

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI
MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY
UNIVERSITETI QOSHIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

O‘ZBEKISTON MATEMATIKA JURNALI

Jurnalga 1957 yilda asos solingan (1991 yilgacha "O‘zbekiston fanlar akademiyasining axboroti. Fizika-matematika fanlari seriyasi" deb nomlangan). Yilda 4 marta chiqadi

2. 2014_____

УЗБЕКСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ УзМЖ

Основан в 1957 г. (до 1991 г. под названием "Известия Академии наук Узбекистана. Серия физико-математических наук"). Выходит 4 раза в год

ТАШКЕНТ - 2014

Uzbek Mathematical
Journal, 2014, №2, pp.149-157

УДК 512.554

**Об описании пятимерных разрешимых алгебр
Лейбница с четырехмерным не Лиевым
нильрадикалом**

Худойбердиев А.Х., Шерматова З.Х.

Maqolada nilradikali 4-o'lchovli Li bo'lmagan algebradan iborat bo'lgan 5-o'lchovli yechimli Leibniz algebralari tasnif qilingan.

In this paper 5-dimensional solvable Leibniz algebras with 4-dimensional non Lie nilradical are classified.

В классической теории алгебр Ли известен результат о том, что любая конечномерная алгебра Ли представляется в виде полупрямой суммы полупростой подалгебры и ее максимального разрешимого идеала. Аналогичный результат для алгебр Лейбница был получен Д.Барнсом [2]. Таким образом, при изучении конечномерных алгебр Лейбница важную роль играет класс разрешимых алгебр.

В работе [4] показано, что для описания разрешимых алгебр Лейбница можно использовать метод, связанный с нильрадикалом алгебры и ее не нильпотентным дифференцированием, который впервые был предложен Мубаракзяновым для алгебр Ли [8]. Используя данный метод, классифицированы разрешимые алгебры Лейбница с нуль-филиформным и филиформным нильрадикалами [3,5,6]. Более того, в работе [4] получено описание четырехмерных комплексных разрешимых алгебр Лейбница.

Определение 1. Алгебра L над полем F называется алгеброй Лейбница, если для любых $x, y, z \in L$ выполняется тождества:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y],$$

где $[-, -]$ умножение в L .

Для произвольной алгебры Лейбница определим ряды:

$$L^{[1]} = L, \quad L^{[k+1]} = [L^{[k]}, L^{[k]}], \quad k \geq 1;$$

$$L^1 = L, \quad L^{k+1} = [L^k, L^1], \quad k \geq 1.$$

Определение 2. Алгебра Лейбница L называется разрешимой(нильпотентной), если существует $s \in \mathbb{N}$ такое, что $L^{[s]} = 0$ ($L^s = 0$).

Минимальное число, обладающее таким свойством, называется индексом разрешимости (нильпотентности) алгебры L .

Максимальный разрешимый (нильпотентный) идеал алгебры Лейбница L называется радикалом (нильрадикалом).

Множество $R(L) = \{x \in L : [y, x] = 0, \forall y \in L\}$ будем называть правым аннулятором алгебры L . Отметим, что для любых $x, y \in L$ элементы $[x, x]$ и $[x, y] + [y, x]$ принадлежат в $R(L)$.

Определение 3. Линейное отображение d из L в себя называется дифференцированием, если для любых $x, y \in L$ выполняется тождество Лейбница

$$d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)].$$

Для произвольного элемента $x \in L$ рассмотрим оператор правого умножения $\mathcal{R}_x : L \rightarrow L$, $\mathcal{R}_x(z) = [z, x], z \in L$. Оператор правого умножения является дифференцированием.

Пусть L разрешимая алгебра Лейбница, следовательно, L можно записать как сумму векторных пространств $L = N + Q$, где N - нильрадикал в L . Как и в случае алгебр Ли, справедливо соотношение $\dim Q \leq \dim N$.

Пусть L - пятимерная разрешимая алгебра Лейбница, N - нильрадикал в L , тогда $\dim N \geq 3$. Отметим, что пятимерные разрешимые алгебры Лейбница с условием $\dim N = 3$ были классифицированы в [7].

