Matematika Instituti Byulleteni
2021, Vol. 4, №2, 122-135 b.

Bulletin of the Institute of Mathematics
2021, Vol. 4, №2, pp.122-135

Бюллетень Института математики
2021,Vol. 4, №2, стр.122-135

Потенциалы для обобщенного двуосесимметрического эллиптического уравнения и их применение

Эргашев Т. Г. [1], **Эргашев О. Т.** [2]

Umumlashgan ikkita simmetrik o‘qli elliptik tenglama uchun potensiallar va ularning tatbiqlari

Umumlashgan ikkita simmetrik o‘qli elliptik tenglamaning fundamental yechimlari ikki o‘zgaruvchili F_2 Appel gipergeometrik funksiyasi orqali ifodalanadi, shuning uchun mazkur tenglamaga qo‘yilgan chegaraviy masalalarni yechishda Appel funksiyasi bo‘yicha tadqiqotlar talab etiladi. Ushbu maqolada F_2 Appel gipergeometrik funksiyasining ba’zi xossalaridan foydalanib, ikkilangan va oddiy qatlam potensiallariga oid limit teoremalar isbotlanadi va bu potensiallar bilan bog‘liq bo‘lgan integral tenglamalar keltirib chiqariladi. Potensiallar nazariyasida olingan natijalar ikki o‘lchovli ikkita singular koeffisientli elliptik tenglama uchun tekislikning birinchi choragida chegarangan sohada qo‘yilgan umumlashgan Xolmgren masalasini yechishga qo‘llaniladi.

Kalit so‘zlar: Umumlashgan ikkita simmetrik o‘qli elliptik tenglama; umumlashgan Xolmgren masalasi; fundamental yechim; Appel gipergeometrik funksiyasi; Grin funksiyasi.

Potentials for generalized bi-axially symmetric elliptic equation and their application

Fundamental solutions of the generalized bi-axially symmetric elliptic equation are expressed in terms of the well-known Appell hypergeometric function in two variables, the properties of which are required to study boundary value problems for the above equation. In this paper, by using some properties of the Appell hypergeometric function F_2, we prove limiting theorems and derive integral equations concerning a denseness of the double- and simple-layer potentials. We apply the results of the constructed potential theory to the study of the generalized Holmgren problem for the two-dimensional elliptic equation with two singular coefficients in the domain bounded in the first quarter of the plane.

Keywords: Appell hypergeometric function in two variables; generalized bi-axially symmetric elliptic equation; potential theory; generalized Holmgren problem.

MSC 2010: 35A08, 35J25; 35J70, 35J75

Ключевые слова: Гипергеометрическая функция Аппеля от двух переменных; обобщенное двуосесимметрическое эллиптическое уравнение; теория потенциала; обобщенная задача Хольмгрена.

[1]Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, Ташкент, Узбекистан. E-mail: ergashev.tukhtasin@gmail.com

[2]Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, Ташкент, Узбекистан. E-mail: okiljonergashev@gmail.com

Введение

Многочисленные приложения потенциалов двойного и простого слоев, а также объемного потенциала можно найти в механике жидкости, эластодинамике, электромагнетизме и акустике, поэтому теория потенциала занимает важное место при решении краевых задач для эллиптических уравнений, с помощью которой краевые задачи удаётся свести к решению интегральных уравнений [1, 2, 3].

В работах [4, 5, 6] исследованы вопросы теории потенциала для уравнения Трикоми и полученные результаты применены к нахождению решений некоторых краевых задач, в том числе, задач Дирихле и Хольмгрена (задачи N) в области, ограниченной в верхней полуплоскости [7].

В недавных работах [8, 9] построена теория потенциала для многомерного эллиптического уравнения с одним сингулярным коэффициентом

$$\sum_{k=1}^{m} u_{x_k x_k} + \frac{2\alpha}{x_1} u_{x_1} = 0, \ 0 < 2\alpha < 1, \ \ m \geq 2$$

в области, ограниченной в полупространстве $x_1 > 0$ и с помощью этой теории решение задач Дирихле [8] и Хольмгрена [9] получены в формах, удобных для дальнейших исследований.

К теории потенциала для эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами вида

$$E(u) \equiv u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\alpha}{x} u_x + \frac{2\beta}{y} u_y = 0, \ 0 < 2\alpha, \ 2\beta < 1 \tag{1}$$

посвящены сравнительно мало работ. В работах [10, 11, 12, 13] авторы лишь ограничились изучением свойств потенциалов двойного слоя для обобщенного двуосесимметрического эллиптического уравнения (1).

В настоящей работе для уравнения (1) построим теорию потенциала и применим ее к решению обобщенной задачи Хольмгрена в области, ограниченной в первой четверте $R_2^{2+} := \{(x, y) : x > 0, \ y > 0\}$ плоскости xOy.

Предварительные сведения из теории специальных функций. Фундаментальное решение уравнения (1)

Гипергеометрическая функция Гаусса определяется внутри круга $|z| < 1$ как сумма гипергеометрического ряда [14, гл.2, §2.1, формула (2)]

$$F(a, b; c; z) \equiv F\left[\begin{array}{ll} a, b; & \\ c; & z \end{array}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{k! (c)_k} z^k, \tag{2}$$

а при $|z| \geq 1$ получается аналитическим продолжением этого ряда. В формуле (2) параметры a, b, c и переменная z могут быть комплексными, причем $c \neq 0, -1, ...$, а $(p)_k$ есть символ Похгаммера: $(p)_k = p(p+1)...(p+k-1), \ k = 1, 2, ...; \ (p)_0 \equiv 1$.

Гипергеометрическая функция Аппеля двух переменных второго рода определяется формулой [14, 2, гл.5, формула 5.7(7)]

$$F_2\left[\begin{array}{ll} a, b_1, b_2; & \\ c_1, c_2; & x, y \end{array}\right] = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n} (b_1)_m (b_2)_n}{m! n! (c_1)_m (c_2)_n} x^m y^n, \ |x| + |y| < 1,$$

где параметры a, b_1, b_2, c_1, c_2 и переменные x, y могут быть любыми комплексными числами, причем $c_1, \ c_2 \neq 0, -1, -2, ...$

Отметим, что при $x > 0, \ y > 0$ каждая точка прямой $x + y = 1$ является точкой логарифмической особенности функции F_2.

А именно справедлива следующая

Лемма 1[15]. *Пусть* $c_1 > b_1$, $c_2 > b_2$ *и* $a + b_1 + b_2 = c_1 + c_2$. *Если* $x > 0$, $y > 0$, *то*

$$F_2\left[\begin{array}{ll} a, b_1, b_2; & \\ c_1, c_2; & x, y \end{array}\right] \sim -\frac{\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)}{\Gamma(a)\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)} x^{b_1 - c_1} y^{b_2 - c_2} \ln(1 - x - y) \tag{3}$$

при $x+y\to 1-0$.

