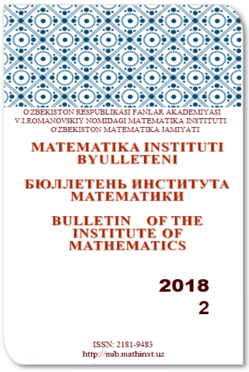

Matematika Instituti Byulleteni
2018,№2, 1-8 b.

Bulletin of the Institute of Mathematics
2018,№2, pp.1-8

Бюллетень Института математики
2018,№2, стр.1-8

УДК 517.956.6

Краевая задача для уравнения смешанного типа четвертого порядка в прямоугольной области

Аманов Д., Киличов О.

To‘rtburchak sohada to‘rtinchi tartibli aralash tipdagi tenglama uchun chegaraviy masala.
Ushbu maqolada to‘rtinchi tartibli aralash tipdagi tenglama uchun to‘rtburchak sohada bitta chegaraviy masala o‘rganilgan. Masala yechimining yagonaligi va mavjudligi isbotlangan. Aralash tipdagi tenglamalar nazariyasida masalaning qo‘yilishida odatda tenglama tipining o‘zgarish chizig‘ida ikkita ulash shartlari berilgan. Agar aralash tipdagi tenglamalarda giperbolik tenglama qatnashsa va masala to‘rtburchak sohada qaralsa, masalaning yechilishi uchun sohaning giperbolik qismida tomonlarning nisbatiga shart tushadi. Ushbu maqolada uchta ulash shartlari berilish hisobiga, bunday shart kelib chiqmaydi.

A boundary value problem for the fourth order equation of mixed type in a rectangular domain.
In the present paper, we study a boundary value problem for the fourth order equation of mixed type in a rectangular domain and prove the existence of the unique solution of this problem. In the theory of boundary value problems for mixed type equations usually two conjugation conditions are in use, in general. In this case, for the solvability of boundary value problem governed by mixed type equation containing a hyperbolic equation in a rectangular domain a certain condition (on the sizes of the sides of the rectangle) appears. However, in this paper, we give three conjugation conditions so that such condition does not appear.

1. Введение

Задача Трикоми и другие задачи на сопряжения для уравнения смешанного типа имеют многочисленные приложения в газовой динамике [1], магнитогидродинамике, безмоментной теории оболочек и др. В работе [2] И. М. Гельфанд рассмотрел задачу о движении газа в канале, окруженном пористой средой. При этом в канале движение газа описывалось волновым уравнением, а вне его-уравнением диффузии. В работах [3, 4] приведены некоторые другие приложения краевых задач для уравнения смешанного типа. Большинство работ по уравнениям смешанного типа посвящено уравнениям второго и третьего порядков. На важность исследования уравнений высших порядков смешанного типа впервые обратил внимание А.В. Бицадзе [5].

В области $\Omega=\{(x,t):0<x<p,-T<t<T\}$ рассмотрим уравнение

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4},\ t>0\\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^4 u}{\partial x^4},\ t<0\end{array}\right\}=f(x,t) \tag{1}$$

где $f(x,t)$-заданная функция. Обозначим $\Omega^+ = \Omega \cap (t > 0), \Omega^- = \Omega \cap (t < 0)$.

Задача. Найти в $\Omega^+ \cup \Omega^-$ решение $u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(\overline{\Omega^+} \cup \overline{\Omega^-})$ уравнения (1), удовлетворяющее следующим условиям склеивания

