Matematika Instituti Byulleteni
2021, Vol. 4, №2, 61-69 b.

Bulletin of the Institute of Mathematics
2021, Vol. 4, №2, pp.61-69

Бюллетень Института математики
2021,Vol. 4, №2, стр.61-69

Краевая задача для уравнения четвертого порядка

Киличов О. Ш. [1]

Xususiy hosilali to‘rtinchi tartibli tenglama uchun chegaraviy masala.
Maqolada xususiy hosilali to‘rtinchi tartibli tenglama uchun chegaraviy masala qaralgan. Masala yechimining mavjudligi va yagonaligi isbotlangan.
Kalit so‘zlar: chegaraviy masala; Furye usuli; yechimning mavjudligi; yechimning yagonaligi.

Boundary value problem for a fourth order partial differential equation.
In this paper a boundary value problem for a fourth order partial differential equation is investigated. The existence of unique solution of this problem is proved.
Keywords: boundary value problem; method of Fourier; the existence of the solution; the uniqueness of the solution.

MSC 2010: 35J15
Ключевые слова: краевая задача; метод Фурье; существование решения; единственность решения.

Введение

В данной работе изучается обобщение смешанной задачи для уравнения четвертого порядка для случая, когда в начальной и финальной условиях заданы производные по t высокого порядка превышающие порядок уравнения. Впервые задачу с высокой производной на части границы области изучал А.Н. Тихонов. Он в работе [1] для однородного уравнения теплопроводности исследовал задачу с условиями

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(0,t) = f(t),\ u(x,0) = 0,$$

в области $(0 < x < \infty,\ t > 0)$.

В работе [2] А.В. Бицадзе в $n-$ мерной ограниченной области D исследовал задачу

$$\triangle u(x) = 0,\ \frac{d^m u}{dv^m} = f(x),\ x \in D,$$

и доказал ее фредгольмовость.

Для уравнений Лапласа, Пуассона и Гельмгольца в единичном шаре краевые задачи с граничными условиями, содержащие производные высокого порядка изучены в работах И.И. Баврина [3], В.В. Карачика и Б.Х. Турметова [4], В.В. Карачика [5]-[7], В.Б. Соколовского [8] и других. Для уравнения теплопроводности смешанная задача с высокой производной в начальном условий изучена в [9], а для

[1]Институт математики имени В.И.Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан. E-mail: oybek2402@mail.ru

уравнения колебания струны смешанная задача с высокими производными в начальных условиях изучена в [10]. Обоснование метода Фурье для общих линейных гиперболических и параболических уравнений в нормальных областях проведено В.А. Ильиным [11] .

Постановка задачи.

В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < p, 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{tt} = u_{xxxx} + f(x,t), \tag{1}$$

где $f(x,t)-$ заданная непрерывная функция в $\overline{\Omega}$.

Задача. Найти решение $u(x,t) \in C^{4,k}_{x,t}(\overline{\Omega})$ в Ω уравнения (1) по условиям

$$u(0,t) = 0,\ u(p,t) = 0,\ 0 \leq t \leq T, \tag{2}$$

$$u_{xx}(0,t) = 0,\ u_{xx}(p,t) = 0,\ 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x,0) = \varphi(x),\ 0 \leq x \leq p, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x,T) = \psi(x),\ 0 \leq x \leq p, \tag{5}$$

где $k \geq 2-$ фиксированное натуральное число, $\varphi(x),\ \psi(x)-$ непрерывна в $(\overline{\Omega})$.

Смешанные задачи для уравнений четвертого порядка изучены в [12]-[15]. Наиболее полную библиографию по этим вопросам можно найти в [12].

Единственность решения задачи (1)-(5).

Теорема 1. *Решение задачи (1)-(5) единственно, если оно существует.*

Доказательство. Пусть $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$, $0 \leq x \leq p$, $f(x,t) = 0$ в $\overline{\Omega}$. Покажем, что $u(x,t) = 0$ в $\overline{\Omega}$.

