

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
ANDIJON DAVLAT UNIVERSITETI**



**ZAMONAVIY MATEMATIKANING NAZARIY
ASOSLARI VA AMALIY MASALALARI**

Respublika ilmiy-amaliy anjumani materiallari to'plami

II



O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
ANDIJON DAVLAT UNIVERSITETI

**ZAMONAVIY MATEMATIKANING NAZARIY ASOSLARI VA AMALIY
MASALALARI**

Respublika ilmiy-amaliy anjumani materiallari to'plami
II

Andijon, 28 mart 2022 yil

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
АНДИЖАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Сборник материалов Республиканской научно-практической конференции

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ СОВРЕМЕННОЙ
МАТЕМАТИКИ**
II

Андижан, 28 марта 2022 года

MINISTRY OF HIGHER AND SECONDARY SPECIAL EDUCATION
REPUBLIC OF UZBEKISTAN
ANDIJAN STATE UNIVERSITY

Collection materials of the Republican scientific and practical conference

**THEORETICAL FOUNDATIONS AND APPLIED PROBLEMS OF MODERN
MATHEMATICS**
II

Andijan, March 28, 2022

Zamonaviy matematikaning nazariy asoslari va amaliy masalalari. Respublika ilmiy-amaliy anjuman materiallari to'plami. II qism. Andijon, 2022 yil. 324 bet.

Ushbu to'plam O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2022 yil 7 martdagi №101-F sonli farmoyishi bilan tasdiqlangan "2022 yilda Xalqaro va Respublika miqyosida o'tkaziladigan ilmiy va ilmiy-texnik tadbirlar rejasi"ga ko'ra 2022 yil 28 mart kuni Andijon davlat universitetida o'tkazilgan "Zamonaviy matematikaning nazariy asoslari va amaliy masalalari" mavzusida Respublika miqyosidagi ilmiy-amaliy anjumaniga kelib tushgan tezislar matnlaridan tashkil topgan.

To'plamga kiritilgan tezislar mazmuni, ilmiyligi va dalillarning haqqoniyligi uchun mualliflar mas'uldirlar.

Mas'ul muharrir: Umrzaqov Nodirbek

Muharrirlar: Nishonov Tulanmirza
Zaynobiddinov Ibrohimjon
Atabayev Odiljon

Anjuman materiallari to'plami Andijon davlat universiteti Ilmiy kengashining 2022 yil 17 fevraldagi 8- yig'ilishi qarori bilan nashrga tavsiya etilgan.

ANJUMAN TASHKILIY QO'MITASI

Rais:

A.Yuldashev - Andijon davlat universiteti rektori,
b.f.d., professor.

Hamrais:

Sh.Ayupov - Akademik, O'zRFA Matematika
Instituti direktori

Rais o'rinbosari:

R.Mullajonov - Andijon davlat universiteti o'quv
ishlari bo'yicha prorektori, f-m.f.n.,
dotsent.

Tashkiliy qo'mita a'zolari:

S.Zaynobiddinov - O'zRFA akademigi
O'.Roziqov - O'zRFA Matematika Institutining
ilmiy rahbari, Direktorning ilm-fan
bo'yicha o'rinbosari, f-m.f.d.,
professor
B.Omirov - O'zMU algebra va analiz kafedrası
mudiri, professor
M.Rahmatullayev - O'zRFA Matematika instituti
Namangan viloyati bo'linmasi mudiri,
f-m.f.d., professor
X.Mansurov - ADU Fizika-matematika fakulteti
dekani, f.-m.f.n, dotsent
N.Umrzaqov - ADU matematika kafedrası mudiri, f-
m.f.n., dotsent
F.Arziqulov - O'zRFA Matematika instituti
Namangan viloyati bo'linmasi bosh
ilmiy xodimi, f-m.f.d.
A.Axlimirzayev - ADU professori, p.f.n.
I.Karimjonov - ADU dotsenti, f-m.f.n.
S.Axmedov - ADU dotsenti, f-m.f.n.
N.Mamadaliyev - O'zMU professori, f-m.f.d.
A.Taxirov - ADU dotsenti, f-m.f.n.
T.Abdullayev - ADU dotsenti, f-m.f.n.
Q.Abdullayev - ADU dotsenti, p.f.n.
T.Ibaydullayev - ADU dotsenti, f-m.f.n.
S.Akbarova - ADU dotsenti, f-m.f.n.
R.Azimov - ADU dotsenti, f-m.f.n.
A.Qodirov - ADU katta o'qituvchisi
M.Mamajonova - ADU katta o'qituvchisi, p.f.n.
T.Nishonov - ADU katta o'qituvchisi

ANJUMAN DASTURIY QO'MITASI:

Rais:

A.O'rinov - Farg'ona davlat universiteti professori, f-m.f.d.

Rais o'rinbosari:

N.Umrzaqov - ADU matematika kafedrası mudiri, f-m.f.n., dotsent

Hay'at a'zolari:

A.Azamov - O'zRFA akademigi, O'zbekiston Matematiklari Jamiyati raisi
Sh.Alimov - O'zRFA akademigi
A.Sa'dullayev - O'zRFA akademigi
M.Aripov - O'zMU professori, f-m.f.d.
A.Artikbayev - TDTU professori, f-m.f.d.
G.Xudayberganov - O'zMU professori, f-m.f.d.
Yu.Oppoqov - NamMQI professori, f-m.f.d.
M.Mamatov - O'zMU professori, f-m.f.d.
B.Shoimqulov - O'zMU professori, f-m.f.d.
B.Samatov - NamDU professori, f-m.f.d.
J.Abdullayev - SamDU professori, f-m.f.d.
G'.Ibragimov - Malayziya Putra universiteti professori, f-m.f.d.
M.Ro'ziboyev - Avstriya Vena universiteti professori, f-m.f.n.
J.Teshaboyev - O'zMU professori, f-m.f.n.
A.Axlimirzayev - ADU professori, p.f.n.
S.Axmedov - ADU dotsenti, f-m.f.n.
R.Xakimov - NamDU professori, f-m.f.d.
M.Tojiyev - Oliy va o'rta-maxsus ta'lim vazirligi huzuridagi Oliy ta'limni rivojlantirish tadqiqotlari va ilg'or texnologiyalarni tatbiq etish markazi bo'limi mudiri, p.f.d
F.Arziqulov - O'zRFA Matematika instituti Namangan viloyati bo'linmasi bosh ilmiy xodimi, f-m.f.d.
M.Barakayev - TDPU professori, p.f.n.
I.Karimjonov - ADU dotsenti, f-m.f.n.
T.Ibaydullayev - ADU dotsenti, f-m.f.n.
S.Akbarova - ADU dotsenti, f-m.f.n.
J.Aliyeva - ADU dotsenti, f-m.f.n.

СЎЗ БОШИ

Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2022 йил 7 мартдаги №101-Ф сонли Фармойиши билан тасдиқланган “2022 йилда халқаро ва республика миқёсида ўтказиладиган илмий ва илмий-техник тадбирлар режаси” да белгиланган “Замонавий математиканинг назарий асослари ва амалий масалалари” мавзусидаги республика миқёсидаги ушбу илмий-амалий анжуман, ҳеч шубҳасиз, вилоятимизнинг энг нуфузли олий таълим муассаларидан бири Андижон давлат университети ҳаётида тарихий бир воқеадир. Бу анжуманни Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон қарори билан тасдиқланган “2020-2023 йилларда Ўзбекистон Республикасида математика фанлари бўйича таълим сифатини яхшилаш, илмий тадқиқотларнинг натижадорлиги ва амалий аҳамиятини оширишнинг мақсадли дастури” ни ҳаётга жорий этишга қаратилган муҳим тадбирлардан бири деб ҳисоблаш мумкин. Олий ўқув юртлари, айниқса университетлар шунчаки олий малакали мутахассис тайёрлаш билан чекланмай, дунё миқёсида рақобатбардош мутахассислар етиштириш вазифасини бажаришларида ОТМ лараро шу каби илмий ва маданий алоқалар, ўзаро тажриба алмашиш ниҳоятда муҳим.

Мамлакатимиз Президенти Шавкат Мирзиёев 2020 йилнинг 31 январида олимлар, ёш тадқиқотчилар, илмий-тадқиқот муассасалари раҳбарлари ва ишлаб чиқариш сектори вакиллари билан ўтказган учрашувларида илм-фан соҳасидаги энг муҳим вазифалар муҳокама қилинди. Давлатимиз раҳбари Ўзбекистоннинг математика фани бўйича салоҳияти дунё миқёсида тан олинганини, функционал анализ ва дифференциал тенгламалар, эҳтимоллар назарияси ва алгебра йўналишлари бўйича нуфузли мактабларимиз шаклланиб, фаолият юритаётганини, етти нафар математик олим Бутунжаҳон фанлар академияси аъзоси эканини алоҳида таъкидладилар. Кўплаб хорижий илм-фан марказлари, хусусан, Бонн, Кембриж, Париж, Сеул каби йирик шаҳарлардаги етакчи илм даргоҳлари билан биргаликда қўшма илмий лойиҳалар амалга оширилаётганини эътироф этдилар. Мустақиллигимизнинг 30 йиллиги арафасида ЎзРФА В.И.Романовский номидаги Математика Институтининг Директори, атоқли олим, академик ҳурматли Шавкат Абдуллаевич Аюповнинг давлатимизнинг энг Олий Унвони- Ўзбекистон Қаҳромони Унвони билан тақдирланганлари бир томондан ҳурматли Шавкат Абдуллаевичнинг илм-фан, таълим ва жамоат ишларидаги кўп йиллик бемисл самарали меҳнатларининг эътирофи бўлса, иккинчи томондан ҳурматли Президентимизнинг математика фанига ва математика таълимига ва бутун мамлакатимиз математикларига бўлган алоҳида эътиборлари ва чексиз ишончлари десам муболаға бўлмайди. Негаки, ҳурматли Президентимиз мамлакатимиз математикларини 3-ренессанснинг драйверлари деб биладилар. Бу-катта ишонч барча математикларни бирдай хурсанд қилиш ва уларда шу касбни танлаганликларидан мамнунлик хиссини ўйғотиш билан бирга улкан маъсулият хиссини ҳам яна бир бор уйғотди, хусусан бизнинг Андижон давлат университети Математика кафедраси профессор-ўқитувчиларини ҳам иш услубларини яна бир бор қайтадан кўриб чиқишга ундади. Аслида иш услубини қайтадан кўриб чиқишга туртки бўлган, таъбир жоиз бўлса, илхомлантирган асл сабаб давлатимиз Раҳбарининг Президентликни бошлаган илк кунлариданоқ таълимга, хусусан математика фанларини ривожлантиришга қаратилган

этиборлари, бунинг учун аввалам бор таълим ходимларини ҳам маънавий ва ҳам моддий жиҳатдан қўллаб-қувватлаганлари бўлди десам ҳам айна ҳақиқат бўлади.

Президентимизнинг математика таълими ва математика фанларини ривожлантириш чора-тадбирлари бўйича кейинги йилларда қабул қилган иккита муҳим фармонларида ҳамда соҳа ходимлари билан ўтказган қатор учрашувларида қўйилган вазифаларни ва яна муҳими мазкур вазифаларни бажариш бўйича Президентимиз томонидан тақлиф этилган амалий кўрсатмаларни ижроси ўлароқ университетимизда, хусусан Математика кафедрасида илмий салоҳиятли кадрлар салмоғини оширишга алоҳида этибор қаратилмоқда. Кафедра қошида физика-математика ва педагогика фанлари бўйича PhD илмий даражали кадрлар тайёрловчи таянч докторантура мавжуд бўлиб, унда кафедранинг ҳозирги кунда 30 га яқин ёш ўқитувчилари таҳсил олмақдалар. Уларга кафедранинг 1 нафар фан доктори 11 нафар фан номзодлари илмий раҳбарлик қилмоқдалар. Бундан ташқари кафедра ва ЎзРФА Математика Институти, мазкур Институтининг шахсан Президентимизнинг ташаббуслари билан очилган Наманган вилояти бўлинмаси билан, ЎзМУ, НамДУ, ФарДУ, ТошДПУ математика факультети кафедралари билан, Москва давлат университетининг Тошкент филиали билан, Турин Политехника университети Тошкент филиали билан, Австриянинг Вена университети аниқ фанлар кафедралари ва Малайзиянинг Путра университети билан узвий ҳамкорликлари доирасида таянч докторантларимизга бутун жаҳонга маълум-у машхур академиклар Ш.Аюпов, А.Азамов, Ш.Алимов, таниқли олимлар А.Ўринов, М.Арипов, А.Артиқбаев, Ў.Розиқов, Б.Омиров, М.Ғофуров, М.Рахматуллаев, А.Абдушукуров, А.Жалилов, М.Маматов, Ғ.Ибрагимов, Б.Саматов, Н.Мамадалиев, М.Рўзиев, М.Тожиев, М.Баракаев каби профессорлар илмий раҳбарлик қилмоқдалар.

Президентимиз томонидан қўйилган вазифаларни, хусусан жаҳон андозаларига тўла жавоб берувчи, рақобатбардош кадрлар тайёрлаш бўйича фаолиятларимизни самарали амалга ошириш мақсадида Математика кафедрасида турли халқаро анжуманлар ҳамда вебинар дарслар ўтказиб туриш анъанага айланган. Мисол тариқасида 2019 йилнинг 17-19 октябрида университетимизда ЎзМУ ва ЎзРФА Математика Институти билан ҳамкорликда 20 га яқин хорижий олимлар иштирокидаги CODS-2019 Andijan халқаро конференциясини мисол қилиб келтиришимиз мумкин. Магистр ҳамда бакалаврларимизнинг хорижнинг нуфузли университетларидаги тенгдошлари қандай билим олаётганлари, улар билан соғлом рақобатда нималарга этибор қаратишларини билишлари мақсадида мазкур ОТМ ларда фаолият олиб бораётган ватандош домлаларни жалб этган ҳолда кафедрада турли дастурларда вебинар дарслар тизимли равишда йўлга қўйилган.

Мазкур анжуман иштирокчилари орасида фан арбоблари, мамлакатимизнинг кўзга кўринган энг юқори илмий салоҳиятли вакилари борлигини этиборга олиб, ҳеч иккиланмай айтаманки, анжуманда кўриладиган масалалар, уларнинг ечимлари ва улар бўйича қабул қилинадиган қарорлар ҳам юқорида санаб ўтилган вазифаларни самарали ижро этишда муҳим аҳамият касб этади.

Юлдашев Акрамжон

Андижон давлат университети ректори

TABARRUK USTOZ

Uyda otangning borligi sen uchun qanchalar yaxshi bo'lsa, jamoang-ish joyingda katta ustozlarning borligi huddi o'shanday yaxshi. Onang seni duo bilan ishga kuzatsa, ustozlarning duo bilan kutib olishadi va sendak o'rinboylari borligidan ollohga hamdu sanolar aytishadi. Andijon davlat universitetining matematika kafedrasining shunday mo'tabar ustozlaridan biri, bu oliy dargohga 60 yillik mehnati singgan Ahmadjon Qodirovdir.



Domla 1934-yilning 15-mayida Andijon shahrida tavallud topgan. Yoshligidanoq o'qituvchilikni orzu qilgan ustoz 1952-yili Andijon pedagogika bilim yurtini tamomlagan. Bu yillar bilamizki maktablarimiz avvalo o'qituvchilarga, qolaversa barcha ishlab-chiqarishlar mutaxasislarga zor-intizor yillar edi. Balki ayni shular Ahmadjon Qodirov va ularning bir umrlik sodiq do'sti Abdulhamid Tolipovlarni bilim yurtini a'lo baholarga bitirishga undagandir. Qolaversa dargohni a'lo baholarga bitirish bitiruvchilarga o'qishni Oliy ta'lim muassasalarida davom ettirish uchun yo'llanmalarni ham ta'minlar edi. Ular har ikkalasi shunday yo'llanmalarga ega bo'lishdi. Biroq ularga bog'liq bo'lmagan ayrim sabablarga ko'ra Oliy ta'lim dargohlariga o'z vaqtida hujjatlarini topshira olmadilar. O'zlaricha haqiqat talab qilib kelgan bu ikki o'rtoq bilim yurti direktori Safo Abdullayevga o'z dardlarini to'kib soldilar. Direktor ularga o'qishni tamomlaganligi haqidagi diplomlarini olishlariga sharoit yaratib berdi. Diplumlarku qo'lga olindi, ammo Oliy yurtlariga hujjatlar topshirish vaqti o'tgan, hattoki dastlabki kirish imtihonlari ham o'tgan edi. Ularga bilim yurtining uslibiyatchi ustози Orifiy bebaho maslahat berdi. Matematika yo'nalishida Oliy o'quv yurtida o'qishi kerak bo'lgan talabalar soni to'lmayotganini shu sababli Toshkentga tezlik bilan o'qishga borishlarini yoki Farg'onaga ham borishlari mumkinligini aytib, avvalo Farg'ona uyingizga yaqin, qolaversa Farg'onadagi o'qishingiz ham Toshkendagidan kuchsiz bo'lmaydi deb qo'shib qo'ydi. Orifiy taklifi ularga ma'qul bo'ldi va ertasigayoq barcha hujjatlar bilan avtobusda 3 soat yo'l yurishib, Farg'onaga yetib borishdi. Natija esa ular kutganidan ham yaqinroq bo'lib chiqdi. Ya'ni, ularning hujjatlarini rahbariyatga olib kirgan rus qizining bildirishicha ularning har ikkalasi o'qishga qabul qilindi, ammo boshqa-boshqa guruhda o'qishadigan bo'lishdi. Buning birdan bir sababi ularning har ikkalasining yaxshi o'qiganligi bo'lib, guruhlar teng kuchli bo'lgani ma'qul.