$$u(x,+0) = u(x,-0), 0 \le x \le p, \tag{2}$$

$$u_t(x,+0) = u_t(x,-0), 0 \le x \le p, \tag{3}$$

$$u_{tt}(x,+0) = u_{tt}(x,-0), 0 \le x \le p, \tag{4}$$

и граничным условиям

$$u(x,-T) = \varphi(x), 0 \le x \le p, \tag{5}$$

$$u(0,t) = 0, u(p,t) = 0, -T \le t \le T, \tag{6}$$

$$u_{xx}(0,t) = 0, u_{xx}(p,t) = 0, -T \le t \le T \tag{7}$$

где $\varphi(x)$-заданная функция, причем $\varphi(0) = \varphi(p) = 0$, производные $u_t(x,0), u_{tt}(x,0)$ непрерывны вплоть до точек $(0,0)$ и $(p,0)$. Краевые задачи для уравнения смешанного типа четвертого порядка изучены в работах [6]-[11] и другими. В этих работах гиперболическая часть области является характеристическим треугольником рассмотренных уравнений. Рассматриваемая нами задача отличается от ранее изученных задач тем,что при $t = T$ граничное условие не задается ется, оно заменяется условием (4). В этом случае для разрешимости задачи не возникает ограничение на размеры границы области Ω^+. Если отказаться от условия (4), то придется задавать условие

$$u(x,T) = \psi(x), 0 \le x \le p.$$

В этом случае в области Ω^+ возникает задача типа Дирихле для уравнения колебания балки, разрешимость которой зависить от размеров области Ω^+ . В данном случае эта зависимость выражается неравенством

$$sh(\frac{T}{p^2}n^2\pi^2)cos(\frac{T}{p^2}n^2\pi^2) + ch(\frac{T}{p^2}n^2\pi^2)sin(\frac{T}{p^2}n^2\pi^2) \ne 0$$

выполнение которого зависит от числа $\frac{T}{p^2}$. Подобные условия имеются в работах [12, 15].

2.Единственность решения задачи (1)-(7)

Справедлива следующая

Теорема 1. *Решение задачи (1)-(7) единственно, если оно существует.*

Доказательство. Пусть $f(x,t) = 0$ в $\overline{\Omega}$, $\varphi(x) = 0$ в $[0,p]$. Покажем, что $u(x,t) = 0$ в $\overline{\Omega}$. Следуя [16] рассмотрим интегралы

$$\alpha_n(t) = \int_0^p u(x,t)X_n(x)dx, 0 \le t \le T, \tag{8}$$

$$\beta_n(t) = \int_0^p u(x,t)X_n(x)dx, -T \le t \le 0 \tag{9}$$

где

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{p}}\sin\lambda_n x, \lambda_n = \frac{n\pi}{p}, n = 1,2,....$$

Отметим, что функции $X_n(x)$ образуют полную ортонормированную систему в $L_2(0,p)$ (см.[17],стр.317). Продифференцируем (8) два раза по t, имеем

$$\alpha''_n(t) = \int_0^p u_{tt}(x,t)X_n(x)dx, 0 \le t \le T.$$

Из соответствующего однородного уравнения (1) получаем

$$\alpha''_n(t) = -\int_0^p u_{xxxx}(x,t)X_n(x)dx, 0 \le t \le T.$$

Интегрируя по частям интеграл справа находим

$$\alpha''_n(t) + \lambda_n^4\alpha_n(t) = 0, 0 \le t \le T. \tag{10}$$

Аналогично из (9) имеем
$$\beta_n''(t) - \lambda_n^4\beta_n(t) = 0, -T \le t \le 0. \tag{11}$$
Из (10) и (11) получаем
$$\alpha_n(t) = a_n \cos\lambda_n^2 t + b_n sin\lambda_n^2 t,$$
$$\beta_n(t) = c_n e^{-\lambda_n^2 t} + d_n e^{\lambda_n^2 t}.$$
Используя условия (2)-(5) которые переходят в следующие
$$\alpha_n(0) = \beta_n(0), \alpha_n'(0) = \beta_n'(0), \alpha_n''(0) = \beta_n''(0), \beta_n(-T) = 0$$
для определения неизвестных коэффициентов a_n, b_n, c_n, d_n получаем систему уравнений
$$\begin{cases} a_n - c_n - d_n = 0, \\ b_n + c_n - d_n = 0, \\ a_n + c_n + d_n = 0, \\ c_n e^{\lambda_n^2 T} + d_n e^{-\lambda_n^2 T} = 0. \end{cases}$$
Из этой системы находим $a_n = b_n = c_n = d_n = 0$. Тогда $\alpha_n(t) = 0, \beta_n(t) = 0$. В силу полноты функции $X_n(x)$ из (8) и (9) получаем $u(x,t) = 0$ в $\overline{\Omega}$. Теорема 1 доказана. □