Следуя [16] рассмотрим интеграл

$$\alpha_n(t) = \int_0^p u(x,t)X_n(x)dx,\ 0 \leq t \leq T, \tag{6}$$

где функции

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} sin\lambda_n x,\ \lambda_n = \frac{n\pi}{p},\ n = 1, 2, ... \tag{7}$$

образуют полную ортонормированную систему в $L_2(\Omega)$ [17]. Продифференцируя (6) два раза по t из однородного уравнения (1) находим

$$\alpha_n^{''}(t) = \int_0^p u_{tt}(x,t)X_n(x)dx.$$

Из соответствующего однородного уравнения (1) получаем

$$\alpha_n^{''}(t) = \int_0^p u_{xxxx}(x,t)X_n(x)dx. \tag{8}$$

Интегрируя его по частям имеем

$$\alpha_n^{''}(t) - \lambda_n^4\alpha_n(t) = 0. \tag{9}$$

Его общее решение имеет вид

$$\alpha_n(t) = a_n \cdot e^{\lambda_n^2 t} + b_n \cdot e^{-\lambda_n^2 t}, \tag{10}$$

Чтобы найти неизвестные коэффициент a_n и b_n используем однородные условия (4), (5) имеем

$$\alpha_n^{(k)}(0)=0,\ \alpha_n^{(k)}(T)=0.$$

Дифференцируя (6) к раз по t и используя последние условия получаем $a_n=0$, $b_n=0$. Тогда из (10) следует, что $\alpha_n(t)=0$. Теперь равенство (6) принимает вид

$$\int_0^p u(x,t)X_n(x)dx=0.$$

Так как $X_n(x), n=1,2,...$ полная ортонормированные в $L_2(0,p)$ функции, то из полноты $X_n(x)$ следует, что $u(x,t)=0$ почти всюду в Ω. Из соотношения $u\in C^{4,k}_{x,t}(\overline{\Omega})$ следует, что $u(x,t)\equiv 0$ в $\overline{\Omega}$.

Теорема 1 доказана. □

Существование решения задачи (1)-(5).

Решение уравнения (1) ищем в виде ряда Фурье

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)X_n(x). \tag{11}$$

Функции $f(x,t),\ \varphi(x),\ \psi(x)$ разложим в ряд Фурье по функциям $X_n(x),\ n=1,2,...$

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)X_n(x), \tag{12}$$

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_nX_n(x), \tag{13}$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_nX_n(x), \tag{14}$$

где

$$f_n(t)=\int_0^p f(x,t)X_n(x)dx, \tag{15}$$

$$\varphi_n=\int_0^p \varphi(x)X_n(x)dx, \tag{16}$$

$$\psi_n=\int_0^p \psi(x)X_n(x)dx. \tag{17}$$

Подставляя (11) и (12) в уравнение (1) имеем

$$u_n^{''}(t)-\lambda_n^4u_n(t)=f_n(t).$$

Его решение удовлетворяющее условиям

$$u_n^{(k)}(0)=\varphi_n,\ u_n^{(k)}(T)=\psi_n,$$

имеет вид

$$u_n(t)=-\frac{e^{-\lambda_n^2(T-t)}-(-1)^ke^{\lambda_n^2(T-t)}}{(\lambda_n^2)^k(e^{\lambda_n^2T}-e^{-\lambda_n^2T})}\cdot\varphi_n+\frac{e^{\lambda_n^2t}-(-1)^ke^{-\lambda_n^2t}}{(\lambda_n^2)^k(e^{\lambda_n^2T}-e^{-\lambda_n^2T})}\cdot\psi_n-$$

$$-\frac{e^{\lambda_n^2t}-(-1)^ke^{-\lambda_n^2t}}{(\lambda_n^2)^k(e^{\lambda_n^2T}-e^{-\lambda_n^2T})}\sum_{s=0}^{\left[\frac{k+(-1)^k}{2}\right]-1}\lambda_n^{4s}f_n^{(k-2-2s)}(T)+$$

$$+\frac{e^{-\lambda_n^2(T-t)}-(-1)^ke^{\lambda_n^2(T-t)}}{(\lambda_n^2)^k(e^{\lambda_n^2T}-e^{-\lambda_n^2T})}\sum_{s=0}^{\left[\frac{k+(-1)^k}{2}\right]-1}\lambda_n^{4s}f_n^{(k-2-2s)}(0)-$$

$$-\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^T K_{1n}(t,\tau)f_n(\tau)d\tau. \tag{18}$$