Qodirov Ahmadjon ustoz 1956-yili FDPNni tamomlab, Andijonga qaytdi va shahardagi 32-maktabga matematika o'qituvchisi sifatida ishga qabul qilindi. 1956-yili shahardagi 14-maktabga ishini ko'chirdi. 1962-yili esa Andijon davlat pedagogika institutiga ishga taklif qilindi.

Bir yildan so'ng 1963-yiliga kelib, professor D.J.Karimov va f.-m.f.n. Q.Boyqo'ziyevlar rahbarligida o'qish uchun aspiranturaga qabul qilindi. Dissertatsiya mavzusi "Parabolik tipdagi chegarada buziladigon differensial tenglamalarning davriy yechimlari".

1963-1966-yillarda aspiranturani o'tadi va mavzuga aloqador 3 ta maqola tayyorlab, bosmadan chiqardi. Ustozning aytishicha "Rahbarlarim yana bitta ish qilsangiz masala hal bo'ladi deyishdiyu, ammo men qilishim kerak bo'lgan ish nimadan iboratligi noaniqligicha qolib ketdi". Oila, farzandlar, ota-onalarga hizmat va boshqa tashvishlar domlani faqatgina ilmiy ishi ketidan quvishiga yo'l qo'ymasdi. Ustoz mehnat faoliyatiga qattiq berildi va baxtini ayni shu joydan topdi. Avvalo o'qituvchi sifatidagi darslari, qolaversa uzoq yillar davom etgan

dekan o'rinbosari lavozimidagi hizmati bilan butun fizika-matematika fakulteti jamoasi va universitet rahbariyati jamoasi hurmat e'tiboriga sazovor bo'ldi. Agar ustoz bilan shahar ko'chalarida birga yursangiz har bir muyilishdan "Assalomu alaykum ustoz, men falonchi shogirdingizman, sizni ko'rganimdan juda-juda hursandman" deydigan shogirdlari chiqadi. Ular juda ko'p. Bundan ortiq yana qanday baxtni tasavvur qilishingiz mumkin.

Aziz ustoz Ahmadjon Qodirov yaqin kunlarda nishonlanadigon ikki kam 90 yoshingiz muborak bo'lsin va Alloh sizni oldingi va keying barcha gunohlaringizni mag'firat qiladigan bu chegaradan ancha uzoqlarga yetkazsin deb so'rab qolamiz.

**Siz bilan 50 yil birga ishlagan
hamkasb shogirdingiz A.Tohirov.**

3-SHO'BA. FUNKSIONAL ANALIZ VA EHTIMOLLAR NAZARIYASINING ZAMONAVIY MASALALARI

MUSBAT QO'ZG'ALISHLI FRIDRIXS OPERATORI XOS QIYMATLARI UCHUN QUYI VA YUQORI BAHOLAR

Abdullayev Janikul

F.-m.f.d, Samarqand davlat universiteti

Rustamov Bilol

Denov pedagogika va tadbirkorlik instituti

Abduxoligov Adhambek

Denov pedagogika va tadbirkorlik instituti

Kvant mexanikasining bir qator masalalari (qarang: [1-10]) quyidagi

$$(Hf)(p) = u(p)f(p) + \int_{\mathbb{T}^3} K(p, q)f(q)dq, \quad f \in L_2(\mathbb{T}^3) \quad (1)$$

operatorning spektral xossalarini o'rganish masalasiga keltiriladi. Jumladan, ikki zarrachali sistemaga mos energiya operatorining xossalarini o'rganish (1) ko'rinishdagi H operatorning spektral xossalari bilan uzviy bog'liq (qarang: [1-5]). (1) ko'rinishdagi operator, aniqrog'i

$$(H_\lambda f)(x) = x f(x) + \lambda \int_{-1}^1 K(x, y)f(y)dy, \quad f \in L_2(-1, 1) \quad (2)$$

operator birinchilardan bo'lib Fridriks tomonidan uzluksiz spektr qo'zg'alishlari nazariyasining sodda modeli sifatida [7] ishda qaralgan. Bunda $K(x, y)$ yadro o'z o'zgaruvchilarining uzluksiz funksiyasi bo'lib, Gyolder hamda quyidagi chegaraviy

$$K(x, -1) = K(x, 1) = K(-1, y) = K(1, y) = 0, \quad \forall x, y \in [-1, 1]$$

shartlarni qanoatlantirishi talab qilingan. Bu shartlarda Fridriks λ ning yetarlicha kichik qiymatlarida H_0 va H_λ operatorlarning unitar ekvivalentligini, ya'ni H_λ operator $[-1, 1]$ kesmani to'ldiruvchi oddiy Lebeg spektriga ega ekanligi isbotlagan. Keyinchalik bu model Fridriks modeli deb nom olgan.

Fridriks ishlarining bevosita davomi O.A.Ladijenskaya, L.D.Faddeev [8] va L.D.Faddeev ishlarida o'z aksini topgan, ya'ni bu ishlarda Fridriks modelida qo'yilgan qo'zg'alishning kichiklik shartini olib tashlab va $K(x, y)$ yadro $\mu > \frac{1}{2}$ daraja bilan Gyolder sinfiga qarashlilik shartida H_λ operator $[-1, 1]$ kesmani to'ldiruvchi uzluksiz spektrga va $[-1, 1]$ kesmadan tashqarida yotuvchi ko'pi bilan chekli sondagi chekli karrali xos qiymatlarga ega bo'lishi isbotlangan.

Agar $u(x)$ va $K(x, y) = K(y, x)$ lar haqiqiy qiymatli analitik funksiyalar bo'lsa, u holda (1) Fridriks tipidagi H operatorning xos qiymatlari sonining chekliligi [6] ishda isbotlangan. Jumladan, [6] ishda H operatorning uzluksiz spektri $u(x)$, $x \in [a, b]$ funksiyaning qiymatlar to'plami bilan ustma-ust tushishi hamda qaralayotgan operatorning fizik rezonanslari uzluksiz spektr maxsus nuqtalarining $\varepsilon > 0$ atrofida yotishi ko'rsatilgan.

Keyinchalik (1) ko'rinishdagi operatorning ikki yo'nalish bo'yicha umumlashmasi, (birinchidan, $x = (x_1, x_2, \dots, x_v)$, v — o'lchamli vektor, ikkinchidan $u(x) = \left(u_{ij}(x)\right)_{i,j=1}^n$ esa $n \times n$ o'lchamli matritsa ko'rinishli funksiya) [9] ishda qaralgan, ya'ni H operator

$L_2(\mathbb{T}^3, \mathbb{C}^n)$ fazoda (1) formula bilan aniqlangan operatoridir. [9] ishda ham [6] ishdagi natijalarga o'xshash natijalar olingan, [10] ishda esa (1) ko'rinishdagi H operatorning uzluksiz spektr ichida yotuvchi ixtiyoriy sondagi xos qiymatlar mavjud bo'lishligi ko'rsatilgan va bu xos qiymatlar kichik qo'zg'alishlar natijasida fizik rezonanslarga aylanishi hamda bu fizik rezonanslarning kengligining tartibi topilgan.

Bu ishda $L_2(\mathbb{T}^3)$ Hilbert fazosida Fridriks tipidagi

$$H_\mu = H_0 - \mu K$$

operatorni qaraymiz va bu operator xos qiymatlari soni uchun quyidan va yuqoridan baholar olamiz. Bu yerda H_0 qo'zg'almas operator deyiladi va $u(p) = \sum_{i=1}^3 (1 - \cos p_i)$ funksiyaga ko'paytirish operatori, $\mu > 0$ musbat parametr. K qo'zg'atuvchi operator deyiladi, u integral tipidagi operator bo'lib, quyidagicha aniqlanadi:

$$(Kf)(p) = \int_{\mathbb{T}^3} K(p, q) f(q) dq, \quad f \in L_2(\mathbb{T}^3).$$

Bu yerda integral operatorning yadrosi $K(p, q)$ ga quyidagi shartlar qo'yiladi.

A) $K(p, q)$ haqiqiy qiymatli simmetrik funksiya va $K \in L_2((\mathbb{T}^3)^2)$.

B) Faraz qilaylik

$$K(p, q) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(p) \varphi_i(q)$$

ajralgan yadro bo'lib uning noldan farqli barcha xos qiymatlari $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$ oddiy xos qiymatlar bo'lsin.

A) shart bajarilganda H_μ o'z-o'ziga qo'shma chegaralangan opearator bo'ladi. K esa kompakt va o'z-o'ziga qo'shma opearator bo'ladi.

K operatorning kompakligidan hamda muhim spektrning turg'unligi haqidagi Veyl mezoniga ko'ra [9], H_μ va H_0 operatorlarning muhim (uzluksiz) spektrlari ustma-ust tushadi. Qo'zg'almas operator H_0 ning spektri esa $[0, 6]$ kesmadan iborat. Demak,

$$\sigma_{ess}(H_\mu) = \sigma(H_0) = [0, 6].$$

Bizga $\mathcal{H}$ Hilbert fazosida o'z-o'ziga qo'shma B opearator berilgan bo'lsin. $N(z, B)$ orqali B operatorning z dan katta xos qiymatlari sonini belgilaymiz. O'z-o'ziga qo'shma B operator uchun $N(z, B)$, soni quyidagiga teng bo'ladi:

$$N(z, B) = \sup_{\mathfrak{N}_B(z)} \dim \mathfrak{N}_B(z).$$

Bu yerda $\mathfrak{N}_B(z) \subset \mathcal{H}$ bilan shunday qism fazo belgilanganki, uning har bir birlik $f \in \mathfrak{N}_B(z)$ elementi uchun $(Bf, f) > z$ tengsizlik o'rinli. Xuddi shunday $n(z, B)$ bilan B operatorning z dan kichik xos qiymatlari sonini belgilaymiz.

1-teorema. Faraz qilaylik, B) shart bajarilgan bo'lsin. Agar biror $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ uchun $\mu \lambda_k > 6$ bo'lsa, u holda H_μ operator kamida k ta manfiy xos qiymatga ega bo'ladi.

Dastlab ayrim faktlarni keltiramiz. Ma'lumki, K musbat operator bo'lishi uchun uning barcha xos sonlari manfiymas bo'lishi zarur va yetarli. K musbat operatorning musbat kvadrat ildizini $K^{\frac{1}{2}}$ orqali belgilaymiz. $K^{\frac{1}{2}}$ ham integral operator bo'ladi. Uning yadrosi

$$K^{\frac{1}{2}}(p, q) = \sum_{i=1}^m \sqrt{\lambda_i} \varphi_i(p) \varphi_i(q)$$

ko'rinishda bo'ladi. Fridriks operatori H_μ ning uzluksiz spektridan tashqaridagi (aniqrog'i uzluksiz spektridan chapda yotuvchi, bizning holimizda K musbat operator bo'lganligi uchun H_μ operatorning uzluksiz spektridan o'ngda yotuvchi xos qiymatlari mavjud emas) xos qiymatlarini o'rganish o'z-o'ziga qo'shma, kompakt $\mu K^{\frac{1}{2}} r_0(z) K^{\frac{1}{2}}$ operator uchun 1 soni xos qiymat bo'lish yoki bo'lmaslik masalasiga keltiriladi (1-lemmaga qarang). Bu yerda $r_0(z) = (H_0 - zI)^{-1}$ qo'zg'almas H_0 operatorning rezolventasi. Barcha $z < 0$ lar uchun $r_0(z)$ ham musbat operator bo'ladi. Har bir $z < 0$ uchun $G(z)$ orqali yadrosi

$$G(z; p, q) = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{K^{\frac{1}{2}}(p, t) K^{\frac{1}{2}}(t, q)}{u(t) - z} dt$$

bo'lgan, $L_2(\mathbb{T}^3)$ Hilbert fazosidagi integral operatorni belgilaymiz. Shuni ta'kidlash kerakki, ixtiyoriy $z < 0$ uchun $G(z)$ Hilbert-Shmidt tipidagi operator bo'ladi va

$$G(z) = K^{\frac{1}{2}} r_0(z) K^{\frac{1}{2}}$$

tenglik o'rinli.

1-lemma. Biror $z \in (-\infty, 0)$ soni H_μ operatorning xos qiymati bo'lishi uchun $\lambda = 1$ soni $\mu G(z)$ operatorning xos qiymati bo'lishi zarur va yetarli. Bundan tashqari bu xos qiymat karraliliklari ustma-ust tushadi, yani

$$\dim \text{Ker}(H_\mu - zI) = \dim \text{Ker}(\mu G(z) - I).$$

Shunday qilib, Fridriks tipidagi H_μ operatorning uzluksiz spektridan tashqaridagi xos qiymatlarini o'rganish o'z-o'ziga qo'shma, kompakt $G(z)$ operatorning qo'zg'almas nuqtalarini topish masalasiga keltirildi. H_μ operatorning xos funksiyasi f va $\mu G(z)$ operatorning xos funksiyasi φ lar quyidagi tengliklar bilan bog'langan:

$$\varphi = K^{\frac{1}{2}} f, \quad f = \mu r_0(z) K^{\frac{1}{2}} \varphi.$$

2-lemma. A) shart bajarilgan bo'lsin. U holda quyidagi tenglik o'rinli

$$n(z, H_\mu) = N(1, \mu G(z)), \quad z < 0.$$

Bu munosabat Birman-Shwinger prinsipi deb ataladi.

K yadrogga qo'yilgan umumiy shartlarda limitik operator

$$\lim_{z \rightarrow 0} K^{\frac{1}{2}} r_0(z) K^{\frac{1}{2}} = \lim_{z \rightarrow 0} G(z) = G(0)$$

musbat va u yadroli operatorlar sinfi Σ_1 ga qarashli bo'ladi va bu operatorning izi

$$\text{tr} G(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \int_{\mathbb{T}^3} G(0, p, p) dp$$

ko'rinishda belgilanadi.

2-teorema. Faraz qilaylik limitik operator $G(0) \in \Sigma_1$ bo'lsin. Barcha $\mu < \frac{1}{\text{tr} G(0)}$ lar uchun H_μ operator manfiy xos qiymatlarga ega emas.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Абдуллаев Ж.И., Икромов И.А. Конечность числа собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на решетке. Теоретическая и математическая физика, 2007. Т. 152, № 3, 502-517.

2. Абдуллаев Ж.И. Собственные значения двухчастичного оператора Шредингера на двумерной решетке. Узбекский Математический Журнал, 2005. № 1, С. 3-11.

3. J. I. Abdullaev, A. M. Khalkhuzhaev, L. S. Usmonov. Monotonicity of the eigenvalues of the two-particle Shryodinger operator on a lattice. *Nanosystems: physics, chemistry, mathematics*, 2021, 12 (6), P. 657–663.

4. Abdullaev J.I., Toshturdiyev A.M. Bound states of a system of two fermions on invariant subspace. *Journal of Modern Physics* 2021. Vol 12. 35-49.

5. Абдуллаев Ж.И. Теория возмущений для двухчастичного оператора Шрёдингера на решетке. *Теоретическая и математическая физика*. 2005. Т. 145, № 1, 212-220.

6. Лакаев С.Н. Некоторые спектральные свойства обобщенной модели Фридрихса. *Труды семинара им. И.Г.Петровского*. 1986. Вып. II. С. 210-138.

7. Friedrichs K.O. Über die Spectralzerlegung eines Integral operators. *Math. Ann.* 1938. V.115. P.249-272.

8. Ладыженская О.А., Фаддеев Л.Д., К теории возмущений непрерывного спектра. *ДАН СССР*. 1962. Т.145, № 2, С.301-304.

9. Abdullayev J.I., Lakaev S. N. On the spectral Properties of the Matrix-valued Friedrichs Model. *Many particles Hamiltonians, spectrum and scattering. Advances in Soviet Mathematics. American Mathematical Society*. 1991. V. 5. P. 1-37.

10. Абдуллаев Ж.И., Икромов И.А., Лакаев С.Н. О вложенных собственных значений и резонансах обобщенной модели Фридрихса. *Теоретическая и математическая физика*. 1995. Т. 103, №1. С. 54-62.

PANJARADAGI IKKI FERMIONLI SISTEMANING INVARIANT QISM FAZOLARI VA BOG‘LANGAN HOLATLARI

Abdullayev Janikul

F.-m.f.d, Samarqand davlat universiteti

Safarova Gulshoda

Navoiy davlat pedagogika instituti

Mavlanova Hafiza

Navoiy davlat pedagogika instituti

Hilbert fazosida berilgan o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorlarning spektrini o‘rganishda uchraydigan eng sodda masalalardan biri - bu invariant elementlarni, hech bo‘lmaganda bu operator ta’sirida o‘zining yo‘nalishini saqlab qoluvchi elementlarni topishdan iborat, yani

$$H\psi = \lambda\psi \quad (1)$$

tenglamaning yechimlarini topishdan iborat. (1) tenglamaning noldan farqli yechimi H operatorning xos vektori (bog‘langan holati), λ esa xos qiymati (bog‘langan holatga mos energiya) deyiladi. Bir o‘lchamli panjarada ikki fermionli sistemaning bog‘langan holatlari [1] ishda qaralgan. Ikki o‘lchamli panjarada ikki fermionli sistemaning bog‘langan holatlar sonining chekli yoki cheksizligi [2] ishda o‘rganilgan. Panjarada ikki zarrachali sistemaga mos Shryodinger operatorining invariant qism fazolari mavjudligi va shu invariant qism fazolarda Shryodinger operatorining spektri [3] ishda tahlil qilingan.