Рассмотрим случай $\dim N = 4$. Если индекс нильпотентности s нильрадикала N равно 5 или 4, тогда N является нуль-филиформным и филиформным соответственно. Из результатов работ [3,5,6] мы имеем описание пятимерных разрешимых алгебр Лейбница с данными условиями, и достаточно рассмотреть случай, когда $s \leq 3$. В данной работе рассматривается случай $s = 3$. Более того, налагается условие, что N является не Лиевым и не разложимым.

Приведем список 4-мерных не Лиевых не разложимых нильпотентных алгебр Лейбница с нильиндексом, равным 3.

$$\begin{aligned} \lambda_1 : [e_1, e_2] &= e_3, [e_2, e_1] = e_4, [e_2, e_2] = -e_3; \\ \lambda_2(\alpha) : [e_1, e_1] &= e_3, [e_1, e_2] = e_4, [e_2, e_1] = -\alpha e_3, [e_2, e_2] = -e_4; \\ \lambda_3 : [e_1, e_1] &= e_4, [e_1, e_2] = e_4, [e_2, e_1] = -e_4, [e_3, e_3] = e_4; \\ \lambda_4 : [e_1, e_1] &= e_4, [e_1, e_2] = e_3, [e_2, e_1] = -e_3, [e_2, e_2] = -2e_3 + e_4; \\ \mu_1(\alpha) : [e_1, e_1] &= e_4, [e_1, e_2] = \alpha e_4, [e_2, e_1] = -\alpha e_4, [e_2, e_2] = e_4, [e_3, e_3] = e_4; \\ \mu_2 : [e_1, e_2] &= e_4, [e_1, e_3] = e_4, [e_2, e_1] = -e_4, [e_2, e_2] = e_4, [e_3, e_1] = e_4; \\ \mu_3 : [e_1, e_2] &= e_3, [e_2, e_1] = e_4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_4 : [e_1, e_1] &= e_4, [e_1, e_2] = e_3, [e_2, e_1] = -e_3; \\
\mu_5 : [e_1, e_1] &= e_3, [e_1, e_2] = e_4; \\
\mu_6(\alpha) : [e_1, e_2] &= e_4, [e_2, e_1] = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} e_4, [e_2, e_2] = e_3; \alpha \neq 1 \\
\mu_7 : [e_1, e_2] &= e_4, [e_2, e_1] = -e_4, [e_3, e_3] = e_4.
\end{aligned}$$

Предложение 1. Всякое дифференцирование алгебр λ_i и μ_i имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
D(\lambda_1) &= \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_1 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 2a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a_1 \end{pmatrix}, D(\lambda_2(\alpha)) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_1 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 2a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a_1 \end{pmatrix}, \\
D(\lambda_3) &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & a_3 \\ 0 & a_1 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & a_1 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 2a_1 \end{pmatrix}, D(\lambda_4) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_1 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 2a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a_1 \end{pmatrix}, \\
D(\mu_1(\alpha)) &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & a_3 \\ -a_2 & a_1 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & a_1 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 2a_1 \end{pmatrix}, D(\mu_1(0)) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & a_1 & a_5 & a_6 \\ -a_3 & -a_5 & a_1 & a_7 \\ 0 & 0 & 0 & 2a_1 \end{pmatrix}, \\
D(\mu_2) &= \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & 0 & a_3 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_4 \\ 0 & 0 & a_1 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 2a_1 \end{pmatrix}, D(\mu_3) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_2 & a_5 & a_6 \\ 0 & 0 & a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 + a_2 \end{pmatrix}, \\
D(\mu_4) &= \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & a_2 & a_6 & a_7 \\ 0 & 0 & a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a_1 \end{pmatrix}, D(\mu_5) = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & a_2 & a_6 & a_7 \\ 0 & 0 & 2a_1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 + a_2 \end{pmatrix}, \\
D(\mu_6(\alpha)) &= \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & a_2 & a_6 & a_7 \\ 0 & 0 & 2a_1 & \frac{2}{1-\alpha} a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 + a_2 \end{pmatrix}, D(\mu_7) = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 & a_4 \\ a_5 & a_2 & 0 & a_6 \\ 0 & 0 & a_1 + a_2 & a_7 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a_1 + a_2}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Доказательство следует из непосредственной проверки свойства дифференцирования.

Предложение 2. Не существует разрешимой алгебры Лейбница с ниль-радикалом, изоморфным одной из алгебр $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$.

