcha  $(x, y)$  juftliklarni toping.

**5-masala.**  $P(x)$  -darajasi  $n > 1$  bo'lgan butun koeffitsientli ko'phad,  $k$  esa ixtiyoriy natural son bo'lsin.

$$Q(x) = P(P(\dots P((P(x))))\dots))$$

Ko'phad qaralmoqda (bu yerda  $P$   $k$  marta qo'llanilgan).  $Q(t) = t$  tenglamani qanoatlantiradigan va umumiy soni  $n$  dan ko'p bo'lmagan  $t$  butun sonlarning mavjudligini isbotlang.

**6-masala.** Qavariq ko'pburchakning har bir  $b$  tomoniga shu ko'pburchakga tegishli va bir tomoni  $b$  bilan ustma-ust tushgan uchburchaklar yuzalardan eng kattasi mos qo'yilgan. Ko'pburchakning barcha tomonlariga mos qo'yilgan yuzalarning yig'indisi ko'pburchak yuzining ikkilanganidan kichik emasligini isbotlang.

### XLVIII Xalqaro matematik olimpiada

2007-yil, Vietnam, Xanoy shahri

**1-masala.** Haqiqiy  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sonlar berilgan bo'lsin. Har bir  $i (1 \leq i \leq n)$  uchun  $d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_i : i \leq j \leq n\}$  belgilashni kiratimiz.

$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}$  bo'lsin.

a) Har qanday  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  haqiqiy sonlar uchun

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2} \quad (*)$$

tengsizlikni isbotlang.

b) (\*) tengsizlikni tenglikka aylantiradigan  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  haqiqiy sonlarning mavjudligini ko'rsating.

**2-masala.** Shunday beshta  $A, B, C, D, E$  nuqta olinganki, bunda  $ABCD$ -parallelogramm,  $BCED$  esa biror aylanaga ichki chizilgan to'rtburchak bo'ladi.  $A$  nuqta orqali o'tadigan  $l$  to'g'ri chiziq  $DC$  kesmaning ichi bilan  $F$  nuqtada,  $BC$  to'g'ri chiziq bilan esa  $G$  nuqtada kesishsin. Agar  $EF = EG = EC$  bo'lsa,  $l$  to'g'ri chiziq  $DAB$  burchakning bissektiriasi bo'lishini isbotlang.

**3-masala.** Matematika musobaqasi ishtirokchilari orasida ayrimlari bir-biri bilan do'st hisoblanadilar (agar  $A$  bilan  $B$  do'st bo'lsa, unda  $B$  bilan  $A$  ham do'st bo'ladi). Musoboqa ishtirokchilardantashkil topgan guruh *do'stona* deyiladi, agar uning a'zolaridan ixtiyoriy ikkitasi bir-biri bilan do'st bo'lsa. (Hususan, a'zolar soni ikkitadan kam bo'lgan guruh *do'stona* bo'ladi). *Do'stona* guruhdagi a'zolar sonini uning *o'lchamli* deb ataymiz.

Ma'lumki, barcha *do'stona* guruhlarning *o'lchamlari* ichida eng kattasi juft sonidir. Barcha ishtirokchilarni ikkita xonaga shunday taqsimlash mumkinligini isbotlangki, bunda birinchi xonadagi *do'stona* guruhlarning *o'lchamlari* ichida eng kattasi ikkinchi xonadagi *do'stona* guruhlarning *o'lchamlari* ichida eng kattasiga teng bo'ladi.

**4-masala.**  $ABC$  uchburchakdagi  $BCA$  burchakning bissektrisasining bu uchburchakka tashqi chizilgan aylana bilan kesishish nuqtalaridan ikkinchisini  $R$  orqali, shu bissektrisaning  $BC$  va  $AC$  tomonlariga o'tkazilgan o'rta perpendikulyarlar bilan kesishish nuqtalarini esa mos ravishda  $P$  va  $Q$  orqali belgilaymiz.  $K$  va  $L$  nuqtalar mos ravishda  $BC$  va  $AC$  tomonlarning o'rtalari bo'lsin.  $RPK$  va  $RQL$  uchburchaklar yuzlari o'zaro teng bo'lishini isbotlang.

**5-masala.** Ma'lumki, musbat butun  $a$  va  $b$  sonlar uchun  $(4a^2 - 1)^2$  soni  $4ab - 1$  songa qoldiqsiz bo'linadi.  $a=b$  tenglikni isbotlang.

**6-masala.**  $n$ - musbat butun son bo'lsin. Uch o'lchovli fazoning  $(n+1)^3 - 1$  ta nuqtasidan tashkil topgan  $S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\}$ .

To'plamni qaraymiz. Shunday tekisliklarning eng kichik sonini aniqlangki, ularning birlashmasi  $S$  to'plamning barcha nuqtalarini o'z ichiga olgan, ammo  $(0, 0, 0)$  nuqtani olmagan bo'lsin.

### XLIX Xalqaro matematik olimpiada

2008-yil, Ispaniya, Madrid shahri

**1-masala.** o'tkir burchakli  $ABC$  uchburchakning balandliklari kesishish nuqtasi  $H$  bo'lsin. Markazi  $BC$  tomonning o'rtasida bo'lgan va  $H$  nuqtadan o'tadigan aylana  $BC$  to'g'ri chiziqni  $A_1$  va  $A_2$  nuqtalarda kesadi. Xuddi shunday, markazi  $CA$  tomonning o'rtasida bo'lgan va  $H$  nuqtadan o'tadigan aylana  $CA$  to'g'ri chiziqni  $B_1$  va  $B_2$  nuqtalarda kesadi, hamda markazi  $AB$  tomonning o'rtasida bo'lgan va  $H$  nuqtadan o'tadigan aylana  $AB$  to'g'ri chiziqni  $C_1$  va  $C_2$  nuqtalarda kesadi.  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  nuqtalar bir aylanada yotishini isbotlang.

**2-masala.** a) har biri  $1$  dan farqli bo'lgan va  $xyz=1$  shartni qanoatlantiruvchi haqiqiy  $x, y, z$  sonlar uchun

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

tengsizlikni isbotlang.

b) yuqoridagi tengsizlik har biri  $1$  dan farqli bo'lgan va  $xyz=1$  shartni qanoatlantiruvchi ratsional  $x, y, z$  sonlarning cheksiz ko'p uchliklari uchun tenglikka aylanishini isbotlang.

**3-masala.** Shunday natural  $n$  sonlarning cheksiz ko'pligini isbotlang-ki,  $n^2 + 1$  sonining  $2n + \sqrt{2n}$  sonidan katta bo'lgan tub bo'luvchisi mavjud.