Если $c_1+c_2<a+b_1+b_2$, *то*

$$F_2\left[\begin{array}{l} a,b_1,b_2; \\ c_1,c_2; \end{array} x,y\right] \sim \frac{\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)\Gamma(a+b_1+b_2-c_1-c_2)}{\Gamma(a)\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}\times \\ \times x^{b_1-c_1}y^{b_2-c_2}(1-x-y)^{c_1+c_2-a-b_1-b_2}. \tag{4}$$

Одно из фундаментальных решений уравнения (1) имеет вид [16]:

$$q\left(x,y;\xi,\eta\right)=\kappa r^{2\alpha-2\beta-2}x^{1-2\alpha}\xi^{1-2\alpha}F_2\left[\begin{array}{l} 1-\alpha+\beta,1-\alpha,\beta; \\ 2-2\alpha,2\beta; \end{array} 1-\frac{r_1^2}{r^2},1-\frac{r_2^2}{r^2}\right]; \tag{5}$$

где

$$r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2,\ r_1^2=(x+\xi)^2+(y-\eta)^2,\ r_2^2=(x-\xi)^2+(y+\eta)^2,$$

$$\kappa=\frac{2^{-2\alpha+2\beta}}{\pi}\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(1-\alpha+\beta)}{\Gamma(2-2\alpha)\Gamma(2\beta)}.$$

Функция $q\left(x,y;\xi,\eta\right)$ по переменным (x,y) является решением уравнения (1), причем в силу формулы (3) следует, что при $r\to 0$ $(x>0,\ y>0)$ она имеет логарифмическую особенность и, следовательно, является фундаментальным решением уравнения (1). Нетрудно видеть, что

$$\left.q\left(x,y;\xi,\eta\right)\right|_{x=0}=0,\quad \left.y^{2\beta}\frac{\partial q\left(x,y;\xi,\eta\right)}{\partial y}\right|_{y=0}=0. \tag{6}$$

Формулы Грина

Пользуясь известной формулой Остроградского, получим

$$\int\int_D x^{2\alpha}y^{2\beta}\left[uE(v)-vE(u)\right]dxdy= \\ =\int_\gamma x^{2\alpha}y^{2\beta}\left[-\left(u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx+\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy\right], \tag{7}$$

где D – область, расположенная в четверть плоскости $x>0$, $y>0$, а γ – контур области D.

Если u и v суть решения уравнения (1), то из формулы (7) имеем

$$\int_\gamma \left(uA_n^{\alpha,\beta}[v]-vA_n^{\alpha,\beta}[u]\right)ds=0, \tag{8}$$

где через $A_n^{\alpha,\beta}[\ \ ]$ обозначена конормальная производная по переменным (x,y):

$$A_n^{\alpha,\beta}[\ \ ]\equiv x^{2\alpha}y^{2\beta}\left(\frac{dy}{ds}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{dx}{ds}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Здесь $\dfrac{dy}{ds}=\cos(n,x)$, $\dfrac{dx}{ds}=-\cos(n,y)$, n– внешняя нормаль к кривой γ.

Полагая в формуле (7) $v\equiv 1$ и заменяя u на u^2, получим

$$\int_D x^{2\alpha}y^{2\beta}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy=\int_\gamma uA_n^{\alpha,\beta}[u]ds, \tag{9}$$

где $u\left(x,y\right)$ – решение уравнения (1).

Потенциал двойного слоя

Пусть D – область, ограниченная двумя отрезками $[0,a]$ осей x и y и кривой Γ с концами в точках $A(a,0)$ и $B(0,a)$, лежащей в первой четверти $x>0$, $y>0$.

Параметрическое уравнение кривой Γ пусть будет $x=x(s)$, $y=y(s)$, где s – длина дуги, отсчитываемая от точки A. Относительно кривой Γ будем предполагать, что:

1) функции $x(s)$ и $y(s)$ имеют непрерывные производные $x'(s)$ и $y'(s)$ на отрезке $[0,l]$, не обращающиеся одновременно в нуль; производные $x''(s)$ и $y''(s)$ удовлетворяют условию Гельдера на $[0,l]$, где l – длина кривой Γ.

2) в окрестности точек A и B на кривой Γ выполняются условия

$$\left|\frac{dx}{ds}\right| \le C_1 y(s), \ \left|\frac{dy}{ds}\right| \le C_2 x(s), \tag{10}$$

соответственно.

Координаты переменной точки на кривой Γ будем обозначать через (ξ,η).

Рассмотрим интеграл

$$w(x,y)=\int_0^l \mu(s)\, A_\nu^{\alpha,\beta}\left[q(\xi,\eta;x,y)\right] ds, \tag{11}$$

где $\mu(s)\in C\left(\overline{\Gamma}\right)$ и $q(\xi,\eta;x,y)$ – фундаментальное решение уравнения (1), определенное формулой (5). Здесь $A_\nu^{\alpha,\beta}[\ ]$ – конормальная производная по переменным (ξ,η), а ν – внешняя нормаль к поверхности Γ.

Определение 1. Интеграл (11) будем называть *потенциалом двойного слоя с плотностью* $\mu(s)$.

Очевидно, что $w(x,y)$ есть регулярное решение уравнения (1) в любой области, лежащей в четверть плоскости $x>0$, $y>0$, не имеющей общих точек ни с кривой Γ, ни с осьями x и y. Как и в случае логарифмического потенциала, можно показать существование потенциала двойного слоя (11) в точках кривой Γ для ограниченной плотности $\mu(s)$.

Лемма 2. *Справедливы следующие формулы:*

$$w_1(x,y)\equiv\int_0^l A_\nu^{\alpha,\beta}\left[q(\xi,\eta;x,y)\right] ds=\begin{cases} i(x,y)-1, & (x,y)\in D,\\ i(x,y)-\dfrac{1}{2}, & (x,y)\in\Gamma,\\ i(x,y), & (x,y)\notin D\cup\Gamma,\end{cases} \tag{12}$$

где

$$i(x,y)\equiv(1-2\alpha)\kappa x^{1-2\alpha}\int\limits_0^a \frac{\eta^{2\beta}F\left(1-\alpha+\beta,\beta;2\beta;-\dfrac{4y\eta}{x^2+(y-\eta)^2}\right)}{\left[x^2+(y-\eta)^2\right]^{1-\alpha+\beta}}d\eta.$$

Лемма 2 доказано в [13].

