УДК 512.554

Об описании супералгебр Лейбница с нильиндексом $n+m$.

Худойбердиев А.Х.

Аннотация

Маколада характеристик кетма-кетлиги $(n_1,\dots,n_k|m)$ ва нилиндекси $n+m$ га тенг булган Лейбниц супералгебралари урганилган. Бундай супералгебралар $n_1 \leq n-2$ булганда нильиндекси $n+m$ дан кичик эканлиги исботланган.

In this work we investigate the complex Leibniz superalgebras with characteristic sequence $(n_1,\dots,n_k|m)$ and nilindex $n+m$, where $n=n_1+\dots+n_k$, n and m $(m\neq 0)$ are dimensions of even and odd parts, respectively. We prove that in the case $n_1 \leq n-2$ the Leibniz superalgebras have nilindex less than $n+m$.

Статья посвящена исследованию нильпотентных супералгебр Лейбница. Понятие супералгебры Лейбница было введено относительно недавно [1], [5]. Супералгебры Лейбница являются обобщением алгебр Лейбница [6], кроме того, они естественно обобщают также и супералгебры Ли.

В работе [4] классифицированы супералгебр Ли с обладающие максимальным нильиндексом. Доказано, что существует единственная супералгебра максимального нильиндекса, причем, ее характеристическая последовательность равна $(1,1|m)$. Более того, данная супералгебра являются двухпорожденной и она обладает нильиндексом равным $n+m$ (где n и m размерности четной и нечетной частей, соответственно).

Для нильпотентных супералгебр Лейбница задача описания супералгебр максимального нильиндекса решается сравнительно легко [1]. Отличительной чертой таких супералгебр Лейбница является однопорожденность. Однако описание супералгебр Лейбница с нильиндексом равным $n+m$ является трудной задачей. Поэтому, описание таких супералгебр Лейбница необходимо изучать с наложением некоторых ограничений. В настоящей работе исследуются супералгебры Лейбница с характеристической последовательностью равной $(n_1,\dots,n_k|m)$ и нильиндексом $n+m$.

Далее, в работе рассматриваемые пространства и супералгебры являются комплексными.

Напомним определение супералгебры Лейбница.

Определение 1. *Векторное $\mathbb{Z}_2$-градуированное пространство $L=L_0\oplus L_1$ с заданным на нем произведением $[-,-]$ называется супералгеброй Лейбница, если выполняются следующие условия:*

1. $[L_\alpha, L_\beta]\subseteq L_{\alpha+\beta(mod\ 2)}$,

2. $[x,[y,z]]=[[x,y],z]-(-1)^{\alpha\beta}[[x,z],y]-$ *супертождество Лейбница,*

для любых $x\in L$, $y\in L_\alpha$, $z\in L_\beta$ *и* $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_2$.

Векторные пространств L_0 и L_1 называются четной и нечетной частями супералгебры L, соответственно. Очевидно, что четная часть супералгебры Лейбница является алгеброй Лейбница.

Заметим, что если в суперaлгебре Лейбница L для любых $x \in L_\alpha$ и $y \in L_\beta$ выполняется тождество
$$[x,y] = -(-1)^{\alpha\beta}[y,x]$$
то супертождество Лейбница легко преобразовать в супертождество Якоби. Таким образом, супералгебры Лейбница являются обобщениями супералгебр Ли.

Множество супералгебр Лейбница с размерностями четной и нечетной частями равными n и m, соответственно, будем обозначать $Leib_{n,m}$.

Для произвольной супералгебры Лейбница L определим последовательность:
$$L^1 = L, \quad L^{k+1} = [L^k, L], \quad k \geq 1.$$

Определение 2. *Супералгебра Лейбница L называется нильпотентной, если существует $s \in \mathbb{N}$ такое, что $L^s = 0$. Минимальное число s, обладающее таким свойством, называется нильиндексом супералгебры L.*

Приведем теорему, описывающую нильпотентные супералгебры Лейбница максимального нильиндекса.

Теорема 1. *[1] Пусть L супералгебра Лейбница, принадлежащая множеству $Leib_{n,m}$ с нильиндексом равным $n+m+1$. Тогда L изоморфна одной из следующих двух не изоморфных супералгебр:*
$$[e_i, e_1] = e_{i+1},\ 1 \leq i \leq n-1,\ m = 0; \quad \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n+m-1, \\ [e_i, e_2] = 2e_{i+2}, & 1 \leq i \leq n+m-2, \end{cases}$$
(отсутствующие произведения равны нулю).

Замечание 1. Из теоремы 1 нетрудно видеть, что в случае когда нечетная часть L_1 нетривиальна, мы имеем $m = n$ если $n+m$ четно и $m = n+1$ если $n+m$ нечетно. Боле того, супералгебра Лейбница L имеет максимального нильиндекса тогда и только тогда, когда она является однопорожденной

Пусть $L = L_0 \oplus L_1$ - нильпотентная супералгебра Лейбница. Для произвольного элемента $x \in L_0$, оператор правого умножения R_x (определенный следующим образом $R_x(y) = [y,x]$) является нильпотентным эндоморфизмом пространства L_i,, $i \in \{0,1\}$. Обозначим $C_i(x)$ $(i \in \{0,1\})$ убывающую последовательность размеров жордановых блоков оператора R_x. Рассмотрим на множестве $C_i(L_0)$ лексикографический порядок.

