УДК 512.554

Описание алгебр второго уровня в многообразии комплексных конечномерных нильпотентных алгебр Лейбница

А.Х.Худойбердиев, К.К.Абдурасулов, А.М.Саттаров *

РЕЗЮМЕ

В работе исследуется алгебры нижнего уровня, а именно классифицированы конечномерные нильпотентные алгебры Лейбница уровня два.
Ключевые слова: алгебра Лейбница, вырождение, уровень алгебры, нильпотентные алгебры.

Понятия вырождения, сжатия и деформации алгебры появились из физики. Например, вырождение в алгебре Ли с физической точки зрения означает процесс, при котором одна физическая модель получается из другой пределом при воздействии группы инвариантов, в то время как деформации характеризуются локальным поведением в малой окрестности многообразия объектов заданного типа. Данная работа посвящена геометрическому подходу к исследованию конечномерных нильпотентных алгебр Лейбница над полем комплексных чисел. Под геометрическим описанием подразумевается описание орбит многообразия алгебр. При этом полная геометрическая картина использует алгебраическую классификацию данного многообразия, то есть, описание всех алгебр данного многообразия с точностью до изоморфизма. Надо отметить, что одним из уникальных подходов в геометрическом описании многообразий алгебр является работа В.В.Горбацевича, где впервые были изучены алгебры нижнего уровня на дереве вырождений [1]. Далее в работе [2] получено полное описание алгебр уровня один в многообразии всех конечномерных алгебр. Более того, в [3] классифицированы алгебры второго уровня в многообразиях комплексных конечномерных йордановых, лиевых и ассоциативных алгебр. В данной работе получено описание алгебр уровня два в многообразии комплексных конечномерных нильпотентных алгебр Лейбница.

Определение 1. Алгебра L над полем F называется алгеброй Лейбница, если для любых элементов $x, y, z \in L$ выполняется тождество Лейбница:

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y],$$

где $[-,-]$ умножение в L.

Для произвольной алгебры Лейбница L определим следующий ряд:

$$L^1 = L, L^{n+1} = [L^n, L^1].$$

Определение 2. Алгебра Лейбница L называется нильпотентной, если существует $s \in N$ такое, что $L^s = 0$. Минимальное число s, обладающее таким свойством, называется индексом нильпотентности (нильиндексом) алгебры L, т.е. $L^{s-1} \neq 0$ и $L^s = 0$.

Обозначим через $Leib_n(F)$ – множество всех n-мерных алгебр Лейбница над полем F.

*Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, khabror@mail.ru, abdurasulov0505@mail.ru, saloberdi90@mail.ru

Определение 3. Определим действие группы $GL_n(F)$ на множестве $Leib_n(F)$ следующим образом:

$$[x, y]_g := g\big([g^{-1}x, g^{-1}y]\big),$$

где $g \in GL_n(F)$ и $x, y \in L$.

Через $Orb(L)$ обозначим орбиту алгебры L при этом действии.

Определение 4. Будем говорить, что алгебра Лейбница L вырождается в алгебру M, если M лежит в замыкании орбиты алгебры L (в топологии Зариского). В этом случае мы будем обозначать $L \to M$.

Надо отметить, что если $\exists\ g_t \in GL_n(\mathrm{C}(0,1])$, такой, что

$$[x, y]_2 = \lim_{t\to 0} g_t([g_t^{-1}x, g_t^{-1}y]_1),$$

то алгебра $(L, [-,-]_1)$ вырождается в алгебру $(M, [-,-]_2)$.

Следующий пример показывает, что произвольная n-мерная алгебра вырождается в n-мерную абелевую алгебру $\mathfrak{a}_n$.

Пример 1. Пусть L – произвольная n-мерная алгебра с базисом $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Взяв вырождение $g_t : g_t(e_i) = t^{-1}e_i,\ 1 \le i \le n$, нетрудно проверить, что произвольная алгебра вырождается в n-мерную абелевую алгебру $\mathfrak{a}_n$.