Доказательство. Предположим обратное. Пусть существует пятимер-

ная алгебра Лейбница L с нильрадикалом λ_1 . Тогда существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4, x\}$ в L такой, что $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ является базисом в λ_1 , а оператор $\mathcal{R}_x$ является не нильпотентным дифференцированием нильрадикала λ_1 . Таким образом, используя результат Предложения 1, получим умножение в алгебре L :

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_3, & [e_1, x] &= a_1 e_1 + a_2 e_3 + a_3 e_4, & [e_3, x] &= 2a_1 e_3, \\ [e_2, e_1] &= e_4, & [e_2, x] &= a_1 e_2 + a_4 e_3 + a_5 e_4, & [e_4, x] &= 2a_1 e_4. \\ [e_2, e_2] &= -e_3, \end{aligned}$$

Положим

$$[x, e_1] = \sum_{i=1}^4 \alpha_i e_i, \quad [x, e_2] = \sum_{i=1}^4 \beta_i e_i, \quad [x, x] = \sum_{i=1}^4 \delta_i e_i.$$

Так как $[x, x], [x, y] + [y, x] \in R(L)$, то нетрудно получить, что $e_3, e_4 \in R(L)$.

Рассмотрим тождество Лейбница $[e_1, [x, e_2]] = [e_1, \sum_{i=1}^4 \beta_i e_i] = \beta_2 e_3$. С другой стороны, $[e_1, [x, e_2]] = [[e_1, x], e_2] - [[e_1, e_2], x] = a_1 e_3 - 2a_1 e_3 = -a_1 e_3$.

Сравнив коэффициенты, имеем $\beta_2 = -a_1$.

Аналогично, рассматривая тождество Лейбница

$$0 = [x, [e_1, e_2]] = [[x, e_1], e_2] - [[x, e_2], e_1] = (\alpha_1 - \alpha_2)e_3 - \beta_2 e_4,$$

получим $\beta_2 = 0$, следовательно $a_1 = 0$. Это противоречит условию, что $\mathcal{R}_x$ не является нильпотентным. Не существование пятимерных алгебр с нильрадикалами λ_2, λ_3 и λ_4 доказывается аналогично.

Теорема 1. Пусть L —пятимерная разрешимая алгебра Лейбница с нильрадикалом N и $\dim N = 4$. Пусть N не Лиевый и неразложимый идеал и имеет индекс нильпотентности, равный 3. Тогда алгебра L изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$$I_1(\alpha) : \begin{cases} [e_1, e_1] = e_4, & [e_1, x] = e_1 - \alpha e_2, & [x, e_1] = -e_1 + \alpha e_2, \\ [e_1, e_2] = \alpha e_4, & [e_2, x] = \alpha e_1 + e_2, & [x, e_2] = -\alpha e_1 - e_2, \\ [e_2, e_1] = -\alpha e_4, & [e_3, x] = e_3, & [x, e_3] = -e_3, \\ [e_2, e_2] = e_4, & [e_4, x] = 2e_4, & [e_3, e_3] = e_4. \end{cases}$$