**4-masala.**  $wx = yz$  shartni qanoatlantiruvchi barcha musbat haqiqiy  $w, x, y, z$  sonlar uchun

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

tenglikni qanoatlantiruvchi barcha  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  funksiyalar (ya'ni, barcha musbat sonlar to'plamida aniqlangan va musbat qiymatlarni qabul qiluvchi funksiyalar) topilsin.

**5-masala.** Natural  $n$  va  $k$  sonlar berilgan bo'lsin, bunda  $k \geq n$  va  $k - n$  ayirma juft son.  $1, 2, \dots, 2n$  sonlar yordamida raqamlangan  $(2n)$  ta lampalardanhar biri quyidagi ikkita holatda bo'lishi mumkin: *on*(yonayopti) yoki

*off*(yonmayapti). Eng boshida barcha lampalar yonmayapti. Quyidagi qadamlar ketma-ketliklari qaralmoqda: har bir qadamda aynan bitta lampaning holati qarama-qashi holatga o'zgaradi (ya'ni *on off* ga, yoki *off on* ga).

*N* orqali “*I* chi lampadan boshlab *n* chi lampagacha barcha lampalar yonayapti,  $(n+1)$  – lampadan boshlab  $(2n)$  – lampagacha esa barcha lampalar yonyapti” umumiy holatga olib keladigan *k* ta qadamdan iborat bo'lgan ketma-ketliklar sonini belgilaymiz.

*M* orqali “*I*- lampadan boshlab *n*- lampagacha barcha lampalar yonayapti,  $(n+1)$ -*n* chi lampadan boshlab  $(2n)$ -*n* chi lampagacha hech qaysi lampa o'zining holatini o'zgartirmagan” umumiy holatga olib keladigan *k* ta qadamdan iborat bo'lgan ketma –ketliklar sonini belgilaymiz.

*N/M* nisbatning qiymatini toping.

**6-masala.** Qavariq *ABCD* to'rtburchakda  $|BA| \neq |BC|$ . *ABC* va *ADC* uchburchaklarga ichki chizilgan aylanalarni mos ravishda  $w_1$  va  $w_2$  deb belgilaymiz. *w* aylana *AB* kesmaning *A* dan boshlab davomiga urinadi, *BC* kesmaning *C* dan boshlab davomiga urinadi, hamda *AD* va *CD* to'g'ri chiziq'larga urindi.  $w_1$  va  $w_2$  aylanalarning umumiy tashqi urinmalari *w* aylanada kesishishini isbotlang.

### L Xalqaro matematik olimpiada

2009-yil Germaniya, Bremen shahri

**1-masala.**  $\{1, \dots, n\}$  to'plamda o'zora teng bo'lmagan  $a_1, a_2, \dots, a_k$  natural sonlar olingan, bu yerda *n* - natural son va  $k \geq 2$ . Agar har bir  $i=1, \dots, k-1$  uchun  $a_i(a_{i+1}-1)$  soni *n* ga qoldiqsiz bo'linsa,  $a_k(a_{k+1}-1)$  soni *n* ga qoldiqsiz bo'linmasligini isbotlang.

**2-masala.** *ABC* uchburchakka tashqi chizilgan aylana markazini *O* deb belgilaylik. *P* va *Q* nuqtalar mos ravishda *CA* va *AB* kesmalarning ichki nuqtalari bo'lsin. *K, L* va *M* nuqtalar mos ravishda *BP, CQ* va *PQ* kesmalarning o'rtalari bo'lsin. *K, L* va *M* nuqtalar orqali o'tadigan aylanani  $\Gamma$  deb belgilaylik. Agar *PQ* to'g'ri chiziq  $\Gamma$  aylanaga urinsa,  $OP=OQ$  tenglik bajarilishini isbotlang.

**3-masala.** Natural sonlardan iborat bo'lgan qa'tiy o'suvchi  $s_1, s_2, s_3 \dots$  ketma-ketlik berilgan. Ma'lumki,  $s_1, s_2, s_3 \dots$  va  $s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1} \dots$  qismaniy ketma-ketliklarning ikkalasi ham arifmetik progressiya bo'ladi.  $s_1, s_2, s_3 \dots$  ketma-ketlik o'zi ham arifmetik progressiya bo'lishini isbotlang.

**4-masala.** *ABC* uchburchakda  $AB = AC$  bo'lsin.  $\angle CAB$  va  $\angle ABC$  burchaklarning bisektrisalari *BC* va *CA* tomonlar bilan mos ravishda *D* va *E* nuqtalarda kesishadi. *K* nuqta *ABC* uchburchakka ichki chizilgan aylana markazi bo'lsin. Agar  $\angle BEK = 45^\circ$  bo'lsa,  $\angle CAB$  burchakning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarini toping.

**5-masala.** Shunday  $f: N \rightarrow N$  funksiyalar (ya'ni natural sonlar to'plamida aniqlangan va natural qiymatlarni qabul qiladigan funksiyalar) barchasi topilsinki, istalgan natural *a* va *b* sonlar uchun

$$a, f(b) \text{ va } f(b + f((b) - 1))$$

Sonlari qandaydir maxsusmas uchburchak tomonlarining uzunliklari bo'ladi. (Hamma uchlari bitta to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchburchak *maxsusmas* deyiladi).

**6-masala.** O'zora teng bo'lmagan  $a_1, a_2, \dots, a_n$  natural sonlar berilgan.  $M$  to'plam  $n-1$  ta natural sonlardan iborat va  $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  soni  $M$  to'plamga tegishli emas. Chigirtka kordinata o'qining 0 koordinatali nuqtadan boshlab o'ng tomonga qarab  $n$  ta sakrashni bajarish kerak. Bunda sakrash uzunliklari biror tartibda olingan  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sonlarga teng bo'lishi shart. Tartibni shunday tanlash mumkinligini isbotlangki, bunda chigirtka  $M$  to'plamga tegishli bo'lgan nuqtalarning hech qaysisiga qo'nmasligi ta'minlanadi.

**LI Xalqaro matematik olimpiada**  
2010-yil Qozog'iston Astana shahri

**1-masala.** Barcha  $x, y \in R$  lar uchun

$$f([x]y) = f(x)[f(y)]$$

Shartni qanoatlantiradigan  $f: R \rightarrow R$  funksiyalar hamasi topilsin. (Bu yerda  $[z]$  orqali  $z$  dan katta bo'lmagan eng katta butun son belgilangan).

