

Классификация третьего типа комплексных естественным образом градуированных алгебр Лейбница с характеристической последовательностью равной $(n-3, 2, 1)$

Реджепов Ш.Б., Худойбердиев А.Х.

Аннотация

Ушбу маколада n улчовли табиий усулда градуирланган нилиндекси $n - 3$ га тенг булган Лейбниц алгебралари урганилган. Хусусан, характеристик кетма-кетлиги $(n - 3, 2, 1)$ булган *III*- турдаги n улчовли Лейбниц алгебралари тавсифланган.

In this work n dimensional naturally graded complex Leibniz algebras with nilindex $n - 3$ are investigated. Namely, are described the Leibniz algebras with characteristic sequence $(n - 3, 2, 1)$ type *III*.

Ключевые слова: алгебра Ли, алгебра Лейбница, характеристическая последовательность, нильпотентность, естественное градуирование.

1 Введение

Одним из основных и важных объектов современной алгебры являются алгебры Ли. Активные исследования в области алгебр Ли привели к возникновению ряда обобщений этих алгебр, такие как алгебры Мальцева, супералгебры Ли, бинарное Лиевы алгебры, алгебры Лейбница и другие. Напомним, что алгебры Лейбница были введены в 90-х годах прошлого столетия французским математиком Ж.-Л. Лоде в работе [8] и определяются следующим тождеством

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y].$$

Описание нильпотентных алгебр Лейбница представляется необозримой задачей и поэтому их изучение должно проходить с наложением дополнительных ограничений. Таких как ограничение на индекс нильпотенности, условие градуирования, ограничение на характеристическую последовательность и другие. Описанию нуль-филиформных и филиформных алгебр Лейбница посвящены работы [1], [7], [9], а естественным образом градуированным квази-филиформным алгебрам Лейбница изучались в [4], [6]. Напомним, что n -мерные алгебры Лейбница нильиндекса $n - 3$ имеют характеристические последовательности следующих типов $(n - 3, 3)$, $(n - 3, 2, 1)$ и $(n - 3, 1, 1, 1)$. Классификации естественным образом градуированных алгебр Лейбница с характеристическими последовательностями равными $(n - 3, 3)$, $(n - 3, 1, 1, 1)$ получены в работах [2], [3], [5]. Поэтому, для полного завершения градуированных алгебр Лейбница нильиндекса $n - 3$ необходимо рассмотреть случай $(n - 3, 2, 1)$. В данной статье классифицируется один из трех возможных типов таких алгебр Лейбница.

2 Предварительные сведения

В данном параграфе представлены предварительные сведения, определения и обозначения общепринятые в литературе.

Определение 2.1. Алгебра L над полем F называется алгеброй Лейбница, если для любых $x, y, z \in L$ выполняется тождество Лейбница:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y],$$

где $[-, -]$ - умножение в L .

В дальнейшем для удобства мы введем оператор $J(x, y, z) := [x, [y, z]] - [[x, y], z] + [[x, z], y]$. Тогда тождества Лейбница будет означать, что $J(x, y, z) = 0$ для любых $x, y, z \in L$.

Для произвольной алгебры Лейбница определим нижний центральный ряд:

$$L^1 = L, \quad L^{k+1} = [L^k, L], \quad k \geq 1.$$

Определение 2.2. Алгебра Лейбница L называется нильпотентной, если существует $s \in \mathbb{N}$ такое, что $L^s = 0$. Минимальное число s , обладающее таким свойством, называется индексом нильпотентности алгебры L .

Пусть x элемент множества $L \setminus L^2$. Для оператора правого умножения R_x определим убывающую последовательность $C(x) = (n_1, n_2, \dots, n_k)$, $(n = n_1 + n_2 + \dots + n_k)$, состоящую из размеров жордановых клеток оператора R_x . На множестве таких последовательностей определим лексикографический порядок, т.е. $C(x) = (n_1, n_2, \dots, n_k) \leq C(y) = (m_1, m_2, \dots, m_s)$ существует $i \in \mathbb{N}$ такое, что $n_j = m_j$ для любых $j < i$ и $n_i < m_i$.