3. Существование решения задачи (1)-(7)

В этом пункте мы построим формальное решение задачи (1)-(7) методом Фурье. Затем приведем ряд лемм, в которых доказываются сходимость рядов содержащихся в формальном решении и его производных. Используя леммы докажем теорему о разрешимости задачи (1)-(7). Решение задачи (1)-(7) ищем в виде
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x). \tag{12}$$
Разложим функции $f(x,t)$ и $\varphi(x)$ в ряд Фурье по функциям $X_n(x)$
$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x), \tag{13}$$
$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x) \tag{14}$$
где
$$f_n(t) = \int_0^p f(x,t) X_n(x) dx, \tag{15}$$
$$\varphi_n = \int_0^p \varphi(x) X_n(x) dx. \tag{16}$$

Обозначим

$u(x,t) = u^+(x,t)$, если $0 \le t \le T$ и $u(x,t) = u^-(x,t)$, если $-T \le t \le 0$. Учитывая это и подставляя (12) и (13) в уравнения (1) имеем
$$u_n^{+''}(t) + \lambda_n^4 u_n^+(t) = f_n(t), 0 \le t \le T, \tag{17}$$
$$u_n^{-''}(t) - \lambda_n^4 u_n^-(t) = f_n(t), -T \le t \le 0. \tag{18}$$

Уравнения (17) и (18) связаны между собой с помощью условии (2),(3) и (4) которые переходят в следующие
$$u_n^+(0) = u_n^-(0), u_n^{+'}(0) = {u_n}^{-'}(0), {u_n}^{+''}(0) = {u_n}^{-''}(0) \tag{19}$$
а условие (5) переходит в следующее
$$u_n^-(-T) = \varphi_n. \tag{20}$$
Решая уравнения (17) и (18) при условиях (19) и (20) получаем
$$u_n^+(t) = -\frac{\sin\lambda_n^2 t}{\operatorname{sh}\lambda_n^2 T}\varphi_n + \frac{1}{\lambda_n^2}\int_{-T}^0 f_n(\tau)\frac{\sin\lambda_n^2 t \cdot \operatorname{sh}\lambda_n^2(T+\tau)}{\operatorname{sh}\lambda_n^2 T} d\tau +$$

$$+\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^t f_n(\tau)\sin\lambda_n^2(t-\tau)d\tau. \tag{21}$$

$$u_n^-(t)=-\frac{\operatorname{sh}\lambda_n^2 t}{\operatorname{sh}\lambda_n^2 T}\varphi_n+\frac{1}{\lambda_n^2}\int_{-T}^0 k_n(t,\tau)f_n(\tau)d\tau, \tag{22}$$

где

$$k_n(t,\tau)=\begin{cases}\frac{\operatorname{sh}\lambda_n^2 t\cdot\operatorname{sh}\lambda_n^2(T+\tau)}{\operatorname{sh}\lambda_n^2 T}, -T\le\tau\le t<0,\\ \frac{\operatorname{sh}\lambda_n^2 \tau\cdot\operatorname{sh}\lambda_n^2(T+t)}{\operatorname{sh}\lambda_n^2 T}, t\le\tau\le 0.\end{cases} \tag{23}$$