Подставляя (18) в (11) находим

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\Big[-\frac{e^{-\lambda_n^2(T-t)}-(-1)^k e^{\lambda_n^2(T-t)}}{(\lambda_n^2)^k(e^{\lambda_n^2T}-e^{-\lambda_n^2T})}\cdot\varphi_n+\frac{e^{\lambda_n^2t}-(-1)^k e^{-\lambda_n^2t}}{(\lambda_n^2)^k(e^{\lambda_n^2T}-e^{-\lambda_n^2T})}\cdot\psi_n-$$

$$-\frac{e^{\lambda_n^2t}-(-1)^k e^{-\lambda_n^2t}}{(\lambda_n^2)^k(e^{\lambda_n^2T}-e^{-\lambda_n^2T})}\sum_{s=0}^{\left[\frac{k+(-1)^k}{2}\right]-1}\lambda_n^{4s}f_n^{(k-2-2s)}(T)+$$

$$+\frac{e^{-\lambda_n^2(T-t)}-(-1)^k e^{\lambda_n^2(T-t)}}{(\lambda_n^2)^k(e^{\lambda_n^2T}-e^{-\lambda_n^2T})}\sum_{s=0}^{\left[\frac{k+(-1)^k}{2}\right]-1}\lambda_n^{4s}f_n^{(k-2-2s)}(0)-$$

$$-\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^T K_{1n}(t,\tau)f_n(\tau)d\tau\Big]. \tag{19}$$

Здесь, если k четное число, то

$$K_{1n}(t,\tau)=\begin{cases}\frac{sh\lambda_n^2\tau\cdot sh\lambda_n^2(T-t)}{sh\lambda_n^2T}, & 0\le\tau\le t;\\ \frac{sh\lambda_n^2t\cdot sh\lambda_n^2(T-\tau)}{sh\lambda_n^2T}, & t\le\tau\le T,\end{cases}$$

и если k нечетное число, то

$$K_{1n}(t,\tau)=\begin{cases}\frac{ch\lambda_n^2\tau\cdot ch\lambda_n^2(T-t)}{sh\lambda_n^2T}, & 0\le\tau\le t;\\ \frac{ch\lambda_n^2t\cdot ch\lambda_n^2(T-\tau)}{sh\lambda_n^2T}, & t\le\tau\le T.\end{cases}$$

Нам необходимо доказать абсолютную и равномерную сходимость рядов (19) и

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^4X_n(x)\Big[-\frac{e^{-\lambda_n^2(T-t)}-(-1)^k e^{\lambda_n^2(T-t)}}{(\lambda_n^2)^k(e^{\lambda_n^2T}-e^{-\lambda_n^2T})}\cdot\varphi_n+\frac{e^{\lambda_n^2t}-(-1)^k e^{-\lambda_n^2t}}{(\lambda_n^2)^k(e^{\lambda_n^2T}-e^{-\lambda_n^2T})}\cdot\psi_n-$$

$$-\frac{e^{\lambda_n^2t}-(-1)^k e^{-\lambda_n^2t}}{(\lambda_n^2)^k(e^{\lambda_n^2T}-e^{-\lambda_n^2T})}\sum_{s=0}^{\left[\frac{k+(-1)^k}{2}\right]-1}\lambda_n^{4s}f_n^{(k-2-2s)}(T)+$$

$$+\frac{e^{-\lambda_n^2(T-t)}-(-1)^k e^{\lambda_n^2(T-t)}}{(\lambda_n^2)^k(e^{\lambda_n^2T}-e^{-\lambda_n^2T})}\sum_{s=0}^{\left[\frac{k+(-1)^k}{2}\right]-1}\lambda_n^{4s}f_n^{(k-2-2s)}(0)+$$

$$+\frac{1}{\lambda_n^4}f_n(t)-\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^T K_{1n}(t,\tau)f_n(\tau)d\tau\Big], \tag{20}$$