Bu ishda uch o‘lchamli panjarada ikki fermionli sistemaga mos energiya operatorining invariant qism fazolardagi bog‘langan holatlari haqida ba’zi natijalar keltirilgan. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz: $\mathbb{Z}$ – butun sonlar to‘plami, $\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dekart ko‘paytma. $\ell_2(\mathbb{Z}^3)$ bilan $\mathbb{Z}^3$ da aniqlangan va modulining kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyalardan

tashkil topgan Hilbert fazosi. Ikki fermionli sistemaga mos energiya operatori $\hat{H}$ Hilbert fazosi $\ell_2^{as}((\mathbb{Z}^3)^2) = \{f \in \ell_2(\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3): f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -f(\mathbf{y}, \mathbf{x})\}$ da quyidagicha aniqlanadi:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \hat{V}.$$

Bu ifodada H_0 ikki fermionli sistemaning kinetik energiyasiga mos operator. U o'z-o'ziga qo'shma chegaralangan operator bo'lib quyidagicha aniqlanadi:

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2m}\Delta_1 - \frac{1}{2m}\Delta_2.$$

Bu yerda m fermionning massasi, (fermionning massasini birga teng deb hisoblaymiz), $\Delta_1 = \Delta \otimes I$ va $\Delta_2 = I \otimes \Delta$, bu yerda I – birlik operator, Δ – ayirmali Laplas operatori bo'lib, fermionning bir tugundan boshqa tugunga o'tishini ifodalaydi, ya'ni

$$(\Delta\hat{\psi})(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^3 [\hat{\psi}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_j) + \hat{\psi}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_j) - 2\hat{\psi}(\mathbf{x})], \quad \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3, \quad \hat{\psi} \in \ell_2(\mathbb{Z}^3).$$

Bu yerda $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ lar $\mathbb{Z}^3$ dagi birlik vektorlar.

Zarrachalarning (fermionlarning) o'zaro ta'sirini ifodalovchi V operator quyidagicha aniqlanadi:

$$(\hat{V}\hat{\psi})(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \hat{v}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\hat{\psi}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \quad \hat{\psi} \in \ell_2^{as}((\mathbb{Z}^3)^2).$$

Faraz qilamiz $\hat{v}$ quyidagi ko'rinishdagi sferik potensial bo'lsin: ($|\mathbf{n}| = |n_1| + |n_2| + |n_3|$)

$$\hat{v}(\mathbf{n}) = \hat{v}(n_1, n_2, n_3) = \begin{cases} \bar{v}(|\mathbf{n}|), & \text{agar } |n_1| + |n_2| \leq 1, \\ 0, & \text{agar } |n_1| + |n_2| \geq 2. \end{cases} \quad (2)$$

Bu potensialning tashuvchisi (support) truba shaklidagi D soha bo'ladi:

$$D = \{\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3: n_3 \in \mathbb{Z}, \quad |n_1| + |n_2| \leq 1\}.$$

Bu yerda $\bar{v}: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$ da aniqlangan, kamayuvchi (ya'ni, $\bar{v}(0) > \bar{v}(1) > \bar{v}(2) > \dots$) va $\bar{v} \in \ell_2(\mathbb{Z}_+)$.

Sistema energiya operatori $\hat{H}$ Hilbert fazosi $\ell_2^{as}((\mathbb{Z}^3)^2)$ da o'z-o'ziga qo'shma chegaralangan operator bo'ladi. Energiya operatorining koordinat tasviridan impuls tasviriga Furye almashtirishi orqali o'tiladi. $H = F^{-1}\hat{H}F = H_0 - V$, bu yerda $F: \ell_2^{as}((\mathbb{Z}^3)^2) \rightarrow L_2^{as}((\mathbb{T}^3)^2)$ standart Furye almashtirishi, $\mathbb{T}^3 = (-\pi, \pi]^3$ uch o'lchamli tor.

$$L_2^{as}((\mathbb{T}^3)^2) = \{f \in L_2((\mathbb{T}^3)^2): f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = -f(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1)\}.$$

Ikki fermionli sistema energiya operatori H unitar operatorlar gruppasi $U_s, s \in \mathbb{Z}$

$$(U_s f)(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \exp(-i(s, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2))f(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2), \quad f \in L_2^{as}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{T}^3).$$

lar bilan o'rin almashinuvchan bo'lganligi uchun, u $H(\mathbf{k}) := H_0(\mathbf{k}) - V$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ operatorlarning tog'ri integraliga yoyiladi [4]. Shryodinger operatori $H(\mathbf{k})$ Hilbert fazosi $L_2^0(\mathbb{T}^3) = \{f \in L_2(\mathbb{T}^3): f(-\mathbf{p}) = -f(\mathbf{p})\}$ da quyidagicha aniqlanadi:

$$(H(\mathbf{k})f)(\mathbf{p}) = \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p})f(\mathbf{p}) + (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{T}^3} v(\mathbf{p} - \mathbf{s})f(\mathbf{s}) d\mathbf{s}. \quad (3)$$

Qo'zg'almas operator $H_0(\mathbf{k})$ quyidagi $\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p})$ funksiyaga ko'paytirish operatoridir

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) = 6 - 2\cos \frac{k_1}{2} \cos p_1 - 2\cos \frac{k_2}{2} \cos p_2 - 2\cos \frac{k_3}{2} \cos p_3. \quad (4)$$

Zarrachalarning o'zaro ta'sirini ifodalovchi V operator $L_2^0(\mathbb{T}^3)$ da integral operator bo'lib, uning yadrosi $\frac{1}{8\pi^3} v(\mathbf{p} - \mathbf{q})$ quyidagi ko'rinishga ega:

$$v(\mathbf{p}) = 2\bar{v}(1) \sum_{i=1}^3 \cos p_i + 2\bar{v}(2) \left(\cos 2p_3 + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \cos p_i \cos p_j \right) +$$

$$+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}(n+2) \{ \cos(n+2)p_3 + 2(\cos p_1 + \cos p_2) \cos(n+1)p_3 + 4\cos p_1 \cos p_2 \cos np_3 \}.$$

(3) - (5) tengliklardan ko'rinadiki

$$H(k_1, k_2, k_3) = H(-k_1, k_2, k_3) = H(k_1, -k_2, k_3) = H(k_1, k_2, -k_3),$$

tengliklar o'rinli. Demak, $k_1, k_2, k_3 \in [0, \pi]$ deyish mumkin.

Ma'lumki [5], V operator faqat diskret spektrga ega, uning xos qiymatlari uchun quyidagi tasdiqlar o'rinli, ya'ni $v(1)$ soni uch karrali, $v(2)$ soni yetti karrali, barcha $n \geq 3$ lar uchun $v(n)$, to'qqiz karrali xos qiymat bo'ladi.

Agar $k_1 = k_2 = k_3 = \pi$ bo'lsa, u holda $H(\pi, \pi, \pi) = 6I - V$ operatorning spektri $6, 6 - \bar{v}(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$ ko'rinishdagi xos qiymatlardan va $\sigma_{ess}(H(\pi, \pi, \pi)) = \{6\}$ muhim spektrdan iborat bo'ladi.

$L_2^o(\mathbb{T}) = \{f \in L_2(\mathbb{T}): f(-p) = -f(p)\}$ orqali $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$ da aniqlangan barcha toq funksiyalardan tashkil topgan qism fazoni, $L_2^+(\mathbb{T}) = \{f \in L_2(\mathbb{T}): f(-p) = f(p)\}$ bilan esa $\mathbb{T}$ da aniqlangan barcha juft funksiyalardan tashkil topgan qism fazoni belgilaymiz. Toq funksiyalardan tashkil topgan $L_2^o(\mathbb{T}^3)$ fazoni quyidagi to'g'ri yig'indi ko'rinishida tasvirlash mumkin:

$$L_2^o(\mathbb{T}^3) = L_2^{-++}(\mathbb{T}^3) \oplus L_2^{+-+}(\mathbb{T}^3) \oplus L_2^{++-}(\mathbb{T}^3) \oplus L_2^{---}(\mathbb{T}^3),$$

bu yerda

$$L_1^- = L_2^{-++}(\mathbb{T}^3) = L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}),$$

$$L_2^- = L_2^{+-+}(\mathbb{T}^3) = L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}),$$

$$L_3^- = L_2^{++-}(\mathbb{T}^3) = L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^-(\mathbb{T}),$$

$$L_{123}^- = L_2^{---}(\mathbb{T}^3) = L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^-(\mathbb{T}).$$

Bu ifodadagi L_1^- qism fazoni quyidagicha ta'riflash mumkin:

$$L_1^- = \{f \in L_2^o(\mathbb{T}^3): f(p_1, p_2, p_3) = -f(-p_1, p_2, p_3) = f(p_1, -p_2, p_3) = f(p_1, p_2, -p_3)\}$$

p_1 argument bo'yicha toq, qolgan p_2 va p_3 argumentlar bo'yicha juft funksiyalardan tashkil topgan qism fazo.

Teorema 1. Faraz qilaylik $\hat{v}$ potensial (2) ko'rinishida bo'lsin. U holda L_1^- , L_2^- va L_3^- qism fazolar $H(\mathbf{k})$ operatorga nisbatan invariant bo'ladi.

[5] ishda L_{123}^- qism fazoning $H(\mathbf{k})$ operatorga nisbatan invariantligi hamda $H_{123}^-(\mathbf{k})$ operatorning spektri topish orqali $H(\mathbf{k})$ operatorning L_{123}^- fazodagi spektri haqida ba'zi natijalar keltirilgan.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz. $H_1^-(\mathbf{k}), H_2^-(\mathbf{k}), H_3^-(\mathbf{k})$ deb $H(\mathbf{k})$ operatorning L_1^- , L_2^- , L_3^- invariant qism fazolardagi toraygani (restriction) ni belgilaymiz. Qo'zg'almas $H_0(\mathbf{k})$ operatorning bu invariant qism fazolardagi toraygani $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ funksiyaga ko'paytirish operatori sifatida aniqlanadi. Integral operator V ning $L_i^-, i = 1, 2, 3$ fazolardagi torayganini $V_i^- = V|_{L_i^-}, i = 1, 2, 3$ ko'rinishda belgilaymiz. Bu operatorning $f \in L_1^-$ elementga ta'siri quyidagicha:

$$(V_1^- f)(\mathbf{p}) = \frac{1}{4\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} \sin p_1 \sin q_1 \{ \bar{v}(1) + 2\bar{v}(2) [\cos p_2 \cos q_2 + \cos p_3 \cos q_3] + \\ + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}(n+2) [\cos(n+1)p_3 \cos(n+1)q_3 + 2\cos p_2 \cos q_2 \cos np_3 \cos nq_3] \} f(\mathbf{q}) d\mathbf{q}.$$

$L_2^+(\mathbb{T})$ fazoning ortonormal bazisini keltiramiz:

$$\psi_0^+(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \{\psi_n^+(q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nq\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Har bir $n \in \mathbb{Z}_+$ uchun $L^+(n)$ bilan ψ_n^+ vektorga tortilgan bir o'lchamli qism fazoni belgilaymiz. $L_2^+(\mathbb{T})$ fazoni quyidagi to'g'ri yig'indiga yoyish mumkin

$$L_2^+(\mathbb{T}) = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus L^+(n), \quad (6)$$

(6) yoyilmadan quyidagi yoyilma kelib chiqadi

$$L_1^- = L_2^{-++}(\mathbb{T}^3) = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \{L_2^{-+}(\mathbb{T}^2) \otimes L^+(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \mathfrak{R}_1^-(n).$$

Bu yerda $\mathfrak{R}_1^-(n) := L_2^{-+}(\mathbb{T}^2) \otimes L^+(n)$, $L_2^{-+}(\mathbb{T}^2) := L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T})$.

Teorema 2. Faraz qilaylik $\hat{v}$ potensial (2) ko'rinishida bo'lsin. U holda barcha $n \in \mathbb{Z}_+$ lar uchun $L_2^{-+}(\mathbb{T}^2) \otimes L^+(n)$ qism fazolar $H_1^-(k_1, k_2, \pi)$ operatorga nisbatan invariant bo'ladi.

Endi

$$(U_{12}f)(p_1, p_2, p_3) = f(p_2, p_1, p_3)$$

tenglik bilan aniqlanuvchi $U_{12}: L_2^- \rightarrow L_1^-$ unitar operatorni kiritamiz. V_1^- va V_2^- operatorlar unitar ekvivalent, ya'ni

$$V_1^- = U_{12}V_2^-U_{12}^{-1}$$

bo'lganligi uchun $H_1^-(k_1, k_2, k_3)$ va $H_2^-(k_2, k_1, k_3)$ operatorlar ham unitar ekvivalent bo'ladi. Shu sababli biz bu ishda $H_1^-(k_1, k_2, k_3)$ operatorning xos qiymatlarini topish bilan cheklanamiz.

Endi kichik β larda $H_1^-(\pi - 2\beta, \pi, \pi)$ operatorning spektri haqida quyidagi tasdiqni keltiramiz.

Teorema 3. Faraz qilaylik $\beta \in (0, \frac{\pi}{2}]$, bo'lsin.

a) Agar $\bar{v}(1) < \sin \beta$ bo'lsa, u holda $H_1^-(\pi - 2\beta, \pi, \pi)$ operator muhim spektr tashqarisida yotuvchi xos qiymatlarga ega emas.

b) Agar biror $n_0 \in \mathbb{N}$ uchun $\bar{v}(n_0 + 1) < \sin \beta < \bar{v}(n_0)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $H_1^-(\pi - 2\beta, \pi, \pi)$ operator muhim spektrdan tashqarida $n_0 - 1$ ta ikki karrali va bitta $z_{n_0}(\beta)$ oddiy xos qiymatga ega. Bu xos qiymatlar quyidagi ko'rinishga ega

$$z_k(\beta) = 6 - \bar{v}(k) - \frac{1}{\bar{v}(k)} \sin^2 \beta, \quad k \in \{1, 2, \dots, n_0\}.$$

Qo'shimcha qilib shuni aytish mumkinki barcha ikki karrali $z_k(\beta)$, $k \in \{1, 2, \dots, n_0 - 1\}$ xos qiymatlarga mos xos funksiyalar (bog'langan holatlar) quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$f_k^{(1)}(\mathbf{p}) = \frac{\sin p_1 \cdot \cos k p_3}{6 - 2\sin \beta \cos p_1 - z_k(\beta)}, \quad f_k^{(2)}(\mathbf{p}) = \frac{\sin p_1 \cdot \cos p_2 \cdot \cos k p_3}{6 - 2\sin \beta \cos p_1 - z_k(\beta)}.$$

Oddiy $z_{n_0}(\beta)$ xos qiymatga mos xos funksiya esa quyidagi ko'rinishga ega:

$$f_{n_0}(\mathbf{p}) = \frac{\sin p_1 \cdot \cos n_0 p_3}{6 - 2 \sin \beta \cos p_1 - z_{n_0}(\beta)}.$$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Абдуллаев Ж. И. Связанные состояния системы двух фермионов на одномерной решетке. Теоретическая и математическая физика, 2006, Т. 147, № 1. 36-47.
2. Абдуллаев Ж. И., Кулиев К. Д., Мамиров Б. У. Бесконечность числа связанных состояний системы двух фермионов на двумерной решетке. Узбекский Математический Журнал, 2016, № 4, 3-16.
3. Абдуллаев Ж. И., Файзиев М.Ш., Шотемиров Й.С. Инвариантные подпространства двухчастичного оператора Шредингера на решетке. Узбекский Математический Журнал, 2009, 3, 3-10.
4. Рид.М., Симон.Б. Методы современной математической физики. Москва, Мир, Т.4. Анализ операторов, 1982.
5. Abdullaev J.I., Toshturdiyev A.M. Bound states of a system of two fermions on invariant subspace. Journal of Modern Physics 2021. Vol 12. 35-49.

WAVELET DENSITY ESTIMATION IN NONPARAMETRIC REGRESSION MODEL

Abdushukurov Abdurakhim

DSc., Tashkent branch of Lomonosov Moscow State University

Muradov Rustam

PhD., Namangan Institute of Engineering and Technology

Abdulvohidov Alisher

Andijan State University

1. Introduction. A wavelet is, as the name suggests, a small wave. Many statistical phenomena have wavelet structure. Often small bursts of high frequency wavelets are followed by lower frequency waves or vice versa. The theory of wavelet reconstruction helps to localize and identify such accumulations of small waves and helps thus to better understand reasons for these phenomena. Wavelet theory is different from Fourier analysis and spectral theory since it is based on a local frequency representation.

The word "wavelet" is used in mathematics to denote a kind of orthonormal bases in $L^2(R)$ with remarkable approximation properties. The theory of wavelets was developed by S.Mallat (1989), I.Daubechies (1992), Y.Meyer (1993) and others (see, [2-4]) in the end of 1980-1990-ies. Qualitatively, the difference between the usual sine wave and a wavelet may be described by the localization property: the sine wave is localized in frequency domain, but not in time domain, while a wavelet is localized both in frequency and time domain.