Лемма 3. *Если кривая* Γ *удовлетворяет перечисленным выше условиям, то*

$$\int_0^l \left|A_\nu^{\alpha,\beta}[q(\xi,\eta;x,y)]\right| ds \le \frac{B_1}{x^\alpha y^\beta},$$

где B_1 *– постоянная.*

Доказательство. При исследовании потенциала двойного слоя (11) важную роль играет конормальная производная от фундаментального решения $q(\xi,\eta;x,y)$ (за подробностями см. [11]):

$$A_\nu^{\alpha,\beta}\left[q(\xi,\eta;x,y)\right]=\sum_{i=0}^4 P_i(s;x,y), \tag{13}$$

где

$$P_0(s;x,y)=-\kappa\frac{(1-\alpha+\beta)r^2}{r_{12}^{4-2\alpha+2\beta}}x^{1-2\alpha}\xi^{1-2\alpha}F_2\left[\begin{matrix}2-\alpha+\beta,1-\alpha,\beta;\\ 2-2\alpha,2\beta;\end{matrix}\ \bar\sigma_1,\bar\sigma_2\right]\left[\ln r^2\right],$$

$$P_1(s;x,y)=-2(1-\alpha+\beta)\kappa\frac{x^{2-2\alpha}\xi\eta^{2\beta}}{r_{12}^{4-2\alpha+2\beta}}F_2\left[\begin{matrix}2-\alpha+\beta,2-\alpha,\beta;\\ 3-2\alpha,2\beta;\end{matrix}\ \bar\sigma_1,\bar\sigma_2\right]\frac{d\eta(s)}{ds},$$

$$P_2(s;x,y)=2(1-\alpha+\beta)\kappa\frac{x^{1-2\alpha}y\xi\eta^{2\beta}}{r_{12}^{4-2\alpha+2\beta}}F_2\left[\begin{matrix}2-\alpha+\beta,1-\alpha,1+\beta;\\ 2-2\alpha,1+2\beta;\end{matrix}\ \bar\sigma_1,\bar\sigma_2\right]\frac{d\xi(s)}{ds},$$

$$P_3(s;x,y)=(1-2\alpha)\kappa\frac{x^{-2\alpha}\xi\eta^{2\beta}}{r_{12}^{2-2\alpha+2\beta}}F_2\left[\begin{array}{l}1-\alpha+\beta,1-\alpha,\beta;\\2-2\alpha,2\beta;\end{array}\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2\right]\frac{d\eta(s)}{ds},$$

$$r_{12}^2=(x+\xi)^2+(y+\eta)^2,\ \ \bar{\sigma}_1=\frac{4x\xi}{r_{12}^2},\ \ \bar{\sigma}_2=\frac{4y\eta}{r_{12}^2},\ \ 0\le\bar{\sigma}_1+\bar{\sigma}_1\le 1.$$

С учетом (4), имеем

$$\begin{gathered}\int_0^l|P_0(s;x,y)|ds\le C_2\int_0^l\frac{x^{1-2\alpha}\xi\eta^{2\beta}r^2}{r_{12}^{4-2\alpha+2\beta}}\times\\ \times\left(\frac{x\xi}{r_{12}^2}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{y\eta}{r_{12}^2}\right)^{-\beta}\left(\frac{r^2}{r_{12}^2}\right)^{-1}\left|\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right|ds\le\\ \le\frac{C_2}{x^\alpha y^\beta}\int_0^l\xi^\alpha\eta^\beta\left|\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right|ds\le\frac{C_3}{x^\alpha y^\beta}\int_0^l\frac{|cos\vartheta|}{r}ds\le\frac{C_4}{x^\alpha y^\beta},\end{gathered}\tag{14}$$

где ϑ – угол между внешней нормалью ν к кривой Γ и r.

Аналогично оцениваются $P_1(s;x,y)$ и $P_2(s;x,y)$:

$$\int_0^l|P_k(s;x,y)|\,ds\le\frac{D_k}{x^\alpha y^\beta}\ \ (k=1,2).\tag{15}$$

Теперь оценим $P_3(s;x,y)$. Легко видеть, что

$$\int_{\varepsilon_3}^{l-\varepsilon_3}|P_3(s;x,y)|\,ds\le\frac{D_3}{x^\alpha y^\beta}\ \ (\varepsilon_3>0),\tag{16}$$

где D_3 не зависит от (x,y).

Интегралы $\int_0^{\varepsilon_3}|P_3(s;x,y)|\,ds$ и $\int_{l-\varepsilon_3}^{l}|P_3(s;x,y)|\,ds$ оцениваются аналогично. Оценим первый. Воспользовавшись оценкой (3), с учетом первого из условий (10), получим

$$\int_0^{\varepsilon_3}|P_3(s;x,y)|\,ds\le\frac{E_1}{x^\alpha y^\beta}\int_0^{\varepsilon_3}\ln\left[\frac{r}{r_{12}}\right]ds\le\frac{E_2}{x^\alpha y^\beta}.\tag{17}$$

Таким образом, из полученных оценок (14) – (17), следует справедливость леммы 3. □

Лемма 4. *Если точка (x,y) лежит на Γ, то*

$$\left|A_\nu^{\alpha,\beta}\left[q\left(\xi,\eta;x,y\right)\right]\right|\le\frac{B_2}{r_1^{2\alpha}r_2^{2\beta}}\left(\ln\frac{r_1r_2}{r_{12}r}+1\right).\tag{18}$$

где B_2 – постоянная.

Оценка (18) непосредственно следуют из формулы (13) и леммы 1.

Формула (12) показывает, что при $\mu(s)\equiv 1$ потенциал двойного слоя испытывает разрыв непрерывности, когда точка (x,y) пересекает кривую Γ. В случае произвольной непрерывной плотности $\mu(s)$ имеет место

Теорема 1. *Потенциал двойного слоя $w(x,y)$ имеет пределы при стремлении точки (x,y) к точке $(x(s),y(s))$ кривой Γ извне или изнутри. Если предел значений $w(x,y)$ изнутри обозначить через $w_i(s)$, а предел извне – через $w_e(s)$, то имеют место формулы*

$$\begin{gathered}w_i(s)=-\frac{1}{2}\mu(s)+\int_0^l\mu(t)K(s,t)dt,\\ w_e(s)=\frac{1}{2}\mu(s)+\int_0^l\mu(t)K(s,t)dt,\end{gathered}\tag{19}$$

где

$$K(s,t)=A_\nu^{\alpha,\beta}\left[q\left(\xi(t),\eta(t);x(s),y(s)\right)\right].$$

Теорема 1 следует из лемм 2 и 3.

Потенциал простого слоя

Пусть кривая Γ удовлетворяет условиям 1) – 2).

Определение 2. Потенциалом простого слоя с плотностью $\rho(t)$ назовем функцию

$$v\left(x,y\right)=\int_{0}^{l}\rho(t)q(\xi,\eta;x,y)dt, \tag{20}$$

где $q\left(\xi,\eta;x,y\right)$ – фундаментальное решение уравнения (1), определенное формулой (5).

Будем предполагать, что $\rho(t)$ – непрерывная функция в промежутке $0\leq s\leq l$. Потенциал простого слоя (20) определен во всей четверть плоскости $x>0$, $y>0$ и остается непрерывным при переходе через кривую Γ. Очевидно, что потенциал простого слоя $v\left(x,y\right)$ есть регулярное решение уравнения (1) в любой области, лежащей в четверть плоскости $x>0$, $y>0$, не имеющей общих точек ни с кривой Γ, ни с осьями Ox и Oy. Нетрудно видеть, что при стремлении точки (x,y) к бесконечности потенциал простого слоя $v\left(x,y\right)$ стремится к нулю. Действительно, пусть точка (x,y) находится на четверть окружности C_R: $x^2+y^2=R^2\;(x>0,\,y>0)$, тогда в силу (5) имеем

$$\left|v\left(x,y\right)\right|\leq\int_{0}^{l}\left|\rho\left(t\right)\right|\left|q\left(\xi,\eta;x,y\right)\right|dt\leq\frac{M}{R^{1+2\beta}}, \tag{21}$$

где M – постоянная $(R\geq R_0)$.