Подставляя (21)и (22) в (12) находим

$$u^+(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\left[-\frac{\sin\lambda_n^2 t}{\operatorname{sh}\lambda_n^2 T}\varphi_n+\frac{1}{\lambda_n^2}\int_{-T}^{o}f_n(\tau)\frac{\sin\lambda_n^2 t\cdot\operatorname{sh}\lambda_n^2(T+\tau)}{\operatorname{sh}\lambda_n^2 T}d\tau+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^t f_n(\tau)\sin\lambda_n^2(t-\tau)d\tau\right], 0\le t\le T, \tag{24}$$

$$u^-(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\left[-\frac{\operatorname{sh}\lambda_n^2 t}{\operatorname{sh}\lambda_n^2 T}\varphi_n+\frac{1}{\lambda_n^2}\int_{-T}^0 k_n(t,\tau)f_n(\tau)d\tau\right], -T\le t\le 0, \tag{25}$$

Производные от искомой функции, которые участвуют в уравнении и условиях склеивания имеют вид

$$\frac{\partial u^+}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}X_n\left[-\lambda_n^2\frac{\cos\lambda_n^2 t}{\operatorname{sh}\lambda_n^2 T}\varphi_n+\int_{-T}^0 f_n(\tau)\frac{\cos\lambda_n^2 t\cdot\operatorname{sh}\lambda_n^2(T+\tau)}{\operatorname{sh}\lambda_n^2 T}d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_0^t f_n(\tau)\cos\lambda_n^2(t-\tau)d\tau\right], 0\le t\le T, \tag{26}$$

$$\frac{\partial u^-}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\left[-\lambda_n^2\frac{\operatorname{ch}\lambda_n^2 t}{\operatorname{sh}\lambda_n^2 T}\varphi_n+\int_{-T}^t f_n(\tau)\frac{\operatorname{ch}\lambda_n^2 t\cdot\operatorname{sh}\lambda_n^2(T+\tau)}{\operatorname{sh}\lambda_n^2 T}d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_t^0 f_n(\tau)\frac{\operatorname{sh}\lambda_n^2 \tau\cdot\operatorname{ch}\lambda_n^2(T+t)}{\operatorname{sh}\lambda_n^2 T}d\tau\right], -T\le t\le 0, \tag{27}$$

$$\frac{\partial^2 u^+}{\partial t^2}=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\left[\lambda_n^4\frac{\sin\lambda_n^2 t}{\operatorname{sh}\lambda_n^2 T}\varphi_n-\lambda_n^2\int_{-T}^0 f_n(\tau)\frac{\sin\lambda_n^2 t\cdot sh\lambda_n^2(T+\tau)}{\operatorname{sh}\lambda_n^2 T}d\tau+f_n(t)-\right.$$

$$\left.-\lambda_n^2\int_0^t f_n(\tau)\sin\lambda_n^2(t-\tau)d\tau\right], 0\le t\le T, \tag{28}$$

$$\frac{\partial^2 u^-}{\partial t^2}=\sum_{n=1}^{\infty}=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\left[-\lambda_n^4\frac{\operatorname{sh}\lambda_n^2 t}{\operatorname{sh}\lambda_n^2 T}\varphi_n+\right.$$

$$\left.+\lambda_n^2\int_{-T}^0 k_n(t,\tau)f_n(\tau)d\tau+f_n(t)\right], -T\le t\le 0, \tag{29}$$

$$\frac{\partial^4 u^+}{\partial x^4}=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\left[-\lambda_n^4\frac{\sin\lambda_n^2 t}{\operatorname{sh}\lambda_n^2 T}\varphi_n+\lambda_n^2\int_{-T}^0 f_n(\tau)\frac{\sin\lambda_n^2 t\cdot\operatorname{sh}\lambda_n^2(T+\tau)}{\operatorname{sh}\lambda_n^2 T}d\tau+\right.$$

$$\left.+\lambda_n^2\int_0^t f_n(t)\sin\lambda_n^2(t-\tau)d\tau\right], 0\le t\le T, \tag{30}$$

$$\frac{\partial^4 u^-}{\partial x^4}=\sum_{n=1}^{\infty}X_n\left[-\lambda_n^4\frac{\operatorname{sh}\lambda_n^2 t}{\operatorname{sh}\lambda_n^2 T}\varphi_n+\lambda_n^2\int_{-T}^0 k_n(t,\tau)f_n(\tau)d\tau\right], -T\le t\le 0. \tag{31}$$