Определение 2.3. Последовательность $C(L) = \max_{x \in L \setminus [L, L]} C(x)$ назовем характеристической последовательностью алгебры L .

Пусть L — конечномерная нильпотентная алгебра Лейбница. Положим $L_i := L^i / L^{i+1}$, $1 \leq i \leq s-1$, где s — нильиндекс алгебры L и обозначим $grL = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_{s-1}$. Из условия $[L_i, L_j] \subseteq L_{i+j}$ получим градуированную алгебру grL . Градуировку, построенную таким образом, мы назовем естественной градуировкой. Если алгебра Лейбница G изоморфна алгебре grL , тогда G называется естественным образом градуированной алгеброй Лейбница.

В силу определения характеристической последовательности имеем существование базиса $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ алгебры L такого, что оператор R_{e_1} имеет одну клетку J_{n-3} размера $n-3$, J_2 размера 2 и J_1 размера один.

Отметим, что всевозможные расположения клеток J_{n-3} , J_2 и J_1 приводят к шести рассматриваемым случаям. Однако, нетрудно видеть, что сдвигом базисных элементов данные шесть случаев сводятся к следующим трем видам для матрицы оператора R_{e_1} :

$$\begin{pmatrix} J_{n-3} & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} J_2 & 0 & 0 \\ 0 & J_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \end{pmatrix}.$$

Определение 2.4. Алгебру Лейбница L назовем алгеброй первого типа (типа I); второго типа (типа II); третьего типа (типа III) если оператор R_{e_1} имеет вид:

$$\begin{pmatrix} J_{n-3} & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} J_2 & 0 & 0 \\ 0 & J_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \end{pmatrix},$$

соответственно.

3 Основные результаты

В данном параграфе мы рассматриваем естественным образом градуированные алгебры Лейбница третьего типа, т.е. случай когда в n -мерной алгебре Лейбница L существует базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ такой, что матрица оператора правого умножения R_{e_1} имеет вид:

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, мы имеем следующие произведения:

$$\begin{cases} [e_1, e_1] = 0, \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n. \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что алгебра Лейбница имеет 2 порождающих, а именно, e_1 и e_2 . Действительно, если $e_2 \in L_k$ тогда $e_3 \in L_{k+1}$ которое влечет $e_{n-3} \in L_{k+n-4}$ и $k+n-4 \leq n-3$. Следовательно, $k = 1$ и $e_2 \in L_1$.

Таким образом, имеем

$$\langle e_1, e_2 \rangle \subseteq L_1, \langle e_3 \rangle \subseteq L_2, \langle e_4 \rangle \subseteq L_3, \dots, \langle e_{n-2} \rangle \subseteq L_{n-3}.$$

Пусть $e_{n-1} \in L_r$, тогда $[e_{n-1}, e_1] = e_n \in L_{r+1}$, где $1 \leq r \leq n-4$.

Случай 1. $r = 1$.

В этом случае, мы получаем, что

$$\langle e_1, e_2, e_{n-1} \rangle \oplus \langle e_3, e_n \rangle \oplus \langle e_4 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_{n-2} \rangle.$$

Справедлива следующая теорема

Теорема 3.1. Пусть L естественным образом градуированная n -мерная алгебра Лейбница с характеристической последовательностью $(n-3, 2, 1)$ типа III и $r = 1$. Тогда существует базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ алгебры L в котором умножение удовлетворяет следующим условиям:

n четное ($n \geq 8$)