Вырождение $L \to M$ назовем тривиальным, если L и M изоморфны. Нетривиальное вырождение называется непосредственным, если оно не имеет не тривиальных промежуточных вырождений, т.е. не существует цепочки нетривиальных вырождений $L \to N \to M$.

Определение 5. Уровнем алгебры L называется максимальная длина цепочки непосредственных вырождений $L \to L_1 \to L_2 \to \dots\ \to \mathfrak{a}_n$.

В следующей теореме получено описание алгебр уровня один в многообразиях комплексных n-мерных алгебр.

Теорема 1. [2] n-мерная $(n \ge 3)$ алгебра является алгеброй уровня один тогда и только тогда, когда она изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$$\begin{aligned}
p_n^- :&\quad e_1e_i = e_i, \quad e_ie_1 = -e_i, \quad 2 \le i \le n;\\
n_3^- \oplus \mathfrak{a}_{n-3} :&\quad e_1e_2 = e_3, \quad e_2e_1 = -e_3;\\
\lambda_2 \oplus \mathfrak{a}_{n-2} :&\quad e_1e_1 = e_2;\\
\nu_n(\alpha) :&\quad e_1e_1 = e_1, \quad e_1e_i = \alpha e_i, \quad e_ie_1 = (1-\alpha)e_i,\ 2 \le i \le n,\ \alpha \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Надо отметить, что алгебра λ_2 является двумерной нильпотентной алгеброй Лейбница.

В работе [4] получено полное геометрическое описание многообразий нильпотентных алгебр Лейбница размерности $\le\ 4$ и доказано, что в многообразии трехмерных нильпотентных алгебр Лейбница следующие алгебры являются алгебрами уровня два

$$L_4(\alpha) : [e_1, e_1] = e_3,\ [e_2, e_1] = e_3,\ [e_2, e_2] = \alpha e_3, \quad \alpha \in \mathbb{C};$$

$$L_5 : [e_1, e_1] = e_3,\ [e_1, e_2] = e_3,\ [e_2, e_1] = e_3.$$

Естественно возникает вопрос: будет ли алгеброй уровня два прямая сумма двух алгебр уровня один. Следующие примеры показывают, что ответ на этот вопрос отрицательный.

Пример 2. Алгебра $n_3^- \oplus \lambda_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ с умножением

$$x_1 \cdot x_1 = x_2,\ x_3x_4 = -x_4x_3 = x_5,$$

посредством семейства

$$\begin{cases} g_t(x_1) = t^{-2}x_4, \\ g_t(x_2) = t^{-2}x_3, \\ g_t(x_3) = t^{-1}x_1 - t^{-2}x_4, \\ g_t(x_4) = 2t^{-1}x_2 - t^{-2}x_4, \\ g_t(x_5) = t^{-1}x_5 - t^{-2}x_3, \end{cases}$$

вырождается в алгебру $L_4(\frac{1}{4}) \oplus a_2$.

Пример 3. Алгебра $\lambda_2 \oplus \lambda_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ с умножением $x_1x_1 = x_2,\quad x_3x_3 = x_4$, посредством семейства

$$\begin{cases} g_t(x_1) = t^{-1}x_1, \\ g_t(x_2) = t^{-2}x_3, \\ g_t(x_3) = t^{-1}x_2 - t^{-1}x_1, \\ g_t(x_4) = t^{-1}x_4 - t^{-2}x_3, \end{cases}$$

вырождается в алгебру $L_5 \oplus a_1$.

В силу того, что L_5 не является алгеброй уровня один, мы заключаем, что уровень алгебры $n_3^- \oplus \lambda_2$ и $\lambda_2 \oplus \lambda_2$ больше двух.

В следующей теореме получено полное описание алгебр уровня два в многообразии конечномерных нильпотентных алгебр Лейбница.