Wavelet function analysis has now been applied in the investigation of a multitude of physical phenomena, climate analysis, analysis of financial indices, heart monitoring, condition monitoring of rotating machinery, seismic signal denoising, denoising of astronomical signals and images, surface characterization, characterization of turbulent intermittency, video image compression, compression of medical signal records, and so on.

2. Nonparametric regression model and wavelet density estimation. In industrial life-testing, medical research and other studies, the observation of the occurrence of a failure be made impossible by the previous occurrence of a censoring event.

Let $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ denote the survival times and $X_1, X_2, \dots, X_n$ the associated covariates, and let us assume that $(Y_1, X_1), (Y_2, X_2), \dots, (Y_n, X_n)$ are independent and have a joint distribution function (d.f.) $F(x, y)$. Also let $T_1, T_2, \dots, T_n$ denote the independent and identically distribution censoring times with a common d.f. G . It is assumed that (Y_i, X_i) is independent of T_i for each i . In this random right censored model, instead of $\{(Y_i, X_i), i = \overline{1, n}\}$ we observe $\{(Z_i, \delta_i, X_i), i = \overline{1, n}\}$, where $Z_i = \min(Y_i, T_i) = Y_i \wedge T_i$ and $\delta_i = I(Y_i \leq T_i)$, where $I(A)$ stands for indicator of the event A . Let H is distribution function of Z_1 and $\tau_H = \inf\{x : H(x) = 1\} \leq \infty$.

Here, we consider the nonparametric regression model:

$$Y_i = g(X_i) + \sigma(X_i) \cdot \varepsilon_i,$$

where $\sigma(\cdot)$ is the conditional variance representing heteroscedasticity and ε represents random error which is assumed independent and identically distributed. In this regression model we want to estimate Y_i given X_i , i.e., to estimate the mean regression function $g(x) = E(Y / X = x)$. Our goal, is to estimate unknown function g

based on the observations $\{(Z_i, \delta_i, X_i), i = \overline{1, n}\}$. Here we use wavelet-based mean regression function estimators. We assume that the regression function g , is used for $x \in (0, 1)$. Our aim is to estimate g , by empirical wavelet coefficients. Let, $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ are bounded and compactly supported father and mother wavelets:

$$\varphi_{j_0 k}(x) = 2^{j_0/2} \varphi(2^{j_0} x - k), \quad \psi_{jk}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), \quad x \in R, j_0, j \in Z.$$

Then the collection $\{\varphi_{j_0 k}, \psi_{jk}, j \geq j_0, k \in Z\}$ is an orthonormal basis of $L^2(R)$. Therefore, for all $f \in L^2(R)$:

$$f(x) = \sum_{k \in Z} \alpha_{j_0 k} \varphi_{j_0 k}(x) + \sum_{j \geq j_0} \sum_{k \in Z} \beta_{jk} \psi_{jk}(x),$$

where

$$\alpha_{j_0 k} = \int \varphi_{j_0 k}(x) f(x) dx, \quad \beta_{jk} = \int \psi_{jk}(x) f(x) dx.$$

We consider r – regular mother wavelets ψ . Then the wavelet expansion of g is

$$g(x) = \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} \alpha_{j_0 k} \varphi_{j_0 k}(x) + \sum_{j \geq j_0} \sum_{k=0}^{2^j-1} \beta_{jk} \psi_{jk}(x), \quad x \in [0, 1],$$

where

$$\alpha_{j_0 k} = \int \varphi_{j_0 k}(x) f(x) dx, \quad \beta_{jk} = \int \psi_{jk}(x) f(x) dx.$$

Then proposed nonlinear wavelet estimator of $g(x)$ is

$$\hat{g}(x) = \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} \hat{\alpha}_{j_0 k} \varphi_{j_0 k}(x) + \sum_{j \geq j_0} \sum_{k=0}^{2^j-1} \hat{\beta}_{jk} I\left(\left|\hat{\beta}_{jk}\right| > d\left(\frac{\log n}{n}\right)^{1/2}\right) \psi_{jk}(x),$$

where j_0 and j are chose suitable. The coefficients estimators are:

$$\hat{\alpha}_{j_0 k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i Z_i \varphi_{j_0 k}(X_i)}{1 - G_n(Z_i) + \frac{1}{n}}, \quad \hat{\beta}_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i Z_i \psi_{jk}(X_i)}{1 - G_n(Z_i) + \frac{1}{n}},$$

where G_n denote the relative-risk power estimator of author [1].

REFERENCES

1. Abdushukurov A.A. Statistics of incomplete observations, 2009. Tashkent. University Press. 269p.
2. Addison Paul S. The illustrated wavelet transform handbook, 2017, CRC Press, Taylor & Francis Group.
3. Daubechies I. Ten lectures on Wavelets, 1992, SIAM, Philadelphia.
4. Meyer Y. Wavelets: Algorithm and applications, 1993, SIAM, Philadelphia.

ON PROBABILITY: EACH CELL CONTAINS EVEN NUMBER OF PARTICLES. ASYMPTOTICS

Abdushukurov Fazihuddin

Yeoju Technical Institute In Tashkent

Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky of the academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan

Let n, N be integer numbers. A homogeneous allocation scheme of n distinguishable particles by N different cells is named the random variables $\eta_1, \dots, \eta_N$, with the joint distribution defined by formula

$$P\{\eta_1 = k_1 \dots \eta_N = k_N\} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_N!} \left(\frac{1}{N}\right)^n,$$

where $k_1, k_2, \dots, k_N$ are nonnegative integer number such that $k_1 + k_2 + \dots + k_N = n$. Many papers deal with limit theorems for allocation scheme of distinguishable particles by different cells (see [1] and its references).

Denote by $P(n, N)$ the probability of the event: in allocation scheme of $2n$ distinguishable particles by N different cells each cell contains even number of particles.

Observe that

$$\begin{aligned} P(n, N) &= \sum_{k_i \in N, 1 \leq i \leq N, k_1 + k_2 + \dots + k_N = n} \frac{(2n)!}{(2k_1)! (2k_2)! \dots (2k_N)!} \frac{1}{N^{2n}} = \\ &= \sum_{k_i \in N, 1 \leq i \leq N, k_1 + k_2 + \dots + k_N = n} \frac{\frac{\alpha^{2k_1} N}{(2k_1)!} \frac{\alpha^{2k_2} N}{(2k_2)!} \dots \frac{\alpha^{2k_N} N}{(2k_N)!}}{\frac{(\alpha N)^{2n}}{(2n)!}} = \\ &= \left(\frac{ch(\alpha)}{e^\alpha}\right)^N \sum_{k_i \in N, 1 \leq i \leq N, k_1 + k_2 + \dots + k_N = 2n} \frac{\frac{\alpha^{2k_1}}{ch(\alpha)(2k_1)!} \frac{\alpha^{2k_2}}{ch(\alpha)(2k_2)!} \dots \frac{\alpha^{2k_N}}{ch(\alpha)(2k_N)!}}{e^{-\alpha N} \frac{(\alpha N)^{2n}}{(2n)!}} \end{aligned}$$

Therefore, using Stirling formula for estimation of $(2n)!$, for $\alpha = \frac{2n}{N}$ we obtain

$$P(n, N) = (1 + o(1)) \sqrt{4\pi n} \left(\frac{1 + e^{-2\alpha}}{2} \right)^N \mathbf{P}(\xi_1 + \dots + \xi_N = 2n),$$

where $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ are independent random variables with the distribution

$$\mathbf{P}(\xi'_i = 2k) = \frac{\alpha_1^k}{(2k)! ch(\alpha)}, k = 0, 1, 2, \dots,$$

or

$$P(n, N) = (1 + o(1)) \sqrt{4\pi n} \left(\frac{1 + e^{-2\sqrt{\alpha_1}}}{2} \right)^N \mathbf{P}(\xi'_1 + \dots + \xi'_N = n),$$

where $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_N$ are independent random variables with the distribution

$$\mathbf{P}(\xi'_i = k) = \frac{\alpha_1^k}{(2k)! ch(\sqrt{\alpha_1})}, k = 0, 1, 2, \dots, \alpha_1 = \alpha^2.$$

Using various local limit theorems for an estimation of $\mathbf{P}(\xi_1 + \dots + \xi_N = 2n)$ or $\mathbf{P}(\xi'_1 + \dots + \xi'_N = n)$ we obtain various limit theorems for $P(n, N)$.

Observe that the expectation and the variance of ξ_i are

$$e(\alpha) = \alpha th(\alpha), \quad \sigma^2(\alpha) = \frac{\alpha^2}{ch^2(\alpha)} + \alpha th(\alpha).$$

Using Poisson limit theorem for an estimation of the probability

$\mathbf{P}(\xi_1 + \dots + \xi_N = 2n)$ we obtain the following theorem.

Theorem 1. Let $n, N \rightarrow \infty$ such that the family of the numbers

$$N \frac{\alpha^2}{2} = \lambda$$

is bounded. Then we have

$$P(n, N) = (1 + o(1)) \sqrt{4\pi n} e^{-4n} \left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} + O\left(\frac{1}{N}\right) \right).$$

In the next theorem for an estimation of the probability $\mathbf{P}(\xi_1 + \dots + \xi_N = 2n)$ we use the local limit theorem from (Timashev, A.N., [2]).

Theorem 2. Let $0 < \alpha' < \alpha'' < \infty$. Let $n, N \rightarrow \infty$ such that $\alpha' < \alpha < \alpha''$. Then we have

$$P(n, N) = (1 + o(1)) \sqrt{\frac{1}{\frac{\alpha}{ch^2(\alpha)} + th(\alpha)}} \left(\frac{1 + e^{-2\alpha}}{2} \right)^N e^{-NC(\alpha)},$$

where

$$C(\alpha) = \frac{\alpha e^{-2\alpha}}{2(\alpha + sh(\alpha)ch(\alpha))}$$

In the next theorem for an estimation of the probability $\mathbf{P}(\xi_1 + \dots + \xi_N = 2n)$ we use the local limit theorems from (Kolchin, A. V. and Kolchin, V. F., [3]).

REFERENCES

1. Kolchin V. F., Sevast'ynov B. P., Chistiakov V. P. Random allocation. – Scripta Series in Mathematics. V. H. Winston & Sons, Washington, DC, 1978.
2. Timashev, A. N. Asimptotic expansions in probabilistic combinatorics. – M.: TVP. 2011.

3. Kolchin, A. V. and Kolchin, V. F. On transition of distributions of sums of independent identically distributed random variables from one lattice to another in the generalised allocation scheme. *Discrete Math. Appl.*, 16, No. 6, 527–540 (2006); translation from *Diskret. Mat.*, 18, No. 4, 113–127 (2006).

4. A.N. Chuprunov, F.A. Abdushukurov. Poisson Limit Theorems in an Allocation Scheme with an Even Number of Particles in Each Cell. *Lobachevski Journal of Mathematics*. 2020, v.41, N3. pp. 289-297.

PANJARADAGI IKKI BOZONLI SISTEMAGA MOS SCHRÖDINGER OPERATORI XOS QIYMATI HAQIDA

Abduxakimov Saidakbar

PhD, Samarqand davlat universiteti

Samatov Barhayot

Jizzax davlat pedagogika instituti

Faraz qilaylik, Z bir o'lchamli panjara bo'lib, $l^2(Z)$ orqali kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyalarning Hilbert fazosi va $l^{2,e}(Z) \subset l^2(Z)$ juft funksiyalar qism fazosi belgilangan bo'lsin. Biz Z panjaradagi ikkita bir xil bozonlar sistemasiga mos $\hat{H}_{\mu\lambda}(k)$, $k \in T$, Schrödinger operatorini qaraymiz, bunda $\mu, \lambda \in R$.

Panjarada o'zaro qisqa ta'sirli potensial orqali ta'sirlashuvchi ikki kvant zarrachali sistemaga mos ikki zarrachali to'la gamiltonian $\mathbb{H}$ qaraladi. Ikki zarrachali sistema to'la kvaziimpulsi kiritilib, ikki bozonli sistema gamiltoniani Fon-Neyman integraliga yoyiladi. Natijada ikki bozonli sistema gamiltoniani spektrini o'rganish masalasi qavat operatorlar, ya'ni diskret Schrödinger operatorlari spectral xossalarini o'rganish masalasiga keltiriladi [1-2].

Ikkita bir xil bozonlar sistemasiga mos diskret Schrödinger operatori $\hat{H}_{\mu\lambda}(k)$ ning koordinata tasviri $l^{2,e}(Z)$ Hilbert fazosida quyidagicha aniqlangan:

$$\hat{H}_{\mu\lambda}(k) = \hat{H}_0(k) - \hat{V}_{\mu\lambda}.$$

Bu yerda,

$$[\hat{H}_0(k)\hat{f}](x) = \sum_{y \in Z} \hat{\mathcal{E}}_{k,A}(x-y)\hat{f}(y), \hat{f} \in l^{2,o}(Z),$$

bunda

$$\hat{\mathcal{E}}_{k,A}(x) = 2 \cos \frac{kx}{2} \hat{\mathcal{E}}(x),$$

$$\hat{\mathcal{E}}(x) = \begin{cases} -\frac{4\sqrt{2} + 3\pi A}{6}, & |x| = 1, \\ \frac{3\pi + 8A}{12}, & |x| = 2, \\ \frac{2}{(|n| - 2)} \sin \frac{3\pi(2 - |n|)}{4} + \frac{2A}{(1 - |n|)} \sin \frac{\pi(1 - |n|)}{2}, & |x| \neq 1, 2. \end{cases}$$

Ta'sir operatori $\hat{V}_{\mu\lambda}$, $l^{2,e}(Z)$ da

$$\hat{v}_{\mu\lambda}(x) = \begin{cases} \mu/2, & |x| = 0 \\ \lambda/2, & |x| = 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

funksiyaga ko'paytirish operatori, ya'ni

$$(\hat{V}_{\mu\lambda}\hat{f})(x) = \hat{v}_{\mu\lambda}(x)\hat{f}(x), \quad \hat{f} \in l^{2,e}(Z).$$

Faraz qilaylik, $T = (-\pi, \pi]$ bir o'lchamli tor bo'lib, $L^2(T)$ orqali kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalarning Hilbert fazosi va $L^{2,e}(T) \subset L^2(T)$ juft funksiyalar qism fazosi belgilangan bo'lsin. Ikki zarrachali sistemaga mos diskret Schrödinger operatorining impuls tasviri $L^{2,e}(T)$ fazoda quyidagicha:

$$H_{\mu\lambda}(k) = H_0(k) - V_{\mu\lambda}.$$

Bu yerda

$$(H_0(k)f)(p) = \varepsilon_{k,A}(p)f(p),$$

bunda

$$\varepsilon_{k,A}(p) = \varepsilon_A\left(\frac{k}{2} - p\right) + \varepsilon_A\left(\frac{k}{2} + p\right)$$

va

$$\varepsilon_A(p) = \begin{cases} \cos 2p, & p \in (-\pi, -3\pi/4) \cup (3\pi/4, \pi], \\ 0, & p \in [-3\pi/4, -\pi/2] \cup [\pi/2, 3\pi/4], \\ A \cos p & p \in (-\pi/2, \pi/2), \end{cases} \quad A \in [0, 1].$$

$$(V_{\mu\lambda}f)(p) = \frac{\mu}{2\pi} \int_T f(q) dq + \frac{\lambda}{2\pi} \cos p \int_T \cos q f(q) dq, \quad f \in L^{2,e}(T).$$

V operatorning rangi ko'pi bilan ikkiga teng bo'lganligi uchun, muhim spektr turg'unligi haqidagi Veyl teoremasiga ko'ra

$$\sigma_{ess}(H_{\mu\lambda}(k)) = \sigma(H_0(k)) = [\varepsilon_{min}(k, A), \varepsilon_{max}(k, A)],$$

bundan

$$\varepsilon_{min}(k, A) = \min_{p \in T} \varepsilon_{k,A}(p), \quad \varepsilon_{max}(k, A) = \max_{p \in T} \varepsilon_{k,A}(p)$$

Teorema: Faraz qilaylik $k = 0 \in T$ bo'lsin, u holda shunday $A \in (0, 1)$ va $(\mu_0, \lambda_0) \in R^2$ mavjudki, $H_{\mu\lambda}(0)$ operator muhim spektrdan o'ngda ikki karrali $z_{\mu_0\lambda_0}$ xos qiymatga ega bo'ladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Albeverio S., Lakaev S.N., Makarov K.A., Muminov Z.I.: The threshold effects for the two-particle hamiltonians on lattices, Comm.Math.Phys. **262**(2006), 91-115.
2. Lakaev S.N., Kholmatov Sh.Yu., Khamidov Sh.I., Bose-Hubbard models with on-site and nearest-neighbor interactions: exactly solvable case, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **54**, (2021).

PANJARADA BIR ZARRACHALI SCHRÖDINGER OPERATORI XOS QIYMATINING MAVJUDLIGI HAQIDA

Ahmadov Rahmatjon

Jizzax davlat pedagogika instituti

Panjarada o'zaro qisqa ta'sirli potensial orqali ta'sirlashuvchi ikki kvant zarrachali sistemaga mos ikki zarrachali to'la gamiltonian $\mathbb{H}$ qaraladi. Ikki zarrachali sistema to'la kvaziimpulsi kiritilib, ikki bozonli sistema gamiltoniani Fon-Neyman integraliga yoyiladi. Natijada ikki bozonli sistema gamiltoniani spektrini o'rganish masalasi qavat operatorlar, ya'ni diskret Schrödinger operatorlari spectral xossalarini o'rganish masalasiga keltiriladi [1-2].

