

Квази-филиформные алгебры Зинбиеля

Адашев Ж. К., Худойбердиев А.Х.¹

Аннотация

Маколада улчами 7 дан катта булган табиий усулда градуирланган комплекс квази-филиформ Зинбиел алгебралари тавсифланган.

In this work the classification of naturally graded complex quasi-filiform Zinbiel algebras of dimensional > 7 is given.

Одним из основных и важным объектом современной не ассоциативной алгебры являются алгебры Ли. Активные исследования в области алгебр Ли привели к возникновению ряда обобщений этих алгебр, такие как алгебры Мальцева, супералгебры Ли, бинарно лиевые алгебры, алгебры Лейбница и другие.

В настоящей работе рассматриваются алгебры, которые являются дуальными к алгебрам Лейбница. Напомним, что алгебры Лейбница были введены в 90-х годах прошлого столетия в [1] и определяются следующим тождеством

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y].$$

При изучении категорных свойств алгебр Лейбница в [2] был рассмотрен объект - алгебры Зинбиеля. В силу того, что категория алгебр Зинбиеля является Кошулево дуальной к категории алгебр Лейбница, то иногда их называют также дуальными алгебрами Лейбница [2].

В работах [3]-[5] были получены некоторые интересные свойства алгебр Зинбиеля. В частности, в [4] доказана нильпотентность произвольной конечномерной комплексной алгебры Зинбиеля, а в работе [5] классифицированы нуль-филиформные и филиформные алгебры Зинбиеля. Следующему этапу - описанию квази-филиформных комплексных алгебр Зинбиеля посвящена данная работа.

Примеры алгебр Зинбиеля читатель может найти в работах [2], [4] и [5].

Ввиду того, что описание всех конечномерных комплексных алгебр Зинбиеля (которые являются нильпотентными) является необозримой задачей, то естественно при их изучении налагать определенные ограничения. Одним из таких ограничений является ограничение на индекс нильпотентности.

Определение 1. Алгебра A над полем F называется алгебра Зинбиеля, если для любых $x, y, z \in A$ выполняется тождество:

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) + x \circ (z \circ y) \quad (1)$$

Для произвольной алгебры Зинбиеля определим следующий ряд:

$$A^1 = A, \quad A^{k+1} = A \circ A^k, \quad k \geq 1$$

Определение 2. Алгебра Зинбиеля A называется нильпотентной, если существует $s \in \mathbb{N}$ такое, что $A^s = 0$. Минимальное число s , обладающее таким свойством называется индексом нильпотентности алгебры A .

¹Данная работа поддержана грантом ИСТР

Нетрудно видеть, что индекс нильпотентности произвольной n -мерной нильпотентной алгебры не превосходит числа $n + 1$.

Определение 3. Алгебру Зинбиеля A размерности n назовем нуль-филиформной, если $\dim A^i = (n + 1) - i$, $1 \leq i \leq n + 1$.

Очевидно, что определение нуль-филиформности алгебры эквивалентно тому, что алгебра имеет максимальный индекс нильпотентности.

Теорема 1. [5] Произвольная n -мерная нуль-филиформная алгебра Зинбиеля изоморфна алгебре со следующей таблицей умножения:

$$e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j e_{i+j}, \quad \text{при } 2 \leq i + j \leq n \quad (2)$$

где $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ базис алгебры.

Алгебру из теоремы 1 обозначим через NF_n .

Определение 4. Алгебра Зинбиеля A называется квази-филиформной алгеброй Зинбиеля, если $A^{n-2} \neq 0$ и $A^{n-1} = 0$, где n -размерность алгебра A .

Пусть A квази-филиформная алгебра Зинбиеля. Положив $A_i = A^i/A^{i+1}$, $1 \leq i \leq n - 2$, получим градуированную алгебру Зинбиеля

$$GrA = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_{n-2}, \quad \text{где } A_i \circ A_j \subseteq A_{i+j}.$$

Алгебра A называется естественным образом градуированной, если $A \cong GrA$.

Пусть A — естественным образом градуированная квази-филиформная алгебра Зинбиеля и $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — базис алгебры A такой, что $e_i \in A_i$ для $1 \leq i \leq n - 2$.

Очевидно, что $\dim A_1 > 1$. Действительно, если $\dim A_1 = 1$, то алгебра A однопорожждена и значит, является нуль-филиформной алгеброй Зинбиеля.