Теорема 2. n-мерная нильпотентная не Лиевая алгебра Лейбница L является алгеброй уровня два тогда и только тогда, когда она изоморфна одно из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$$L_4(\alpha) \oplus \mathfrak{a}_{n-3} : [e_1, e_1] = e_3,\ [e_2, e_1] = e_3,\ [e_2, e_2] = \alpha e_3, \quad \alpha \in \mathbb{C};$$

$$L_5 \oplus \mathfrak{a}_{n-3} : [e_1, e_1] = e_3,\ [e_1, e_2] = e_3,\ [e_2, e_1] = e_3.$$

Доказательство. Пусть L – n-мерная нильпотентная не Лиевая алгебра Лейбница и пусть $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – базис в алгебры L. Так как всякая не Лиевая алгебра Лейбница имеет элемент x такой, что $[x, x] \neq 0$, то, не ограничивая общности, можно полагать, что $[x_1, x_1] = x_n$.

Рассмотрим следующие случаи.

Случай 1. Пусть $dim L^2 = 1$, тогда можем предполагать, что

$$[x_1, x_1] = x_n,\ [x_i, x_j] = \alpha_{ij}x_n.$$

Случай 1.1 Предположим, что существует j такой, что $|\alpha_{1,j} - \alpha_{j,1}| + |\alpha_{1,1}\alpha_{j,j} - \alpha_{1,j}\alpha_{j,1}| \neq 0$, тогда, не ограничивая обшности, можно полагать $j = 2$.

Взяв семейство преобразований

$$\begin{cases} g_t(x_1) = x_1, \quad g_t(x_2) = x_2, \quad g_t(x_n) = x_n, \\ g_t(x_k) = t^{-1}x_k, \qquad 3 \leq k \leq n-1, \end{cases}$$

получим, что алгебра L вырождается в алгебру с умножением:

$$[x_1, x_1] = x_n, [x_1, x_2] = \alpha_{1,2}x_n, [x_2, x_1] = \alpha_{2,1}x_n, [x_2, x_2] = \alpha_{2,2}x_n.$$

Из условия $|\alpha_{1,j}-\alpha_{j,1}|+|\alpha_{1,1}\alpha_{j,j}-\alpha_{1,j}\alpha_{j,1}|\neq 0$ и из результатов [1] мы получим, что данная алгебра изоморфна либо алгебре $L_4(\alpha)\oplus \mathfrak{a}_{n-3}$ либо $L_5\oplus\mathfrak{a}_{n-3}$.

Случай 1.2. Пусть $\alpha_{1,j}=\alpha_{j,1}$ и $\alpha_{1,1}\alpha_{j,j}=\alpha_{1,j}\alpha_{j,1}$ для всех j. Если $\alpha_{j,j}\neq 0$, тогда взяв замену $x_j^{'}=\frac{1}{\sqrt{\alpha_{j,j}}}x_j$ можно полагать $\alpha_{j,j}=1$. Следовательно, существует натуральное число k такое, что

$$\begin{aligned} \alpha_{j,j}=1,\ \alpha_{1,j}=\alpha_{j,1},\ \alpha_{1,j}^2=1, &\qquad 1\leq j\leq k,\\ \alpha_{j,j}=\alpha_{1,j}=\alpha_{j,1}=0, &\qquad k+1\leq j\leq n-1. \end{aligned}$$

Сделав замену

$$\begin{aligned} x_1'=x_1,\ x_i'=x_i+\alpha_{1,j}x_1, &\qquad 2\leq i\leq k,\\ x_i^{'}=x_i, &\qquad k+1\leq i\leq n, \end{aligned}$$

получим, что

$$[x_1,x_1]=x_n,\ [x_i,x_j]=\alpha_{i,j}x_n,\ 2\leq i,j\leq n-1.$$

Надо отметить, что подалгебра $M=\{x_2,x_3,\dots,x_n\}$ данной алгебры не является абелевой, иначе, мы получим алгебру уровня один.