Faraz qilaylik, Z bir o'lchamli panjara bo'lib, $l^2(Z)$ orqali kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyalarning Hilbert fazosi va $l^{2,e}(Z) \subset l^2(Z)$ juft funksiyalar qism fazosi belgilangan bo'lsin. Biz Z panjaradagi bitta kvant zarrachaning tashqi potensial maydon $\hat{v}$ dagi harakatini ifodalovchi $\hat{H}_\mu$, $\mu > 0$ hamiltonianini qaraymiz, bunda μ bog'langanlik o'zgarmasi.

Berilgan $\hat{v}$ potensial maydondagi bir kvant zarrachali sistema hamiltoniani koordinata tasviri $l^{2,e}(Z)$ Hilbert fazosida quyidagicha aniqlangan:

$$\hat{H}_\mu = \hat{H}_0 - \hat{V}_\mu.$$

Bu yerda,

$$[\hat{H}_0 \hat{f}](x) = \sum_{y \in Z} \hat{\varepsilon}(x - y) \hat{f}(y), \hat{f} \in l^{2,o}(Z),$$

bunda

$$\hat{\varepsilon}(x) = \begin{cases} 2, & x = 0, \\ -1/2, & |x| = 1, \\ -1/2, & |x| = 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

Ta'sir operatori $\hat{V}_\mu$, $l^{2,e}(Z)$ da

$$\hat{v}_\mu(x) = \begin{cases} \frac{\mu}{2}, & |x| = 0 \\ 0, & |x| \neq 0 \end{cases}$$

funksiyaga ko'paytirish operatori, ya'ni

$$(\hat{V}_\mu \hat{f})(x) = \hat{v}_\mu(x) \hat{f}(x), \quad \hat{f} \in l^{2,e}(Z).$$

Faraz qilaylik, $T = (-\pi, \pi]$ bir o'lchamli tor bo'lib, $L^2(T)$ orqali kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalarning Hilbert fazosi va $L^{2,e}(T) \subset L^2(T)$ juft funksiyalar qism fazosi belgilangan bo'lsin. Bir zarrachali sistemaga mos diskret Schrödinger operatorining impuls tasviri $L^{2,e}(T)$ fazoda quyidagicha:

$$H_\mu = H_0 - V_\mu.$$

Bu yerda

$$\begin{aligned} (H_0 f)(p) &= (2 - \cos p - \cos 2p) f(p), \\ (V_\mu f)(p) &= \frac{\mu}{2\pi} \int_T f(q) dq, \quad f \in L^{2,e}(T). \end{aligned}$$

V operatorning rangi ko'pi bilan birga teng bo'lganligi uchun, muhim spektr turg'unligi haqidagi Veyl teoremasiga ko'ra

$$\sigma_{ess}(H_\mu) = \sigma(H_0) = \left[0, \frac{25}{8}\right].$$

Teorema: H_μ operator ixtiyoriy $\mu > 0$ da muhim spektrdan chapda yagona z_μ xos qiymatga ega va unga mos xos funksiya

$$f(p) = \frac{C\mu}{2 - \cos p - \cos 2p - z_\mu}, \quad C - \text{normallashtiruvchi o'zgarmas}.$$

ko'rinishda.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Albeverio S., Lakaev S.N., Makarov K.A., Muminov Z.I.: The threshold effects for the two-particle hamiltonians on lattices, Comm.Math.Phys. **262**(2006), 91-115.

2. Lakaev S.N., Kholmatov Sh.Yu., Khamidov Sh.I., Bose–Hubbard models with on-site and nearest–neighbor interactions: exactly solvable case, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **54**, (2021).

PANJARADA BIR ZARRACHALI SCHRÖDINGER OPERATORI XOS QIYMATI HAQIDA

Azizova Mukammal

Samarqand davlat universiteti

Esirgapov Ilyosjon

Jizzax davlat pedagogika instituti

Panjarada o'zaro qisqa ta'sirli potensial orqali ta'sirlashuvchi ikki kvant zarrachali sistemaga mos ikki zarrachali to'la gamiltonian $\mathbb{H}$ qaraladi. Ikki zarrachali sistema to'la kvaziimpulsi kiritilib, ikki fermionli sistema gamiltoniani Fon-Neyman integraliga yoyiladi. Natijada ikki fermionli sistema gamiltoniani spektrini o'rganish masalasi qavat operatorlar, ya'ni diskret Schrödinger operatorlari spectral xossalarini o'rganish masalasiga keltiriladi [1-2].

Faraz qilaylik, Z bir o'lchamli panjara bo'lib, $l^2(Z)$ orqali kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyalarning Hilbert fazosi va $l^{2,o}(Z) \subset l^2(Z)$ toq funksiyalar qism fazosi belgilangan bo'lsin. Biz Z panjaradagi bitta kvant zarrachaning tashqi potensial maydon $\hat{v}$ dagi harakatini ifodalovchi $\hat{H}_\lambda$, $\lambda > 0$ hamiltonianini qaraymiz, bunda μ bog'langanlik o'zgarmasi.

Berilgan $\hat{v}$ potensial maydondagi bir kvant zarrachali sistema hamiltoniani koordinata tasviri $l^{2,o}(Z)$ Hilbert fazosida quyidagicha aniqlangan:

$$\hat{H}_\lambda = \hat{H}_0 - \hat{V}_\lambda.$$

Bu yerda,

$$[\hat{H}_0 \hat{f}](x) = \sum_{y \in Z} \hat{\varepsilon}(x - y) \hat{f}(y), \hat{f} \in l^{2,o}(Z),$$

bunda

$$\hat{\varepsilon}(x) = \begin{cases} 2, & x = 0, \\ -1/2, & |x| = 1, \\ -1/2, & |x| = 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

Ta'sir operatori $\hat{V}_\lambda$, $l^{2,o}(Z)$ da

$$\hat{v}_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2}, & |x| = 1 \\ 0, & |x| \neq 1 \end{cases}$$

funksiyaga ko'paytirish operatori, ya'ni

$$(\hat{V}_\lambda \hat{f})(x) = \hat{v}_\lambda(x) \hat{f}(x), \quad \hat{f} \in l^{2,o}(Z).$$

Faraz qilaylik, $T = (-\pi, \pi]$ bir o'lchamli tor bo'lib, $L^2(T)$ orqali kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalarning Hilbert fazosi va $L^{2,o}(T) \subset L^2(T)$ toq funksiyalar qism fazosi belgilangan bo'lsin. Bir zarrachali sistemaga mos diskret Schrödinger operatorining impuls tasviri $L^{2,o}(T)$ fazoda quyidagicha:

$$H_\lambda = H_0 - V_\lambda.$$

Bu yerda

$$(H_0 f)(p) = (2 - \cos p - \cos 2p) f(p),$$

$$(V_\mu f)(p) = \frac{\lambda}{2\pi} \sin p \int_T \sin q f(q) dq, \quad f \in L^{2,0}(T).$$

V operatorning rangi ko'pi bilan birga teng bo'lganligi uchun, muhim spektr turg'unligi haqidagi Veyl teoremasiga ko'ra

$$\sigma_{ess}(H_\mu) = \sigma(H_0) = \left[0, \frac{25}{8}\right].$$

Teorema: a) $\lambda > \frac{20}{25-7\sqrt{5}}$ bo'lsin. U holda H_λ operator muhim spektrdan chapda yagona z_λ xos qiymatga ega va unga mos xos funksiya

$$f(p) = \frac{C\lambda \sin p}{2 - \cos p - \cos 2p - z_\lambda}, \quad C - \text{normallashtiruvchi o'zgarmas}$$

ko'rinishda.

b) $\lambda < \frac{20}{25-7\sqrt{5}}$ bo'lsin. U holda H_λ operator muhim spektrdan chapda xos qiymatga ega emas.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Albeverio S., Lakaev S.N., Makarov K.A., Muminov Z.I.: The threshold effects for the two-particle hamiltonians on lattices, Comm.Math.Phys. **262**(2006), 91-115.
2. Lakaev S.N., Abdukhakimov S.Kh. Threshold effects in a two-fermion system on an optical lattice. Theoretical and Mathematical Physics, 2020. – Vol.203. – №2. – P. 251-268.

PANJARADAGI UCH ZARRACHALI SISTEMAGA MOS MODEL OPERATORNING XOS FUNKSIYALARI UCHUN FADDEYEV TENGLAMASI

Bahronov Bekzod

Buxoro davlat universiteti

$d \in \mathbb{N}$ natural soni uchun $T^d := (-\pi; \pi]^d$ orqali d o'lchamli torni, $L_2^s((T^d)^2)$ orqali $(T^d)^2$ da aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymatlarni qabul qiluvchi) simmetrik funksiyalarning Hilbert fazosini belgilaymiz. $L_2^s((T^d)^2)$ Hilbert fazosida ta'sir qiluvchi

$$H_{\mu, \lambda} := H_0 - \mu(V_{11} + V_{12}) + \lambda(V_{21} + V_{22}) \quad (1)$$

tenglik orqali aniqlanuvchi operatorni qaraymiz. Bunda $\mu, \lambda > 0$ ta'sirlashish parametrlari, H_0 operator $u(\cdot, \cdot)$ funksiyaga ko'paytirish operatori:

$$(H_0 f)(x, y) = u(x, y) f(x, y),$$

V_{ij} , $i, j = 1, 2$ – operatorlar esa lokal bo'lmagan potensial operatorlari:

$$(V_{i1} f)(x, y) = v_i(x) \int_{T^d} v_i(t) f(t, y) dt, \quad (V_{i2} f)(x, y) = v_i(y) \int_{T^d} v_i(t) f(x, t) dt;$$

$u(\cdot, \cdot) - (T^d)^2$ aniqlangan haqiqiy qiymatli uzluksiz, simmetrik funksiya, $v_i(\cdot), i = 1, 2$ lar esa T^d da aniqlangan haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiyalar.

Funksional analiz elementlaridan foydalanib, (1) tenglik yordamida ta'sir qiluvchi $H_{\mu,\lambda}$ operatorning $L_2^s((T^d)^2)$ Hilbert fazosidagi chiziqli, chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma ekanligini ko'rsatish mumkin.

Mazkur ishning asosiy natijalarini bayon qilish maqsadida $H_{\mu,\lambda}$ operator bilan bir qatorda $L_2(T^d)$ Hilbert fazosida

$$h_{\mu,\lambda}(x) := h_{0,0}(x) - \mu v_1 + \lambda v_2, \quad \mu, \lambda > 0, \quad x \in T^d$$

kabi ta'sir qiluvchi va Fridriks modellari oilasi deb ataluvchi operatorni qaraymiz. Bu yerda

$$(h_{0,0}(x)f)(y) = u(x, y)f(y),$$

$$(v_i f)(y) = v_i(y) \int_{T^d} v_i(t) f(t) dt.$$

Kiritilgan $h_{\mu,\lambda}(x)$ operator $L_2(T^d)$ Hilbert fazosidagi chiziqli, chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma ekanligini oson ko'rsatish mumkin.

Chekli o'lchamli qo'zg'alishlarda muhim spektrning o'zgarmasligi haqidagi Veyl teoremasiga ko'ra

$$\sigma_{ess}(h_{\mu,\lambda}(x)) = [m(x); M(x)]$$

tenglik o'rinlidir, bu yerda $m(x)$ va $M(x)$ sonlari

$$m(x) := \min_{y \in T^d} u(x, y), \quad M(x) := \max_{y \in T^d} u(x, y).$$

formulalar orqali aniqlanadi.

Har bir fiksirlangan $\mu, \lambda > 0$ va $x \in T^d$ lar uchun $C \setminus [m(x), M(x)]$ sohada regulyar bo'lgan

$$\Delta_{\mu,\lambda}(z) := \Delta_{\mu}^{(1)}(z) \Delta_{\lambda}^{(2)}(z) + \mu \lambda (I_{12}(z))^2$$

funksiyani qaraymiz. Odatda $\Delta_{\mu,\lambda}(z)$ funksiya $h_{\mu,\lambda}(x)$ operatorga mos Fredholm detrimanti deyiladi.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$m := \min_{x,y \in T^d} u(x, y), \quad M := \max_{x,y \in T^d} u(x, y),$$

$$\sum_{\mu,\lambda} := \bigcup_{x \in T^d} \sigma_{disc}(h_{\mu,\lambda}(x)) \cup [m; M].$$

Har bir fiksirlangan $\mu, \lambda > 0$ va $z \in C \setminus [m; M]$ sonlari uchun $L_2^{(2)}(T^d)$ fazoda

$$A_{\mu,\lambda}(z) := \begin{pmatrix} A_{11}(\mu, z) & A_{12}(\lambda, z) \\ A_{21}(\mu, z) & A_{22}(\lambda, z) \end{pmatrix}, \quad K_{\mu,\lambda}(z) := \begin{pmatrix} K_{11}(\mu, z) & K_{12}(\lambda, z) \\ K_{21}(\mu, z) & K_{22}(\lambda, z) \end{pmatrix}$$

kabi aniqlanuvchi 2-tartibli operatorli matritsalarini qaraymiz. Ularning matritsaviy elementlari

$$(A_{11}(\mu, z) \varphi_1)(x) = \varphi_1(x) - \mu \varphi_1(x) \int_{T^d} \frac{v_1^2(t)}{u(x, t) - z} dt;$$

$$(A_{12}(\mu, z) \varphi_2)(x) = \lambda \varphi_2(x) \int_{T^d} \frac{v_1(t) v_2(t)}{u(x, t) - z} dt;$$

$$\begin{aligned}
(A_{21}(\mu, z)\varphi_1)(x) &= -\mu \varphi_1(x) \int_{T^d} \frac{v_1(t)v_2(t)}{u(x, t) - z} dt ; \\
(A_{22}(\mu, z)\varphi_2)(x) &= \varphi_2(x) + \lambda \varphi_1(x) \int_{T^d} \frac{v_2^2(t)}{u(x, t) - z} dt ; \\
(K_{11}(\mu, z)\varphi_1)(x) &= \mu v_1(x) \int_{T^d} \frac{v_1(t)\varphi_1(t)}{u(x, t) - z} dt ; \\
(K_{12}(\mu, z)\varphi_2)(x) &= -\lambda v_2(x) \int_{T^d} \frac{v_1(t)\varphi_2(t)}{u(x, t) - z} dt ; \\
(K_{21}(\mu, z)\varphi_1)(x) &= \mu v_1(x) \int_{T^d} \frac{v_2(t)\varphi_1(t)}{u(x, t) - z} dt ; \\
(K_{22}(\mu, z)\varphi_2)(x) &= -\lambda v_2(x) \int_{T^d} \frac{v_2(t)\varphi_2(t)}{u(x, t) - z} dt ;
\end{aligned}$$

tengliklar orqali ta'sir qiladi.

1-teorema. Agar $\mu, \lambda > 0$ va $z \in C \setminus \sum_{\mu, \lambda}$ sonlari uchun $A_{\mu, \lambda}(z)$ teskarilanuvchan operator bo'lib, uning $A_{\mu, \lambda}^{-1}(z)$ teskari operatori

$$A_{\mu, \lambda}^{-1}(z) = \frac{1}{\Delta_{\mu, \lambda}(z)} \begin{pmatrix} A_{22}(\lambda, z) & -A_{12}(\lambda, z) \\ -A_{21}(\mu, z) & A_{11}(\mu, z) \end{pmatrix}$$

ko'rinishga ega.

Endi har bir fiksirlangan $\mu, \lambda > 0$ va $z \in C \setminus \sum_{\mu, \lambda}$ sonlari uchun $L_2^{(2)}(T^d)$ Hilbert fazosida

$$T_{\mu, \lambda}(z) = A_{\mu, \lambda}^{-1}(z) K_{\mu, \lambda}(z)$$

operatorni qaraymiz.

Quyidagi teorema $H_{\mu, \lambda}$ va $T_{\mu, \lambda}(z)$ operatorlarning xos qiymatlari orasidagi bog'lanishni ifodalaydi.

2-teorema. $z \in C \setminus \sum_{\mu, \lambda}$ soni $H_{\mu, \lambda}$ operatorning xos qiymati bo'lishi uchun 1 soni $T_{\mu, \lambda}(z)$ operatorning xos qiymati bo'lishi zarur va yetarli. Bundan tashqari z va 1 sonlarining karraligi ustma-ust tushadi.

Odatda $\varphi = T_{\mu, \lambda}(z)\varphi$ operatorli tenglamaga $H_{\mu, \lambda}$ model operator xos funksiyalariga mos Faddeyev tenglamasi deyiladi. Bu tenglama yordamida $H_{\mu, \lambda}$ operator muhim spektrini tavsiflash mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. T.H.Rasulov, B.I.Bahronov. Structure of the numerical range of a Friedrichs model: 1D case with rank two perturbation Bulletin of the Institute of Mathematics, 2020.
2. Т.Х.Расулов, Б.И.Бахронов. О спектре тензорной суммы моделей Фридрихса. Молодой ученый. №9 (89), 2015, С. 17-20.
3. Т.Х.Расулов, Б.И.Бахронов. Условия существования виртуальных уровней модели Фридрихса с двумерным возмущением. Сборник тезисов Международной

конференции "Комплексный анализ и теория аппроксимаций", Уфа, Россия, 2019, С. 40-41.