Не ограничивая общности, можно считать, что $e_{n-1} \in A_1$.

Алгебру Зинбиеля A для которой выполняется условие $e_n \in A_r$ будем называть алгеброй типа $A_{(r)}$.

Теорема 2. Любая n -мерная ($n \geq 6$) естественным образом градуированная комплексная квази-филиформная алгебра Зинбиеля типа $A_{(1)}$ изоморфна алгебре:

$$QF_n^1 : e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j e_{i+j}, \quad \text{при } 2 \leq i + j \leq n - 2$$

(отсутствующие произведение равны нулю).

Доказательство. Пусть алгебра Зинбиеля A удовлетворяет условиям теоремы. Тогда существует базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ такой, что

$$A_1 = \langle e_1, e_{n-1}, e_n \rangle, \quad A_2 = \langle e_2 \rangle, \quad A_3 = \langle e_3 \rangle, \quad \dots, \quad A_{n-2} = \langle e_{n-2} \rangle.$$

Используя рассуждения аналогичные рассуждениям работы [6] получим

$$e_1 \circ e_i = e_{i+1} \quad \text{при } 2 \leq i \leq n - 3.$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} e_1 \circ e_1 &= \alpha_{1,1} e_2, & e_1 \circ e_{n-1} &= \alpha_{1,2} e_2, & e_1 \circ e_n &= \alpha_{1,3} e_2, \\ e_{n-1} \circ e_1 &= \alpha_{2,1} e_2, & e_{n-1} \circ e_{n-1} &= \alpha_{2,2} e_2, & e_{n-1} \circ e_n &= \alpha_{2,3} e_2, \\ e_n \circ e_1 &= \alpha_{3,1} e_2, & e_n \circ e_{n-1} &= \alpha_{3,2} e_2, & e_n \circ e_n &= \alpha_{3,3} e_2. \end{aligned}$$

Рассмотрим следующие случаи:

Случай 1. Пусть $(\alpha_{1,1}, \alpha_{2,2}, \alpha_{3,3}) \neq (0, 0, 0)$. Тогда не ограничивая общности, можно полагать $\alpha_{1,1} \neq 0$. Более того, взяв замену $e'_2 = \alpha_{1,1}e_2$, $e'_3 = \alpha_{1,1}e_3$, $\dots$, $e'_{n-2} = \alpha_{1,1}e_{n-2}$ получим $\alpha_{1,1} = 1$. Очевидно, что пространство $\text{lin}\langle e_1, e_2, \dots, e_{n-2} \rangle$ образует нуль-филиформную алгебру Зинбиеля, т.е.

$$e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j e_{i+j}, \quad \text{для } 2 \leq i+j \leq n-2.$$

Рассмотрим произведения

$$\begin{aligned} (e_1 \circ e_{n-1}) \circ e_1 &= e_1 \circ (e_{n-1} \circ e_1) + e_1 \circ (e_1 \circ e_{n-1}) \\ &\Rightarrow 2\alpha_{1,2}e_3 = (\alpha_{2,1} + \alpha_{1,2})e_3 \Rightarrow \alpha_{1,2} = \alpha_{2,1}, \\ (e_1 \circ e_1) \circ e_{n-1} &= e_1 \circ (e_1 \circ e_{n-1}) + e_1 \circ (e_{n-1} \circ e_1) \Rightarrow e_2 \circ e_{n-1} = 2\alpha_{1,2}e_3, \\ (e_1 \circ e_{n-1}) \circ e_{n-1} &= 2e_1 \circ (e_{n-1} \circ e_{n-1}) \Rightarrow 2\alpha_{1,2}^2 e_3 = 2\alpha_{2,2}e_3 \Rightarrow \alpha_{1,2}^2 = \alpha_{2,2}, \\ (e_{n-1} \circ e_1) \circ e_1 &= 2e_{n-1} \circ (e_1 \circ e_1) \Rightarrow 2\alpha_{2,1}e_3 = 2e_{n-1} \circ e_2 \Rightarrow e_{n-1} \circ e_2 = \alpha_{1,2}e_3. \end{aligned}$$

Сделав замену $e'_{n-1} = -\alpha_{1,2}e_1 + e_{n-1}$, можно полагать $\alpha_{1,2} = \alpha_{2,1} = \alpha_{2,2} = 0$, т.е.

$$e_1 \circ e_{n-1} = e_{n-1} \circ e_1 = e_{n-1} \circ e_{n-1} = e_2 \circ e_{n-1} = e_{n-1} \circ e_2 = 0.$$

Аналогичным образом, получим

$$e_1 \circ e_n = e_n \circ e_1 = e_n \circ e_n = e_2 \circ e_n = e_n \circ e_2 = 0 = e_n \circ e_{n-1} = e_{n-1} \circ e_n = 0.$$

Докажем, что $e_{n-1} \circ e_i = 0$ для $3 \leq i \leq n-2$.