Определение 3. *Последовательность*
$$C(L) = \left(\max_{x \in L_0 \setminus L_0^2} C_0(x) \,\middle|\, \max_{\widetilde{x} \in L_0 \setminus L_0^2} C_1(\widetilde{x}) \right)$$
назовем характеристической последовательностью супералгебры Лейбница L.

Аналогично случаю супералгебр Ли доказывается, что характеристическая последовательность является инвариантом при изоморфизме.

Ввиду того, что супералгебры Лейбница нильиндекса $n+m$ с характеристической последовательностью равной $(n_1, \ldots, n_k|m)$ в случае $n_1 \geq n-1$ были классифицированы в работах [2]-[3], достаточно рассмотреть случай $n_1 \leq n-2$.

Из определения 3 мы имеем, что характеристическая последовательность алгебры Лейбница L_0 равна $(n_1, \dots, n_k)$. Пусть $s \in \mathbb{N}$ нильиндекс алгебры Лейбница L_0. Из условия $n_1 \leq n-2$ следует, что $s \leq n-1$ и тот факт, что алгебра Лейбница L_0 имеет не менее двух порождаюших (элементы которые принадлежат на множеству $L_0 \setminus L_0^2$).

Определение 4. *Для произвольной алгебры Лейбница A положим $gr(A)_i = A^i/A^{i+1}$, $1 \leq i \leq s-1$ and $gr(A) = gr(A)_1 \oplus gr(A)_2 \oplus \dots \oplus gr(A)_{s-1}$, где s нилиндекс алгебры Лейбница A. Тогда $[gr(A)_i, gr(A)_j] \subseteq gr(A)_{i+j}$ и мы получим градуированную алгебру $gr(A)$. Градуировку, построенную таким образом мы назовем естественной градуировкой и если алгебра Лейбница A изоморфна алгебре $gr(A)$, тогда A называется естественным образом градуированной алгеброй Лейбница.*

Далее, мы рассмотрим базис нечетной части L_0 согласованный с естественной градуировкой, т.е. $\{x_1, \dots, x_{t_1}\} = L_0 \backslash L_0^2$, $\{x_{t_1+1}, \dots, x_{t_2}\} = L_0^2 \backslash L_0^3, \dots, \{x_{t_{s-2}+1}, \dots, x_n\} = L_0^{s-1}$.

Так как вторая часть характеристической последовательности суперaлгебры Лейбница L равна m, то существует нильпотентный эндоморфизм R_x $(x \in L_0 \setminus L_0^2)$ пространства L_1 такой что, жордановая форма матрице состоит из одной жордановой клетки. Таким образом, мы можем утверждать что, существует адаптированный базис $\{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n\}$, обладающий свойством

$$[y_j, x_1] = y_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq m-1. \tag{1}$$

Пусть L супералгебра Лейбница нильиндекса $n+m$ с характеристической последовательностью равной $(n_1, \dots, n_k|m)$, $n_1 \leq n-2$ и пусть $\{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n\}$ адаптированный базис. Из Теоремы 1 мы имеем описание однопорожденных супералгебр Лейбница, которые имеют нильиндекс равный $n+m+1$. Если число порождающих элементов больше двух, то очевидно что, супералгебра Лейбница имеет нильиндекс меньше $n+m$. Таким образом, мы имеем двухпорожденную супералгебру.

Заметим, что случай когда оба порождающих лежат в четной части невозможен (так как $m \neq 0$). Из равенства (1) следуют что базисные элементы $y_2, y_3, \dots, y_m$ не могут также быть порождающими. Следовательно, один из порождающих принадлежит L_0, а второй принадлежит L_1. Боле того, не ограничивая общности, мы можем полагать y_1 является порождающим.

Лемма 1. *Пусть $L = L_0 \oplus L_1$ двухпорожденная супералгебра Лейбница с характеристической последовательностью равной $(n_1, \dots, n_k|m)$. Тогда в качестве порождающих можно взять x_1 и y_1.*

Из леммы 1 заключаем, что

$$L = \{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m\}, \; L^2 = \{x_2, x_3, \dots, x_n, y_2, y_3, \dots, y_m\}.$$

Умножения (1) обеспечивают вложение $\{y_3, \dots, y_m\} \subseteq L^3$. Однако, мы не имеем информации об принадлежности элемента y_2 множеству L^3.

Рассмотрим случай $y_2 \notin L^3$.