Нам необходимо доказать абсолютную и равномерную сходимость рядов (24)-(31). Ниже мы докажем ряд лемм, которые используются при доказательстве теоремы о существовании решения задачи (1)-(7).

Лемма 1. *Пусть $f(x,t)\in C_{x,t}^{1,0}(\overline{\Omega}), f(0,t)=f(p,t)=0$, тогда ряд (13) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$.*

Доказательство. Интегрируя по частям (15) имеем $f_n(t)=\frac{1}{\lambda_n}f_n^{(1,0)}(t)$, где $f_n^{(1,0)}(t)=\int_0^p\frac{\partial f}{\partial x}\sqrt{\frac{2}{p}}\cos\lambda_n x dx$, причем по неравенству Бесселя [18] $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n^{(1,0)}(t)|^2\leq\|\frac{\partial f}{\partial x}\|^2_{L_2}$. Далее

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}|f_n^{(1,0)}(t)|=\frac{p}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|f_n^{(1,0)}(t)|.$$

Применяя неравенство Буняковского [18] для суммы к последней сумме находим

$$(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{2}}(\sum_{n=1}^{\infty}|f_n^{(1,0)}(t)|^2)^{\frac{1}{2}}\leq\frac{\pi}{\sqrt{6}}\|\frac{\partial f}{\partial x}\|_{L_2\Omega}.$$

Здесь мы воспользовались равенством $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Лемма 1 доказана. □

Лемма 2.

Пусть $\varphi(x)\in W_2^1(0,p),\varphi(0)=\varphi(p)=0$, тогда ряд (14) сходится абсолютно и равномерно в $[0,p]$.

Доказательство. Интегрируя по частям (16) получаем $\varphi_n=\frac{1}{\lambda_n}\varphi_n^{(1)}$ где $\varphi_n^{(1)}=\int_0^p\varphi'(x)\sqrt{\frac{2}{p}}\cos\lambda_n x dx$, причем по неравенству Бесселя $\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n^{(1)}|^2\leq\|\varphi'\|^2_{L_2(0,p)}$. Далее $\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n|=\frac{p}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|\varphi_n^{(1)}|$. Применяя неравенство Буняковского для суммы находим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|\varphi_n^{(1)}|\leq(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{2}}(\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n^{(1)}|^2)^{\frac{1}{2}}\leq\frac{\pi}{\sqrt{6}}\|\varphi'\|_{L_2(0,p)}.$$

Отсюда следует абсолютная и равномерная сходимость ряда (14). Лемма 2 доказана. □

Лемма 3.

Пусть $\varphi(x)$ ограничена в $[0,p]$, $f(x,t)$ ограничена в $\overline{\Omega}$, тогда ряд (24) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega^+}$.

Доказательство. Обозначим $I_{1n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin\lambda_n^2 t|}{\operatorname{sh}\lambda_n^2 T}|\varphi_n|$. Так, как $\varphi(x)$ ограничена, то положим $|\varphi(x)|\leq N$, тогда $|\varphi_n|\leq\sqrt{2p}N$. Поэтому

$$I_{1n}\leq\sqrt{2p}N\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{sh}\lambda_n^2 T}. \tag{32}$$

Покажем сходимость ряда в (32). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{sh}\lambda_n^2 T}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{\lambda_n^2 T}(1-e^{-2\lambda_n^2 T})}$, далее $1-e^{-2\lambda_n^2 T}\geq1-e^{-2\frac{\pi^2}{p^2}T}$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{sh}\lambda_n^2 T}\leq C_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{\lambda_n^2 T}}\leq\frac{C_0}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}=\frac{C_0p^2}{6T},$$