4. Т.Х.Расулов, Б.И.Бахронов. Пороговые собственные значение и резонансы модели Фридрихса с двумерным возмущением. Научный вестник БухГУ, № 3 (2019), С. 6-10.

ESTIMATION OF DISTRIBUTION FUNCTION BASED ON PRESMOOTHED RELATIVE-RISK FUNCTION

Bozorov Suxrob

Gulistan state university

Censored data occur in survival analysis, bio-medical trials, industrial experiments. There are several schemas of censoring (from the right, left, both sides, mixed with competing risks and others). However, in statistical literature right random censoring is wide spread, in so far as it was easily described from the methodological point of view. Here we consider also this kind of censorship in order to comparing our results with others.

Let $X_1, X_2, \dots$ and $Y_1, Y_2, \dots$ be two independent sequences of independent and identically distributed (i.i.d.) random variables (r.v.-s) with common unknown continuous distribution functions (d.f.-s) F and G , respectively. Let the X_j be censored on the right by Y_j , so that the observations available for us at the n -th stage consist of the sample $C^{(n)} = \{(Z_j, \delta_j), 1 \leq j \leq n\}$, where $Z_j = \min(X_j, Y_j)$ and $\delta_j = I(X_j \leq Y_j)$ with $I(A)$ meaning the indicator of the event A . The main problem consists a nonparametrical estimating of d.f. F with nuisance d.f. G based on censored sample $C^{(n)}$, where the number of observed X_j -s, $v_n = \delta_1 + \dots + \delta_n$ is a random.

Kaplan and Meier [1] were the first to suggest the product-limit (PL) estimator F_n^{PL} of F defined as

$$F_n^{PL}(t) = \begin{cases} 1 - \prod_{\{j: Z_{(j)} \leq t\}} \left(1 - \frac{\delta_{(j)}}{n - j + 1}\right), & t \leq Z_{(n)}, \\ 1, & t > Z_{(n)}, \quad \delta_{(n)} = 1, \\ \text{undefined}, & t > Z_{(n)}, \quad \delta_{(n)} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

where $Z_{(1)} \leq \dots \leq Z_{(n)}$ are the order statistics of Z -sample $\{Z_j, 1 \leq j \leq n\}$ and $\{\delta_{(j)}, 1 \leq j \leq n\}$ the sequence of indicators adjunct to the ordered Z -sample. There are a different versions of PL-estimators. However, those do not coincide, if the largest Z_j is a censoring time. There is an enormous set of the works on investigating of several properties of PL-estimators and their application on statistical problems, specially in case of right random censorship. However F_n^{PL} is not a unique estimator of d.f. F . Abdushukurov [2, 3] proposed another estimator of F , of relative-risk power type:

$$F_n^{RR}(t) = 1 - (1 - H_n(t))^{R_n(t)} = \begin{cases} 0, & t < Z_{(1)}, \\ 1 - \left(\frac{n-j}{n}\right)^{R_n(t)}, & Z_{(j)} \leq t < Z_{(j+1)}, \quad 1 \leq j \leq n-1, \\ 1, & t \geq Z_{(n)}, \end{cases} \quad (2)$$

where $H_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I(Z_j \leq t)$, $t \in \mathbb{R}^1 \equiv (-\infty; +\infty)$ is an empirical estimator of d.f. $P(Z_j \leq t) = 1 - (1 - F(t))(1 - G(t)) \equiv H(t)$ and $R_n(t) = (\Lambda_n(t))^{-1} \Lambda_{1n}(t)$ is an estimator of relative-risk function $R(t) = (\Lambda(t))^{-1} \Lambda_1(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$. Here cumulative hazard functions (c.h.f.-s) Λ, Λ_0 and Λ_1 corresponding to d.f.-s H, G and F defined as

$$\begin{aligned}\Lambda(t) &= \int_{-\infty}^t \frac{dH(u)}{1 - H(u-)} = \Lambda_0(t) + \Lambda_1(t), \\ \Lambda_0(t) &= \int_{-\infty}^t \frac{dG(u)}{1 - G(u-)} = \int_{-\infty}^t \frac{dH_0(u)}{1 - H(u-)}, \\ \Lambda_1(t) &= \int_{-\infty}^t \frac{dF(u)}{1 - F(u-)} = \int_{-\infty}^t \frac{dH_1(u)}{1 - H(u-)},\end{aligned}\quad (3)$$

with subdistribution functions $H_0(t) + H_1(t) = H(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$,

$$H_0(t) = P(Z_j \leq t, \delta_j = 0) = \int_{-\infty}^t (1 - F(u-)) dG(u), \quad H_1(t) = P(Z_j \leq t, \delta_j = 1) = \int_{-\infty}^t (1 - G(u-)) dF(u).$$

The corresponding estimators of c.h.f.-s (3) are $\Lambda_n(t) = \int_{-\infty}^t \frac{dH_n(u)}{1 - H_n(u-)} = \Lambda_{0n}(t) + \Lambda_{1n}(t)$,

where

$$\Lambda_{kn}(t) = \int_{-\infty}^t \frac{dH_{kn}(u)}{1 - H_n(u-)}, \quad k = 0, 1; \quad H_{kn}(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I(Z_j \leq t, \delta_j = k) \text{ are empirical counterparts of}$$

$H_k(t)$, $k = 0, 1$ with $H_{0n}(t) + H_{1n}(t) = H_n(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$.

In [2-4] it was shown that both of estimators (1) and (2) have a similar asymptotic properties tending to the same limiting Gaussian process. However, the relative-risk power estimator (2) has some small-sample advantages with respect to PL-estimator (1). For example, it is not sensitive to censoring in last observed point $Z_{(n)}$, since $F_n^{RR}(Z_{(n)}) = 1$ and it is

identifiable with the model: $(1 - F_n^{RR}(t))(1 - G_n^{RR}(t)) = 1 - H_n(t)$, $n \geq 1, t \in \mathbb{R}^1$, where

$G_n^{RR}(t) = 1 - (1 - H_n(t))^{1 - R_n(t)}$ is an corresponding estimator of d.f. $G(t)$. In [4] it was proposed

several extended versions of estimator (2) in generalized models of incomplete observations mixed with competing risks. These estimators were also extensively studied in some statistical problems. It is not difficult to observe that estimator (2) is a natural extension of well-know ACL-(Abdushukurov-Cheng-Lin) estimator of F in simple Proportional Hazards

Model (PHM): $F_n^{ACL}(t) = 1 - (1 - H_n(t))^{p_n}$, $t \in \mathbb{R}^1$, where $p_n = \frac{V_n}{n}$ is an estimator of probability

$p = P(\delta_j = 1)$, which is value of the constant relative-risk function $R(t) \equiv p$ (so far as in PHM,

$\Lambda_1(t) = p\Lambda(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$). Note that F_n^{ACL} was independently proposed and studied by

Abdushukurov [5] and Chen, Lin [6] (for more information, see also Csörgő [7]). This estimator was studied, extended and used by many other authors up present. The main property of PHM is its characterization by independence of subsamples $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ and

$\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$. This property is equivalent to relation $1 - G(t) = (1 - F(t))^\beta$, $t \in \mathbb{R}^1$ for some positive

β . In PHM, $p = \frac{1}{1 + \beta}$ and therefore β is a censoring parameter. Estimator F_n^{ACL} in PHM is

asymptotically efficient with respect to F_n^{PL} . This advantage of estimator is well preserved for plug-in estimators of many functionals (see, [2, 5, 7]). That is why, in this framework the conditional probability that datum is not censored given its observed value

$$p(t) = P(\delta_j = 1 / Z_j = t) = E[\delta_j / Z_j = t], t \in \mathbb{R}^1, \quad (4)$$

is a very important function, which in PHM is constant $p(t) = \frac{1}{1+\beta}$, $t \in \mathbb{R}^1$. Moreover, the key

role of probability (4) takes part in expressing c.h.f. Λ_1 via Λ as $\Lambda_1(t) = \int_{-\infty}^t p(u) d\Lambda(u)$, $t \in \mathbb{R}^1$,

and, therefore, relative-risk function given as $R(t) = (\Lambda(t))^{-1} \int_{-\infty}^t p(u) d\Lambda(u)$, $t \in \mathbb{R}^1$.

Probability (4) is a regression of δ_j on Z_j . Hence, it can be estimated by some of regression statistics. We have used following nonparametric regression estimator of Nadaraya [8] and Watson [9]:

$$p_n(t) = \left[\frac{1}{nh(n)} \sum_{j=1}^n k\left(\frac{t-Z_j}{h(n)}\right) \right]^{-1} \left[\frac{1}{nh(n)} \sum_{j=1}^n \delta_j k\left(\frac{t-Z_j}{h(n)}\right) \right], \quad (5)$$

where the kernel $k(\cdot)$ is a given probability density function and $\{h = h(n), n \geq 1\}$ is a bandwidth sequence such that: $h \downarrow 0, n \rightarrow \infty$. In case of dependence of probability (4) on unknown parameters it may be estimated parametrically (see, Dikta [10] in this context). Cao et. al. [11] proposed following presmoothed PL-estimator of d.f. F by replacing the censoring indicators $\delta_{(j)}$ in the expression of PL-estimator (1) by the estimator (5) at the observed data points:

$$F_n^p(t) = 1 - \prod_{\{j: Z_{(j)} \leq t\}} \left(1 - \frac{p_n(Z_{(j)})}{n-j+1} \right), t \in \mathbb{R}^1. \quad (6)$$

Some asymptotic properties of estimator (6) were investigated in [11, 12]. Taking into account some advantages of estimator (2) with respect to (1), we propose a new presmoothed relative-risk power (PRRP) estimator:

$$F_n^{PR}(t) = 1 - (1 - H_n(t))^{R_n^p(t)} = \begin{cases} 0, & t < Z_{(1)}, \\ 1 - \left(\frac{n-j}{n} \right)^{R_n^p(t)}, & Z_{(j)} \leq t < Z_{(j+1)}, 1 \leq j \leq n-1, \\ 1, & t \geq Z_{(n)}, \end{cases} \quad (7)$$

where $R_n^p(t) = (\Lambda_n(t))^{-1} \Lambda_{1n}^p(t) = (\Lambda_n(t))^{-1} \int_{-\infty}^t p_n(u) d\Lambda_n(u)$, $t \in \mathbb{R}^1$, is a partially presmoothed analogue of estimator $R_n(t)$. For probability mass function (4) smooth estimator (5) is used in formula for c.h.f. $\Lambda_1(t)$. But the estimator (7) is not smooth. We can see that estimator (7) also well defined in whole line without any conditions on censorship.

Let's denote $r(n) = h^2(n) + (nh(n))^{-1/2} (\log n)^{1/2}$. In order to investigating the properties of estimator (7) we need the following conditions:

(C1) $(F, G) \in K = \{(F, G) : N_F \cap N_G \neq \emptyset, P(X_j \leq Y_j) \in (0, 1)\}$, where $N_F = \{t : 0 < F(t) < 1\}$ and $N_G = \{t : 0 < G(t) < 1\}$;

- (C2) Numbers α, β and γ are such that $\min\{H(\alpha), 1-H(\beta)\} \geq \gamma(0,1)$,
 $\alpha > \tau_H = \sup\{t: H(t) = 0\}$ and $\beta < T_H = \inf\{t: H(t) = 1\}, [\alpha, \beta] \neq \emptyset$;
- (C3) For all $n \geq 1$ there takes place $P(0 < \nu_n < n) = 1$;
- (C4) k is a symmetric, twice continuously differentiable and bounded variation density function with compact support;
- (C5) Density $q(t) = H'(t)$ exists, is four times continuously differentiable at $t \in [\alpha, \beta]$ and $\sup_{\alpha \leq t \leq \beta} q(t) > 0$;
- (C6) $p(t)$ is four times continuously differentiable at $t \in [\alpha, \beta]$;
- (C7) $n^{1-\varepsilon} \cdot h(n) \rightarrow \infty$ for some $\varepsilon > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} h^{\lambda}(n) < \infty$ for some $\lambda > 0$ and

$$h^2(n) = o\left((nh(n))^{-1/2} \cdot \left(\log\left(\frac{1}{h(n)}\right)\right)^{1/2}\right).$$

Consider random functions $\varphi_1(t; z) = \frac{p(t)}{1-H(t)}(I(Z \leq t) - H(t))$,

$$\varphi_2(t; z) = \int_{-\infty}^t \frac{I(Z \leq u) - H(u)}{1-H(u)} p'(u) du, \quad \varphi_3(t; z, \delta) = \int_{-\infty}^t k\left(\frac{u-Z}{h}\right) \frac{(\delta - p(u))}{1-H(u)} du.$$

In the next theorem, we will show that PRRP estimator can be approximated by summ of i.i.d. random functions on t with the rate for the remainder term tending to zero at $n \rightarrow \infty$ almost surely.

Theorem 1. If the conditions (C1)–(C7) are fulfilled, then there holds

$$F_n^{PR}(t) - F(t) = (1 - F(t))\Omega_n(t) + Q_n(t) \quad (8)$$

with $\sup_{\alpha \leq t \leq \beta} |Q_n(t)| = O\left(\max\left\{(r(n)\log n)^2, \frac{\log n}{n}\right\}\right)^{a.s.}$, where $\Omega_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\varphi_1(t; Z_i) - \varphi_2(t; Z_i) + \varphi_3(t; Z_i, \delta_i)]$.

REFERENCES

1. Kaplan, E. L. and Meier, P. (1958) Nonparametric estimation from incomplete observation. *J. Am. Stat. Assoc.* **53**, 457-481.
2. Abdushukurov, A. A. (1998) Nonparametric estimation of the distribution function based on relative-risk function. *Commun. Stat.: Theory Meth.* **27**, 1991-2012.
3. Abdushukurov, A. A. (1999) On nonparametric estimation of reliability indices by censored samples. *Theory Probab. Appl.* **43**, 3-11.
4. Abdushukurov, A. A. (2011) Estimation of Unknown Distributions from Incomplete Observations and their Properties. *LAP Lambert Academic, Saarbrücken* [in Russian].
5. Abdushukurov, A. A. (1987) Nonparametric estimation in proportional hazards model of random censorship. *VINITI* **3448** (B87).
6. Cheng, P. E. and Lin, G. D. (1987) Maximum likelihood estimation of survival function under the Koziol-Green proportional hazards model. *Stat. Probab. Lett.* **5**, 75-80.
7. Csörgő, S. (1988) Estimation in the proportional hazards model of random censorship. *Statistics*, **19**, 437-463.
8. Nadaraya, E. A. (1964) On estimating regression. *Probab. Theor. Relat. Fields*, **61**, 405-415.
9. Watson, G. S. (1964) Smooth regression analysis. *Sankhya, Ser. A* **26**, 359-372.

10. Dikta, J. (1998) On semiparametric random censorship models. *J. Stat. Plann. Infer.* **66**, 253-279.
11. Cao, R., Lopez-de-Ullibarri, I., Janssen, P. and Veraverbeke, N. (2005) Presmoothed Kaplan-Meier and Nelson-Aalen estimators. *J. Nonparam. Stat.*, **17**, 31-56.
12. Jacome, M. A. and Cao, R. (2007) Almost sure asymptotic representation for the presmoothed distribution and density estimators for censored data. *Statistics*, **41**, 517-534.

JARAYONNI PUASSON QONUNIGA BO'YSUNISHINI TEKSHIRISHNING NAZORAT KARTA USULI HAQIDA

Dadamirzayeva Odina

ADU

Sifat belgisi bo'yicha nazorat kartalar (NK) qurishda sifat belgini ifodolovchi X tasodifiy miqdorning qanday qonunga bo'ysunishini bilish amaliy nuqtai nazardan muhim hisoblanadi. Buning uchun ishlab chiqarishdan to'plangan ma'lumotlar (tanlanmalar) asosida X ning taqsimoti haqidagi gipotezani tekshiriladi.

Ushbu axborotda biz K.Pirsonning muvofiqlik alomatiga asoslangan holda X ning taqsimoti Puasson qonuniga bo'ysunishini tekshiruvchi NKni qurishni va uni amalda ishlatish haqida fikr yuritamiz.

Ma'lumki, K.Pirsonning muvofiqlik alomati emperik (kuzatilgan) chastotalar bilan nazariy chastotalarni taqqoslash uchun ishlatiladi. Bunda X ning tayin $F_0(x)$ taqsimotga ega bo'lishi haqidagi bosh gipoteza tekshiriladi:

$$H_0: F(x) = F_0(x) ; \quad H_1: F(x) \neq F_0(x).$$

Biz maqsaddan kelib chiqib X ni diskret tasodifiy miqdor deb qaraymiz. X dan $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ tanlanma olamiz va chastotalar taqsimotini quramiz:

$$\begin{array}{ccccccc} x_i & x_1 & x_2 & \dots & x_r \\ n_i & n_1 & n_2 & \dots & n_r \end{array}$$

Bunda $\sum_{i=1}^r n_i = n$.

Yana $X F_0(x)$ qonunga bo'ysunadi degan shart asosida nazariy chastotalarni aniqlaymiz:

$$n'_i = n \cdot P(X = x_i / H_0) \quad i = 1, \dots, r$$

U holda K.Pirsonning teoremasi quyidagicha ifodalanadi.