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n, \\ [e_1, e_2] = -e_3 + \gamma_1 e_n, \\ [e_2, e_2] = \gamma_2 e_n, \\ [e_{n-1}, e_2] = \gamma_3 e_n, \\ [e_{n-3}, e_2] = \alpha e_{n-2}, \\ [e_1, e_i] = -e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-3 \\ [e_{n-1-j}, e_j] = (-1)^j \alpha e_{n-2}, & 3 \leq j \leq n-4, \\ [e_2, e_{n-3}] = -\alpha e_{n-2}, \\ [e_1, e_{n-1}] = \mu_1 e_n, \\ [e_2, e_{n-1}] = \mu_2 e_n, \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \mu_3 e_n. \end{cases}$$

n нечетное ($n \geq 9$)

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n, \\ [e_1, e_i] = -e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3 \\ [e_1, e_2] = -e_3 + \gamma_1 e_n, \\ [e_2, e_2] = \gamma_2 e_n, \\ [e_{n-1}, e_2] = \gamma_3 e_n, \\ [e_1, e_{n-1}] = \mu_1 e_n, \\ [e_2, e_{n-1}] = \mu_2 e_n, \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \mu_3 e_n. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть L алгебра удовлетворяет условиям теоремы. Определим умножение справа на элементы e_2, e_{n-1} :

$$\left\{ \begin{array}{ll} [e_1, e_2] = \alpha_1 e_3 + \gamma_1 e_n, \\ [e_2, e_2] = \alpha_2 e_3 + \gamma_2 e_n, \\ [e_i, e_2] = \alpha_i e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_2] = \alpha_{n-1} e_3 + \gamma_3 e_n, \\ [e_n, e_2] = \alpha_n e_4, \\ [e_1, e_{n-1}] = \beta_1 e_3 + \mu_1 e_n, \\ [e_2, e_{n-1}] = \beta_2 e_3 + \mu_2 e_n, \\ [e_i, e_{n-1}] = \beta_i e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \beta_{n-1} e_3 + \mu_3 e_n, \\ [e_n, e_{n-1}] = \beta_n e_4. \end{array} \right.$$

Используя оператор $J(e_1, e_i, e_1)$ и индукцию, мы получим

$$[e_1, e_i] = \alpha_1 e_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq n-3.$$

Из тождеств $J(e_1, e_{n-1}, e_1)$ и $J(e_1, e_n, e_1)$ мы заключаем, что $[e_1, e_n] = 0$, т.е. $\beta_1 = 0$.

Рассмотрение $J(e_2, e_i, e_1)$ влечет

$$[e_i, e_3] = (\alpha_i - \alpha_{i+1})e_{i+2}, \quad 2 \leq i \leq n-4 \text{ и } [e_{n-3}, e_3] = 0.$$

Аналогично, из $J(e_{n-1}, e_2, e_1)$ и $J(e_n, e_2, e_1)$ мы получим, что $[e_{n-1}, e_3] = (\alpha_{n-1} - \alpha_n)e_4$ и $[e_n, e_3] = \alpha_n e_5$.

Использование тождества Лейбница для элементов e_i, e_3, e_1 влечет

$$[e_i, e_4] = (\alpha_i - 2\alpha_{i+1} + \alpha_{i+2})e_{i+3}, \quad 2 \leq i \leq n-5.$$

Продолжая подобные рассуждения для $J(e_i, e_j, e_1)$ в конечном итоге мы получим

$$\begin{aligned} [e_i, e_j] &= \left(\sum_{k=0}^{j-2} (-1)^k \binom{j-2}{k} \alpha_{i+k} \right) e_{i+j-1}, & 2 \leq i \leq n-j-1, \\ [e_{n-1}, e_j] &= (\alpha_{n-1} - (j-2)\alpha_n) e_{j+1}, & 3 \leq j \leq n-3, \\ [e_n, e_j] &= \alpha_n e_{j+2}, & 2 \leq j \leq n-4. \end{aligned}$$

Из $J(e_i, e_{n-1}, e_1)$ имеем $[e_i, e_n] = (\beta_i - \beta_{i+1})e_{i+2}$, $2 \leq i \leq n-4$.