**2-masala.**  $I$  nuqta  $ABC$  uchburchakka ichki chizilgan aylana markazi,  $\Gamma$  esa shu uchburchakka tashqi chizilgan aylana bo'lsin.  $AI$  to'g'ri chiziq  $\Gamma$  aylanani  $A$  va  $D$  nuqtalarda kesadi.  $E$  nuqta  $BDC$  yoyda,  $F$  nuqta esa  $BC$  tomonda shunday tanlanganki, ular uchun  $\angle BAF = \angle CAE = \frac{1}{2} \angle BAC$

munosabat bajariladi.  $IF$  kesmaning o'rtasi  $G$  nuqta bo'lsin.  $DG$  va  $EI$  to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi  $\Gamma$  aylanada yotishini isbotlang.

**3-masala.**  $N$  deb barcha musbat butun sonlar to'plamini belgilaylik. Shunday  $g: N \rightarrow N$  funksiyalar barchasi topilsinki, bunda ixtiyoriy  $m, n \in N$  uchun  $(g(m) + n)(m + g(n))$

Son to'la kvadrat bo'lsin.

**4-masala.**  $P$  nuqta  $ABC$  uchburchakning ichida yotsin.  $AP, BP$  va  $CP$  to'g'ri chiziqlar  $ABC$  uchburchakka tashqi chizilgan  $\Gamma$  aylanani ikkinchi marta mos ravishda  $K, L$  va  $M$  nuqtalarda kessin.  $\Gamma$  aylanaga  $C$  nuqtasidan o'tkazilgan urinma va  $AB$  to'g'ri chiziq  $S$  nuqtada kesishadi. Ma'lumki,  $SC = SP$  tenglik bajariladi.  $MK = ML$  tenglik bajarilishini isbotlang.

**5-masala.** Eng boshida  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$  qutilarning har birida aynan bittadan tanga bor. Quyidagi ikki turdagiamallarni bajarishga imkon berilmoqda:

1-tur: ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan  $B_j$  (bu yerda  $1 \leq j \leq 5$ ) qutini tanlash, undan bitta tangani olib tashlash va  $B_{j+1}$  qutiga ikkita tangani solish.

2-tur: Ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan  $B_k$  (bu yerda  $1 \leq k \leq 4$ ) qutini tanlash, undan bitta tangani olib tashlash va  $B_{k+1}$  quti ichidagi tangalar to'plamini (u bo'sh bo'lishi mumkin)  $B_{k+2}$  quti ichidagi tangalar to'plami (u ham bo'sh bo'lishi mumkin) bilan almashtirish.  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$  qutilar hamasi bo'sh,  $B_6$  quti icida

esa aynan  $2010^{2010^{2010}}$  ta tanga bo'ladigan holatga olib keladigan bunday amallar chekli ketma-ketligi mavjudmi? (Ta'rifga ko'ra  $a^{b^c} = a^{(b^c)}$ ).

**6-masala.** Musbat haqiqiy sonlardan iborat  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$  ketma –ketlik berilgan. Ma'lumki, qandaydir ma'lum fiksirlangan musbat butun  $s$  son uchun barcha  $n > s$  larda

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$$

tengliklar o'rinli.

Barcha  $n \geq N$  sonlar uchun  $l \leq s$  va  $a_n = a_l + a_{n-l}$  munosabatlarni qanoatlantiradigan musbat butun  $l$  va  $N$  sonlar mavjudligini isbotlang.

## LII Xalqaro matematik olimpiada 2011-yil Gollandiya, Amesterdam shahri

**1-masala.** To'rta turli natural sonlardan ashkil topgan  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  to'plam uchun  $S_A$  orqali  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$  yig'indini belgilaymiz.  $n_A$  orqali quyidagi shartni qanoatlantiradigan  $(i, j)$  juftliklarning (bu yerda  $1 \leq i \leq j \leq 4$ ) sonini belgilaymiz:  $S_A$  son  $a_i + a_j$  songa qoldiqsiz bo'linadi. To'rta turli natural sonlardan tashkilk topgan barcha  $A$  to'plamlar topilsin-ki, bu to'plamlar uchun  $n_A$  eng katta qiymatni qabul qilsin.

**2-masala.** Tekislikda kamida ikkita nuqtadan tashkil topgan  $S$  chekli to'plam berilgan. Ma'lumki,  $S$  to'plamdan olingan ixtiyoriy uchta nuqta bir to'g'ri chiziqda yotmaydi.

Quyidagi jarayonni *charxpalak* deb nomlaymiz. Eng boshida aynan bitta  $P \in S$  nuqtani o'z ichiga olgan  $l$  to'g'ri chiziq olinadi. So'ng  $l$  to'g'ri chiziq  $P$  markaz atrofida soat mili harakati bo'ylab  $S$  to'plamga tegishli bo'lgan boshqa  $Q$  nuqta bilan uchrashguncha buriladi. Keyin  $Q$  nuqta yangi markaz sifatida olinadi va  $l$  to'g'ri chiziq  $Q$  markaz atrofida soat mili harakati bo'ylab  $S$  to'plamdagi qandaydir boshqa nuqta bilan uchrashguncha buriladi. Bunday nuqta cheksiz davom ettiriladi.

$S$  to'plamda shunday  $P$  va undan o'tadigan nshunday  $l$  to'g'ri chiziq mavjudligini isbotlang-ki, bunda  $l$  to'g'ri chiziqdan boshlangan charxpalakda  $S$  to'plamning har bir nuqtasi markaz sifatida cheksiz ko'p marta ishtirok etadi.

**3-masala.** Haqiqiy sonlar  $R$  to'plamida aniqlangan va haqiqiy qiymatlarni qabul qiladigan  $f: R \rightarrow R$  funksiya barcha haqiqiy  $x$  va  $y$  lar uchun

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

Tengsizlikni qanoatlantiradi. Barcha  $x \leq 0$  uchun  $f(x) = 0$  bo'lishini isbotlang.

**4-masala.** Butun  $n > 0$  son berilgan. Bizda ikki pallali tarozi va og'irliklari  $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$  bo'lgan  $n$  ta tosh bor. Biz barcha  $n$  ta toshlarni bittadan olib ketma-ket tarozi pallalariga joylashtiramiz, yani  $n$  ta qadamning har birida biz taroziga qo'yilmagan toshlardan bittasini olib, uni tarozining o'ng pallasi chap palasidan o'g'ir bo'lmasligi shart. Bunday qadamlar ketma-ketligini bajarishga qaratilgan usullar sonini toping.