где

$$C_0=\frac{2}{1-e^{-2\frac{\pi^2}{p^2}T}}. \tag{33}$$

Рассмотрим второй ряд в (24). Пусть $|f(x,t)|\leq N_1$, где $N_1>0$. Тогда

$$N_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\int_{-T}^{0}\frac{|\sin\lambda_n^2 T|\cdot\operatorname{sh}\lambda_n^2(T+\tau)}{\operatorname{sh}\lambda_n^2 T}d\tau\leq N_1T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}=\frac{N_1Tp^2}{6}.$$

Отсюда заключаем, что ряд (24) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega^+}$.

Лемма 3 доказана. □

Лемма 4.

Пусть выполняются условия Леммы 2 и в $\overline{\Omega}$ функция $f(x,t)$ ограничена, тогда ряд (25) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega^-}$.

Доказательство. Первый ряд в (25) сходится в силу Леммы 2. Чтобы доказать сходимость второго ряда в (25) оценим $|k_n(t,\tau)|$. Согласно (23) при $-T\leq\tau\leq t<0$, учитывая $\tau-t\leq0$ имеем

$$|k_n(t,\tau)|=\frac{|\operatorname{sh}\lambda_n^2 t|\cdot\operatorname{sh}\lambda_n^2(T+\tau)}{\operatorname{sh}\lambda_n^2 T}\leq\frac{e^{\lambda_n^2(T+\tau-t)}}{4\operatorname{sh}\lambda_n^2 T}\leq\frac{e^{\lambda_n^2}T}{4\operatorname{sh}\lambda_n^2 T}\leq$$

$$\leq\frac{e^{\lambda_n^2 T}}{2e^{\lambda_n^2 T}(1-e^{-2\lambda_n^2 T})}\leq\frac{1}{2(1-e^{-2\frac{\pi^2}{p^2}T})}=\frac{C_0}{4}.$$

Аналогичным образом устанавливается оценка $|k_n(t,\tau)| \leq \frac{C_0}{4}$ при $t \leq \tau \leq 0$. Теперь абсолютная сходимость второго ряда очевидна. Следовательно, ряд (25) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega^-}$.

Лемма 4 доказана. □

Лемма 5.

Пусть $\varphi(x)$ *ограничена в* $[0,p], f(x,t) \in C^{3,0}_{x,t}(\overline{\Omega}), f(0,t) = f(p,t) = 0, f_{xx}(0,t) = f_{xx}(p,t) = 0,$ *тогда ряд (30) сходится абсолютно и равномерно в* $\overline{\Omega^+}$.

Доказательство. Абсолютная сходимость первого ряда в (30) очевидна. Так, как для него мажорантой будет сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^4}{\operatorname{sh} \lambda_n^2 T}.$$

Чтобы доказать абсолютную сходимость второго и третьего рядов (30) , достаточно доказать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \int_{-T}^{0} |f_n(\tau)| d\tau. \tag{34}$$

Интегрируем по частям интеграл в (15), имеем

$$f_n(t) = -\frac{1}{\lambda_n^3} f_n^{(3,0)}(t) \tag{35}$$

где $f_n^{(3,0)}(t) = \int_0^p f_{xxx}(x,t)\sqrt{\frac{2}{p}} \cos \lambda_n x dx$. Подставляя (35) в (34) получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \int_{-T}^{0} |f_n^{(3,0)}(\tau)| d\tau.$$

К интегралу применяем неравенство Буняковского для интегралов [18], имеем

$$\int_{-T}^{0} |f_n^{(3,0)}(\tau)| d\tau \leq \left(\int_{-T}^{0} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-T}^{0} |f_n^{(3,0)}(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{T} \| f_n^{(3,0)} \|_{L_2(-T,0)}.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \int_{-T}^{0} |f_n^{(3,0)}(\tau)| d\tau \leq \sqrt{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \| f_n^{(3,0)} \|_{L_2(-T,0)}$$

$$\leq \frac{p\sqrt{T}}{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \| f_n^{(3,0)} \|^2_{L_2(-T,0)} \right)^{\frac{1}{2}} \leq p\sqrt{\frac{T}{6}} \| f_{xxx} \|_{L_2(\Omega^-)}.$$

Значит ряд (34) сходится. Поэтому ряд (30) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega^+}$.