Сравнение равенств при $J(e_{n-1}, e_{n-1}, e_1)$, $J(e_n, e_{n-1}, e_1)$, $J(e_n, e_n, e_1)$ и $J(e_{n-1}, e_n, e_1)$ в случае $n \geq 8$ приводит к тому, что $\beta_{n-1} = \beta_n = 0$.

Таким образом, таблица умножения алгебры L имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{ll} [e_1, e_1] = 0, & \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n, & \\ [e_1, e_2] = \alpha_1 e_3 + \gamma_1 e_n, & \\ [e_2, e_2] = \alpha_2 e_3 + \gamma_2 e_n, & \\ [e_i, e_2] = \alpha_i e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_2] = \alpha_{n-1} e_3 + \gamma_3 e_n, & \\ [e_n, e_2] = \alpha_n e_4, & \\ [e_1, e_{n-1}] = \mu_1 e_n, & \\ [e_2, e_{n-1}] = \beta_2 e_3 + \mu_2 e_n, & \\ [e_i, e_{n-1}] = \beta_i e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \beta_{n-1} e_3 + \mu_3 e_n, & \\ [e_n, e_{n-1}] = \beta_n e_4, & \\ [e_i, e_j] = \left(\sum_{k=0}^{j-2} (-1)^k \binom{j-2}{k} \alpha_{i+k} \right) e_{i+j-1}, & 2 \leq i \leq n-j-1, \\ & 3 \leq j \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_j] = (\alpha_{n-1} - (j-2)\alpha_n) e_{j+1}, & 3 \leq j \leq n-3, \\ [e_n, e_j] = \alpha_n e_{j+2}, & 2 \leq j \leq n-4, \\ [e_i, e_n] = (\beta_i - \beta_{i+1}) e_{i+2}, & 2 \leq i \leq n-4, \\ [e_1, e_i] = \alpha_1 e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_n] = (\beta_{n-1} - \beta_n) e_4, & \\ [e_n, e_n] = \beta_n e_5. & \end{array} \right.$$

Если $\alpha_1 \neq -1$, тогда сделав замену $e'_1 = A e_1 + e_2$ с большим значением параметра A мы попадаем в случай вервого типа алгебр Лейбница. Следовательно, $\alpha_1 = -1$.

Проверка тождества Лейбница для следующих типов базисных элементов: $\{e_1, e_2, e_2\}$, $\{e_1, e_3, e_3\}$ и $\{e_1, e_2, e_n\}$ приводит к ограничениям

$$\alpha_2 = 0, \alpha_4 = \alpha_3, \beta_4 = 2\beta_3 - \beta_2.$$

Аналогично как в [6] показывается, что $\beta_i = \beta_2$, $2 \leq i \leq n-3$ и

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha_i = \alpha_3, & 3 \leq i \leq n-3 \quad \text{при } n \text{ нечетном} \\ \alpha_i = \alpha_3, & 3 \leq i \leq n-4 \quad \text{при } n \text{ четном.} \end{array} \right.$$

В случае четного n , ($n \geq 8$) взяв замену базиса вида:

$$e'_1 = e_1, e'_2 = e_2 - \alpha_3 e_1, e'_i = [e_{i-1}, e_1], 3 \leq i \leq n-2, e'_{n-1} = e_{n-1} - \beta_2 e_1, e'_n = e_n$$

мы можем предположить $\beta_2 = 0$ и переобозначив параметр $\alpha = \alpha_{n-3} - \alpha_3$, мы получим умножение, указанное в теореме.

В случае нечетного n ($n \geq 9$), взяв следующую замену базиса

$$e'_1 = e_1, e'_2 = e_2 - \alpha_3 e_1, e'_i = [e_{i-1}, e_1], 3 \leq i \leq n-2, e'_{n-1} = e_{n-1} - \beta_2 e_1, e'_n = e_n$$

мы получим второе умножение теоремы. $\square$

Обозначим алгебру Лейбница из Теоремы 3.1 через $L(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$. Заметим, что умножение при нечетном n получается из четного при $\alpha = 0$.