$$I_2 : \begin{cases} [e_1, e_1] = e_4, & [e_1, x] = e_1 - ie_2, & [x, e_1] = -e_1 + ie_2, \\ [e_1, e_2] = ie_4, & [e_2, x] = ie_1 + e_2, & [x, e_2] = -ie_1 - e_2 + e_4, \\ [e_2, e_1] = -ie_4, & [e_3, x] = e_3, & [x, e_3] = -e_3, \\ [e_2, e_2] = e_4, & [e_4, x] = 2e_4, & [e_3, e_3] = e_4. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
II_1 : & \begin{cases} [e_1, e_2] = e_4, & [e_1, x] = e_1 - e_2, & [x, e_1] = -e_1 + e_2, \\ [e_1, e_3] = e_4, & [e_2, x] = e_2 + e_3, & [x, e_2] = -e_2 - e_3, \\ [e_2, e_1] = -e_4, & [e_3, x] = e_3, & [x, e_3] = -e_3, \\ [e_2, e_2] = e_4, & [e_4, x] = 2e_4, & [e_3, e_1] = e_4. \end{cases} \\
III_1 : & \begin{cases} & [e_1, x] = e_1, & [x, e_1] = -e_1, \\ [e_1, e_2] = e_3, & [e_2, x] = \alpha e_2, & [x, e_2] = -\alpha e_2, \\ [e_2, e_1] = e_4, & [e_3, x] = (1 + \alpha)e_3, & [x, e_3] = -e_3 + \alpha e_4, \\ & [e_4, x] = (1 + \alpha)e_4, & [x, e_4] = e_3 - \alpha e_4. \end{cases} \\
III_2 : & \begin{cases} [e_1, e_2] = e_3, & [e_1, x] = e_1 + e_3, & [x, e_1] = -e_1 + e_4, \\ [e_2, e_1] = e_4, & [e_3, x] = e_3, & [x, e_3] = -e_3, \\ & [e_4, x] = e_4, & [x, e_4] = e_3. \end{cases} \\
IV_1 : & \begin{cases} [e_1, e_1] = e_4, & [e_1, x] = e_1 + e_2, & [e_2, x] = e_2, \\ [e_1, e_2] = e_3, & [x, e_1] = -e_1 - e_2, & [x, e_2] = -e_2, \\ [e_2, e_1] = -e_3, & [e_3, x] = 2e_3, & [x, e_3] = -2e_3, & [e_4, x] = 2e_4. \end{cases} \\
IV_2 : & \begin{cases} [e_1, e_1] = e_4, & [e_1, x] = e_1, & [x, e_1] = -e_1, & [e_4, x] = 2e_4. \\ [e_1, e_2] = e_3, & [e_2, x] = \alpha e_2, & [e_3, x] = (1 + \alpha)e_3, \\ [e_2, e_1] = -e_3, & [x, e_2] = -\alpha e_2, & [x, e_3] = -(1 + \alpha)e_3, \end{cases} \\
IV_3 : & \begin{cases} [e_1, e_1] = e_4, & [e_2, x] = e_2, & [x, e_1] = -e_1, \\ [e_1, e_2] = e_3, & [e_3, x] = e_3, & [x, e_3] = -e_3, \\ [e_2, e_1] = -e_3, \end{cases} \\
IV_4 : & \begin{cases} [e_1, e_1] = e_4, & [e_2, x] = e_2, & [x, e_1] = \alpha e_4, \\ [e_1, e_2] = e_3, & [e_3, x] = e_3, & [x, e_2] = -e_2, \\ [e_2, e_1] = -e_3, & & [x, e_3] = -e_3. \end{cases} \\
IV_5 : & \begin{cases} [e_1, e_1] = e_4, & [e_2, x] = e_2, & [x, e_1] = \alpha e_4, \\ [e_1, e_2] = e_3, & [e_3, x] = e_3, & [x, e_2] = -e_2, \\ [e_2, e_1] = -e_3, & [x, x] = e_4, & [x, e_3] = -e_3. \end{cases} \\
IV_6 : & \begin{cases} [e_1, e_1] = e_4, & [e_2, x] = e_2 + e_3, & [x, e_1] = \alpha e_4, \\ [e_1, e_2] = e_3, & [e_3, x] = e_3, & [x, e_2] = -e_2 - e_3, \\ [e_2, e_1] = -e_3, & [x, x] = \delta e_4, & [x, e_3] = -e_3. \end{cases} \\
V_1 : & \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3, & [e_2, x] = e_2, & [x, e_2] = -e_2. \\ [e_1, e_2] = e_4, & [e_4, x] = e_4, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_2 : & \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3, & [e_2, x] = e_2, & [x, e_2] = -e_2, \\ [e_1, e_2] = e_4, & [e_4, x] = e_4, & [x, x] = e_3. \end{cases} \\
V_3 : & \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3, & [e_2, x] = e_2, & [x, e_1] = -e_3, \\ [e_1, e_2] = e_4, & [e_4, x] = e_4, & [x, e_2] = -e_2, & [x, x] = \delta e_3. \end{cases} \\
VI_1 : & \begin{cases} [e_1, e_2] = e_4, & [e_1, x] = e_1, & [x, e_1] = -e_1, \\ [e_2, e_1] = e_4, & [e_2, x] = e_2, & [x, e_2] = -e_2, \\ [e_2, e_2] = e_4, & [e_3, x] = 2e_3, & [e_4, x] = 2e_4. \end{cases} \\
VII_1 : & \begin{cases} [e_1, e_2] = e_4, & [e_1, x] = e_1, & [x, e_1] = -e_1, \\ [e_2, e_1] = -e_4, & [e_2, x] = -e_2, & [x, e_2] = e_2. \\ [e_3, e_3] = e_4, & [e_3, x] = e_4, \end{cases} \\
VII_2 : & \begin{cases} [e_1, e_2] = e_4, & [e_1, x] = e_1, & [x, e_1] = -e_1, \\ [e_2, e_1] = -e_4, & [e_2, x] = -e_2, & [x, e_2] = e_2, \\ [e_3, e_3] = e_4, & [e_3, x] = e_4, & [x, e_3] = e_4. \end{cases} \\
VII_3 : & \begin{cases} [e_1, e_2] = e_4, & [e_1, x] = e_1, & [x, e_1] = -e_1, \\ [e_2, e_1] = -e_4, & [e_2, x] = -e_2, & [x, e_2] = e_2, \\ [e_3, e_3] = e_4, & [e_3, x] = e_4, & [x, e_3] = \gamma e_4, & [x, x] = e_4. \end{cases}
\end{aligned}$$