Pirson teoremasi. Agar H_0 gipoteza o'rinli bo'lsa, u holda $\chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$ tasodifiy miqdor ozodlik darajasi $k = r - l - 1$ bo'lgan Xi kvadrat qonuniga bo'ysunadi, bu yerda $l F_0(x)$ taqsimotning parametrlar soniga teng.

Biz X ni Puasson qonuniga bo'ysunishini tekshirganimiz uchun $l = 1$ ga teng. Chunki

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Pirson alomati bo'yicha H_0 gipotezani tekshirishda ma'lumotlar bo'yicha χ^2_{kuzat} topiladi va α qiymatdorlik darajasi va k ozodlik darajasi bo'yicha jadvaldan $\chi^2_{kr} = \chi^2(\alpha; k)$ aniqlanadi.

Agar $\chi^2_{kuzat} < \chi^2_{kr}$ bo'lsa H_0 gipotezanito'g'ri, ya'ni X Puasson qonuniga bo'ysunadi deb hulos qilamiz.

Amaliyotda bu kabi ishlarni NK usuli bilan amalga oshirish yo'lga qo'yilgan. Buni ko'p afzalliklari borligi haqida masalan [1] dan bilish mumkin.

Bu usulga asosan nazorat qilinuvchi miqdor va uni chegaralovchi karakteristikalar kiritiladi. Ma'lumotlarni Puasson qonuniga bo'ysunishini tekshirish nazorat qilinuvchi miqdorning qiymatlarini belgilangan chegarada yotishini aniqlashga keltiriladi.

Aytaylik tanlanma asosida emperik va nazariy chastotalar aniqlangan bo'lsin: ($t = 1, 2, \dots, v$ – tanlanma olish vaqtlari):

$$\begin{array}{cccccc} n_{it} & n_{1t} & n_{2t} & \dots & n_{rt} \\ n'_{it} & n'_{1t} & n'_{2t} & \dots & n'_{rt} \end{array} \quad \sum_{i=0}^r n_{it} = \sum_{i=0}^r n'_{it} = n$$

Ular asosida quyidagi miqdorni aniqlaymiz:

$$\Pi_t = \sum_{i=0}^r \frac{n_{it}^2}{n'_{it}}$$

Pirson alomatiga ko'ra Π_t ga yuqoridan chegara qo'yish kerak bo'ladi. Bu chegarani biz UCL_{Π} deb belgilaymiz. Bu chegarani aniqlovchi quyidagi teorema o'rinli.

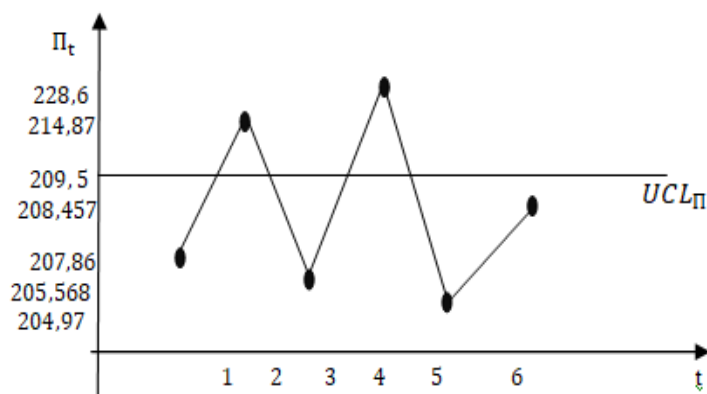
Teorema. $\alpha = 0,01$ va H_0 gipoteza o'rinli bo'lsin. U holda

$$UCL_{\Pi} = \chi^2_{kr}(0,01; r - 2) + n$$

formula o'rinli.

Amalda agar $t = 1, 2, \dots, v$ da $\Pi_t < UCL_{\Pi}$ bo'lsa, X shu momentda Puasson qonuniga bo'ysunadi deb xulosa qilamiz.

Fikrlarimizning oxirida $n = 200$ hajmli 6ta oniy tanlanamalar asosida o'tgan davr uchun qurilgan $\Pi - NK$ ning diagrammasini keltiramiz.



Bunday NK lar ishlab chiqarishni izidan chiqargan muhim sabablarini aniqlashda va joriy nazorat uchun C – NK ni chegaralarini to'g'ri aniqlashda ishlatiladi. Diagrammaga asosan toq momentlarda jarayon talab darajasida juft momentlarda esa izidan chiqqan hisoblanadi.

ADABIYOTLAR.

1. С.И.Солонин. Метод контрольных карт. УФУ, Е. 2014.
2. С.А.Ахмедов Жараёнларни статистик бошқариш Анд ДУ, А.2005.

EHTIMOLIY MOLIYAVIY OPERATSIYALARNING XARAKTERISTIKALARI

Davronov Odil

Samarqand davlat universiteti

Eshmuminova Dilbar

Termiz davlat universiteti

Moliyaviy operatsiya ehtimoliy deb ataladi, agar uning har bir natijasining ehtimoli mavjud bo'lsa. Bunday operatsiyaning foydasi - uning yakuniy va dastlabki pul baholari o'rtasidagi farq - tasodifiy miqdordir. Bunday operatsiya uchun bizning sezgimizga mos keladigan xavfni miqdoriy baholashni kiritish mumkin.

1.Xavf miqdorini aniqlash. Xavfli operatsiyaning ta'rifi qaror qabul qiluvchi shaxs

(QQQSh) ning imtiyoz tizimiga teng kuchli bo'lmagan kamida ikkita natijaga ega bo'lishi bilan tavsiflangan. Ushbu bob kontekstida QQQSh o'rniga operatsiyani amalga oshiruvchi shaxsning muvaffaqiyatiga qiziqishini aks yettiruvchi (ehtimol passiv) "investor" atamasi yoki shunga o'xshash atamalardan ham foydalanish mumkin.

Tasdiq. Operatsiya xavfini miqdoriy baholashni faqat operatsiya natijalari to'plamining ehtimollik tavsifi bilan amalga oshirilishi mumkin.

1-misol. Ikki yehtimolli operatsiyani amalni ko'rib chiqamiz:

$$Q_1: \left| \begin{array}{c|c} -5 & 25 \\ \hline 0,01 & 0,99 \end{array} \right|, \quad Q_2: \left| \begin{array}{c|c} 15 & 25 \\ \hline 0,5 & 0,5 \end{array} \right|.$$

Shubhasiz, birinchi operatsiya xavfi ikkinchi operatsiya xavfidan kamroq.

QQQSh ning qaysi operatsiyani tanlashiga kelsak, bu uning tavakkalchilik layoqatiga bog'liq.

2. Yagona operatsiya xavfi. Biz operatsiyaning xavfliligini miqdoriy baholashni xohlayotganimiz sababli va buni operatsiyaning yehtimollik xarakteristikalarisiz amalga oshirish mumkin yemasligi sababli, biz uning natijalariga ehtimolliklarni ajratamiz va har bir natijani QQQSh ning ushbu natijadan oladigan daromadi bo'yicha baholaymiz. Natijada, biz Q tasodifiy miqdorni olamiz, buni tabiiy ravishda operatsiyaning tasodifiy daromadi yoki oddiygina tasodifiy daromad deb ataladi. Hozircha biz diskret tasodifiy miqdor bilan chegaralanamiz (d.t.m.):

$$Q: \left| \begin{array}{c|c} q_1 & \\ \hline p_1 & \end{array} \right| \quad \dots \quad \left| \begin{array}{c|c} q_j & \\ \hline p_j & \end{array} \right| \quad \dots \quad \left| \begin{array}{c|c} q_n & \\ \hline p_n & \end{array} \right|,$$

bu yerda q_j - daromad va p_j - bu daromadning yehtimoli.

Agar kerak bo'lsa, biz operatsiyani va uni ifodalovchi tasodifiy miqdorni - tasodifiy daromadni aniqlaymiz, agar kerak bo'lsa, ma'lum bir vaziyatda ushbu ikki atamadan qulayrog'ini tanlaymiz.

Endi biz yehtimollar nazariyasi apparatini qo'llashimiz va operatsiyaning quyidagi xususiyatlarini topishimiz mumkin.

O'rtacha kutilayotgan daromad - Q tasodifiy miqdorning matematik kutilishidir, ya'ni $M[Q] = q_1 p_1 + \dots + q_n p_n = m_Q, \bar{Q}$ bilan belgilanadi, operatsiya samaradorligi nomi ham ishlatiladi.

Operatsiyaning dispersiyasi- Q tasodifiy miqdorning dispersiyasi, ya'ni $D[Q] = M[(Q - m_Q)^2]$. D_Q bilan ham belgilanadi.

Q tasodifiy miqdorning o'rtacha kvadratik chetlanishi, ya'ni $\sigma[Q] = \sqrt{D[E]}$. σ_Q bilan ham belgilanadi.

Ta'kidlaymizki, o'rtacha kutilayotgan daromad yoki operatsiya samaradorligi, shuningdek o'rtacha kvadratik chetlanish daromad kabi bir xil birliklarda o'lchanadi.

Uzoq tajribalar seriyasida tasodifiy miqdor qabul qilgan qiymatlar o'rta arifmetigi taxminan uning matematik kutilishiga teng.

Q daromad tasodifiy qiymatining o'rtacha kvadratik chetlanishi, ya'ni σ_Q orqali butun operatsiyaning xavfliligini baholash tobora ko'proq qabul qilinmoqda. Bu yerda xavfning asosiy miqdoriy bahosidir.

Demak, operatsiyaning xavfliligi deb ya'ni σ_Q soni - Q tasodifiy daromad o'rtacha kvadratik chetlanishiga aytiladi. r_Q bilan ham belgilanadi.

2-misol. 1-misoldagi birinchi va ikkinchi operatsiyalarning xavflarini toping:

$$Q_1: \begin{array}{c|c} -5 & 25 \\ \hline 0,01 & 0,99 \end{array}, \quad Q_2: \begin{array}{c|c} 15 & 25 \\ \hline 0,5 & 0,5 \end{array}.$$

Dastlab Q_1 t.m.ning matematik kutilishini hisoblaymiz: $m_1 = -5 \cdot 0,01 + 25 \cdot 0,99 = 24,7$. Endi $D_1 = M[Q_1^2] - m_1^2$ formuladan foydalanib dispersiyani hisoblaymiz

$M[Q_1^2] = 25 \cdot 0,01 + 625 \cdot 0,99 = 619$. Demak, $D_1 = 619 - (24,7)^2 = 8,91$ va nihoyat $r_1 = 2,98$.

Ikkinchi operatsiya uchun shunga o'xshash hisob-kitoblar $m_2 = 20$; $r_2 = 5$ ni beradi; "Cezgi taklif qilgani" kabi, birinchi operatsiya kamroq xavfli.

3-misol. QQQSh ikkita mumkin bo'lgan o'yinni ko'rib chiqadi. Birida ular tanga tashlashadi va QQQSh 10 pul birligi oladi, agar tanga gerb tomoni bilan tushsa, va 10 pul birligi to'laydi, agar tanga raqam tomoni bilan tushsa.

Ushbu o'yindagi to'lovlar chap tomondagi taqsimot qatorini tashkil qiladi:

Tanga
Raqam Gerb

-10	10
0,5	0,5

To'lovlar

O'yin kubigi

1	2	3	4	5	6
-20	-10	0	0	10	20
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Boshqa o'yinda o'yin kubigi tashlanadi va QQQShning to'lovlari o'ng tomonda taqsimot qatorini tashkil qiladi.

Ikkala holatda ham kutilayotgan o'rtacha daromad 0 ga teng. Biroq, ikkinchi o'yindagi to'lovlar tarqoqligi intuitiv ravishda kattaroq. Dispersiya va xavfni hisob-kitoblari buni tasdiqlaydi:

$$D_1 = 100 \cdot 0,5 + 100 \cdot 0,5 = 100, \quad D_2 = (400 + 100) \cdot 2/6 = 500/3 \approx 167, \\ r_1 = \sqrt{D_1} = 10; \quad r_2 = \sqrt{D_2} \approx 13$$

Q operatsiyasining m_Q o'rtacha kutilayotgan daromadi va r_Q uning xavfi mashhur Chebishev tengsizligi bilan bog'liq:

$$P(|Q - m_Q| > \varepsilon) \leq r_Q^2 / \varepsilon^2$$

yoki

$$P(|Q - m_Q| \leq \varepsilon) > 1 - r_Q^2 / \varepsilon^2$$

Biroq, ma'lumki, bu tengsizlik juda qo'pol va amalda deyarli qo'llanilmaydi.

Agar operatsiyaning daromadi oddiy qonunga muvofiq taqsimlangan tasodifiy o'zgaruvchi bo'lsa, unda xavf samaradorlik bilan bog'liq bo'lgan ba'zi yehtimollarni aniq ko'rsatadi:

$$P(|Q - m_Q| < 3r_Q) \approx 0,997; \quad P(|Q - m_Q| < 2r_Q) \approx 0,95$$

Ba'zida bu baholar juda foydali.

Xavf haqidagi quyidagi tasdiqlar yehtimollik nazariyasidan dispersiya va o'rtacha kvadratik chetlanish haqidagi tegishli tasdiqlarining natijalari hisoblanadi.

Tasdiqlar. A. Amaliyot miqyosi k marta oshirilganda, ya'ni tasodifiy daromadning barcha qiymatlarining k marta oshishi bilan operatsiya samaradorligi k marta, xavf $|k|$ yesa $|k|$ marta ortadi.

B. Barcha daromadlar bir xil doimiy songa o'zgarganda, operatsiya samaradorligi ham shu songa o'zgaradi, lekin xavf o'zgarmaydi.

C. Q_1 va Q_2 amallar korrelyatsiyanmagan bo'lsin, u holda ularning yig'indisining dispersiyasi dispersiyalarning yig'indisiga teng bo'ladi, shuning uchun umumiy operatsiyaning xavfi $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ ga teng.

D. Umuman olganda, ya'ni. ikkita ixtiyoriy Q_1 va Q_2 operatsiyalari uchun jami operatsiya xavfi $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2k_{12}}$ ga teng, bu yerda k_{12} - operatsiyalarning tasodifiy daromadlarining korrelyatsiya koeffitsienti; ye'tibor bering, $|k_{12}| \leq 1$; Bu formuladan kelib chiqadiki, yig'ma operatsiyaning xavfi $r_1 + r_2$ qiymatidan kattaroq bo'lishi mumkin (agar $k_{12} > 0$ bo'lsa - operatsiyalardan olingan daromadlarning musbat korrelyatsiyasi bilan) va bu qiymatdan kamroq (agar $k_{12} < 0$ - amallar daromadlarining salbiy korrelyatsiyalari bilan) bo'lishi mumkin.

Yeslatib o'tamiz, X, Y tasodifiy miqdorlarlar korrelyatsiya momenti $K_{XY} = M[(X - m_X)(Y - m_Y)]$ 0 ga teng bo'lsa korrelyatsiyanmagan deb ataladi.

; korrelyatsiya momenti K_{XY} va korrelyatsiya koeffitsienti k_{XY} $K_{XY} = \sigma_X \cdot \sigma_Y \cdot k_{XY}$ formula bo'yicha bog'langan; bog'liq bo'lmagan mustaqil tasodifiy miqdorlar korrelyatsiyanmagan.

4-misol. Q_1 va Q_2 operatsiyalari o'zaro bog'liq bo'lsin $Q = 0,5 \cdot Q_1 + 0,5 \cdot Q_2$ operatsiyasi xavfini topamiz (masalan, ikkala operatsiyani to'liq bajarish uchun pul yetarli yemas) :

$$Q_1: \begin{vmatrix} -5 & 25 \\ 0,01 & 0,99 \end{vmatrix}, \quad Q_2: \begin{vmatrix} 15 & 25 \\ 0,5 & 0,5 \end{vmatrix}.$$

Ikkala operatsiyaning xavflari 2-misolda topilgan: $r_1 = 2,98$; $r_2 = 5$; Demak, $r_Q = \sqrt{2,98^2 + 5^2} / 2 \approx \frac{(\sqrt{8,91+25})}{2} \approx \frac{5,82}{2} = 2,91$

Xavfning boshqa o'lchagichlari. Bizning fikrimizcha, o'rtacha kvadratik chetlanish alohida operatsiya xavfning yeng yaxshi o'lchovidir. Ko'pgina hollarda, bu o'lchagichlar shunchaki istalmagan hodisalarning yehtimolliklaridir.

3. Xavfning ba'zi umumiy o'lchovlari. Q operatsiyaning tasodifiy daromadining F taqsimot funksiyasi ma'lum bo'lsin. Uni bilib, quyidagi savollarga ma'no berishimiz va ularga javob berishimiz mumkin.

1. Operatsiyaning daromadi berilgan s dan kam bo'lish yehtimoli qanday? So'rashning yana bir usuli: berilgan daromaddan kamroq daromad olish xavfi qanday? Javob: $F(s)$.

2. Operatsiyaning muvaffaqiyatsiz bo'lish yehtimoli qanday, ya'ni. uning daromadi m o'rtacha kutilgan daromaddan kam bo'ladi mi Javob: $F(m)$.

3. Yo'qotishlar yehtimoli qanday va ularning o'rtacha kutilayotgan hajmi qanday? Yoki yo'qotish xavfi va ularning bahosi qanday?

Javob: $F(0)$., $\int_{-\infty}^0 x dF(x)/F(0)$.