Если подалгебра M не является алгеброй Ли, то всегда можно полагать, что $\alpha_{2,2}\neq 0$. Тогда взяв вырождение

$$g_t(x_1)=x_1,\quad g_t(x_2)=x_2,\quad g_t(x_n)=x_n,\quad g_t(x_k)=t^{-1}x_k,\qquad 3\leq k\leq n-1,$$

имеем алгебру с умножением $[x_1,x_1]=x_n,[x_2,x_2]=x_n$.

Известно, что данная алгебра изоморфна алгебре $L_5\oplus\mathfrak{a}_{n-3}$.

Если подалгебра M является алгеброй Ли, то

$$\begin{aligned} \alpha_{i,i}=0, &\qquad 2\leq i\leq n-1,\\ \alpha_{i,j}=-\alpha_{i,j}, &\quad 2\leq i,j\leq n-1. \end{aligned}$$

Так как $M=\{x_2,x_3,\dots,x_n\}$ не является абелевой, то, неограничивая общности, можно полагать $\alpha_{2,3}=1$.

Взяв вырождение

$$\begin{aligned} g_t(x_1)=t^{-2}x_n, g_t(x_2)=2t^{-1}x_2-t^{-2}x_n,\quad g_t(x_3)=t^{-1}x_1-t^{-2}x_n,\\ g_t(x_n)=t^{-2}x_3,\quad g_t(x_i)=t^{-2}x_i,\quad 4\leq i\leq n-1. \end{aligned}$$

имеем, что данная алгебра вырождается в алгебру $L_4(\frac{1}{4})\oplus\mathfrak{a}_{n-3}$.

Случай 2. Пусть $dimL^2\geq 2$. Предположим, что $x_1,x_2,\dots,x_k\in L\backslash L^2$ и $x_{k+1},x_{k+2},\dots,x_n\in L^2$. Как и в Случае 1, можем считать $[x_1,x_1]=x_{k+1}$.

Рассмотрим следующий подслучай.

Случай 2.1. Пусть существует i_0 такое, что $[x_{i_0},x_1]\notin Span\{x_{k+1}\}$. Тогда, не ограничивая общности, можно полагать $i_0=2$ и $[x_2,x_1]=x_{k+2}$.

Таким образом, имеем

$$[x_1,x_1]=x_{k+1},\quad [x_2,x_1]=x_{k+2},$$

$$[x_1,x_2]=\sum_{i=k+1}^{n}\alpha_i x_i,\quad [x_2,x_2]=\sum_{i=k+1}^{n}\beta_i x_i,,$$

$$[x_i,x_j]=\sum_{t=k+1}^{n}\gamma_{ij}^t x_t,\quad 3\leq i,j\leq k.$$

Взяв вырождение

$$g_t(x_1)=t^{-2}x_1,\quad g_t(x_2)=t^{-2}x_2,\quad g_t(x_{k+1})=t^{-4}x_3,$$
$$g_t(x_{k+2})=t^{-4}x_4,\quad g_t(x_i)=t^{-3}x_i,\quad 3\leq i\leq n, i\neq k+1,k+2,$$

имеем, что данная алгебра вырождается в алгебру:

$$[x_1,x_1]=x_3,\ [x_2,x_1]=x_4,\ [x_1,x_2]=\alpha_1x_3+\alpha_2x_4,\ [x_1,x_2]=\beta_1x_3+\beta_2x_4.$$

Если $(\alpha_1,\beta_1)\neq(0,0)$, то, взяв вырождение

$$g_t(x_1)=t^{-1}x_1,\quad g_t(x_2)=t^{-1}x_2,\quad g_t(x_3)=t^{-2}x_3,\quad g_t(x_4)=t^{-1}x_4$$

имеем алгебру

$$[x_1,x_1]=x_3,\quad [x_1,x_2]=\alpha x_3,\quad [x_2,x_2]=\beta x_3.$$

Так как $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$, то данная алгебра изоморфна $L_4(\alpha)\oplus\mathfrak{a}_{n-3}$ или $L_5\oplus\mathfrak{a}_{n-3}$.