**5- masala.** Butun sonlar to'plamida aniqlangan va musbat butun qiymatlarni qabul qiladigan  $f$  funksiya berilgan bo'lsin. Ma'lumki, barcha butun  $m$  va  $n$  lar uchun  $f(m)-f(n)$  ayirma  $f(m-n)$  soniga qoldiqsiz bo'linadi.

$f(m) \leq f(n)$  shartni qanoatlantiradigan barcha butun  $m$  va  $n$  lar uchun  $f(m)$  soni  $f(n)$  soniga qoldiqsiz bo'lishini isbotlang.

**6- masala.**  $ABC$  -o'kir burchakli uchburchak  $\Gamma$  -unga tashqi chizilgan aylana berilgan bo'lsin.  $l$  to'g'ri chiziq  $\Gamma$  aylanaga urinsin.  $l_a, l_b$  va  $l_c$  to'g'ri chiziqlar  $l$  to'g'ri chiziqqa mos ravishda  $BC, CA$  va  $AB$  to'g'ri chiziq'larga nisbatan simmetrik to'g'ri chiziqlar bo'lsin.  $l_a, l_b$  va  $l_c$  to'g'ri chiziqlar yordamida hosil bo'lgan uchburchakka tashqi chizilgan aylana  $\Gamma$  aylanaga urinishini isbotlang.

### LIII Xalqaro matematik olimpiada

2012 yil, Argentina, Mar-der-Plata shahri

**1-masala.** Berilgan  $ABC$  uchburchakning  $A$  uchiga mos keluvchi ichki-tashqi chizilgan aylana markazi  $J$  nuqtada yotadi. Bu aylana  $BC$  kesmaga  $M$  nuqtada,  $AB$  va  $AC$  to'g'ri chiziqlarga esa mos ravishda  $K$  va  $L$  nuqtalarda urinadi.  $LM$  va  $BJ$  to'g'ri chiziqlar  $F$  nuqtada,  $KM$  va  $CJ$  to'g'ri chiziqlar esa  $G$  nuqtada kesishadi.  $AF$  va  $BC$  to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi  $S$ ,  $AG$  va  $BC$  to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi esa  $T$  bo'lsin.

$M$  nuqta  $ST$  kesmaning o'rtasi bo'lishini isbotlang. ( $ABC$  uchburchakning  $BC$  tomoniga hamda  $AB$  va  $AC$  tomonlarning davomiga urinuvchi aylana uchburchakning  $A$  uchiga mos ichki- tashqi chizilgan aylana deb ataladi).

**2-masala.** Natural  $n$  son ( $n \geq 3$ ) va  $a_2 a_3 \dots a_n = 1$  shartni qanoatlantiruvchi haqiqiy musbat  $a_2, a_3, \dots, a_n$  sonlar berilgan.

Quyidagi tengsizlikning to'g'riligini isbotlang:

$$(1+a_1)^2(1+a_3)^3 \dots (1+a_n)^n > n^n$$

**3-masala.**  $A$  va  $B$  o'yinchilar "To'pchi" o'yinini o'ynamoqda. Bu o'yinning qoidasi  $k$  va  $n$  musbat butun sonlarga bog'liq va bu sonlar ikkala o'yinchiga ham ma'lum.

O'yin boshida  $A$  o'yinchi  $1 \leq x \leq N$  shartni qanoatlantiruvchi  $x$  va  $N$  butun sonlarni tanlaydi.  $A$  o'yinchi  $x$  sonini sir saqlaydi, lekin  $N$  sonni  $B$  o'yinchiga ro'yi- rost aytadi. Shundan keyin  $B$  o'yinchi  $A$  o'yinchiga savollar berish orqali  $x$  soni haqida ma'lumot ola boshlaydi. Savollar quyidagi tartibda berilishi lozim: bir savol orqali  $B$  o'yinchi o'zining istagiga ko'ra butun musbat sonlardan iborat  $S$  to'plamni ko'rsatadi (bu to'plam oldingi berilgan savollardan birida ko'rsatilgan bo'lishi ham mumkin) va  $A$  o'yinchidan "x soni  $S$  to'plamga tegishlimi?,"- deb so'raydi.  $B$  o'yinchi bunday savollarni istalgancha takrorlashi mumkin.  $B$  o'yinchining har bir savoliga  $A$  o'yinchi "Ha" yoki "Yo'q" deb javob berishi kerak. Bunda unga qanch xohlasa shuncha marta yolg'on javob berishga ruxsat beriladi; ammo istalgan  $k+1$  ta ketma-ket keluvchi javoblar kamida bittasi rost bo'lishi shart.

$B$  o'yinchi zarur bo'lgan savollarini berib bo'lgandan keyin u elementlari soni  $n$  dan katta bo'lmagan butun musbat sonlarning  $X$  to'plamini ko'rsatish

kerak. Agar  $x$  soni  $X$  to'plamiga tegishli bo'lsa, u holda o'yinda  $B$  yutadi, aks holda u yutqazadi.

Quydagilarni isbotlang:

a) Agar  $n \geq 2^k$  bo'lsa, u holda  $b$  o'yinchining yutish usuli bor;

b) Yetarlicha katta har bir  $k$  uchun shunday butun son,  $n \geq 1,99^k$  topiladiki, unda  $b$  o'zining yutug'ini kafolatlay olmaydi.

**4-masala.**  $a+b+c=0$  tenglikni qanoatlanuvchi istalgan butun  $a, b, c$  sonlari uchun

$$f^2(a) + f^2(b) + f^2(c) = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

shart o'rinli bo'ladigan barcha  $f: Z \rightarrow Z$  funksiyalarni toping.

**5-masala.**  $ABC$  uchburchakda  $\angle C = 90^\circ$  va  $C$  uchidan tushirilgan balandlikning asosi  $D$  bo'lsin.  $CD$  kesmada  $X$  nuqta tanlangan.  $AX$  kesmada yotadigan  $K$  nuqta uchun  $AL = AC$ . Agar  $AL$  va  $BK$  kesmalarning kesishish nuqtasi  $M$  bo'lsa,  $MK = ML$  ekanligini isbotlang.

**6-masala.** Quydagi xossaga ega bo'lgan barcha butun musbat  $n$  sonlarini toping:

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{n}{3^n} = 1$$

munosabat o'rinli bo'ladigan  $a_1, a_2, \dots, a_n$  butun musbat sonlar mavjud.

### LIV Xalqaro matematik olimpiada

2013 yil, Kolumbiya, Santa-Marta

**1-masala.** Istalgan  $k$  va  $n$  natural sonlar jufti uchun

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi  $k$  ta har xil bo'lishi shart bo'lmagan  $m_1, m_2, \dots, m_k$  natural sonlar mavjud bo'lishini isbotlang.