$$\frac{\partial^4u}{\partial x^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^4X_n(x)\Big[-\frac{e^{-\lambda_n^2(T-t)}-(-1)^k e^{\lambda_n^2(T-t)}}{(\lambda_n^2)^k(e^{\lambda_n^2T}-e^{-\lambda_n^2T})}\cdot\varphi_n+\frac{e^{\lambda_n^2t}-(-1)^k e^{-\lambda_n^2t}}{(\lambda_n^2)^k(e^{\lambda_n^2T}-e^{-\lambda_n^2T})}\cdot\psi_n-$$

$$-\frac{e^{\lambda_n^2t}-(-1)^k e^{-\lambda_n^2t}}{(\lambda_n^2)^k(e^{\lambda_n^2T}-e^{-\lambda_n^2T})}\sum_{s=0}^{\left[\frac{k+(-1)^k}{2}\right]-1}\lambda_n^{4s}f_n^{(k-2-2s)}(T)+$$

$$+\frac{e^{-\lambda_n^2(T-t)}-(-1)^k e^{\lambda_n^2(T-t)}}{(\lambda_n^2)^k(e^{\lambda_n^2 T}-e^{-\lambda_n^2 T})}\sum_{s=0}^{\left[\frac{k+(-1)^k}{2}\right]-1}\lambda_n^{4s}f_n^{(k-2-2s)}(0)-$$

$$-\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^T K_{1n}(t,\tau)f_n(\tau)d\tau\Big], \tag{21}$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\Big[\frac{sh\lambda_n^2(T-t)}{sh\lambda_n^2 T}\cdot\varphi_n+\frac{sh\lambda_n^2 t}{sh\lambda_n^2 T}\cdot\psi_n-\frac{sh\lambda_n^2 t}{sh\lambda_n^2 T}\sum_{s=0}^{\left[\frac{k+(-1)^k}{2}\right]-1}\lambda_n^{4s}f_n^{(k-2-2s)}(T)-$$

$$-\frac{sh\lambda_n^2(T-t)}{sh\lambda_n^2 T}\sum_{s=0}^{\left[\frac{k+(-1)^k}{2}\right]-1}\lambda_n^{4s}f_n^{(k-2-2s)}(0)+$$

$$+\sum_{s=0}^{\left[\frac{k+(-1)^k}{2}\right]-1}\lambda_n^{4s}f_n^{(k-2-2s)}(t)-\lambda_n^{2(k-1)}\int_0^T K_{2n}(t,\tau)f_n(\tau)d\tau\Big]. \tag{22}$$

Здесь, если k четное число, то

$$K_{2n}(t,\tau)=\begin{cases}\frac{sh\lambda_n^2\tau\cdot sh\lambda_n^2(T-t)}{sh\lambda_n^2 T},\ 0\le\tau\le t;\\ \\ \frac{sh\lambda_n^2 t\cdot sh\lambda_n^2(T-\tau)}{sh\lambda_n^2 T},\ t\le\tau\le T,\end{cases}$$

и если k нечетное число, то

$$K_{2n}(t,\tau)=\begin{cases}-\frac{ch\lambda_n^2\tau\cdot sh\lambda_n^2(T-t)}{sh\lambda_n^2 T},\ 0\le\tau\le t;\\ \\ \frac{sh\lambda_n^2 t\cdot ch\lambda_n^2(T-\tau)}{sh\lambda_n^2 T},\ t\le\tau\le T.\end{cases}$$

Предварительно докажем несколько Лемм.

Лемма 1. *Пусть $f(x,t)\in W_2^{(1,0)}(\overline{\Omega})$, $f(0,t)=f(p,t)=0$ тогда ряд (12) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$.*

Доказательство. Интегрируя по частям (15) получаем

$$f_n(t)=\frac{1}{\lambda_n}f_n^{(1,0)}(t),$$

где

$$f_n^{(1,0)}(t)=\int_0^p\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\sqrt{\frac{2}{p}}cos\lambda_n x dx,$$

причем по неравенствам Буняковского и Бесселя [18], ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(t)X_n(x)|\le\sqrt{\frac{2}{p}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}|f_n^{1,0}(t)|\le\frac{\sqrt{2p}}{\pi}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|f_n^{1,0}(t)|^2\Big)^{1/2}\le\sqrt{\frac{p}{3}}\Big\|\frac{\partial f}{\partial x}\Big\|_{L_2(\Omega)}$$

сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$.

Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Пусть $\varphi(x)\in W_2^1(0,p)$, $\varphi(0)=\varphi(p)=0$ тогда ряд (13) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$.*

Доказательство. Интегрируя по частям интеграл в (16) получаем

$$\varphi_n = \frac{1}{\lambda_n}\varphi_n^{(1)}$$

где

$$\varphi_n^{(1)} = \int_0^p \varphi^{'}(x)\sqrt{\frac{2}{p}}cos\lambda_n x dx,$$

причем по неравенству Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n^{(1)}|^2 \leq \|\varphi^{'}\|^2_{L_2(0,p)}.$$

Далее $\sqrt{\frac{2}{p}}\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n| = \frac{\sqrt{2p}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|\varphi_n^{(1)}|$. Применяя неравенство Буняковского для суммы находим

$$\frac{\sqrt{2p}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|\varphi_n^{(1)}| \leq \frac{\sqrt{2p}}{\pi}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n^{(1)}|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{p}{3}}\|\varphi^{'}\|_{L_2(0,p)}.$$

Отсюда следует абсолютная и равномерная сходимость ряда (13) в $(\overline{\Omega})$.

Лемма 2 доказана. □

Лемма 3. *Пусть* $\psi(x) \in W_2^1(0,p),\ \psi(0) = \psi(p) = 0$ *тогда ряд (14) сходится абсолютно и равномерно в* $\overline{\Omega}$.

Доказательство аналогично доказательству Леммы 2.

Лемма 4. *Пусть*

1) k *четное число,* $f(x,t) \in W_2^{(2k-3,\ k-2)}(\overline{\Omega}),\ \frac{\partial^{2l}f(0,t)}{\partial x^{2l}} = \frac{\partial^{2l}f(p,t)}{\partial x^{2l}} = 0,\ l = 0,1,...,(k-2)$

2) k *нечетное число,* $f(x,t) \in W_2^{(2k-5,\ k-2)}(\overline{\Omega}),\ \frac{\partial^{2l+1}f(0,t)}{\partial t\partial x^{2l}} = \frac{\partial^{2l+1}f(p,t)}{\partial t\partial x^{2l}} = 0,\ l = 0,1,...,(k-3)$

тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\sum_{s=0}^{\left[\frac{k+(-1)^k}{2}\right]-1}\lambda_n^{4s}f_n^{(k-2-2s)}(t) \tag{23}$$

сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$.

Доказательство. Рассмотрим ряд (23)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big|X_n(x)\sum_{s=0}^{\left[\frac{k+(-1)^k}{2}\right]-1}\lambda_n^{4s}f_n^{(k-2-2s)}(t)\Big| \leq \sqrt{\frac{2}{p}}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[|f_n^{(k-2)}(t)| + \lambda_n^4|f_n^{(k-4)}(t)| + ...$$

$$+\left\{\begin{array}{c} \lambda_n^{2k-4}\ |f_n(t)|,\ \textit{если } k \textit{ четное число} \\ \lambda_n^{2k-6}\ |f_n^{'}(t)|,\ \textit{если } k \textit{ нечетное число} \end{array}\right.\Big]. \tag{24}$$

Пусть $k-$ четное число. Если ряд

$$\sqrt{\frac{2}{p}}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{2k-4}|f_n(t)| \tag{25}$$

сходится, то ряд (24) также сходится, где $f_n(t) = \int_0^p f(x,t)\sqrt{\frac{2}{p}}sin\lambda_n x dx$. Интегрируя по частям последний интеграл $(2k-3)$ раза, имеем

$$|f_n(t)| = \frac{1}{\lambda_n^{(2k-3)}}\cdot|f_n^{(2k-3,0)}(t)|, \tag{26}$$

где

$$f_n^{(2k-3,0)}(t) = \int_0^p \frac{\partial^{2k-3}f(x,t)}{\partial x^{2k-3}}\sqrt{\frac{2}{p}}sin\Big((2k-3)\frac{\pi}{2} + \lambda_n x\Big)dx.$$