Рассмотрим n -мерную алгебру Лейбница, удовлетворяющую условиям Теоремы 1 при n -четном. Использование стандартных методов классификации доказывается следующая

Теорема 3.2. Пусть L естественным образом градуированная n -мерная алгебра Лейбница с характеристической последовательностью $(n-3, 2, 1)$ типа III и $r = 1$. В случае четном n ($n \geq 8$) она изоморфна одной из следующих попарно не изоморфных алгебр:

$$\begin{aligned} &L_1(1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \mu_1, 0, 1), \quad L_2(0, 1, \gamma_2, \gamma_3, \mu_1, 0, 1), \\ &L_3(0, 0, 1, \gamma_3, \mu_1, 0, 1), \quad L_4(0, 0, 0, \beta, \mu_1, 0, 1), \\ &L_5(1, \beta, 0, \gamma_3, \mu_1, \mu_2, 0), \quad L_6(0, 1, 0, \beta, \mu_1, 0, 0), \\ &L_7(0, 1, 0, \gamma_3, \mu_1, 1, 0), \quad L_8(0, 0, 0, 1, \mu_1, \mu_2, 0), \\ &L_9(0, 0, 0, 0, \mu_1, \beta, 0), \quad L_{10}(1, 0, \beta, -\delta, \nu, \delta, 0), \\ &L_{11}(0, 0, \delta, -1, \nu, 1, 0), \quad L_{12}(0, 0, \beta, 0, \nu, 0, 0), \\ &L_{13}(1, 1, \lambda, -\delta, -1, \delta, 0), \quad L_{14}(1, 0, \beta, -\delta, -1, \delta, 0), \\ &L_{15}(0, 1, \beta, -1, -1, 1, 0), \quad L_{16}(0, 0, \beta, -1, -1, 1, 0), \\ &L_{17}(0, 1, \beta, 0, -1, 0, 0), \quad L_{18}(0, 0, \beta, 0, -1, 0, 0), \end{aligned}$$

где $\gamma_i, \mu_i \in \mathbb{C}$ $\beta \in \{0; 1\}$ и $\nu \neq -1$.

В случае нечетного n ($n \geq 9$) мы получим семейство как в случае четного n при условии $\alpha = 0$. Поэтому, при n нечетном мы имеем алгебры $L_2 - L_4$, $L_6 - L_9$, $L_{11} - L_{12}$ и $L_{15} - L_{18}$.

Случай 2. $r = 2$.

Теорема 3.3. Пусть L естественным образом градуированная n -мерная алгебра Лейбница с характеристической последовательностью $(n-3, 2, 1)$ типа III. Тогда $r \neq 2$.

Доказательство. Пусть алгебра L удовлетворяет условиям теоремы. Предположим, что $r = 2$. Тогда

$$L = \langle e_1, e_2 \rangle \oplus \langle e_3, e_{n-1} \rangle \oplus \langle e_4, e_n \rangle \oplus \langle e_5 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_{n-3} \rangle \oplus \langle e_{n-2} \rangle.$$

Введем обозначения

$$\left\{ \begin{array}{ll} [e_1, e_2] = \alpha_1 e_3 + \gamma_1 e_{n-1}, \\ [e_2, e_2] = \alpha_2 e_3 + \gamma_2 e_{n-1}, \\ [e_3, e_2] = \alpha_3 e_4 + \gamma_3 e_n, \\ [e_i, e_2] = \alpha_i e_{i+1}, & 4 \leq i \leq n-2, \\ [e_{n-1}, e_2] = \alpha_{n-1} e_4 + \gamma_4 e_n, \\ [e_n, e_2] = \alpha_n e_5. \end{array} \right.$$

Нетрудно видеть, что $(\gamma_1, \gamma_2) \neq (0, 0)$.