**2-masala.** Istalgan uchtasi bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan, 2013 tasi qizil rangga bo'yalgan, qolgan 2014 tasi esa ko'k rangga bo'yalgan tekislikdagi 4027 ta nuqtalar to'plamiga nuqtalarning kolumbiya konfiguratsiyasi deyiladi. Tekislikni bir nechta sohalarga ajratuvchi to'g'ri chiziqlar to'plamini qaraymiz. Bu to'plam berilgan nuqtalarning kolumbiya konfiguratsiyasi uchun yaxshi deyiladi, agar quyidagi ikkita shart bajarilsa:

- hech qaysi to'g'ri chiziq nuqtalarning konfiguratsiyasidagi hech bir nuqtadan o'tmaydi;

- bo'linishning hech bir sohasi ikki xilrangdagi nuqtalarga ega emas.

4027 ta nuqtalardan iborat istalgan kolumbiya konfiguratsiyasi uchun  $k$  ta to'g'ri chiziqlardan iborat yaxshi to'plam mavjud bo'ladigan  $k$  ning eng kichik qiymatini toping.

**3-masala.**  $ABC$  uchburchakning  $A$  uchi qarshisida yotuvchi tashqi va ichki chizilgan aylanasi  $BC$  tomoniga  $A_1$  nuqtada urinsin.  $CA$  tomonidagi  $B_1$  va  $AB$  tomonidagi  $C_1$  nuqtalar ham shunga o'xshash  $B$  va  $C$  tomonlar qarshilarida yotuvchi tashqi-ichki chizilgan aylanalar yordamida aniqlanadi.  $A_1B_1C_1$

uchburchakga tashqi chizilgan aylana markazi  $ABC$  uchburchakka tashqi chizilgan aylanada yotishi ma'lum.  $ABC$  to'g'riburchakli ekanligini isbotlang.

$ABC$  uchburchakning  $A$  uchi qarshisida yotuvchi tashqi-ichki chizilgan aylanasi deb,  $BC$  tomonga,  $AB$  tomoni davomiga  $B$  nuqtada va  $AC$  tomon davomiga  $C$  nuqtada urinuvchi aylana tushuniladi.  $B$  va  $C$  uchlarqarshisida yotuvchi tashqi-ichki chizilgan aylanalar hamshunga o'xshash aniqlanadi.

**4-masala.**  $ABC$  o'tkir burchakli uchburchak balandliklari kesishish nuqtasi  $H$  bo'lsin.  $W$  nuqta esa  $BC$  kesmadagi  $B$  va  $C$  dan farqli ixtiyoriy nuqta bo'lsin.  $ABC$  uchburchakning  $B$  va  $C$  uchidan o'tkazilgan balandliklar asoslari mosravishda  $M$  va  $N$  bo'lsin.  $BWN$  uchburchakga tashqi chizilgan aylana  $\omega_1$  bo'lib,  $X$  esa  $\omega_1$  da shunday nuqtaki  $WX$  -  $\omega_1$  ning diametri. Shunga o'xshash  $\omega_2$  -  $CWM$  uchburchakga tashqi chizilgan aylana bo'lib,  $Y$  -  $\omega_2$  aylanadagi shunday nuqtaki  $WY$  kesma  $\omega_2$  ning diametri.  $X$ ,  $Y$  va  $H$  nuqtalar bitta to'g'ri chiziqda yotishini isbotlang.

**5-masala.** Barcha musbat ratsional sonlarto'plamini  $Q_0$  orqali belgilaymiz.  $f: Q_0 \rightarrow R$  funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

- 1) barcha  $x, y \in Q_0$  lar uchun  $f(x)f(y) \geq f(xy)$  tengsizlik bajariladi;
- 2) barcha  $x, y \in Q_0$  lar uchun  $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$  tengsizlik bajariladi;
- 3) shunday  $a > 1$  ratsional son topilib,  $f(a) = a$  tenlik bajariladi.

Barcha  $x \in Q_0$  lar uchun  $f(x) = x$  ekanligini isbotlang.

**6-masala.**  $n \geq 3$  butun son bo'lsin. Aylana va uni  $n+1$  ta teng yoylarga ajratuvchi nuqtalarni qaraymiz. Bu nuqtalarni  $0, 1, \dots, n$  sonlari bilan bu sonlarni har biridan faqat bir martadan foydalanib, belgilashlarning barcha usullarini qaraymiz. Burish bilan farq qiladigan ikkita usul bir xil deb hisoblanadi.  $a+d=b+c$  tenglikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy to'rtta  $a < b < c < d$  belgilar uchun  $a$  va  $d$  belgili nuqtalarni tutashtiruvchi vatar va  $b$  va  $c$  belgili kesmaganda bunday belgilash usuli chiroyli deyiladi.

$M$  - barcha chiroyli belgilashlar usullari soni bo'lsin.  $x+y \leq n$  va  $EKUB(x,y)=1$  shartlarni qanoatlantiruvchi natural sonlarning  $(x,y)$  tartiblangan juftlari soni  $N$  bo'lsin.

$M=N+1$  ekanligini isbotlang.

### LV Xalqaro matematik olimpiada

2014 yil, Janubiy Afrika Respublikasi, Keyptaun

**1-masala.**  $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$  butun musbat sonlarning cheksiz ketma-ketligi bo'lsin. Ushbu  $a_n < \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n} \leq a_{n+1}$  tengsizlikni qanoatlantiradigan yagona butun  $n \geq 1$  son mavjud ekanligini isbotlang.

**2-masala.**  $n \geq 2$  butun son bo'lsin.  $n^2$  ta birlik katakdan tashkil topgan  $n \times n$  o'lchamli shaxmat taxtasi berilgan. Agar shaxmat taxtasining har bir gorizont va har bir vertikal qatorida bittadan rux joylashgan bo'lsa, bu  $ma \times ma$  kataklarda  $n$  ta rux joylashtirish tinch deyiladi.  $n$  ta ruxning har bir tinch joylashtirishi uchun  $k^2$  ta kataklarning hech birida rux yotmaydigan  $k \times k$  o'lchamli kvadrat topiladigan butun musbat  $k$  sonning eng kattasini toping.

**3-masala.**  $\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$  bo'ladigan  $ABCD$  qavariq to'rtburchak berilgan.  $BD$  to'g'ri chiziqqa  $A$  nuqtadan tushirilgan perpendikulyar asosi  $H$  bo'lsin. Mos ravishda  $AB$  va  $AD$  kesmalarda  $S$  va  $T$  nuqtalar shunday tanlanganki,  $H$  nuqta  $SCT$  uchburchak ichida yotadi va  $\angle CHS - \angle CSB = 90^\circ$  tenglik bajariladi.  $BC$  to'g'ri chiziq  $TSH$  uchburchakga tashqi chizilgan aylanaga urinma bo'lishini isbotlang.