Возьмем на кривой Γ произвольную точку $N\left(x(s),y(s)\right)$ и проведем в этой точке нормаль. Рассмотрим на этой нормали какую-нибудь точку $M\left(x,y\right)$, не лежащую на кривой Γ, и составим конормальную производную от потенциала простого слоя (20):

$$A_n^{\alpha,\beta}\left[v\left(x,y\right)\right]=\int_{0}^{l}\rho(t)A_n^{\alpha\beta}\left[q\left(\xi,\eta;x,y\right)\right]dt. \tag{22}$$

Интеграл (22) существуют и в том случае, когда точка $M(x,y)$ совпадает с точкой N, упомянутой выше.

Обозначим через $A_n^{\alpha,\beta}\left[v\left(x,y\right)\right]_i$ и $A_n^{\alpha,\beta}\left[v\left(x,y\right)\right]_e$ соответственно предельные значения конормальной производной при стремлении точки $M(x,y)$ к точке $N\in\Gamma$ изнутри и извне кривой Γ.

Теорема 2. *Для непрерывной плотности $\rho(t)$ имеют место следующие формулы:*

$$\begin{gathered}A_n^{\alpha,\beta}\left[v\left(x,y\right)\right]_i=\frac{1}{2}\rho(s)+\int_{0}^{l}\rho(t)K(t,s)dt,\\ A_n^{\alpha,\beta}\left[v\left(x,y\right)\right]_e=-\frac{1}{2}\rho(s)+\int_{0}^{l}\rho(t)K(t,s)dt,\end{gathered} \tag{23}$$

где

$$K(t,s)=A_n^{\alpha,\beta}\left[q\left(\xi(t),\eta(t);x(s),y(s)\right)\right].$$

Теорема 2 доказывается так же, как и теорема 1.

Из этих формул непосредственно следует величина скачка конормальной производной потенциала простого слоя:

$$A_n^{\alpha,\beta}\left[v\left(x,y\right)\right]_i-A_n^{\alpha\beta}\left[v\left(x,y\right)\right]_e=\rho(x,y). \tag{24}$$

Совершенно так же, как и в неравенстве (21), можно показать, что имеют место следующие оценки:

$$\left|A_n^{\alpha,\beta}\left[v\left(x,y\right)\right]\right|\leq\frac{M}{R^{2-2\alpha+2\beta}}, \tag{25}$$

где M – постоянная $(R\geq R_0)$.

Следуя [7], можно показать, что для потенциала простого слоя (20) применима формула Грина (9):

$$\int\int_{D}x^{2\alpha}y^{2\beta}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]dxdy=\int_{\Gamma}vA_n^{\alpha,\beta}\left[v\right]_i ds. \tag{26}$$

Применим теперь формулу (26) к области D'_R, ограниченной кривой Γ, отрезками $[a, R]$ осей Ox и Oy и четверть окружностью $C_R : x^2 + y^2 = R^2 (x > 0,\ y > 0)$, содержащей область D. Переходя затем к пределу при $R \to \infty$ и учитывая (21) и (25), получим

$$\int\int_{D'} x^{2\alpha} y^{2\beta} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right] dxdy = -\int_{\Gamma} v A_n^{\alpha,\beta} \left[v\right]_e ds. \tag{27}$$

Здесь и далее $D' = R_2^{2+} \setminus \overline{D}$ – неограниченная область при $x > 0,\ y > 0$.

Интегральные уравнения для плотностей

Ф.Рисс [17] и Ю.С.Шаудер [18] распространили теорию интегральных уравнений Фредгольма на широкий класс уравнений, которые отличаются от уравнений Фредгольма тем, что в них оператор Фредгольма заменен так называемым вполне непрерывным оператором. Изложение этих результатов содержится в [19].

Формулы (19) и (23) могут быть написаны как интегральные уравнения для плотностей:

$$\mu(s) - \lambda \int_0^l K(s,t)\mu(t)dt = f(s), \tag{28}$$

$$\rho(s) - \lambda \int_0^l K(t,s)\rho(t)dt = g(s), \tag{29}$$

где

$$\lambda = 2, \quad f(s) = -2w_i(s),\ \ g(s) = -2A_n^{\alpha,\beta} \left[v\right]_e,$$

$$\lambda = -2, \quad f(s) = 2w_e(s),\ \ g(s) = 2A_n^{\alpha,\beta} \left[v\right]_i.$$

Уравнения (28) и (29) сопряженные и в силу леммы 4 к ним применима теория Фредгольма.

Покажем, что $\lambda = 2$ не является собственным значением ядра $K(s,t)$. Это утверждение эквивалентно тому, что однородное интегральное уравнение

$$\rho(s) - 2\int_0^l K(t,s)\rho(t)dt = 0, \tag{30}$$

не имеет нетривиальных решений. Пусть $\tilde{\rho}(t)$ – непрерывное нетривиальное решение уравнения (30). Потенциал простого слоя с плотностью $\tilde{\rho}(t)$ даст нам функцию $\tilde{v}(x, y)$, которая является решением уравнения (1) в областях D и D' и у которой предельные значения конормальной производной $A_n^{\alpha,\beta} \left[\tilde{v}\right]_e$ равны нулю в силу уравнения (30). К потенциалу простого слоя $\tilde{v}(x, y)$ применима формула (27), из которой следует, что $\tilde{v}(x, y) = const$ в области D'. На бесконечности потенциал простого слоя равен нулю и, следовательно, $\tilde{v}(x, y) \equiv 0$ в D', а также и на кривой Γ. Применяя теперь формулу (26), мы получим, что $\tilde{v}(x, y) \equiv 0$ и внутри области D. Но тогда $A_n^{\alpha,\beta} \left[\tilde{v}\right]_i = 0$, и на основании формулы (24) получим $\tilde{\rho}(t) \equiv 0$. Таким образом, однородное уравнение (30) имеет только тривиальное решение; следовательно, $\lambda = 2$ не есть собственное значение ядра $K(s,t)$.

Однородное уравнение

$$\mu(s) - \lambda \int_0^l K(s,t)\mu(t)dt = 0,$$

при $\lambda = -2$ имеет в силу (12) решение, равное произвольной постоянной, т.е. $\lambda = -2$ есть собственное значение ядра $K(s,t)$.

Решение обобщенной задачи Хольмгрена с помощью потенциалов

Пусть D – область, ограниченная двумя отрезками $[0, a]$ осей x и y и кривой Γ с концами в точках $A(a, 0)$ и $B(0, a)$, лежащей в четверть плоскости $x > 0,\ y > 0$. Будем предполагать, что кривая Γ удовлетворяет условиям 1) и 2) §**??**. Рассмотрим обобщенную задачу Хольмгрена для уравнения (1).