Доказательство. Пусть алгебра Лейбница L и ее нильрадикал N удовлетворяют условию теоремы. В силу Предложения 1 достаточно рассмотреть случай, когда N изоморфен одной из алгебр $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7$.

Пусть N изоморфен $\mu_1(\alpha)$, $\alpha \neq 0$. Тогда существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4, x\}$ в L такой, что $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ является базисом в $\mu_1(\alpha)$, а оператор $\mathcal{R}_x$ является не нильпотентным дифференцированием нильрадикала $\mu_1(\alpha)$. Таким образом, из Предложения 1 имеем следующее умножение в алгебре L :

$$\begin{aligned}
[e_1, e_1] &= e_4, & [e_1, x] &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_4, \\
[e_1, e_2] &= \alpha e_4, & [e_2, x] &= -a_2 e_1 + a_1 e_2 + a_4 e_4, \\
[e_2, e_1] &= -\alpha e_4, & [e_3, x] &= a_1 e_3 + a_5 e_4, \\
[e_2, e_2] &= e_4, & [e_4, x] &= 2a_1 e_4, & [e_3, e_3] &= e_4.
\end{aligned} \tag{1}$$

Положим

$$[x, e_1] = \sum_{i=1}^4 \alpha_i e_i, \quad [x, e_2] = \sum_{i=1}^4 \beta_i e_i, \quad [x, e_3] = \sum_{i=1}^4 \gamma_i e_i, \quad [x, x] = \sum_{i=1}^4 \delta_i e_i.$$

Из таблицы (1) нетрудно видеть, что $R(L) = \{e_4\}$. Тогда

$$\delta_i = 0, \quad i = \overline{1, 3}; \quad \alpha_1 = -a_1, \quad \alpha_2 = -a_2, \quad \alpha_3 = 0;$$

$$\beta_1 = a_2, \quad \beta_2 = -a_1, \quad \beta_3 = 0; \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = -a_1.$$

Рассматривая тождество Лейбница

$$0 = [x, [e_1, e_2]] = [[x, e_1], e_2] - [[x, e_2], e_1] = -2(\alpha\alpha_1 - \alpha_2)e_4,$$

имеем $a_2 = -\alpha\alpha_1$.

Аналогично, рассматривая тождество Лейбница для произведений $[x, [x, e_3]]$, $[x, [x, e_1]]$ и $[x, [x, e_2]]$, получим следующие соотношения:

$$\gamma_4 = a_5, \quad (1 + \alpha^2)\alpha_4 = -2\alpha a_4 - a_3(\alpha^2 - 1), \quad (1 + \alpha^2)\beta_4 = 2\alpha a_3 - a_4(\alpha^2 - 1) \quad (2)$$

Случай 1. Пусть $1 + \alpha^2 \neq 0$, тогда из соотношения (2) получим

$$\alpha_4 = -\frac{2\alpha a_4 + a_3(\alpha^2 - 1)}{1 + \alpha^2}, \quad \beta_4 = \frac{2\alpha a_3 - a_4(\alpha^2 - 1)}{1 + \alpha^2}.$$