В силу (26) ряд (25) примет вид

$$\sqrt{\frac{2}{p}}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{2k-4}|f_n(t)|=\sqrt{\frac{2}{p}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\cdot|f_n^{(2k-3,0)}(t)|.$$

Применяя неравенство Буняковского для суммы, правой части последного неравенства получаем

$$\sqrt{\frac{2}{p}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\cdot|f_n^{(2k-3,0)}(t)|\leq\frac{\sqrt{2p}}{\pi}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|f_n^{(2k-3,0)}(t)|^2\Big)^{1/2}=\sqrt{\frac{p}{3}}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|f_n^{(2k-3,0)}(t)|^2\Big)^{1/2}.$$

Применяя неравенство Бесселя, находим

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|f_n^{(2k-3,0)}(t)|^2\Big)^{1/2}\leq\Big\|\frac{\partial^{(2k-3)}f}{\partial x^{(2k-3)}}\Big\|_{L_2(\Omega)}.$$

Следовательно

$$\sqrt{\frac{2}{p}}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{2k-4}|f_n(t)|\leq\sqrt{\frac{p}{3}}\Big\|\frac{\partial^{(2k-3)}f}{\partial x^{(2k-3)}}\Big\|_{L_2(\Omega)}.$$

Сходимость ряда (25) доказана.

Пусть $k-$ нечетное число. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{2k-6}|f_n'(t)|$ сходится, тогда ряд (24) также сходится для нечетного k. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству сходимости ряда (25).

Лемма 4 доказана. □

Лемма 5. *Пусть* $f(x,t)\in W_2^{(2k-1,0)}(\overline{\Omega})$, $\frac{\partial^{2l}f(0,t)}{\partial x^{2l}}=\frac{\partial^{2l}f(p,t)}{\partial x^{2l}}=0,\ l=0,1,...,(k-1)$ *тогда ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\cdot\lambda_n^{2(k-1)}\int_0^T K_{2n}(t,\tau)f_n(\tau)\ d\tau \tag{27}$$

сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$.

Доказательство. Интегрируя по частям (15) (2k -1) раза, получаем

$$|f_n(t)|=\frac{1}{\lambda_n^{2k-1}}|f_n^{(2k-1,0)}(t)|,$$

где

$$f_n^{(2k-1,0)}(t)=\int_0^p\frac{\partial^{2k-1}f(x,t)}{\partial x^{2k-1}}\sqrt{\frac{2}{p}}sin((2k-1)\frac{\pi}{2}+\lambda_n x)\ dx,$$

причем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n^{(2k-1,0)}\|^2_{L_2(0,T)}\leq\|\frac{\partial^{2k-1}f}{\partial x^{2k-1}}\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Так как $|K_{2n}(t,\tau)|\leq 1$, то

$$\Big|\int_0^T K_{2n}(t,\tau)f_n(\tau)\ d\tau\Big|\leq\int_0^T|f_n(\tau)|\ d\tau=\frac{1}{\lambda_n^{2k-1}}\int_0^T|f_n^{(2k-1,0)}(\tau)|\ d\tau\leq$$

$$\leq\Big(\int_0^T\Big(\frac{1}{\lambda_n^{2k-1}}\Big)^2 d\tau\Big)^{1/2}\Big(\int_0^T|f_n^{(2k-1,0)}(\tau)|^2\ d\tau\Big)^{1/2}\leq\frac{\sqrt{T}}{\lambda_n^{2k-1}}\Big\|f_n^{(2k-1,0)}\Big\|_{L_2(0,T)}.$$

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{2(k-1)}\Big|X_n(x)\cdot\int_0^T K_{2n}(t,\tau)f_n(\tau)\ d\tau\Big|\leq\sqrt{\frac{pT}{3}}\Big\|\frac{\partial^{2k-1}f}{\partial x^{2k-1}}\Big\|_{L_2(\Omega)}.$$

Отсюда следует равномерная и абсолютная сходимость ряда (27) в $\overline{\Omega}$.