Обобщенная задача Хольмгрена. Найти в области D регулярное решение $u(x,y)$ уравнения (1), непрерывное в замкнутой области $\overline{D}$ и удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{\Gamma} = \varphi(s)\ (0 \le s \le l), \tag{31}$$

$$\lim_{x\to 0} u(x,y) = \tau_1(y)\ (0 \le y \le a),\ \ \lim_{y\to 0} y^{2\beta}\frac{\partial u}{\partial y} = \nu_2(x)\ (0 < x < a), \tag{32}$$

где $\varphi(s)$, $\tau_1(y)$ и $\nu_2(x)$ – заданные непрерывные функции в $0 \le s \le l$, $0 \le y \le a$ и $0 < x < a$, соответственно, причем в точке $B(0,a)$ выполняется условие согласования: $\tau_1(a) = \varphi(l)$; при $x \to 0$ функция $\nu_2(x)$ может обращаться в бесконечность порядка менше $2\alpha - 2\beta$, если $\alpha > \beta$.

Теорема 3. *Если обобщенная задача Хольмгрена для уравнения (1) имеет регулярное решение, то оно единственно.*

Доказательство. Этой теоремы проводиться так же, как и доказательство теорем едиственности в [8, 9].

Используя фундаментальное решение (5) уравнения (1), решение обобщенной задачи Хольмгрена возьмем в виде

$$v_1(x,y) = (1-2\alpha)\kappa x^{1-2\alpha}\int_0^a \frac{\eta^{2\beta} F\left(1-\alpha+\beta, \beta; 2\beta; -\dfrac{4\eta y}{x^2+(\eta-y)^2}\right)}{\left[x^2+(\eta-y)^2\right]^{1-\alpha+\beta}}\tau_1(\eta)d\eta$$

или

$$v_2(x,y) = -\kappa x^{1-2\alpha}\int_0^a \frac{\xi F\left(1-\alpha+\beta, 1-\alpha; 2-2\alpha; -\dfrac{4\xi x}{(\xi-x)^2+y^2}\right)}{\left[(\xi-x)^2+y^2\right]^{1-\alpha+\beta}}\nu_2(\xi)d\xi.$$

Следуя [7] можно показать, что

$$\lim_{\substack{y\to y_0\\ x\to 0}} v_1(x,y) = \tau_1(y_0)\ \ (0 \le y_0 \le a),\ \ \ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to 0}} y^{2\beta}\frac{\partial v_2(x,y)}{\partial y} = \nu_2(x_0)\ (0 < x_0 < a).$$

Нетрудно видеть, что значения функций $v_1(x,y)$ и $v_2(x,y)$ непрерывны и ограничены на кривой Γ. Теперь решение первоначальной обобщенной задачи Хольмгрена может быть представлено в виде

$$u(x,y) = v_1(x,y) + v_2(x,y) + w_0(x,y),$$

где $w_0(x,y)$ есть решение уравнения (1) в области D, удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{aligned} &w_0|_{\Gamma} = \varphi(s) - (v_1+v_2)|_{\Gamma} = \varphi_0(s),\ \ 0 \le s \le l,\\ &u(x,y)|_{x=0} = 0\ \ (0 \le y \le a),\ \ \ y^{2\beta}\frac{\partial v_2(x,y)}{\partial y}\bigg|_{y=0} = 0,\ \ (0 < x < a). \end{aligned} \tag{33}$$

Таким образом в случае обобщенной задачи Хольмгрена можно ограничиться случаями $\tau_1(y) \equiv 0$ и $\nu_2(x) \equiv 0$.

Решение обобщенной задачи Хольмгрена будем искать в виде потенциала двойного слоя с неизвестной плотностью $\mu(s)$:

$$w(x,y) = \int_0^l \mu(s) A_{\nu}^{\alpha,\beta}\left[q(\xi,\eta;x,y)\right] ds.$$

Потенциал двойного слоя $w(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) внутри области D и

$$w(x,y)|_{x=0} = 0,\ \ y^{2\beta}\frac{\partial w(x,y)}{\partial y}\bigg|_{y=0} = 0,\ \ 0 \le x,\ y \le a.$$

Для выполнения краевого условия (33) на Γ нужно, чтобы предельные значения $w(x,y)$ изнутри равнялись $\varphi(s,t)$:

$$w_{0i}(x,y) = \varphi(s),\ \ (x,y) \in \Gamma.$$

Пользуясь первой из формул (19), получим для плотности $\mu(t)$ интегральное уравнение

$$\mu(s) - 2\int_0^l K(s,t)\mu(t)dt = -2\varphi(s), \tag{34}$$

где
$$K(s,t) = A_{\nu}^{\alpha,\beta}\left[q\left(\xi(t),\eta(t);x(s),y(s)\right)\right].$$
Как это следует из оценки (18), ядро $K(s,t)$ имеет слабую особенность.

Отметим, что если уравнение (34) разрешимо, то его решение непрерывно. Это следует из непрерывности свободного члена и из вида ядра $K(s,t)$.

Известно, что $\lambda = 2$ не является собственным значением ядра $K(s,t)$ и, следовательно, уравнение (34) при любом свободном члене имеют единственное решение. Таким образом, если кривая Γ удовлетворяет условиям 1) – 2) и заданные значения решения на кривой Γ непрерывны, то задача Дирихле для уравнения (1) имеет единственное решение, и это решение можно представить в виде потенциала двойного слоя. $\square$

Функция Грина оператора E(u)

Определение 3. Функцией Грина обобщенной задачи Хольмгрена для уравнения (1) называется функция $G(x,y;x_0,y_0)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) внутри области D, кроме точки (x_0,y_0), эта функция есть регулярное решение уравнения (1);

2) она удовлетворяет граничным условиям
$$G(x,y;x_0,y_0)|_{\Gamma} = 0, \quad G(x,y;x_0,y_0)|_{x=0} = 0, \quad y^{2\beta}\frac{\partial G(x,y;x_0,y_0)}{\partial y}\bigg|_{y=0} = 0; \tag{35}$$

3) она может быть представлена в виде
$$G(x,y;x_0,y_0) = q(x,y;x_0,y_0) + v(x,y;x_0,y_0) \tag{36}$$

где $q\left(x,y;x_0,y_0\right)$ – фундаментальное решение уравнения (1), определенное формулой (5), а $v(x,y;x_0,y_0)$ – регулярное решение уравнения (1) везде внутри D.

Построение функции Грина сводится к нахождению ее регулярной части $v(x,y;x_0,y_0)$, которая в силу (6), (35) и (36) должна удовлетворять граничным условиям
$$v|_{\Gamma} = -q|_{\Gamma}, \quad v|_{x=0} = 0, \quad y^{2\beta}\frac{\partial v}{\partial y}\bigg|_{y=0} = 0. \tag{37}$$

Функцию $v(x,y;x_0,y_0)$ будем искать в виде потенциала двойного слоя:
$$v\left(x,y;x_0,y_0\right) = \int_0^l \mu\left(t;x_0,y_0\right) A_{\nu}^{\alpha,\beta}[q\left(\xi,\eta;x,y\right)]dt. \tag{38}$$

Принимая во внимание первое из равенств (19) и первое из условий (37), получим интегральное уравнение для плотности $\mu\left(t;x_0,y_0\right)$
$$\mu\left(s;x_0,y_0\right) - 2\int_0^l K(s,t)\mu\left(t;x_0,y_0\right)dt = 2q\left(x(s),y(s);x_0,y_0\right). \tag{39}$$