**4-masala.** O'tmas burchakli  $ABC$  uchburchakning  $BC$  tomonida  $P$  va  $Q$  nuqtalar shunday tanlanganki,  $\angle PAB = \angle BCA$  va  $\angle CAQ = \angle ABC$ .  $AP$  va  $AQ$  to'g'ri chiziqlarda mos ravishda  $M$  va  $N$  nuqtalar shunday tanlanganki,  $P$  nuqta  $AM$  kesmaning o'rtasi,  $Q$  nuqta esa  $AN$  kesmaning o'rtasi bo'lsin.  $BM$  va  $CN$  to'g'ri chiziqlar  $ABC$  uchburchakga tashqi chizilgan aylanada kesishishini isbotlang.

**5-masala.** Keyptaun banki har bir musbat  $n$  soni uchun qiymati  $\frac{1}{n}$  ga teng bo'lgan tanga ishlab chiqaradi. Qiymatlari yig'indisi  $99 + \frac{1}{2}$  dan oshmaydigan bunday tangalarning chekli sondagi to'plami berilgan (tangalarning qiymatibir xil bo'lishi shartemas). Tangalarning bunday to'plamini 100 ta yoki undan kam shunday guruhlarga ajratish mumkinki, har bir guruhdagi tangalarning qiymatlari yig'indisi 1 dan oshmasligini isbotlang.

**6-masala.** Tekislikdagi to'g'ri chiziqlar umumiy holatdagi to'g'ri chiziqlar deyiladi, agar ulardan hech qanday ikkitasi parallelbo'lmasa va hech qanday uchta bitta nuqta orqali o'tmasa. Umumiy holatdagi bir nechta to'g'ri tekislikni bo'laklarga ajratadi. Ajratilgan bo'laklardan chekli yuzaga ega bo'lganlarini bo'linishning chegaralangan qismi deymiz. Yetarlicha katta barcha  $n$  lar uchun quyidagi tasdiq o'rinli ekanligini isbotlang:

Umumiy holatdagi  $n$  ta to'g'ri chiziqdan iborat har bir to'plamda  $\sqrt{n}$  tadan kam bo'lmagan to'g'ri chiziqlarni ko'k rangga shunday bo'yash mumkinki, bo'linishning istalgan chegaralangan qismining chegarasi to'liq ko'k bo'la olmaydi.

*Izoh.* Masala tasdig'ini  $\sqrt{n}$  ni  $c\sqrt{n}$  bilan almashtirib isbotlansa  $c$  o'zgarmasga bog'liq holda ball qo'shiladi.

### LVI Xalqaro matematik olimpiada

2015 yil, Tailand, Chiang Mai

**1-masala.** Agar tekislikdagi nuqtalardan tashkil topgan chekli  $S$  to'plamdagi ixtiyoriy turli  $A$  va  $B$  nuqtalar uchun  $AC = BC$  tenglikni qanoatlantiradigan  $S$  to'plamga tegishli  $C$  nuqta mavjud bo'lsa,  $S$  to'plam *balanslangan* deyiladi. Agar  $S$  to'plamdagi ixtiyoriy turli uchta  $A$ ,  $B$  va  $C$  nuqtalar uchun  $PA = PB = PC$  tengliklarni qanoatlantiradigan  $S$  to'plamga tegishli  $P$  nuqta mavjud bo'lmasa,  $S$  to'plam *markazlardan ozod* deyiladi.

(a) Har qanday butun  $n \geq 3$  uchun  $n$  ta nuqtadan tashkil topgan balanslangan to'plam mavjudligini isbotlang.

(b)  $n(n \geq 3)$  ta nuqtadan tashkil topgan balanslangan markazlardan ozod to'plam mavjud bo'ladigan  $n$  butun sonlarni toping.

**2-masala.** Ushbu  $ab - cbc - a, ca - b$  sonlarning har biri 2 ning darajasi bo'ladigan ( $2^n$  ko'rinishidagi son 2 ning darajasi deyiladi, bu yerda  $n$  nomanfiy butun son) natural sonlarning  $(a, b, c)$  uchliklarning barchasini toping.

**3-masala.** O'tkir burchakli  $ABC$  uchburchakda  $AB > AC$  bo'lsin.  $\Gamma$ -unga tashqi chizilgan aylana,  $H$  nuqta uning ortomarkazi,  $F$  nuqta esa uchburchakning  $A$  uchidan tushirilgan balandlik asosi bo'lsin.  $M$  nuqta  $BC$  tomonning o'rtasi bo'lsin.  $\angle HQA = 90^\circ$  bo'ladigan  $\Gamma$  aylanaga tegishli  $Q$  nuqta, hamda  $\angle HKQ = 90^\circ$  bo'ladigan  $\Gamma$  aylanaga tegishli  $K$  nuqta olingan.  $A, B, C, K$  va  $Q$  nuqtalar turli bo'lib, ko'rsatilgan shu tartibda  $\Gamma$  aylanada yotsin.  $KQH$  va  $FKM$  uchburchaklarga tashqi chizilgan aylanalar bir-biriga urinishini isbotlang.

**4-masala.**  $\Omega$  aylana  $ABC$  uchburchakka tashqi chizilgan aylana,  $O$  nuqta esa uning markazi bo'lsin. Markazi  $A$  nuqtada bo'lgan  $\Gamma$  aylana  $BC$  kesmani  $D$  va  $E$  nuqtalarda shunday kesadiki, bunda  $B, D, E$  va  $C$  nuqtalar hammasi turli bo'lib, ular  $BC$  to'g'ri chiziqda shu ko'rsatilgan tartibda yotsin.  $\Gamma$  va  $\Omega$  aylanalar  $F$  va  $G$  nuqtalarda kesishsin, bunda  $A, F, B, C$  va  $G$  nuqtalar  $\Omega$  da shu ko'rsatilgan tartibda yotibdi.  $BDF$  uchburchakka tashqi chizilgan aylana  $AB$  kesmani ikkinchi marta  $L$  nuqtada kessin.  $FK$  va  $GL$  to'g'ri chiziqlar turli bo'lib, ular  $X$  nuqtada kesishsin.  $X$  nuqta  $AO$  to'g'ri chiziqda yotishini isbotlang.