Действительно,

$$\begin{aligned} e_{n-1} \circ e_i &= e_{n-1} \circ (e_1 \circ e_{i-1}) = (e_{n-1} \circ e_1) \circ e_{i-1} - e_{n-1} \circ (e_{i-1} \circ e_1) = \\ &= -(i-1)e_{n-1} \circ e_i \Rightarrow e_{n-1} \circ e_i = 0, \quad \text{где } 2 \leq i \leq n-2. \end{aligned}$$

Покажем, что $e_i \circ e_{n-1} = 0$, $1 \leq i \leq n$.

При $i = 1$ имеем $e_1 \circ e_{n-1} = 0$. Предположим, что для некоторого i равенство $e_i \circ e_{n-1} = 0$ верно.

Рассмотрим

$$e_{i+1} \circ e_{n-1} = (e_1 \circ e_i) \circ e_{n-1} = e_1 \circ (e_i \circ e_{n-1}) + e_1 \circ (e_{n-1} \circ e_i) = 0,$$

т.е. $e_{i+1} \circ e_{n-1} = 0$.

Таким образом, мы имеем, что $e_i \circ e_{n-1} = e_{n-1} \circ e_i = 0$, $1 \leq i \leq n$.

Используя рассуждения аналогичные рассуждениям для базисного элемента e_{n-1} получим $e_i \circ e_n = e_n \circ e_i = 0$, $1 \leq i \leq n$.

Это означает, что алгебра A разложима, т.е. $A = NF_{n-2} \oplus C \oplus C$ и $A = QF_n^1$.

Случай 2. Пусть $(\alpha_{1,1}, \alpha_{2,2}, \alpha_{3,3}) = (0, 0, 0)$. Тогда $(\alpha_{1,2}, \alpha_{2,1}, \alpha_{1,3}, \alpha_{3,1}, \alpha_{2,3}, \alpha_{3,2}) \neq (0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Возьмем замену базисных элементов в виде: $e'_1 = ae_1 + be_{n-1} + ce_n$. Тогда

$$e'_1 \circ e'_1 = [ab(\alpha_{1,2} + \alpha_{2,1}) + ac(\alpha_{1,3} + \alpha_{3,1}) + bc(\alpha_{2,3} + \alpha_{3,2})]e_2.$$

Отсюда следуют $\alpha_{1,2} + \alpha_{2,1} = 0$, $\alpha_{1,3} + \alpha_{3,1} = 0$ и $\alpha_{2,3} + \alpha_{3,2} = 0$. Действительно, в противном случае мы находимся в условии случая 1. Не ограничивая общности, можем считать $\alpha_{1,2} = 1$.

Рассмотрим тождество Зинбиеля.

$$(e_1 \circ e_{n-1}) \circ e_1 = e_1 \circ (e_{n-1} \circ e_1) + e_1 \circ (e_1 \circ e_{n-1}) = -e_1 \circ e_2 + e_1 \circ e_2 \Rightarrow e_2 \circ e_1 = 0,$$

$$0 = (e_1 \circ e_1) \circ e_2 = e_1 \circ (e_1 \circ e_2) + e_1 \circ (e_2 \circ e_1) = e_1 \circ e_3 = e_4.$$

Таким образом, мы получили противоречие существованием алгебры в случае 2. $\square$

Классификация естественным образом градуированных квази-филиформных алгебра Зинбиеля типа $A_{(2)}$ приводится в следующей теореме.