Правая часть уравнения (39) есть непрерывная функция от s (точка (x_0,y_0) лежит внутри D). В §**??** было доказано, что $\lambda = 2$ не является собственным значением ядра $K(s,t)$ и, следовательно, уравнение (39) разрешимо и его непрерывное решение можно записать в виде
$$\mu\left(s;x_0,y_0\right) = 2q\left(x(s),y(s);x_0,y_0\right) + 4\int_0^l R(s,t;2)q\left(\xi,\eta;x_0,y_0\right)dt, \tag{40}$$

где $R(s,t;2)$ – резольвента ядра $K(s,t)$; $(x(s),y(s)) \in \Gamma$. Подставляя (40) в (38), получим
$$\begin{aligned} v\left(x,y;x_0,y_0\right) = 2\int_0^l q\left(\xi,\eta;x_0,y_0\right) A_{\nu}^{\alpha,\beta}[q\left(\xi,\eta;x,y\right)]dt+ \\ +4\int_0^l\int_0^l A_{\nu}^{\alpha,\beta}[q(\xi,\eta;x,y)]R_0(t,s;2)q\left(x(s),y(s);x_0,y_0\right)dtds. \end{aligned} \tag{41}$$

Определим теперь функцию

$$g(x,y)=\begin{cases} v(x,y;x_0,y_0), & (x,y)\in D, \\ -q(x,y;x_0,y_0), & (x,y)\in D'. \end{cases} \tag{42}$$

Функция $g(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) как внутри области D, так и внутри D' и равна нулю на бесконечности. Так как точка (x_0,y_0) лежит внутри D, то в D' функция $g(x,y)$ имеет производные любого порядка, непрерывные вплоть до Г. Мы можем рассматривать $g(x,y)$ в D' как решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$A_n^{\alpha,\beta}\left[g(x,y)\right]\big|_\Gamma=-A_n^{\alpha,\beta}\left[q(x(s),y(s);x_0,y_0)\right],\ \ g(x,y)|_{x=0}=0,\ \ y^{2\beta}\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\bigg|_{y=0}=0.$$

Это решение представим в виде потенциала простого слоя

$$g(x,y)=\int_0^l\rho(t;x_0,y_0)q(\xi,\eta;x,y)dt,\ \ (x,y)\in D' \tag{43}$$

с неизвестной плотностью $\rho(t;x_0,y_0)$.

Воспользовавшись второй из формул (23), получим интегральное уравнение для плотности $\rho(s;x_0,y_0)$

$$\rho(s;x_0,y_0)-2\int_0^l K(t,s)\rho(t;x_0,y_0)dt=2A_n^{\alpha,\beta}\left[q(x(s),y(s);x_0,y_0)\right]. \tag{44}$$

Уравнение (44) союзное с уравнением (39). Его правая часть есть непрерывная функция от s. Таким образом, уравнение (44) имеет непрерывное решение:

$$\rho(s;x_0,y_0)=2A_n^{\alpha,\beta}\left[q(x(s),y(s);x_0,y_0)\right]+4\int_0^l R(t,s;2)A_\nu^{\alpha,\beta}\left[q(\xi,\eta;x_0,y_0)\right]dt. \tag{45}$$

Значения потенциала простого слоя $g(x,y)$ на кривой Г равны $-q(x,y;x_0,y_0)$, т.е. такие же, как и функции $v(x,y;x_0,y_0)$, а на осьях x и y равны нулю. Отсюда в силу теоремы единственности обобщенной задачи Хольмгрена следует, что формула (43) для функции $g(x,y)$, определенной равенством (42), справедлива во всей четверть плоскости $x\geq 0$, $y\geq 0$, т.е.

$$v(x,y;x_0,y_0)=\int_0^l\rho(t;x_0,y_0)q(\xi,\eta;x,y)dt,\ \ (x,y)\in D. \tag{46}$$

Таким образом, регулярная часть $v(x,y;x_0,y_0)$ функции Грина представима в виде потенциала простого слоя.

Применяя первую из формул (23) к (46), получим

$$2A_n^{\alpha,\beta}\left[v\left(x(s),y(s);x_0,y_0\right)\right]_i=\rho(s;x_0,y_0)+2\int_0^l K(t,s)\rho(t;x_0,y_0)dt,$$

но, согласно (44), имеем

$$2A_n^{\alpha,\beta}\left[q\left(x(s),y(s);x_0,y_0\right)\right]_i=\rho(s;x_0,y_0)-2\int_0^l K(t,s)\rho(t;x_0,y_0)dt.$$

Складывая почленно последние два равенства и принимая во внимание (36), будем иметь

$$A_n^{\alpha,\beta}\left[G\left(x(s),y(s);x_0,y_0\right)\right]=\rho(s;x_0,y_0), \tag{47}$$

и, следовательно, формулу (46) можно записать в виде

$$v(x,y;x_0,y_0)=\int_0^l A_\nu^{\alpha,\beta}\left[G\left(\xi,\eta;x_0,y_0\right)\right]q(\xi,\eta;x,y)dt.$$

Умножая теперь обе части равенства (45) на $q\left(x(s),y(s);x,y\right)$, интегрируя по s от 0 до l и учитывая (40) и (38), получим

$$v(x_0,y_0;x,y)=\int_0^l\rho(t;x_0,y_0)q(\xi,\eta;x,y)dt.$$

Сравнивая это с формулой (46), будем иметь

$$v(x,y;x_0,y_0)=v(x_0,y_0;x,y). \tag{48}$$

если точки (x,y) и (x_0,y_0) находятся внутри области D.

Лемма 5. *Функция Грина $G(x,y;x_0,y_0)$ симметрична относительно точек (x,y) и (x_0,y_0), если они находятся внутри области D.*

Доказательство. Лемма 5 следует из представления (36) функции Грина и равенства (48).

Для четверть круга D_0, ограниченной двумя отрезками $[0,a]$ осей x и y и четверть окружностью $x^2+y^2=a^2$ $(x\geq 0,\ y\geq 0)$, функция Грина обобщенной задачи Хольмгрена имеет вид

$$G_0(x,y;x_0,y_0)=q(x,y;x_0,y_0)-\left(\frac{a}{R}\right)^{2\alpha+2\beta}q(x,y;\bar{x}_0,\bar{y}_0), \tag{49}$$

где

$$R^2=x_0^2+y_0^2,\ \ \bar{x}_0=\frac{a^2}{R^2}x_0,\ \ \bar{y}_0=\frac{a^2}{R^2}y_0.$$

Покажем, что регулярную часть

$$v_0(x,y;x_0,y_0)=-\left(\frac{a}{R}\right)^{2\alpha+2\beta}q(x,y;\bar{x}_0,\bar{y}_0)$$

функции Грина $G_0(x,y;x_0,y_0)$ можно представить в виде

$$v_0(x,y;x_0,y_0)=-\int_0^l \rho(s;x,y)v_0(x(s),y(s);x_0,y_0)ds, \tag{50}$$

где $\rho(s;x,y)$ есть решение уравнения (46).