**5-masala.**  $R$ -haqiqiy sonlar to'plami bo'lsin. Barcha haqiqiy  $x$  va  $y$  sonlar uchun  $f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$  tenglamani qanoatlantiruvchi barcha  $f: R \rightarrow R$  funksiyalarni toping.

**6-masala.**  $a_1, a_2, \dots$  butun sonlar ketma-ketligi quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

(I) barcha  $j \geq 1$  uchun  $1 \leq a_j \leq 2015$ ;

(II) barcha  $1 \leq k < l$  uchun  $k + a_k \neq l + a_l$ .

$n > m \geq N$  shartlarni qanoatlantiradigan barcha butun  $m$  va  $n$  larda

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

munosabatlarni qanoatlantiradigan ikkita natural  $b$  va  $N$  sonlari mavjudligini isbotlang.

## 5. AJOYIB TENGSIZLIKLAR

Bu bo'limda biz ko'plab olimpiada masalalarini yechishda yordam beradigan bir qator tengsizliklarni keltiramiz. Bularning deyarli barchasi yaxshi-malum munosabatlar bo'lib, isbotlari qiyin emas. Bu munosabatlarning ko'pchiligining isbotini adabiyotlardan topish mumkin.

**1 (Bernulli tengsizligi).** Ixtiyoriy  $x > -1, \alpha > 1$  lar uchun

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$$

tengsizlik o'rinli, shu bilan birga tenglik faqat  $x=0$  bo'lganda o'rinli. Bundan tashqari,

$$(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x \quad (x \geq -1, 0 < \alpha < 1),$$

$$(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x \quad (x \geq -1, \alpha < 0)$$

tengsizliklar o'rinli.

**2 (Yung tengsizligi).** Agar  $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$  sonlar  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  tenglikni qanoatlantirsa, u holda ixtiyoriy  $a, b$  musbat sonlar uchun

$$\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \geq ab \quad (p > 1);$$

$$\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \leq ab \quad (p < 1)$$

tengsizliklar bajariladi. Bundan tashqari, tenglik faqat  $a^p = b^q$  bo'lgandagina bajariladi.

**3 (Yensen tengsizligi).**  $f:(a,b) \rightarrow \mathbb{R}$  quyidan (yuqoridan) qavariq funksiya bo'lsin. U holda barcha  $x_j \in (a,b), (j=1, \dots, n)$  lar va  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$  tenglikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy  $\lambda_j \geq 0 (j=1, \dots, n)$  sonlar uchun

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n);$$

$$(f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n))$$

tengsizlik o'rinli.

**4 (O'rta qiymatlar haqidagi Koshi tengsizligi).** Ixtiyoriy nomanfiy  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sonlar uchun

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

tengsizlik o'rinli.

**5 (Gyuygens tengsizligi).** Ixtiyoriy nomanfiy  $a_j \geq 0 (j=1, \dots, n)$  sonlar uchun

$$(1+a_1) \dots (1+a_n) \geq (1+\sqrt[n]{a_1 \dots a_n})^n$$

tengsizlik o'rinli.

**6 (Trans-tengsizlik).**  $a_1, \dots, a_n$  sonli ketma-ketlik  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$  shartni qanoatlantirsin.  $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$  yig'indi eng katta qiymatiga  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$  bo'lganda erishadi, eng kichik qiymatiga esa  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$  bo'lganda erishadi.

Agar

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n, \quad b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$$

bo'lsa, u holda  $b_1, \dots, b_n$  sonlarning ixtiyoriy  $(x_1, \dots, x_n)$  o'rin almashtirishi uchun

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1$$

qo'shtengsizlik o'rinli.

Barcha  $a_1, \dots, a_n$  lar uchun

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \dots + \frac{b_n}{a_n} \geq n;$$

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

tengsizliklar o'rinli, bu yerda  $n$ -ixtiyoriy natural son,  $(b_1, \dots, b_n) - a_1, \dots, a_n$  sonlarning ixtiyoriy o'rin almashtirishi.

**7 (O'rta geometrik va o'rta garmonik qiymatlar orasidagi bog'lanish).**  $a_1, \dots, a_n$  musbat sonlar uchun

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \frac{n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}}$$

tengsizlik o'rinli. Bundan tashqari, tenglik faqat  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  bo'lgandagina bajariladi.

**8 (O'rta kvadratik va o'rta arifmetik qiymatlar orasidagi bog'lanish).** Ixtiyoriy  $a_1, \dots, a_n$  sonlar uchun

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

tengsizlik o'rinli. Bundan tashqari, tenglik faqat  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  bo'lgandagina bajariladi.

**9 (Koshi-Bunyakovskiy-Shvarts tengsizligi).**  $n$  sondan iborat ikkita  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  ketma-ketlikalar berilgan bo'lsin. U holda

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

tengsizlik o'rinli. Tenglik biror o'zgarmas  $k$  son uchun  $a_i = k b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , bo'lganida bajariladi.

**10 (Chebishev tengsizligi).**  $n$  sondan iborat ikkita  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  ketma-ketlikalar berilgan bo'lsin. Faraz qilaylik,  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$  shart bajarilsin. U holda

a)  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n}$ , agar  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$  bo'lsa,

b)  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \geq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n}$ , agar  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$  bo'lsa.

**11 (Uch vatar haqida).**  $f$  – qavariq funksiya bo'lsin. U holda har qanday  $x < y < z$  lar uchun

$$\frac{f(y) - f(z)}{y - z} \leq \frac{f(x) - f(z)}{x - z} \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

qo'sh tengsizlik o'rinli.

**12 (Yensen tengsizligi).** Agar  $f$  – qavariq funksiya bo'lsa,

$$\frac{\sum_{i=1}^n f(x_i)}{n} \geq f\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

**13 (Jordan tengsizligi).** Barcha  $a \in (0, \frac{\pi}{2})$  lar uchun quyidagi

$$\frac{2\alpha}{\pi} \leq \sin \alpha \leq \alpha$$

tengsizlik o'rinli bo'lsin. U holda

$$\sin A + \sin B + \sin C \geq \frac{2A}{\pi} + \frac{2B}{\pi} + \frac{2C}{\pi} = 2.$$

**14 (Umumlashgan Koshi tengsizligi).**  $a_1, a_2, \dots, a_n, p_1, p_2, \dots, p_n$  – musbat sonlar bo'lsin. U holda

$$a_1^{p_1} + a_2^{p_2} + \dots + a_n^{p_n} \leq \left( \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right)$$

tengsizlik o'rinli. Tenglik esa faqat  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  bo'lganda bajariladi.