Теорема 3. Любая n -мерная ($n \geq 8$) естественным образом градуированная комплексная квази-филиформная алгебра Зинбиеля типа $A_{(2)}$ изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$$KF_n^1 : \begin{cases} e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j e_{i+j}, & 2 \leq i+j \leq n-2, \\ e_1 \circ e_{n-1} = e_n, & e_{n-1} \circ e_1 = \alpha e_n, \quad \alpha \in C; \end{cases}$$

$$KF_n^2 : \begin{cases} e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j e_{i+j}, & 2 \leq i+j \leq n-2, \\ e_1 \circ e_{n-1} = e_n, & e_{n-1} \circ e_1 = e_n, \quad e_{n-1} \circ e_{n-1} = e_n; \end{cases}$$

$$KF_n^3 : \begin{cases} e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j e_{i+j}, & 2 \leq i+j \leq n-2, \\ e_1 \circ e_{n-1} = e_n, & e_{n-1} \circ e_{n-1} = e_n; \end{cases}$$

$$KF_n^4 : \begin{cases} e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j e_{i+j}, & 2 \leq i+j \leq n-2, \\ e_{n-1} \circ e_1 = e_n. \end{cases}$$

Доказательства: Пусть алгебра A удовлетворяет условиям теоремы и $A_1 = \langle e_1, e_{n-1} \rangle$, $A_2 = \langle e_2, e_n \rangle$, $A_i = \langle e_i \rangle$, где $3 \leq i \leq n-2$. Аналогично как в доказательстве теоремы 1, имеем

$$\begin{aligned} e_1 \circ e_1 &= \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_n, & e_1 \circ e_{n-1} &= \alpha_3 e_2 + \alpha_4 e_n, \\ e_{n-1} \circ e_1 &= \alpha_5 e_2 + \alpha_6 e_n, & e_{n-1} \circ e_{n-1} &= \alpha_7 e_2 + \alpha_8 e_n. \\ e_1 \circ e_i &= e_{i+1} \quad \text{при } 3 \leq i \leq n-3. \end{aligned}$$

Не ограничивая общности, можно полагать $e_1 \circ e_1 = e_2$. Действительно, если существует $x \in A_1$ такой, что $x \circ x \neq 0$, то мы можем взять $e_1 = x$ и $e_2 = x \circ x$. Если же для любого $x \in A_1$ мы имеем $x \circ x = 0$, то $e_1 \circ e_1 = e_{n-1} \circ e_{n-1} = 0$, $e_1 \circ e_{n-1} = -e_{n-1} \circ e_1$ и, в этом случае, $\dim A_2 = 1$, что противоречит условию теоремы.

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} e_1 \circ e_1 &= e_2, & e_1 \circ e_{n-1} &= \alpha_3 e_2 + \alpha_4 e_n, \\ e_{n-1} \circ e_1 &= \alpha_5 e_2 + \alpha_6 e_n, & e_{n-1} \circ e_{n-1} &= \alpha_7 e_2 + \alpha_8 e_n. \end{aligned}$$

Случай 1. Пусть $\alpha_4 \neq 0$. Тогда мы положим $e_1 \circ e_{n-1} = e_n$.

$$e_1 \circ e_2 = \beta_1 e_3, \quad e_{n-1} \circ e_2 = \beta_2 e_3, \quad e_1 \circ e_n = \beta_3 e_3, \quad e_{n-1} \circ e_n = \beta_4 e_5,$$

Случай 1.1. Если $\beta_1 \neq 0$. Тогда обозначим произведение $e_1 \circ e_2$ через e_3 , т.е. $e_1 \circ e_2 = e_3$. Производя замену $e'_{n-1} = -\beta_2 e_1 + e_{n-1}$, мы можем считать, что $\beta_2 = 0$.

Используя равенство $e_1 \circ e_i = e_{i+1}$ для $1 \leq i \leq n-3$ нетрудно проверить справедливость выражения:

$$e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j e_{i+j} \quad \text{для} \quad 2 \leq i+j \leq n-2.$$

Используя тождество (1), получим

$$e_1 \circ e_n = e_{n-1} \circ e_n = e_{n-1} \circ e_2 = e_n \circ e_1 = e_n \circ e_{n-1} = e_n \circ e_n = 0,$$

$$e_i \circ e_{n-1} = e_{n-1} \circ e_i = e_i \circ e_n = e_n \circ e_i = 0 \quad \text{для} \quad 2 \leq i \leq n-2.$$

Таким образом, мы получили следующее семейство алгебр:

$$\begin{aligned} e_1 \circ e_{n-1} &= e_n, \quad e_{n-1} \circ e_1 = \alpha_1 e_n, \quad e_{n-1} \circ e_{n-1} = \alpha_2 e_n, \\ e_i \circ e_j &= C_{i+j-1}^j e_{i+j}, \quad \text{для} \quad 2 \leq i+j \leq n-2, \end{aligned}$$

где отсутствующие произведения равны нулю.