Действительно, пусть (x_0,y_0) произвольная точка внутри области D. Рассмотрим функцию

$$u(x,y;x_0,y_0)=-\int_0^l \rho(s;x,y)v_0(x(s),y(s);x_0,y_0)ds.$$

Она, как функция от (x,y), удовлетворяет уравнению (1), так как этому уравнению удовлетворяет функция $\rho(s;x,y)$. Подставляя вместо $\rho(s;x,y)$ ее выражение (45), получим

$$u(x,y;x_0,y_0)=-\int_0^l \psi(s;x_0,y_0)A_n^{\alpha,\beta}\left[q(x(s),y(s);x,y)\right]ds, \tag{51}$$

где

$$\psi(s;x_0,y_0)=2v_0\left(x(s),y(s);x_0,y_0\right)+4\int_0^l R(s,t;2)v_0\left(\xi,\eta;x_0,y_0\right)dt,$$

т.е. $\psi(s;x_0,y_0)$ есть решение интегрального уравнения

$$\psi(s;x_0,y_0)-2\int_0^l K(s,t)\psi(t;x_0,y_0)dt=2v_0\left(x(s),y(s);x_0,y_0\right). \tag{52}$$

Применяя первую из формул (19) к потенциалу двойного слоя (51), получим

$$u_i\left(x(s),y(s);x_0,y_0\right)=\frac{1}{2}\psi(s;x_0,y_0)-\int_0^l K(s,t)\psi(t;x_0,y_0)dt,$$

откуда в силу (52) имеем

$$u_i\left(x(s),y(s);x_0,y_0\right)=v_0\left(x(s),y(s);x_0,y_0\right),\ (x(s),y(s))\in\Gamma.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\left.u\left(x,y;x_0,y_0\right)\right|_{x=0}=0,\quad \left.v_0\left(x,y;x_0,y_0\right)\right|_{x=0}=0,$$

$$y^{2\beta}\frac{\partial u(x,y;x_0,y_0)}{\partial y}\bigg|_{y=0}=0,\quad y^{2\beta}\frac{\partial v_0(x,y;x_0,y_0)}{\partial y}\bigg|_{y=0}=0.$$

Таким образом, функции $u\left(x,y;x_0,y_0\right)$ и $v_0\left(x,y;x_0,y_0\right)$ удовлетворяют одному и тому же уравнению (1) и одинаковым краевым условиям, и в силу единственности решения обобщенной задачи Хольмгрена

$$u\left(x,y;x_0,y_0\right)\equiv v_0\left(x,y;x_0,y_0\right).$$

Вычитая теперь из (36) обе части равенства (49), получим

$$H\left(x,y;x_0,y_0\right)=G\left(x,y;x_0,y_0\right)-G_0\left(x,y;x_0,y_0\right)=v\left(x,y;x_0,y_0\right)-v_0\left(x,y;x_0,y_0\right)$$

или в силу (46), (48), (49) и (50)

$$H(x,y;x_0,y_0)=\int_0^l\rho(t;x,y)G_0(\xi,\eta;x_0,y_0)dt. \tag{53}$$

Теорема 4. *Функция*

$$\begin{gathered}u\left(x_0,y_0\right)=\int_0^a y^{2\beta}\left(x^{2\alpha}\frac{\partial G\left(x,y;x_0,y_0\right)}{\partial x}\right)\bigg|_{x=0}\tau_1(y)dy-\\-\int_0^a x^{2\alpha}G\left(x,0;x_0,y_0\right)\nu_2(x)dx-\int_0^l A_\nu^{\alpha,\beta}[G\left(\xi,\eta;x_0,y_0\right)]\varphi(s)ds,\end{gathered} \tag{54}$$

где $\varphi(s)$, $\tau_1(y)$ и $\nu_2(x)$ – заданные непрерывные функции в $0\le s\le l$, $0\le y\le a$ и $0<x<a$, соответственно, причем в точке $B(0,a)$ выполняется условие согласования: $\tau_1(a)=\varphi(l)$; при $x\to 0$ функция $\nu_2(x)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше $2\alpha-2\beta$ $(\alpha>\beta)$, есть решение обобщенной задачи Хольмгрена для уравнения (1) в области D.

Доказательство. Пусть (x_0,y_0) – точка внутри области D. Рассмотрим область $D_{\varepsilon,\delta_1,\delta_2}\subset D$, ограниченную кривой Γ_ε, параллельной кривой Γ, и отрезками прямых $x=\delta_1>\varepsilon$ и $y=\delta_2>\varepsilon$. Выберем ε, δ_1 и δ_2 столь малыми, чтобы точка (x_0,y_0) находилась внутри $D_{\varepsilon,\delta_1,\delta_2}$. Вырежем из области $D_{\varepsilon,\delta_1,\delta_2}$ круг малого радиуса ρ с центром в точке (x_0,y_0) и оставшуюся часть $D_{\varepsilon,\delta_1,\delta_2}$ обозначим через $D^\rho_{\varepsilon,\delta}$, в которой функция Грина $G(x,y;x_0,y_0)$ будет регулярным решением уравнения (1).

Пусть $u(x,y)$ есть регулярное решение уравнения (1) в области D, удовлетворяющее граничным условиям (31) и (32) .

Применяя формулу (8), получим

$$\begin{gathered}\int_{C_\rho}\left(GA_n^{\alpha,\beta}[u]-uA_n^{\alpha,\beta}[G]\right)ds=\int_{\delta_2}^{y_1}x^{2\alpha}y^{2\beta}\left(u\frac{\partial G}{\partial x}-G\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x=\delta_1}dy+\\+\int_{\delta_1}^{x_1}x^{2\alpha}y^{2\beta}\left(u\frac{\partial G}{\partial y}-G\frac{\partial u}{\partial y}\right)\bigg|_{y=\delta_2}dx+\int_{\Gamma_\varepsilon}\left(GA_n^{\alpha,\beta}[u]-uA_n^{\alpha,\beta}[G]\right)ds,\end{gathered}$$

где x_1 и y_1 – абсцисса и ордината точек пересечения кривой Γ_ε с прямыми $y=\delta_2$ и $x=\delta_1$, соответственно, а C_ρ – окружность вырезанного круга. Переходя к пределу при $\rho\to 0$, а затем при $\varepsilon\to 0$, $\delta_1\to 0$ и $\delta_2\to 0$, получим формулу (54).

Непостредственными вычислениями можно показать, что формула (54) дает решение обобщенной задачи Хольмгрена.