**15 (Umumlashgan Yung tengsizligi).**  $r_1, r_2, \dots, r_n$  musbat sonlar uchun  $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n} = 1$  munosabat o'rinli bo'lsin. Ixtiyoriy  $a_1, a_2, \dots, a_n$  musbat sonlar uchun

$$a_1 a_2 \dots a_n \leq \frac{a_1^{r_1}}{r_1} + \frac{a_2^{r_2}}{r_2} + \dots + \frac{a_n^{r_n}}{r_n}$$

tengsizlik o'rinli.

**16 (Gel'der tengsizligi).**  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  shartni qanoatlantiruvchi barcha musbat  $p, q$

sonlar va  $a_j, b_j, j = \overline{1, n}$  sonlar uchun

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

tengsizlik o'rinli.

**17 (Minkovskiy tengsizligi).** Ixtiyoriy musbat  $a_j, b_j (j = \overline{1, n})$  sonlar va natural  $p$  son uchun

$$\left( \sum (a_k + b_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum (a_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum (b_k)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

tengsizlik o'rinli.

# MATEMATIKA OLIMPIADASIGA TAYYORGARLIK KO'RISH UCHUN TAVSIYA QILINADIGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

## I. O'zbek tilida chop qilingan adabiyotlar to'plami

1. A.Qo'chqorov. Mantiqiy masalalar/ Toshkent, 2008 y.
2. Sh.Ismailov, O.Axmedov, M.Ro'ziboev. Matematikadan olimpiada testlari / Toshkent, 2008 y.
3. B.Abdurahmonov. Matematik induksiya metodi/ Toshkent, "Huquq va jamiyat" nashriyoti bosmaxonasi, 2008 y.
4. Sh.Ismailov, A.Qo'chqorov, B.Abdurahmonov. Tengsizliklar-I. Isbotlashning klassik usullari / Toshkent, 2008 y.
5. Sh.Ismailov, O.Ibrogimov. Tengsizliklar-II. Isbotlashning zamonaviy usullari / Toshkent, 2008 y.
6. A.Qo'chqorov, J.Rasulov. Tengsizliklar-III. Masalalar to'plami / Toshkent, 2008 y.
7. Sh.N.Ismailov. Sonlar nazariyasi/ Toshkent, 2008 y.
8. A.S.Yunusov, S.I.Afonina, M.A.Berdiqulov, D.I.Yunusova. Qiziqarli matematika va olimpiada masalalari. Toshkent, "O'qituvchi" nashriyot-matbaa ijodiy uyi, 2007 y.
9. Ш.А.Аюпов, Б.Б.Рихсиев, О.Ш.Қўчқоров. Математика олимпиадалари масалалари. 1-қисм. Тошкент, "Фан" нашриёти, 2004 й.
10. Ш.А.Аюпов, Б.Б.Рихсиев, О.Ш.Қўчқоров. Математика олимпиадалари масалалари. 2-қисм. Тошкент, "Фан" нашриёти, 2004 й.
11. "Fizika, matematika va informatika" (O'zbekiston) jurnallari.

## II. Rus tilida chop qilingan adabiyotlar to'plami

1. Н.Б.Алфутова, А.В.Устинов. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. М.: МЦНМО, 2002.
2. Математические задачи, <http://www.problems.ru>
3. Э.Беккенбах, Р.Беллман. Неравенства. – М.Мир:, 1965.
4. Э.Беккенбах, Р.Беллман. Введение в неравенства. – М.Мир:, 1965.
5. П.П.Коровкин. Неравенства. Вып. 5. М.: Наука, 1983.
6. «Математика в школе» (Россия), «Квант» (Россия), «Соровский образовательный журнал» (Россия) журналлари.

## III. Ingliz tilida chop qilingan adabiyotlar to'plami

1. Lee Hojoo. Topics in Inequalities-Theorems and Techniques. Seoul: 2004.
2. T.Andreescu, G.Dospinescu, V.Cirtoaje, M.Lascu. Old and new inequalities. Gill Publishing House, 2004.
3. Mathematical Olympiads, Problems and solutions from around the world, 1998-1999. Edited by T.Andreescu and Z.Feng, Washington: 2000.
4. K.S.Kedlaya.  $A < B$ , <http://www.unl.edu/amc/a-activities/a4-for-students/s-index.html>
5. T.J.Mildorf. Olympiad Inequalities, <http://web.mit.edu/tmildorf>

6. A.Engel. Problem-Solving Strategies. Parts1,2. Springer-Verlag New York Inc. 1998.
6. Journal of “Crux mathematicorum with mathematical Mayhem” (Canada).

#### **IV. Elektron resurslar to'plami**

1. <http://matholymp.zn.uz> – O'zbekiston matematika olimpiadasi rasmiy sayti
2. <http://uzedu.uz/uzb/info/fanolimp/> – Respublika matematika olimpiadasida tavsiya qilingan masalalar
3. <http://imo.org> – Xalqaro matematika olimpiadasining rasmiy veb-sahifasi
4. Math Links, <http://www.mathlinks.ro>
5. Art of Problem Solving, <http://www.artofproblemsolving.com>
6. Math Pro Press, <http://www.mathpropress.com>

## MUNDARIJA

Kirish .....	3
1. Olimpiada tarixi .....	5
2. Olimpiada masalalari .....	22
3.Olimpiada testlari.....	62
4. Xalqaro matematik olimpiadalari .....	89
5. Ajoyib tengsizliklar .....	111
Matematika olimpiadasiga tayyorgarlik ko'rish uchun tavsiya qilinadigan adabiyotlar ro'yxati.....	115

## QAYDLAR UCHUN

## QAYDLAR UCHUN

**T.H.RASULOV, Z.N.HAMDAMOV, E.B.DILMURODOV**

**MATEMATIKADAN OLIMPIADA  
MASALALARI**

**Мухаррир: Н. Рустамова  
Мусаххих: М. Расулов  
Техник мухаррир: А.Қаландаров**

**Босишга руҳсат этилди: 18.04.2016 йил. Times New Roman гарнитураси. Офсет усули.  
Бичими 60x84 1/16. Шартли босма табағи 7.5. Нашриёт ҳисоб табағи 7.0. Адади: 100 нусха.  
Буюртма№67.**

**“Наврўз” нашриёти. Лицензия №АІ 170. 23.12.2009 йил.  
Тошкент шаҳри. 100000 А. Темур кўчаси 19 уй.**

**МЧЖ “Шарқ-Бухоро” босмаҳонасида чоп этилди.  
Бухоро шаҳри, М.Иқбол кўчаси, 11-уй. Тел.: (95) 604-39-00.**