Таким образом, мы имеем следующую таблицу умножения:

$$\begin{aligned} [e_1, e_1] &= e_4, & [e_1, x] &= a_1 e_1 - \alpha a_1 e_2 + a_3 e_4, & [x, e_1] &= -a_1 e_1 + \alpha a_1 e_2 + \alpha_4 e_4, \\ [e_1, e_2] &= \alpha e_4, & [e_2, x] &= \alpha a_1 e_1 + a_1 e_2 + a_4 e_4, & [x, e_2] &= -\alpha a_1 e_1 - a_1 e_2 + \beta_4 e_4, \\ [e_2, e_1] &= -\alpha e_4, & [e_3, x] &= a_1 e_3 + a_5 e_4, & [x, e_3] &= -a_1 e_3 + a_5 e_4, \\ [e_2, e_2] &= e_4, & [e_4, x] &= 2a_1 e_4, & [x, x] &= \delta_4 e_4. \\ [e_3, e_3] &= e_4, \end{aligned}$$

Так как $a_1 \neq 0$, то сделав замену

$$x' = \frac{1}{a_1} x - \frac{\delta_4}{2a_1^2} e_4, \quad e'_1 = e_1 + \frac{\alpha a_4 - a_3}{a_1(\alpha^2 + 1)} e_4, \quad e'_2 = e_2 - \frac{\alpha a_3 + a_4}{a_1(\alpha^2 + 1)} e_4, \quad e'_3 = e_3 - \frac{a_5}{a_1} e_4$$

мы можем полагать $a_1 = 1$, $a_3 = a_4 = a_5 = \alpha_4 = \beta_4 = 0$ и имеем алгебру $I_1(\alpha)$ при $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq \pm i$.

Случай 2. Пусть $1 + \alpha^2 = 0$, тогда при замене

$$x' = \frac{1}{a_1} x - \frac{\delta_4}{2a_1^2} e_4, \quad e'_1 = e_1 - \frac{a_3 + \alpha_4}{2a_1} e_4, \quad e'_2 = e_2 + \frac{\alpha(a_3 - \alpha_4)}{2a_1} e_4, \quad e'_3 = e_3 - \frac{a_5}{a_1} e_4$$

получим следующую таблицу умножения в алгебре L :

$$\begin{aligned} [e_1, e_1] &= e_4, & [e_1, x] &= e_1 - \alpha e_2, & [x, e_1] &= -e_1 + \alpha e_2, \\ [e_1, e_2] &= \alpha e_4, & [e_2, x] &= \alpha e_1 + e_2, & [x, e_2] &= -\alpha e_1 - e_2 + \beta e_4, \\ [e_2, e_1] &= -\alpha e_4, & [e_3, x] &= e_3, & [x, e_3] &= -e_3, \\ [e_2, e_2] &= e_4, & [e_4, x] &= 2e_4, & [e_3, e_3] &= e_4. \end{aligned}$$

Надо отметить, что в случае $\beta = 0$ имеем алгебру $I_1(\alpha)$ при $\alpha = \pm i$.

Так как $\alpha = \pm i$, если $\beta \neq 0$, сделав замену $e'_1 = \pm \beta e_1, e'_2 = \beta e_2, e'_3 = \beta e_3, e'_4 = \beta^2 e_4$, имеем алгебру I_2 .

Пусть N изоморфен $\mu_1(0)$. Тогда аналогично предыдущему случаю имеем базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4, x\}$ в L такое, что таблица умножения имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} [e_1, e_1] &= e_4, & [e_1, x] &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4, \\ [e_2, e_2] &= e_4, & [e_2, x] &= -a_2 e_1 + a_1 e_2 + a_5 e_3 + a_6 e_4, \\ [e_3, e_3] &= e_4, & [e_3, x] &= -a_3 e_1 - a_5 e_2 + a_1 e_3 + a_7 e_4, & [e_4, x] &= 2a_1 e_4. \end{aligned} \quad (3)$$

Из (3) нетрудно видеть, что $R(L) = \{e_4\}$. Тогда

$$\delta_i = 0, \quad i = \overline{1, 3}; \quad \alpha_1 = -a_1, \quad \alpha_2 = -a_2, \quad \alpha_3 = -a_3;$$

$$\beta_1 = a_2, \quad \beta_2 = -a_1, \quad \beta_3 = -a_5; \quad \gamma_1 = a_3, \quad \gamma_2 = a_5, \quad \gamma_3 = -a_1.$$

Рассматривая тождество Лейбница

$$0 = [x, [e_1, e_2]] = [[x, e_1], e_2] - [[x, e_2], e_1] = \alpha_2 e_4 - \beta_1 e_4 = -2a_2 e_4,$$

имеем $a_2 = 0$.