Лемма 5 доказана. □

Лемма 6.

Пусть

$$\varphi(x) \in C^5[0,p], \varphi(0) = \varphi(p) = 0, \varphi''(0) = \varphi''(p) = 0, \varphi^{(4)}(0) = \varphi^{(4)}(p) = 0,$$

$f(x,t)$ *удовлетворяет условиям Леммы 5, тогда ряд (31) сходится абсолютно и равномерно в* $\overline{\Omega^-}$.

Доказательство. Интегрируя по частям интеграл (16) находим $\varphi_n = \frac{1}{\lambda_n^5} \varphi_n^{(5)}$, где

$$\varphi_n^{(5)} = \int_0^p \varphi^{(5)}(x) \sqrt{\frac{2}{p}} \cos \lambda_n x dx.$$

Рассмотрим первый ряд в (31)

$$\sum_{=1}^{\infty} \lambda_n^4 \frac{|\operatorname{sh} \lambda_n^2 t|}{\operatorname{sh} \lambda_n^2 T} |\varphi_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^4 |\varphi_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} |\varphi_n^{(5)}| \leq (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2})^{\frac{1}{2}} (\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n^{(5)}|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{p}{\sqrt{6}} \| \frac{\partial^5 \varphi}{\partial x^5} \|_{L_2(\Omega^-)},$$

здесь мы использовали неравенство Буняковского для суммы. Следовательно, первый ряд в (31) сходится абсолютно и равномерно. Абсолютная и равномерная сходимость второго ряда в (31) следует из Леммы 5.

Лемма 6 доказана. □

Замечания

1) Абсолютная и равномерная сходимость рядов (28) и (29) следуют из Лемм 1,5 и 6, так, как ряд (28) отличается от ряда (30) слагаемым $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)X_n(x)$, который сходится абсолютно и равномерно согласно Лемме 1. Точно также ряд (29) отличается от (31) тем же слагаемым, что и выше. Поэтому ряды (28) и (29) также сходятся абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega^+}$ и $\overline{\Omega^-}$ соответственно.

2) Доказательства абсолютной и равномерной сходимости рядов (26) и (27) аналогичны доказательствам проведенным выше. Поэтому мы не приводили их доказательства. Если сходятся ряды (30) и(31), то сходятся и ряды (26) и (27). Теперь сформулируем теорему о существовании решения задачи (1)-(7).

Теорема 2. *Если* $f(x,t) \in C^{3,0}_{x,t}(\overline{\Omega}), f(0,t) = f(p,t) = 0, f_{xx}(0,t) = f_{xx}(p,t) = 0,$

$$\varphi(x) \in C^5[0,p], \varphi(0) = \varphi(p) = 0, \varphi''(0) = \varphi''(p) = 0, \varphi^{(4)}(0) = \varphi^{(4)}(p) = 0,$$

то решение задачи (1)-(7) существует, оно удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2)-(7).