Если $(\alpha_1,\beta_1)=(0,0)$, то, взяв вырождение

$$g_t(x_1)=t^{-1}x_1,\quad g_t(x_2)=t^{-1}x_2,\quad g_t(x_3)=t^{-1}x_4,\quad g_t(x_4)=t^{-2}x_3$$

имеем алгебру с умножением

$$[x_2,x_1]=x_3,\quad [x_1,x_2]=\alpha x_3,\quad [x_2,x_2]=\beta x_3,$$

которая изоморфна либо $L_4(\alpha)\oplus\mathfrak{a}_{n-3}$ либо $L_5\oplus\mathfrak{a}_{n-3}$.

Случай 2.2. Пусть $[x_i,x_1]\in Span\{x_{k+1}\},\ 1\leq i\leq k$ и пусть существует i_0 такое, что $[x_1,x_{i_0}]\notin Span\{x_{k+1}\}$. Положив $x_2'=x_{i_0}$, получим:

$$[x_1,x_1]=x_{k+1},\quad [x_i,x_1]=\alpha_i x_i,\quad 2\leq i\leq k,$$

$$[x_1,x_2]=x_{k+1},\quad [x_2,x_2]=\sum_{i=k+1}^{n}\beta_i x_i,$$

$$[x_i,x_j]=\sum_{t=k+1}^{n}\gamma_{ij}^t x_t,\quad 3\leq i,j\leq k.$$

Взяв вырождение

$$g_t(x_1)=t^{-2}x_1,\quad g_t(x_2)=t^{-2}x_2,\quad g_t(x_{k+1})=t^{-4}x_{k+1},$$

$$g_t(x_{k+2})=t^{-4}x_{k+2},\quad g_t(x_i)=t^{-3}x_i,\quad 3\leq i\leq n, i\neq k+1,k+2,$$

имеем, что данная алгебра вырождается в алгебру:

$$[x_1,x_1]=x_{k+1},\quad [x_2,x_1]=\alpha x_{k+1},\quad [x_1,x_2]=x_{k+2},[x_2,x_2]=\beta_1x_{k+1}+\beta_2x_{k+2}.$$

Аналогично Случаю 2.1., нетрудно показать, что данная алгебра вырождается в одну из алгебр $L_4(\alpha)\oplus\mathfrak{a}_{n-3}$ и $L_5\oplus\mathfrak{a}_{n-3}$

Случай 2.3. Пусть $[x_i,x_1],[x_1,x_i]\in Span\{x_{k+1}\},\ 1\leq i\leq k$ и пусть существует i_0 такое, что $[x_{i_0},x_{i_0}]\notin Span\{x_{k+1}\}$. Положив $x_2'=x_{i_0}$, имеем:

$$[x_1,x_1]=x_{k+1},\quad [x_i,x_1]=\alpha_i x_{k+1},\quad [x_1,x_i]=\beta_i x_{k+1},\quad 2\leq i\leq k,$$

$$[x_2,x_2]=x_{k+2},\quad [x_i,x_j]=\sum_{t=k+1}^{n}\gamma_{ij}^t x_t,\quad 3\leq i,j\leq k.$$

Посредством семейство матриц

$$\begin{cases} g_t(x_1)=t^{-2}x_1,\quad g_t(x_2)=t^{-2}x_2,\quad g_t(x_{k+1})=t^{-4}x_3,\quad g_t(x_{k+2})=t^{-4}x_4,\\ g_t(x_3)=t^{-3}x_{k+1},\quad g_t(x_4)=t^{-3}x_{k+2},\quad g_t(x_i)=t^{-3}x_i\quad 4\leq i\leq n,\end{cases}$$

получим, что данная алгебра вырождается в алгебру

$$[x_1,x_1]=x_3,\quad [x_2,x_1]=\alpha x_3,\quad [x_1,x_2]=\beta x_3,\quad [x_2,x_2]=x_4.$$

Если $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$, то взяв вырождение

$$g_t(x_1)=t^{-1}x_1,\quad g_t(x_2)=t^{-1}x_2,\quad g_t(x_3)=t^{-2}x_3,\quad g_t(x_4)=t^{-1}x_4$$

имеем, что данная алгебра вырождается в алгебру $L_4(\alpha)\oplus\mathfrak{a}_{n-3}$ или в алгебру $L_5\oplus\mathfrak{a}_{n-3}$.