Проводя стандартные методы при исследовании данного семейства алгебр, мы получим тот факт, что произвольная алгебра из этого семейства изоморфна одной из попарно не изоморфных алгебр KF_n^1 , KF_n^2 , KF_n^3 .

Случай 1.2. Пусть $\beta_1 = 0$. Тогда использованием общей замены базиса можно показать, что существование алгебры в этом случае не изоморфной ни одной из алгебр KF_n^1 , KF_n^2 , KF_n^3 возможно только при выполнении следующих условий:

$$\beta_2 + (1 + \alpha_6)\beta_3 = 0, \quad \alpha_5\beta_2 + \alpha_8\beta_3 + (1 + \alpha_6)\beta_4 = 0, \quad \alpha_7\beta_2 + \alpha_8\beta_4 = 0.$$

Случай 1.2.1. Пусть $\beta_3 \neq 0$. Тогда можно полагать $\beta_3 = 1$, т.е. $e_1 \circ e_n = e_3$. Используя тождество (1) и условие теоремы, а именно $n \geq 8$, мы получим

$$(1 + \alpha_6)(2 + \alpha_6) = 0, \quad (2 + \alpha_6)(3 + \alpha_6) = 0, \quad (3 + \alpha_6)(4 + \alpha_6) = 0,$$

т.е. получим противоречие с существованием алгебры не изоморфной ни одной из алгебр KF_n^1 , KF_n^2 , KF_n^3 .

Случай 1.2.2. Пусть $\beta_3 = 0$. Тогда $\alpha_8 = \beta_2 = 0$, $\alpha_6 = -1$ и $\beta_4 \neq 0$. Нетрудно проверить, что данный случай совпадает со случаем 1.2.1.

Случай 2. Пусть $\alpha_4 = 0$. При $\alpha_6 \neq 0$ проводя рассуждения подобные рассуждениям как в случае 1, мы получим алгебру KF_n^4 . Если же $\alpha_6 = 0$, то исследование этого случая приводит к уже полученным алгебрам $KF_n^1 - KF_n^4$. □

Исследуем теперь случай $r > 2$.

Лемма 1. Пусть A естественным образом градуированная квази-филиформная алгебра Зинбиеля типа $A_{(r)}$, где $r > 2$. Тогда $x \circ x = 0$ для любого $x \in A_1$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. существует $x \in A_1$, такой, что $x \circ x \neq 0$. Тогда положим $e_1 = x$ и $e_2 = x \circ x$, т.е. $e_2 = e_1 \circ e_1$. Пусть

$$\begin{aligned} A_1 &= \langle e_1, e_{n-1} \rangle, \quad A_2 = \langle e_2 \rangle, \quad \dots, \quad A_r = \langle e_r, e_n \rangle, \\ A_{r+1} &= \langle e_{r+1} \rangle, \quad \dots, \quad A_{n-2} = \langle e_{n-2} \rangle. \end{aligned}$$

Имеем

$$e_{n-1} \circ e_{r-1} = e_n, \quad e_1 \circ e_i = e_{i+1} \quad \text{при} \quad 2 \leq i \leq r-1.$$

С другой стороны, аналогично случаю филиформной алгебры Зинбиеля в [5], получаем $e_{n-1} \circ e_i = 0$ для $2 \leq i \leq r-1$. Следовательно, получили противоречие с существованием элемента x такого, что $x \circ x \neq 0$. $\square$

Лемма 2. Пусть A естественным образом градуированная квази-филиформная алгебра Зинбиеля типа $A_{(r)}$. Тогда $r \leq 3$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. $r > 3$. Из леммы 1 имеем $x \circ x = 0$ для любого $x \in A_1$. Следовательно, $e_1 \circ e_1 = e_{n-1} \circ e_{n-1} = 0$, $e_1 \circ e_{n-1} = -e_{n-1} \circ e_1 = e_2$. Не ограничивая общности, можем считать, что $e_1 \circ e_i = e_{i+1}$ для $2 \leq i \leq r-1$.