Лемма 5 доказана. □

Теорема 2. *Пусть* $f(x,t)\in W_2^{(2k-1,k-2)}(\overline{\Omega})$, $\varphi(x)\in W_2^1(0,p)$, $\psi(x)\in W_2^1(0,p)$,

$$\varphi(0)=\varphi(p)=0,\ \psi(0)=\psi(p)=0,$$

$$\frac{\partial^{2l} f(0,t)}{\partial x^{2l}} = \frac{\partial^{2l} f(p,t)}{\partial x^{2l}} = 0,\ l = 0,1,...,(k-1),$$

$$\frac{\partial^{2l+1} f(0,t)}{\partial t \partial x^{2l}} = \frac{\partial^{2l+1} f(p,t)}{\partial t \partial x^{2l}} = 0,\ l = 0,1,...,(k-3),$$

тогда ряды (12)-(14), (19)-(22) сходятся абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$. *Решение (19) удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2) - (5).*

Доказательство. В силу доказанных лемм легко видеть, что ряды (19) - (22)сходятся абсолютно и равномерно. Вычитая (20) из (21) убедимся, что решение (19) удовлетворяет уравнению (1). Условия (2) и (3)удовлетворяются в силу свойств функции $X_n(x)$. Переходя к пределу в (22) при $t \to 0$ и $t \to T$ убедимся, что условия (4) и (5) удовлетворяются.

Теорема 2 доказана. □

Литература

1. А.Н. Тихонов. О краевых условиях, содержащих производные порядка превышающие порядок уравнения. *Мат. сборник.* 26(1), 1950, с. 35-56.

2. А.В. Бицадзе. К задаче Неймана для гармонических функции. *Докл.АН СССР.* 311, 1990. с. 11-13.

3. И.И. Баврин. Операторы для гармонических функции и их приложения. *Диф. уравнения.* 21(1), 1985, с. 9-15.

4. Карачик В .В., Турметов Б. Х. Об одной задаче для гармонического уравнения. *Известия АН Уз ССР, сер. Физ.-мат. наук.* 4, 1990, с. 17-21.

5. В.В. Карачик. О разрешимости краевой задачи для уравнения Гельмгольца с нормальными производными высокого порядка на границе. *Диф. уравнения.* 28(5), 1992, с. 907-909.

6. В.В. Карачик. Об одной задаче для уравнения Пуассона с нормальными производными высокого порядка на границе. *Диф. уравнения.* 32(3), 1996, с. 1501-1503.

7. В.В. Карачик. Обобщенная задача Неймана для гармонических функции в полупространстве. *Диф. уравнения.* 35(7), 1999, с. 1-6.

8. В.Б. Соколовский. Об одном обобщении задачи Неймана. *Диф. уравнения.* 34(4), 1998, с. 714-716.

9. Amanov D. On a generalization of the first initial-boundary value problem for the heat conduction equation. *Contemporary Analysis and Applied Mathematics.* 2(1),2014, pp. 88-97.

10. D. Amanov, G. Ibragimov, A. Kilicman. On a Generalization of the Initial-Boundary Problem for the Vibrating String Equation. *Symmetry* 11, 73, 2019. https://doi.org/10.3390/sym11010073.

11. Ильин В.А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений. *УМН.* 15(8), 1960, с. 97-154.

12. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. Ташкент, Фан, 2000, 144 с.

13. Салахитдинов М.С., Аманов Д. Разрешимость и спектральные свойства самосопряженной задачи для уравнения четвертого порядка. *УзМЖ.* 3, 2005, с. 72-77.

14. Аманов Д., Юлдашева А.В. Разрешимость и спектральные свойства самосопряженной задачи для уравнения четвертого порядка. *УзМЖ.* 4, 2007, с. 3-8.

15. Аманов Д., Бекиев А.Б., Отарова Ж.А. Об одной краевой задаче для уравнения четвертого порядка. *УзМЖ.* 4, 2007, с. 3-8.

16. Моисеев Е.И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи. *Дифференциальные уравнения.* 35(8), 1999, с. 1094-1100.

17. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. *-М.:Наука,* 1973, с. 448.

18. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. -*М.:Наука,* 1965.

Получено: 15/03/2021

Принято: 07/05/2021

Cite this article

Qilichov O. Sh. Boundary value problem for a fourth order partial differential equation. *Bull. Inst. Math.*, 2021, Vol.4, №2, pp. 61-69 [in Russian].