Из $J(e_1, e_j, e_1)$ получим

$$[e_1, e_j] = \alpha_1 e_{j+1}, \quad 4 \leq j \leq n-3.$$

Полагая $[e_1, e_{n-1}] = \beta_1 e_4 + \mu_1 e_n$, получим $[e_1, e_n] = \beta_1 e_5$.

Исследуя тождество Лейбница для рассмотренных выше произведений заключаем, что

$$\left\{ \begin{array}{ll} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n, \\ [e_1, e_2] = \alpha_1 e_3 + \gamma_1 e_{n-1}, \\ [e_2, e_2] = \alpha_2 e_3 + \gamma_2 e_{n-1}, \\ [e_3, e_2] = \alpha_3 e_4 + \gamma_3 e_n, \\ [e_i, e_2] = \alpha_i e_{i+1}, & 4 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_2] = \alpha_{n-1} e_4 + \gamma_4 e_n, \\ [e_n, e_2] = \alpha_n e_5, \\ [e_i, e_j] = \left(\sum_{k=0}^{j-2} (-1)^k \binom{j-2}{k} \alpha_{i+k} \right) e_{i+j-1}, & 3 \leq i \leq n-j-1, \\ & 3 \leq j \leq n-4, \\ [e_1, e_3] = \alpha_1 e_4 + \gamma_1 e_n, \\ [e_2, e_3] = (\alpha_2 - \alpha_3) e_4 + (\gamma_2 - \gamma_3) e_n, \\ [e_2, e_{n-1}] = \beta_2 e_3 + \mu_2 e_n, \\ [e_2, e_j] = \left(\sum_{k=0}^{j-2} (-1)^k \binom{j-2}{k} \alpha_{2+k} \right) e_{j+1}, & 4 \leq j \leq n-3, \\ [e_1, e_i] = \alpha_1 e_{i+1}, & 4 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_i] = (\alpha_{n-1} - (i-2)\alpha_n) e_{i+2}, & 3 \leq i \leq n-4, \\ [e_n, e_i] = \alpha_n e_{i+3}, & 3 \leq i \leq n-5, \\ [e_1, e_{n-1}] = \beta_1 e_4 + \mu_1 e_n, \\ [e_1, e_n] = \beta_1 e_5, \\ [e_i, e_{n-1}] = \beta_i e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-4, \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \beta_{n-1} e_5, \\ [e_n, e_{n-1}] = \beta_n e_6, \\ [e_i, e_n] = (\beta_i - \beta_{i+1}) e_{i+3}, & 2 \leq i \leq n-5, \\ [e_{n-1}, e_n] = (\beta_{n-1} - \beta_n) e_6, \\ [e_n, e_n] = \beta_n e_7. \end{array} \right.$$

Если $n \geq 10$, то из $J(e_n, e_n, e_1)$ получим $\beta_n = 0$. Кроме того, мы можем предполагать, что $\gamma_2 \neq 0$. Действительно, если $\gamma_2 = 0$, то взяв следующую замену базиса: $e'_2 = Ae_1 + Be_2$, $AB \neq 0$ при определенных значениях параметров A и B можем заключить, что $[e'_2, e'_2] \neq 0$, т.е. $\gamma_2 \neq 0$. Не ограничивая общности, можем считать, что $\gamma_2 = 1$.

Используя рассуждения подобные рассуждениям как в [6] из $J(e_i, e_{n-1}, e_1)$, $J(e_i, e_n, e_1)$ мы получаем, что

$$\left\{ \begin{array}{ll} \beta_i = 0, & 1 \leq i \leq n-4, \\ \beta_{n-1} = \beta_n = 0. \end{array} \right.$$

Поэтому, $e_n \in R(L)$. Кроме того, из $J(e_1, e_2, e_2)$ и $J(e_2, e_2, e_2)$ получим

$$\alpha_1 \alpha_2 = 0, \quad \mu_1 = -\gamma_1 \alpha_2, \quad \mu_2 = -\alpha_2(1 + \gamma_3).$$

Случай $e_3 \in R(L)$.