Теорема 2. *Пусть $L = L_0 \oplus L_1$ супералгебра Лейбница, принадлежащая множеству $Leib_{n,m}$ с характеристической последовательностью равной $(n_1, \dots, n_k|m)$ и пусть $y_2 \notin L^3$. Тогда нильиндекс супералгебры L меньше чем $n+m$.*

Исследование случая $y_2 \in L^3$ показывает, что данный случай зависит от структуры алгебры Лейбница L_0. Поэтому, приведем некоторые сведения естественным образом градуированных алгебр Лейбница.

Пусть $A = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ n-мерная нильпотентная алгебра Лейбница с нильиндексом равным p $(p < n)$. Тогда алгебра A не является однопорожденной. Рассмотрим ее естественную градуированную алгебру $gr(A)$. Тогда справедлива следующая лемма

Лемма 2. *Пусть $gr(A)$ естественным образом градуированная не Лиевая алгебра Лейбница. Тогда $dim A^3 \leq n - 4$.*

Предложение 1. *Пусть $L = L_0 \oplus L_1$ супералгебра Лейбница, принадлежащая множеству $Leib_{n,m}$ с характеристической последовательностью равной $(n_1, \ldots, n_k|m)$ и пусть $dim(L_0^3) \leq n - 4$. Тогда нильиндекс L меньше чем $n + m$.*

Из предложения 1 имеем, что супералгебра Лейбница $L = L_0 \oplus L_1$ с характеристической последовательностью равной $(n_1, \ldots, n_k|m)$ может имеет нильиндекс $n + m$ только в случае $dim(L_0^3) \geq n - 3$. Используя условие $n_1 \leq n - 2$ и свойства естественным образом градуированных подпространств $gr(L_0)_1$, $gr(L_0)_2$, получим $dim(L_0^3) = n - 3$.

Пусть $dim(L_0^3) = n - 3$. Тогда

$$gr(L_0)_1 = \{\overline{x}_1, \overline{x}_2\}, \; gr(L_0)_2 = \{\overline{x}_3\}.$$

Из леммы 2 заключаем, что естественным образом градуированная алгебра Лейбница $gr(L_0)$ является алгеброй Ли, т.е. в адаптированном базисе $\{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\}$ справедливы следующие умножения

$$\begin{cases} [\overline{x}_1, \overline{x}_1] = 0, \\ [\overline{x}_2, \overline{x}_1] = \overline{x}_3, \\ [\overline{x}_1, \overline{x}_2] = -\overline{x}_3, \\ [\overline{x}_2, \overline{x}_2] = 0. \end{cases}$$

Используя эти произведения в базисе $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ алгебры Лейбница L_0 для соответствующих произведений, мы имеем

$$\begin{cases} [x_1, x_1] = \gamma_{1,4}x_4 + \gamma_{1,5}x_5 + \cdots + \gamma_{1,n}x_n, \\ [x_2, x_1] = x_3, \\ [x_1, x_2] = -x_3 + \gamma_{2,4}x_4 + \gamma_{2,5}x_5 + \cdots + \gamma_{2,n}x_n, \\ [x_2, x_2] = \gamma_{3,4}x_4 + \gamma_{3,5}x_5 + \cdots + \gamma_{3,n}x_n. \end{cases} \tag{5}$$

Справедливо предложение

Предложение 2. *Пусть $L = L_0 \oplus L_1$ супералгебра Лейбница, принадлежащая множеству $Leib_{n,m}$ с характеристической последовательностью равной $(n_1, \ldots, n_k|m)$ и пусть $dim(L_0^3) = n - 3$. Тогда нильиндекс L меньше чем $n + m$.*

Объединяя результаты теоремы 2 и предложений 1, 2, сформулируем основной результат в следующей теореме

Теорема 3. *Пусть $L = L_0 \oplus L_1$ супералгебра Лейбница, принадлежащая множеству $Leib_{n,m}$ с характеристической последовательностью равной $(n_1, \ldots, n_k|m)$. Тогда нильиндекс супералгебры Лейбница меньше чем $n + m$.*

Список литературы

[1] Albeverio S., Ayupov Sh.A., Omirov B.A. *On nilpotent and simple Leibniz algebras.* Comm. in Algebra, 33(1), (2005), p. 159-172.

[2] Ayupov Sh. A., Khudoyberdiyev A. Kh., Omirov B. A. *The classification of filiform Leibniz superalgebras of nilindex $n+m$*, Acta Math.Sinica (english series), 25(2), 2009, p. 171-190.

[3] Camacho L.M., Gómez J.R., Omirov B.A, Khudoyberdiyev A.Kh *On complex Leibniz superalgebras of nilindex $n+m$*, submitted to J. Geom. and Phys., arXiv:math/0812.2156.

[4] Gómez J.R., Khakimdjanov Yu., Navarro R.M. *Some problems concerning to nilpotent Lie superalgebras*, J. Geom. and Phys., 51(4), (2004), p. 473-486.

[5] Livernet M. *Rational homotopy of Leibniz algebras*, Manuscripta Mat., vol. 96, 1998, p. 295-315.

[6] Loday J.-L. *Une version non commutative des algébres de Lie: les algébres de Leibniz*, Ens. Math., 39, (1993), p. 269-293.