Из произведений

$$e_2 \circ e_1 = (e_1 \circ e_{n-1}) \circ e_1 = e_1 \circ (e_{n-1} \circ e_1) + e_1 \circ (e_1 \circ e_{n-1}) = e_1 \circ (-e_2 + e_2) = 0,$$

$$0 = (e_1 \circ e_1) \circ e_2 = e_1 \circ (e_1 \circ e_2) + e_1 \circ (e_2 \circ e_1) = e_1 \circ e_3 = e_4,$$

имеем противоречие, которое завершает доказательство леммы. $\square$

Следующее предложение завершает классификацию естественным образом градуированных квази-филиформных алгебр Зинбиеля размерностей ≥ 8 .

Предложение 1. Пусть A естественным образом градуированная квази-филиформная алгебра Зинбиеля типа $A_{(3)}$. Тогда размерность алгебры A не больше 7.

Доказательство. Предположим противное, т.е. $\dim A = n > 7$. Тогда имеем

$$A_1 = \langle e_1, e_{n-1} \rangle, \quad A_2 = \langle e_2 \rangle, \quad A_3 = \langle e_3, e_n \rangle, \quad A_4 = \langle e_4 \rangle, \quad \dots, \quad A_{n-2} = \langle e_{n-2} \rangle$$

и

$$\begin{aligned} e_1 \circ e_1 &= e_{n-1} \circ e_{n-1} = 0, \quad e_1 \circ e_{n-1} = -e_{n-1} \circ e_1 = e_2, \\ e_1 \circ e_2 &= e_3, \quad e_{n-1} \circ e_2 = e_n. \end{aligned}$$

Использование тождества (1) приводит к следующим ограничениям:

$$\begin{aligned} e_2 \circ e_1 &= e_2 \circ e_{n-1} = e_1 \circ e_3 = e_{n-1} \circ e_n = 0 \\ e_3 \circ e_1 &= e_1 \circ e_3 = e_n \circ e_{n-1} = e_{n-1} \circ e_n = 0, \\ e_2 \circ e_2 &= e_1 \circ e_n = e_3 \circ e_{n-1} = -e_{n-1} \circ e_3 = -e_n \circ e_1 = \gamma e_4. \end{aligned}$$

Если $\gamma \neq 0$, то мы можем считать, что $\gamma = 1$ и $e_1 \circ e_n = e_4$, $e_1 \circ e_i = e_{i+1}$, $4 \leq i \leq n-2$.

Из произведений

$$\begin{aligned} (e_1 \circ e_n) \circ e_1 &= e_1 \circ (e_n \circ e_1) + e_1 \circ (e_1 \circ e_n), \\ (e_1 \circ e_1) \circ e_4 &= e_1 \circ (e_1 \circ e_4) + e_1 \circ (e_4 \circ e_1), \end{aligned}$$

получим несовместимое равенство $e_1 \circ e_5 = e_6 = 0$. $\square$

Список литературы

- [1] J.-L. Loday, T. Pirashvili, Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology. Math. Ann. 296 (1993), 139-158.
- [2] J.-L. Loday, Cup product for Leibniz cohomology and dual Leibniz algebras. Math. Scand., 77 (1995), 189-196.

- [3] A.S. Dzhumadil'daev, Identities for multiplications derived by Leibniz and Zinbiel multiplications. Abstracts of short communications of International conference "Operator algebras and quantum theory of probability"(2005), Tashkent, 76-77.
- [4] A.S. Dzhumadil'daev, K.M. Tulenbaev, Nilpotency of Zinbiel algebras. J. Dyn. Control. Syst., vol. 11(2) (2005), 195-213.
- [5] J.Q. Adashev, B.A. Omirov, A.Kh. Khudoyberdiyev. On some nilpotent classes of Zinbiel algebras and their applications. Third International Conference on Research and Education in Mathematics. 2007. Malaysia. pp. 45-47.
- [6] M.Vergne. Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application à l'étude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes. Bull. Soc. Math. France, v. 98, 1970, pp. 81 - 116.

Национальный Университет Узбекистана, Механико-математический факультет,
кафедра "Алгебра и функциональный анализ". Ташкент. 100174.
тел: (+99871)3967928 (раб).

Адашев Жобир Кодирович, 23.06.1984, Магистрант 2-курса. Национальный Университет
Узбекистана. 100174, г. Ташкент, Собир Рахимовский район, Вузгородок, общ.-9. тел.
4008155. adashevjq@mail.ru

Худойбердиев Абзор Хакимович, 19.09.1985, Магистрант 2-курса. Национальный
Университет Узбекистана. 100174, г. Ташкент, Собир Рахимовский район, Вузгородок,
общ.-9. тел. 4012145. khudoyberdiev@yandex.ru.