Теорема 4 доказана. □

Используя формулы (53) и (49), решение (54) обобщенной задачи Хольмгрена для уравнения (1) можно записать в виде

$$\begin{gathered}u\left(x_0,y_0\right)=\int_0^a\tau_1(y)y^{2\beta}\cdot x^{2\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left[G_0\left(x,y;x_0,y_0\right)+H\left(x,y;x_0,y_0\right)\right]\bigg|_{x=0}dy-\\-\int_0^a\nu_2(x)x^{2\alpha}\left[G_0\left(x,0;x_0,y_0\right)+H\left(x,0;x_0,y_0\right)\right]dx-\\-\int_0^l\varphi(s)\left\{A_\nu^{\alpha,\beta}\left[G_0\left(\xi,\eta;x_0,y_0\right)\right]+A_\nu^{\alpha,\beta}\left[H\left(\xi,\eta;x_0,y_0\right)\right]\right\}ds,\end{gathered} \tag{55}$$

где

$$H\left(x,y;x_0,y_0\right)=\int_0^l \rho\left(t;x_0,y_0\right)G_0\left(\xi,\eta;x,y\right)dt.$$

Решение (55) обобщенной задачи Хольмгрена более удобно для дальнейших исследований. В случае четверть круга D_0 функция $H\left(x,y;x_0,y_0\right)\equiv 0$ и решение (55) принимает более простой вид:

$$\begin{aligned}
u\left(x_0,y_0\right)=&(1-2\alpha)\kappa x_0^{1-2\alpha}\int_0^a \tau_1(y)y\times\\
&\times\left[\frac{F\left[\begin{matrix}1-\alpha+\beta,\beta; & -\dfrac{4xx_0}{X_1^2}\\ 2\beta; & \end{matrix}\right]}{X_1^{2-2\alpha+2\beta}}-\frac{F\left[\begin{matrix}1-\alpha+\beta,\beta; & -\dfrac{4xx_0}{Y_1^2}\\ 2\beta; & \end{matrix}\right]}{Y_1^{2-2\alpha+2\beta}}\right]dy-\\
&-\kappa x_0^{1-2\alpha}\int_0^a \nu_2(x)x\times\\
&\times\left[\frac{F\left[\begin{matrix}1-\alpha+\beta,1-\alpha; & -\dfrac{4xx_0}{X_2^2}\\ 2-2\alpha; & \end{matrix}\right]}{X_2^{2-2\alpha+2\beta}}-\frac{F\left[\begin{matrix}1-\alpha+\beta,1-\alpha; & -\dfrac{4xx_0}{Y_2^2}\\ 2-2\alpha; & \end{matrix}\right]}{Y_2^{2-2\alpha+2\beta}}\right]dx+\\
&+2(1-\alpha+\beta)\kappa x_0^{1-2\alpha}\times\\
&\times\int_0^l \varphi(s)\xi(s)\eta(s)F_2\left[\begin{matrix}2-\alpha+\beta,1-\alpha,\beta; & \dfrac{r_1^2-r^2}{r_{12}^2},\dfrac{r_2^2-r^2}{r_{12}^2}\\ 2-2\alpha,2\beta; & \end{matrix}\right]\frac{R^2-a^2}{r_{12}^{4-2\alpha+2\beta}}ds,
\end{aligned}\tag{56}$$

где

$$R^2=x_0^2+y_0^2,\ a^2=\xi^2+\eta^2;\ \ r^2=\left(\xi-x_0\right)^2+\left(\eta-y_0\right)^2,$$
$$r_1^2=\left(\xi+x_0\right)^2+\left(\eta-y_0\right)^2,\ r_2^2=\left(\xi-x_0\right)^2+\left(\eta+y_0\right)^2;$$
$$X_1^2=x_0^2+\left(y-y_0\right)^2,\ \ Y_1^2=\left(a-\frac{yy_0}{a}\right)^2+\frac{y^2}{a^2}x_0^2;$$
$$X_2^2=\left(x-x_0\right)^2+y_0^2,\ \ Y_2^2=\left(a-\frac{xx_0}{a}\right)^2+\frac{x^2}{a^2}y_0^2.$$

В заключении отметим, что полученные формулы (55) и (56) играют важную роль при изучении краевых задач для уравнения смешанного типа, т.е. для уравнений эллиптико-гиперболического или эллиптико-параболического типов: каждая из этих формул позволяет легко вывести основное функциональное соотношение между следами искомого решения и его производной на линии вырождения, принесенное из эллиптической части смешанной области.

Литература

1. Михлин С. Г. Курс математической физики. Москва: Наука, 1968, 576 с.

2. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. Москва: Гостехиздат, 1953, 416 с.

3. Кондратьев Б. П. Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. Москва: Мир, 2007, 512 с.

4. Gellerstedt S. Sur un probleme aus limites pour l'equation $y^{2s}z_{xx}+z_{yy}=0$. *Arkiv Mat. Ast och Fysik,* 25A(10), 1935, pp. 1–12.

5. Франкль Ф. И. Избранные труды по газовой динамике. Москва: Наука, 1973, 712 с.

6. Пулькин С. П. Некоторые краевые задачи для уравнения $u_{xx}\pm u_{yy}+\frac{p}{x}u_x=0$. *Ученые записки Куйбышевского педагогического института. Физико-математические науки,* 21, 1958, С. 3–54.

7. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. Москва: Наука, 1966, 292 с.

8. Ergashev T. G. Potentials for the Singular Elliptic Equations and Their Application. *Results in Applied Mathematics,* 7, 2020, pp. 1–15. https://doi.org/10.1016/j.rinam.2020.100126

9. Srivastava H. M. , Hasanov A. , Ergashev T. G. A family of potentials for elliptic equations with one singular coefficient and their applications. *Mathematical Methods in Applied Sciences,* 43(10), 2020, pp. 6181–6199. https://doi.org/10.1002/mma.6365

10. Srivastava H. M., Hasanov A. , Choi J. Double-layer potentials for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation *Sohag Journal of Mathematics,* 1(1), 2015, pp. 1–10. https://dx.doi.org/10.12785/sjm/020101

11. Berdyshev A. S., Hasanov A. , Ergashev T. G. Double-layer potentials for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation.II. *Complex Variables and Elliptic Equations,* 65(2), 2020, pp. 316–332. https://doi.org/10.1080/17476933.2019.1583219

12. Эргашев Т. Г. Третий потенциал двойного слоя для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца. *Уфимский математический журнал,* 10(4), 2018, С. 111–121. https://doi.org/10.13108/2018-10-4-111

13. Эргашев Т. Г. Четвертый потенциал двойного слоя для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца. *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика,* 50, 2017, С. 45–56. https://doi.org/10.17223/19988621/50/4

14. Бейтмен Г. , Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1. Москва: Наука, 1973. 296 с.

15. Copson E. T. On Hadamard's Elementary Solution. *Proceedings of the Poyal Society of Edinburgh Section A: Mathematics,* 69(1), 1970, pp. 19–27. https://doi.org/10.1017/S0080454100008529

16. Ergashev T. G. Fundamental solutions for a class of multidimensional elliptic equations with several singular coefficients. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 13(1)., 2020, pp. 48–57. https://doi.org/10.17516/1997-1397-2020-13-1-48-57

17. Рисс Ф. О линейных функциональных уравнениях. *Успехи математических наук*, 1, 1936, С. 175–199.

18. Schauder J. Über lineare vollstetige Funktionaloperationen. *Studia Math,* 2, 1930. pp. 183–196.

19. Рисс Ф., Сёкифальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. Москва: Мир, 1979.

Получено: 26/02/2021

Принято: 07/05/2021

Cite this article

Ergashev T. G., Ergashev O. T. Potentials for generalized bi-axially symmetric elliptic equation and their application. *Bull. Inst. Math.*, 2021, Vol.4, №2, pp. 122-135 [in Russian].