Аналогично, рассматривая тождество Лейбница для произведений $[x, [e_1, e_3]]$, $[x, [e_2, e_3]]$, $[x, [x, e_1]]$, $[x, [x, e_2]]$ и $[x, [x, e_3]]$, получим следующие соотношения:

$$a_3 = 0, \quad a_5 = 0, \quad \alpha_4 = a_4, \quad \beta_4 = a_6, \quad \gamma_4 = a_7.$$

Таким образом, мы имеем следующую таблицу умножения:

$$\begin{aligned} [e_1, e_1] &= e_4, & [e_1, x] &= a_1 e_1 + a_4 e_4, & [x, e_1] &= -a_1 e_1 + a_4 e_4, \\ [e_2, e_2] &= e_4, & [e_2, x] &= a_1 e_2 + a_6 e_4, & [x, e_2] &= -a_1 e_2 + a_6 e_4, \\ [e_3, e_3] &= e_4, & [e_3, x] &= a_1 e_3 + a_7 e_4, & [x, e_3] &= -a_1 e_3 + a_7 e_4, \\ & & [e_4, x] &= 2a_1 e_4, & [x, x] &= \delta_4 e_4. \end{aligned}$$

Так как $a_1 \neq 0$, то сделав замену

$$x' = \frac{1}{a_1}x - \frac{\delta_4}{2a_1^2}e_4, \quad e'_1 = e_1 - \frac{a_4}{a_1}e_4, \quad e'_2 = e_2 + \frac{a_6}{a_1}e_4, \quad e'_3 = e_3 - \frac{a_7}{a_1}e_4$$

имеем алгебру $I_1(0)$.

Рассматривая случаи, когда нильрадикал N изоморфен алгебрам $\mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7$, аналогичным образом получим алгебры $II_1 - VII_3$. Теорема доказана.

Литература

1. Albeverio S., Omirov B.A., Rakhimov I.S. Classification of 4-dimensional nilpotent complex Leibniz algebras. Extracta Math. Vol. 21, No. 3, 2006, P. 197-210.
2. Barnes D.W. On Levi's theorem for Leibniz algebras. Bull. Aust. Math. Soc., 86(2), 2012, 184-185.
3. Camacho L.M., Omirov B.A., Masutova K.K. Solvable Leibniz algebras with filiform nilradical. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society (принято к печати).
4. Canete Elisa M., Khudoyberdiyev Abror Kh. The classification of 4-dimensional Leibniz algebras. Linear algebra and its Applications, 439 (1) 2013 p. 273-288.
5. J.M. Casas, M. Ladra, B.A. Omirov, I.A. Karimjanov. Classification of solvable Leibniz algebras with null-filiform nilradical, Linear and Multilinear Algebra, 2013 Vol. 61, No. 6, 758-774.
6. J.M. Casas, M. Ladra, B.A. Omirov, I.A. Karimjanov. Classification of solvable Leibniz algebras with naturally graded filiform nilradical, Linear Algebra and its Applications, vol. 438(7), 2013, p. 2973-3000.
7. Khudoyberdiyev A.Kh., Rakhimov I.S., Said Husain Sh.K. On classification of 5-dimensional solvable Leibniz algebras. Linear Algebra and its Applications (принято к печати).
8. Мубаракзянов Г.М., О разрешимых алгебрах Ли. Известия, 1963, 1(32), с. 114-123.