Очевидно, что $\{e_3, e_4, \dots, e_{n-2}\} \in R(L)$. Тогда $\alpha_1 = \gamma_1 = 0, \mu_2 = 0, \gamma_3 = 1$ и $\alpha_i = \alpha_2, 3 \leq i \leq n-3$.
Итак, имеем семейство:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n, \\ [e_2, e_2] = \alpha_2 e_3 + e_{n-1}, \\ [e_3, e_2] = \alpha_2 e_4 + e_n, \\ [e_i, e_2] = \alpha_2 e_{i+1} & 4 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_2] = \gamma_4 e_n. \end{cases}$$

Возьмем замену базиса вида: $e'_2 = e_2 - \alpha_2 e_1, e'_i = e_i, i \neq 2$, тогда $\alpha'_2 = 0$.

Взяв замену базиса $e'_1 = Ae_1 + Be_2, e'_i = [e'_{i-1}, e_1], 2 \leq i \leq n-3, e'_{n-2} = e_{n-1}, e'_{n-1} = [e'_{n-2}, e'_1], e'_n = e_n$, при определенных значениях параметров A и B , мы получим семейство алгебр типа I, т.е. получили противоречие с условием $e_3 \in R(L)$.

Случай $e_3 \notin R(L)$.

Рассмотрим $[e_1, e_2] + [e_2, e_1] = (1 + \alpha_1)e_3 + \gamma_1 e_{n-1} \in R(L)$.

Если $\alpha_1 \neq -1$, то аналогично рассуждениям как выше, т.е. сделав замену базиса $e'_1 = Ae_1 + Be_2$, при большом значении A мы находимся в случае алгебр типа I. Поэтому $\alpha_1 = -1$ которое влечет $\alpha_2 = 0, \mu_1 = 0, \mu_2 = 0$.

Из $J(e_1, e_2, e_3), J(e_1, e_2, e_5)$ и $J(e_2, e_3, e_4)$ вытекает

$$\alpha_4 = \alpha_3, \quad \alpha_6 = -\alpha_3 + 2\alpha_5, \quad \alpha_5 = \alpha_3.$$

Возьмем следующую замену базиса:

$$e'_1 = e_1 + Be_2, e'_4 = e_2, e'_{i+1} = [e'_i, e'_1], 1 \leq i \leq n-1, i \neq 4,$$

с условием $B \neq 0, (1 + B\alpha_3)(1 + B\alpha_{n-1})(1 + B\gamma_1)(1 + B\gamma_4) \neq 0$. Тогда матрица оператора $R_{e'_1}$ в жордановой форме имеет вид

$$\begin{pmatrix} J_3 & 0 \\ 0 & J_{n-3} \end{pmatrix}.$$

Однако, это противоречие с заданной в теореме характеристической последовательностью алгебры. Следовательно, мы показали, что не существует алгебры Лейбница, удовлетворяющей условиям теоремы и $r = 2$. □

Случай 3. $3 \leq r \leq n-4$.

Теорема 3.4. Пусть L естественным образом градуированная n -мерная алгебра Лейбница с характеристической последовательностью $(n-3, 2, 1)$ типа III и $3 \leq r \leq n-4$. Тогда L изоморфна

одной из следующих попарно не изоморфных алгебр Ли:

$$L(\alpha) : \left\{ \begin{array}{ll} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n, & \\ [e_1, e_i] = -e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3, \\ [e_r, e_2] = e_{n-1}, & \\ [e_{r+1}, e_2] = \frac{r-1}{2} e_n, & \\ [e_{n-3}, e_2] = \alpha e_{n-2}, & \\ [e_2, e_r] = -e_{n-1}, & \\ [e_2, e_{r+1}] = -\alpha e_{r+2} - \frac{r-1}{2} e_n, & \\ [e_{r+2-j}, e_j] = (-1)^j e_{n-1}, & 3 \leq j \leq r-1, \\ [e_{r+3-j}, e_j] = (-1)^{j+1} (j-2 - \frac{r-1}{2}) e_n, & 3 \leq j \leq r-1, \\ [e_i, e_{n-1-i}] = (-1)^i \alpha e_{n-2}, & 3 \leq i \leq n-4, \\ [e_1, e_{n-1}] = -e_n, & \\ [e_2, e_{n-3}] = -\alpha e_{n-2}. & \end{array} \right.$$