Если $(\alpha,\beta)=(0,0)$, то имеем алгебру $\lambda_2\oplus\lambda_2$. В силу Примера 3, данная алгебра вырождается в алгебру $L_5\oplus\mathfrak{a}_{n-3}$.

Случай 2.4. Пусть $[x_i,x_1],\ [x_1,x_i],\ [x_i,x_i]\in Span\{x_{k+1}\},\quad 1\leq i\leq k$ и пусть существут i_0,j_0 такие, что $[x_{i_0},x_{j_0}]\notin Span\{x_{k+1}\}$. . Если $x_{i_0}x_{j_0}\neq -x_{j_0}x_{i_0}$, то, сделав замену $x_{i_0}'=x_{i_0}+x_{j_0}$, мы получим $x_{i_0}'x_{j_0}'\neq 0$ и попадем в случай 2.3.

Поэтому, имеем $x_{i_0}x_{j_0}=x_{k+1},\ x_{j_0}x_{i_0}=-x_{k+2}$.

Взяв вырождение

$$\begin{cases} g_t(x_1)=t^{-2}x_1,\quad g_t(x_{i_0})=t^{-3}x_3,\quad g_t(x_{j_0})=t^{-3}x_4,\quad g_t(x_{k+1})=t^{-4}x_2,\\ g_t(x_{k+2})=t^{-6}x_5,\quad g_t(x_2)=t^{-4}x_{k+1},\quad g_t(x_3)=t^{-4}x_{i_0},\quad g_t(x_4)=t^{-4}x_{j_0},\\ g_t(x_5)=t^{-4}x_{k+2},\quad g_t(x_i)=t^{-4}x_i,\quad 6\leq i\leq n,\end{cases}$$

имеем, что данная алгебра вырождается в алгебру:

$$\lambda_2\oplus n_3^-:\ [x_1,x_1]=x_2,\quad [x_3,x_4]=x_5,\quad [x_4,x_3]=-x_5.$$

В силу Примера 2, мы имеем, что данная алгебра вырождается в алгебру $L_4(\frac{1}{4})\oplus\mathfrak{a}_2$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбацевич В.В. О сжатиях и вырождениях конечномерных алгебр // Изв. вузов. Матем. - 1991. - №10. С. 19-27.

2. Khudoyberdiyev A.Kh., Omirov B.A. The classification of algebras of level one // Linear algebra Appl. - 2013. - Vol. 439 (11). - P. 3460-3463.

3. Khudoyberdiyev A.Kh., The classification of Algebras of level two // Journal of Geometry and Physics. - 2015. - Vol. 98. - P. 13-20.

4. Albeverio S, Omirov B.A., Rakhimov I.S. Varieties of nilpotent complex Leibniz algebras of dimensions less than five // Comm. in Algebra. - 2005. - Vol. 33 (5). - P. 1575-1585.

Резюме

Мақолада қуйи сатҳли алгебралар ўрганилиб, чекли ўлчовли нилпотент Лейбниц алгебралар купҳиллигидаги барча иккинчи сатҳли алгебралар таснифланган.
Калит сўзлар: Лейбниц алгебралари, алгебранинг бузилиши, алгебранинг сатҳи, нилпотент алгебралар.

RESUME

In this paper the lowest level algebras are investigated and the classification of finite-dimensional nilpotent Leibniz algebras of level two is obtained.
Key words: Leibniz algebras, degeneration of the algebra, level of the algebra, nilpotent algebras.