Институт математики при НУУз

Содержание

Ахмедов Д.М. О численном интегрировании сингулярных интегралов типа Коши	3
Болтаев А.К. Вычисление нормы функционала погрешности оптимальных квадратурных формул в пространстве $K_2(P_3)$	17
Дурдиев Д.К., Дурдиев У.Д. Устойчивость решения обратной задачи для интегро - дифференциального уравнения Максвелла в однородной анизотропной среде	25
Ганиходжаев Н.Н., Жамилов У.У. О достаточном условии эргодичности вольтерровских квадратичных операторов двуполой популяции	35
Жураев Т.Ф. Некоторые геометрические и топологические свойства ковариантных функторов	43
Каримов Ш.Т. Решение задачи Коши для трехмерного гиперболического уравнения с сингулярными коэффициентами и со спектральным параметром	55
Каримов Э.Т. Краевые задачи с интегральным условием сопряжения для параболо-гиперболического уравнения с оператором Капуто в области с отходом от характеристики	66
Исламов Б., Бегимкулов Ф.Х. Краевая задача с условием Франкля для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения	78
Муминов К.К., Чилин В.И. Дифференциальные матричные уравнения для описания путей, эквивалентных относительно действия псевдоортогональных групп	92
Murodov Sh.N. Classification of two-dimensional real evolution algebras and dynamics of some two-dimensional chains of evolution algebras	102
Нуралиев Ф.А. Норма функционала погрешности оптимальной квадратурной формулы типа Эрмита в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$	112
Рахимов А.А., Нуриллаев М.Э. Инъективные вещественные W^* -алгебры	121
Тураев Р.Н. Внутреннеграницная нелокальная задача для нелинейного параболического уравнения	125
Уринов А.К., Исмоилов А.И. Задача с краевыми условиями на параллельных характеристиках для обобщенного уравнения Эйлера - Пуассона - Дарбу	132
Хамраев А.Ю. FM - кубические стохастические операторы	142
Худойбердиев А.Х., Шерматова З.Х. Об описании пятимерных-разрешимых алгебр Лейбница с четырехмерным не Лиевым нильрадикалом	149

Mundarija

Ahmedov D.M. <i>Koshi tipidagi singulyar integrallarni hisoblash</i>	3
Boltayev A.K. <i>$K_2(P_3)$ fazosida optimal kvadratur formula xatolik funksionali normasi hisoblangan</i>	17
Durdiyev D.K., Durdiyev U.D. <i>Bir jinsli anizotropik muhitda berilgan Maksvell integro - differensial tenglamasi teskari masalasi yechimining turg'unligi</i>	25
Ganixo'jayev N.N., Jamilov U.U. <i>Ikki jinsli populyatsiyaning barcha Volterra operatorlari to'plami</i>	35
Djurayev T.F. <i>Kovariant funktoirlarning ba'zi geometrik va topologik xossalari</i>	43
Karimov Sh.T. <i>Uch o'lchovli singulyar koeffitsientli va spektral parametrlri giperbolik tenglama uchun Koshi masalasini echish</i>	55
Karimov E.T. <i>Xarakteristikadan chetlashgan sohada Kaputo operatori qatnashgan parabolik giperbolik tenglama uchun integral ulash shartli chegaraviy masalalar</i>	66
Islamov B., Begimqulov F.X. <i>Ikkita buzilish chizig'iga ega bo'lgan aralash tipdagi tenglama uchun Frankl shartli chegaraviy masala</i>	78
Muminov K.K., Chilin V.I. <i>Differencial teglamalar vositasida psevdootogonal gruppaga nisbatan ekvivalent bo'lgan yo'llar ifodalash.</i> ...	92
Murodov Sh.N. <i>Ikki o'lchovli haqiqiy evolyutsion algebralarining klassifikatsiyasi va ba'zi ikki o'lchovli evolyutsion algebralar zanjirining dinamikasi</i>	102
Nuraliyev F.A. <i>$L_2^{(m)}(0,1)$ fazosida Ermit tipidagi optimal kvadratur formula xatolik funksionalining normasi</i>	112
Raximov A.A., Nurillayev M.E. <i>In'ektivli haqiqiy W^*-algebralar</i>	121
Turayev R.N. <i>Chiziqsiz parabolik tenglama uchun ichki nolokal masala</i>	125
Urinov A.K., Ismoilov A.I. <i>Umumlashgan Eyler - Puasson - Darbu tenglamasi uchun paralel xarakteristikalarda chegaraviy shartli masala</i> ..	132
Xamrayev A.Yu. <i>FM kubik stoxastik operatorlar</i>	142
Xudoyberdiyev A.X., Shermatova Z.X. <i>Nilradikali 4-o'lchovli Li bo'lmagan algebralardan iborat 5-o'lchovli yechimli Leibniz algebralarining tavsifi</i>	149