$$L(\alpha, \beta) : \left\{ \begin{array}{ll} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n, & \\ [e_1, e_i] = -e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_2] = -\frac{n-6}{2} \beta^2 e_{n-3} - \frac{n-6}{2} \alpha e_n, & \\ [e_n, e_2] = -\alpha \beta e_{n-2}, & \\ [e_{n-3-j}, e_j] = (-1)^j \beta e_{n-4} + (-1)^j e_{n-1}, & 2 \leq j \leq n-5, \\ [e_{n-2-j}, e_j] = (-1)^j \frac{n-2-2j}{2} \beta e_{n-3} + (-1)^j \frac{n-2-2j}{2} e_n, & 2 \leq j \leq n-4, \\ [e_{n-1-j}, e_j] = (-\alpha + \frac{(j-2)(n-8)-(j-3)(j-4)+2}{2} \beta) (-1)^j e_{n-2}, & 2 \leq j \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_3] = -\beta (\frac{n-6}{2} \alpha - \beta) e_{n-2}, & \\ [e_1, e_{n-1}] = -e_n, & \\ [e_2, e_{n-1}] = \alpha \beta e_{n-2}, & \\ [e_{n-1}, e_3] = \beta (\frac{n-6}{2} \alpha - \beta) e_{n-2}, & \\ [e_2, e_n] = \alpha \beta e_{n-2}. & \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n, & \\ [e_1, e_i] = -e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3, \\ [e_1, e_{n-1}] = -e_n, & \\ [e_{n-2-j}, e_j] = (-1)^j e_{n-1}, & 2 \leq i \leq n-4, \\ [e_{n-1-j}, e_j] = (-1)^{j+1} (j-2 - \frac{n-5}{2}) e_n, & 2 \leq j \leq n-3. \end{array} \right.$$

Доказательство. Доказательство данной теоремы проводится аналогичными методами, примененными в доказательстве Теоремы 3.2. $\square$

Список литературы

- [1] Аюпов Ш.А., Омиров Б.А. О некоторых классах нильпотентных алгебр Лейбница. Сиб. Мат. Журнал. т. 42(1), 2001, стр. 15–24.
- [2] Cabezas J.M., Pastor E. Naturally graded p -filiform Lie algebras in arbitrary finite dimension. Journal of Lie Theory, 15, 2005, p. 379–391.
- [3] Cabezas J.M., Camacho L.M., Gómez J. R., Omirov B.A. *A class of Leibniz algebras in arbitrary finite dimension*, сдана в Сибирский математический журнал 2010.
- [4] Camacho L.M., Gómez J.R., González A.J., Omirov B. A. *Naturally graded 2-filiform Leibniz algebras*, принята к опубликованию в Comm. Algebra, 2010.
- [5] Camacho L.M., Gómez J.R., González A.J., Omirov B. A. *The classification of naturally graded p -filiform Leibniz algebras*, принята к опубликованию в Comm. Algebra, 2010.
- [6] Camacho L.M., Gómez J.R., González A.J., Omirov B. A. *Naturally graded quasi-filiform Leibniz algebras*, Journal of Symbolic Computation, 44(5), 2009, p. 527–539.
- [7] Goze M., Hakimjanov Y. (Khakimdjanov), *Nilpotent Lie algebras*, Kluwer Academics Publishers, 1996.
- [8] Loday J.L. *Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz*. Ens. Math. vol. 39, 1993, p. 269–293.
- [9] Vergne M. *Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application à l'étude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes*, Bull. Soc. Math. France, vol. 98, 1970, p. 81–116.

Институт математики и
информационных технологий