Доказательство. Абсолютная и равномерная сходимость рядов (24)-(31) следует из доказанных лемм. Условия (6) и (7) выполняются в силу свойств функции $X_n(x)$. Так,как ряды (24)-(31) сходятся абсолютно и равномерно в замкнутых областях, то $u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(\overline{\Omega^+ \cup \Omega^-})$ и в них можно переходить к пределу под знаком суммы. В (25) переходя к пределу при $t \to -T$ убеждаемся, что условие (5) выполняется. Переходя к пределу при $t \to +0$ в (24) и при $t \to -0$ в (25) и сравнивая полученные выражения заключаем, что условие (2) выполняется. Аналогично показываются, что условия (3) и (4) также выполняются. Складывая (28) и (30) убеждаемся, что решение (24) удовлетворяет уравнению (1) в $\overline{\Omega^+}$. Вычитая (31) из (29) заключаем, что решение (25) удовлетворяет уравнению (1) в $\overline{\Omega^-}$.

Теорема 2 доказана полностью. □

Литература

1. Франкль Ф.И., *Избранные труды по газовой динамике*, М.: Наука. 1973. 712 с.
2. Гельфанд И.М., *Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений* // Успехи матем. наук. Т. XIV , вып 3(87). 1959.С. 3-19.
3. Стручина Г.М., *Задача о сопряжении двух уравнений* // Инженерно-физический журнал. Т.IV, №11, 1961. С. 99-104.
4. Уфлянд Я.С., *К вопросу о распространений колебаний в составных электрических линиях* // Инженерно-физический журнал. Т. VII, №1, 1964. С. 89-92.
5. Бицадзе А.В., *Уравнения смешанного типа*, Серия "Итоги науки", вып 2. М.: АН СССР. 1959. 164 с.
6. Байгузин Ф.Ш., *Некоторые краевые задачи для уравнения смешанного типа четвертого порядка* Автореф. канд. дисс., Казань. 1969. 18 с.
7. Жегалов В.И., *Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа четвертого порядка* // Известия вузов. Математика. 4(17), 1960. С. 73-78.
8. Жегалов В.И., *Краевая задача для уравнения смешанного типа высшего порядка* //ДАН СССР. 136, 2. 1961. С. 274-276.
9. Мередов М.М., *Об единственности решения краевых задач для уравнения смешанного типа четвертого порядка* // Известия АН Туркм. ССР. сер.физ.-техн.,хим.и геол.наук, 1. 1967. С. 11-16.
10. Мередов М.М., *О существовании решения краевой задачи для уравнения смешанного типа четвертого порядка* // Известия АН Туркм. ССР. сер.физ.-техн.,хим.и геол.наук, 4. 1967. С. 3-11.
11. Смирнов М.М., *Модельное уравнение смешанного типа четвертого порядка*, Издательство Ленинградского университета. 1972. 128 с.
12. Аманов Д., Отарова Ж.А., *Краевая задача для уравнения смешанного типа четвертого порядка* // Узбекский мат. журнал. №3. 2008. С. 13-22.
13. Amanov D., Yuldasheva A.V., *Solvability and spectral properties of boundary value problems for equation of even order* // Malaysian Journal of Mathevatical Sciences . 3(2), 2009. p. 227-248.
14. Amanov D., *About correctness of boundary value problems for equation of even order* // Uzbek Math. Journal. 4. 2011. p. 20-35.

15. Amanov D., Ashyralyev A., *Well posedness of boundary value problems for partial differential equations of even order* // Electronic Journal of Differential Equations, Vol. (2014), №.108, 2014. p. 1-18.

16. Моисеев Е.И., *О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи* // Дифференц. уравнения. Т. 35, №8. 1999. С. 1094-1100.

17. Ильин В.А., Позняк Э.Г., *Основы математического анализа. ч. 2*, М.: Наука. 1973. 448 с.

18. Люстерник Л.А., Соболев В.И., Элементы функционального анализа, М.: Наука. 1965. 520 с.

Аманов Д. Институт математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, ул. Мирзо-Улугбека, 81, 100170, г. Ташкент, Узбекистан E-mail: damanov@yandex.ru
Киличов О. Бухарский инжинерно-технологический институт, ул. Муртазаева 15, г. Бухара, Узбекистан
E-mail: oybek2402@mail.ru

Поступила: 23/07/2018

Принято: 28/08/2018