4. O'rtacha kutilayotgan zararining kutilayotgan o'rtacha daromadga nisbati qanday? Bu nisbat qanchalik past bo'lsa, QQQSh barcha mablag'larini investitsiya qilgan bo'lsa, halokat xavfi shunchalik past bo'ladi

Javob: $\int_{-\infty}^0 x dF(x) / \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$

Operatsiyalarni tahlil qilganda, QQQSh ko'proq daromad va kamroq xavfga yega bo'lishni xohlaydi. Bunday optimallashtirish masalalari ikki mezonli deb ataladi. Ularni tahlil qilishda ikkita mezon - daromad va xavf ko'pincha bitta mezonga "birlashtiriladi". Shunday qilib, masalan, operatsiyaning nisbiy xavfi tushunchasi paydo bo'ladi. Haqiqat shundaki, operatsiya xavfini o'lchaydigan σ_Q o'rtacha kvadratik chetlanishning bir xil qiymati m_Q kutilayotgan o'rtacha daromad qiymatiga qarab turlicha qabul qilinadi, shuning uchun σ_Q/m_Q qiymatini operatsiyaning ba'zan nisbiy xavfi deb ham atashadi. Bunday xavf o'lchovini ikkita mezonli muammoning o'ramasi sifatida talqin qilish mumkin:

$$m_Q \rightarrow \max,$$

$$\sigma_Q \rightarrow \min$$

ya'ni xavfni minimallashtirish bilan birga o'rtacha kutilayotgan daromadni maksimal darajada oshirish kabi tushuniladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Капитоненко В.В. Финансовая математика и ее приложения. — М.: Приор, 1998.
2. Кутуков В.Б. Основы финансовой и страховой математики. - М.: Дело, 1998.
3. Черчмен Х, Акоф Р., Арноф Л. Введение в исследование операций. — М.: Наука, 1968.
4. Ширяев АН. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1, 2. — М.: Фазис, 1998.
5. Малыхин В.И. Финансовая математика: Учеб. пособие для вузов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. — 237 с.

UCHINCHI TARTIBLI KELI DARAXTIDA α PARAMETRLI BIR ARALASH TIPDAGI MODEL UCHUN ASOSIY HOLATLAR

Egamberdiyev Ubaydullo

Qo'qon davlat pedagogika instituti magistranti

Ma'lumki [1], panjaralarda aniqlangan modellar uchun asosiy masalalardan biri bu unga mos Gibbs o'lchovini aniqlashdir. Kichik haroratlarda har bir asosiy holatga bitta Gibbs

o'lchovi mos keladi. Shu sababli asosiy holatlar tadqiq qilinadi. [1] ishdan Keli daraxti va uning gruppaviy tasvirini ko'rish mumkin. $\tau^k = (V, L)$, $k \geq 1$ k -tartibli Keli daraxti, G_k esa uning gruppaviy tasviri bo'lsin. Fiksirlangan $x^0 \in V$ uchun quyidagicha belgilashni kiritamiz:

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\},$$

bu yerda $d(x, y)$ Keli daraxtidan X va Y ular orasidagi masofa.

$S(x)$ bilan $x \in W_n$ daraxt uchining to'g'ri avlodlar to'plamini belgilaylik, $S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}$. $S_1(x)$ orqali $x \in G_k$ nuqtaning barcha yaqin qo'shnilar to'plamini belgilaylik, ya'ni $S_1(x) = \{y \in G_k : \langle x, y \rangle\}$. Bu $x_\downarrow = S_1(x) \setminus S(x)$ ni hosil qilamiz.

Keli daraxtida spin qiymatlar $\Phi = \{-1, 0, 1\}$ to'plamdan qiymat qabul qiladigan yaqin qo'shnilar bilan ta'sirlashuvchi Izing-Potts modelini deb ataluvchi aralash tipdagi bir modelni qaraymiz. U holda V dagi σ konfiguratsiya $x \in V \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$ funksiya kabi aniqlanadi.

α parametrli Izing-Potts modeli Gamiltoniani quyidagicha ko'rinishda berilsin:

$$H(\sigma) = -\alpha \cdot J_1 \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y) - (1-\alpha) \cdot J_2 \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}.$$

bu yerda $J_1, J_2 \in \mathbb{R}^2$, $0 < \alpha < 1$.

M – uchlari V da bo'lgan barcha birlik sharlar to'plami bo'lsin. σ konfiguratsiyaning $b \in M$ shardagi qismini σ_b orqali va b sharning markazini c_b orqali belgilaylik. σ_b konfiguratsiya energiyasini quyidagicha aniqlaymiz:

$$U(\sigma_b) = -\frac{\alpha \cdot J_1}{2} \sum_{x \in S_1(c_b)} \sigma(x)\sigma(y) - \frac{(1-\alpha) \cdot J_2}{2} \sum_{x \in S_1(c_b)} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}.$$

Lemma. $k = 3$ bo'lsin. U holda har bir σ_b konfiguratsiya energiyasi uchun quyidagilar o'rinli bo'ladi:

$$U(\sigma_b) \in \{U_1, U_2, \dots, U_{11}\},$$

$$\text{bu yerda } U_1 = -2(1-\alpha) \cdot J_2, \quad U_2 = -\frac{3}{2}(1-\alpha)J_2, \quad U_3 = -(1-\alpha) \cdot J_2,$$

$$U_4 = -\frac{1}{2}(1-\alpha)J_2, \quad U_5 = 0, \quad U_6 = -\frac{1}{2}\alpha \cdot J_1 - 2(1-\alpha)J_2, \quad U_7 = \frac{1}{2}\alpha \cdot J_1 - \frac{3}{2}(1-\alpha)J_2,$$

$$U_8 = -\frac{1}{2}\alpha \cdot J_1 - (1-\alpha)J_2, \quad U_9 = \frac{1}{2}\alpha \cdot J_1 - \frac{1}{2}(1-\alpha)J_2, \quad U_{10} = -\frac{1}{2}\alpha J_1, \quad U_{11} = \frac{1}{2}\alpha J_1.$$

Quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$A_\xi = \{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 : U_\xi = \min\{U_1, U_2, \dots, U_{11}\}\}.$$

A_i , to'plamlarni topish uchun $U_i \leq U_j$, $j = \overline{1, 11} \setminus \{i\}$ tengsizliklarni yechib chiqish kerak.

Tasdiq: A_i , $i = \overline{1, 11}$ to'plamlar ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$A_1 = \left\{ (J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2; J_1 \geq 0, -\frac{\alpha}{(1-\alpha)} J_1 \leq J_2 \leq -\frac{3\alpha}{(1-\alpha)} \right\},$$

$$A_2 = \{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2; J_1 = 0, J_2 = 0\},$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= \{(J_1, J_2) \in R^2; J_1 = 0, J_2 = 0\}, \\
A_4 &= \{(J_1, J_2) \in R^2; J_1 = 0, J_2 = 0\}, \\
A_5 &= \{(J_1, J_2) \in R^2; J_1 = 0, J_2 \leq 0\}, \\
A_6 &= \left\{ (J_1, J_2) \in R^2; J_1 \leq 0, J_2 \geq \frac{\alpha}{4(1-\alpha)} \right\}, \\
A_7 &= \left\{ (J_1, J_2) \in R^2; J_1 \leq 0, 0 \leq J_2 \leq -\frac{\alpha}{(1-\alpha)} \right\}, \\
A_8 &= \{(J_1, J_2) \in R^2; J_1 \geq 0, J_2 = 0\}, \\
A_9 &= \{(J_1, J_2) \in R^2; J_1 \leq 0, J_2 = 0\}, \\
A_{10} &= \left\{ (J_1, J_2) \in R^2; J_1 \geq 0, J_2 \leq -\frac{\alpha}{(1-\alpha)} \right\}, \\
A_{11} &= \left\{ (J_1, J_2) \in R^2; J_1 \leq 0, J_2 \leq \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \right\},
\end{aligned}$$

va $\bigcup_{i=1}^{11} A_i = R^2$.

Translatsion – invariant asosiy holat uchun quydagi teorema isbotlanadi.

Teorema. $\sigma(x) = i, i \in \Phi, \forall x \in G_k$ translatsion–invariant konfiguratsiyalar $(J_1, J_2) \in A_i$ bo'lsa, translatsion–invariant asosiy holat bo'ladi.

ADABIYOTLAR

1. Rozikov U.A. Gibbs measures on Cayley trees. World scientific, 2013.
2. Rahmatullaev M.M, Rasulova M.A. Periodic and Weakly Periodic Ground States for the Potts Model with Competing Interactions on the Cayley Tree. Siberian Advances in Mathematics. ISSN 1055 – 1344. 2016. Vol. 26, №3. pp. 215–229.

BIRLIK DOIRADAGI TASODIFIY QAVARIQ QOPLAMA UCHLARI JARAYONINING BIR ASIMPTOTIK XOSSASI HAQIDA

Ergashev Nodir

O'zbekiston Milliy universiteti

Qavariq qoplamalarni tadqiq qilish tarixidan ma'lumki, birlik doira chegarasi yaqinida taqsimotining dum qismi tekis o'zaruvchi funksiya ko'rinishda o'zgarsa, qavariq qoplamaning asosiy fuksiyalarining matematik kutilmalari, yana ham aniqrog'i, uchlarining soni, qavariq qoplama va taqsimot aniqlanish sohasi perimetrlarining farqi va taqsimot aniqlanish sohasining qavariq qoplama tashqarisidagi yuzasi matematik kutilmalarining asimptotik qiymatlari ham tekis o'zaruvchi funksiya ko'rinishda bo'ladi (masalan, H.Carnal [1] ga qarang).

Ushbu maqola [1-3] maqolalardagi tadqiqotlarni davom ettirib, tekislikdagi birlik doirada ichkaridan chegara yaqinida taqsimotining dum qismi tekis o'zaruvchi funksiya ko'rinishda bo'lgan bosh to'plamdan olingan tanlanmadan yaralgan qavariq qoplama uchlari funksiyalarining asimptotik hossalardan birini tadqiq qilishga bag'ishlanadi.

Faraz qilaylik A – markazi $(0,1)$ nuqtada bo'lgan birlik doira bo'lsin. Yana shuni faraz qilaylik, (r_i, α_i) A doirada (koordinata boshi $(0,1)$ nuqtada bo'lgan) qutb koordinatalar sistemasida berilgan tasodifiy nuqtalar bo'lib, bu yerda r_i va α_i bog'liqsiz, jumladan $\alpha_i \in [-\pi, \pi]$ da tekis taqsimlangan va r_i ning taqsimotining dum qismi

$$P(r_i > 1-x) = x^\beta L\left(\frac{1}{x}\right), \quad 0 < x < 1, \quad \beta \geq 1, \quad (1)$$

ko'rinishda bo'lsin. Bu yerda $L(x)$, integral ko'rinishi

$$L(u) = \exp\left\{\int_1^u \frac{\varepsilon(t)}{t} dt\right\}, \quad \varepsilon(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2)$$

bo'lgan Karamat ma'nosida sekin o'zgaruvchi funksiya.

Qutb koordinata sistemasidan $X_i = r_i \sin \alpha_i$, $Y_i = 1 - r_i \cos \alpha_i$ almashtirishlar yordamida de kart koordinatalar sistemasiga o'tamiz. Agar C_n yordamida $(X_1, Y_1); (X_2, Y_2); \dots; (X_n, Y_n)$ nuqtalardan yaralgan qavariq qoplamani belgilasak, u holda mos ravishda v_n , s_n va l_n lar yordamida C_n ning uchlarining son, yuzasi va perimetrini belgilaymiz.

Quyidagi

$$S_\varepsilon = \left\{ (x, y) : 1 - \varepsilon \leq \sqrt{x^2 + (1-y)^2} \leq 1 \right\},$$

$$\Lambda_\beta(A) = P(X_1 \in A).$$

va

$$E_\varepsilon = \{C_n \text{ ning hech bo'lmaganda bitta uchi } S_\varepsilon \text{ da yotmaydi}\}$$

belgilashlar yordamida C_n ning ajoyib hossalardan birini tadqiq qilamiz. Ya'ni

Teorema. Shundek bir o'zgarmas $c > 0$ mavjudki, bunda

$$P(E_\varepsilon) \leq cn^2 \left(1 - \Lambda_\beta(A_\varepsilon)\right)^n \sim cn^2 \exp\{-n\Lambda_\beta(A_\varepsilon)\},$$

o'rinli bo'ladi, bu yerda A_ε – birlik doira ichidagi $1 - \varepsilon$ radiusli konsentrik aylanaga urinib o'tuvchi vatarning doiradan ajratgan kichkina segmenti.

Ushbu teoremadan shuni xulosa qilish mumkinki, ixtiyoriy chekli $\varepsilon > 0$ uchun C_n ning S_ε dan chiqish ehtimoli 0 ga intiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Carnal H. (1970). Die konvexe Hulle von n rotations symmetrisch verteilten Punkten. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb. 15, 168-176.
2. Khamdamov I.M., On Limit Theorem for the Number of Vertices of the Convex Hulls in a Unit Disk. Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2020, 13(3), 275–284.

3. Formanov Sh.K., Khamdamov I.M., On joint probability distribution of the number of vertices and area of the convex hulls generated by a Poisson point process, Statistics and Probability Letters 169 (2021) 108966.

PARAMETRLANGAN KVADRAT FUNKSIYA BIFURKATSIYASI

G'anixojayev Rasul

F.-m.f.d, O'zbekiston Milliy Universiteti

Mo'minov Ulug'bek

Farg'ona davlat universiteti

Ba'zi funksiyalar yetarli darajada sodda bo'lishiga qaramay ularning dinamikasi hayratlanarli darajada murakkabligini ko'rishimiz mumkin. Biz quyida

$$Q(x) = ax^2 + bx + c$$

kvadrat funksiyalar oilasini ko'rib chiqamiz. Bu yerda a, b, c lar parametrlar. Bizning maqsadimiz $Q(x)$ ning dinamikasi qanday o'zgarib turishini tushuntirishdan iborat.

Bizning birinchi vazifamiz $Q(x)$ ning qo'zg'almas nuqtalarini topishdan iborat bo'ladi. Buning uchun $ax^2 + bx + c = x$ tenglamani yechamiz. Ushbu

$$ax^2 + (b-1)x + c = 0$$

tenglamada $d = b-1$ deb olsak tenglama quyidagi ko'rinishdagi to'la kvadrat tenglamadan iborat bo'ladi:

$$ax^2 + dx + c = 0.$$

Bu tenglamaning ildizlari $p_+ = \frac{\sqrt{d^2 - 4ac} - d}{2a}$ va $p_- = -\frac{\sqrt{d^2 - 4ac} + d}{2a}$ ko'rinishlarda bo'ladi. Demak $Q(x)$ ning ikkita qo'zg'almas nuqtasi mavjud. Bu ikkala qo'zg'almas nuqta $d^2 - 4ac \geq 0$ bo'lganda xaqiqiy bo'ladi. Agar $d^2 - 4ac = 0$ bo'lsa $p_+ = p_- = -\frac{d}{2a}$. $d^2 - 4ac < 0$ bo'lganda esa, xaqiqiy qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lmaydi. Barcha orbitalari cheksizlikka intiladi [1].

Biz xozir $a > 0$ bo'lgan holga to'xtalamiz.

Agar $c \leq 0$ bo'lsa $d^2 - 4ac \geq 0$ bo'lib p_+ va p_- qo'zg'almas nuqtalar mavjud bo'ladi.

Agar $c > 0$ bo'lsa, u holda $d \in (-\infty; -2\sqrt{ac}) \cup (2\sqrt{ac}; +\infty)$ bo'lganda

p_+ va p_- qo'zg'almas nuqtalar mavjud bo'ladi.

Parametrning ma'lum qiymatlarida dinamikalar birdan o'zgaradi, shundan so'ng ular yana uzoq vaqt davomida doimiy bo'lib qoladi. Bunday keskin o'zgarishga bifurkatsiya deyiladi [2].

Bifurkatsiya odatda $Q(x)$ ning qo'zg'almas nuqtalarida sodir bo'ladi. Buning uchun biz $Q'(x)$ ning qo'zg'almas nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$Q'(x) = 2ax + b;$$

$$Q'(P_+) = 2a \frac{\sqrt{d^2 - 4ac} - d}{2a} + b = \sqrt{d^2 - 4ac} + 1;$$

$$Q'(P_-) = 2a \left(-\frac{\sqrt{d^2 - 4ac} + d}{2a} \right) + b = 1 - \sqrt{d^2 - 4ac}.$$

Endi biz qo'zg'almas $P_{\pm}$ nuqtalarni tortuvchi, itaruvchi yoki neytralligini aniqlaymiz.

Agar $c < 0$ bo'lsa, u holda $Q'(P_+) > 1$ bo'lib, P_+ nuqta giperbolik itaruvchi qo'zg'almas nuqta bo'ladi. Agar $c = 0$ bo'lsa, u holda $Q'(P_+) = |d| + 1$. Bu holda $d = 0$ bo'lsa P_+ nuqta neytral qo'zg'almas nuqta, $d \neq 0$ bo'lsa P_+ nuqta giperbolik itaruvchi qo'zg'almas nuqta bo'ladi. Agar $c > 0$ bo'lsa $d^2 - 4ac > 0$ bo'lganda P_+ itaruvchi qo'zg'almas nuqta, $d^2 - 4ac = 0$ bo'lganda neytral qo'zg'almas nuqta bo'ladi. $d^2 - 4ac < 0$ bo'lganda esa qo'zg'almas nuqta mavjud emas, ya'ni barcha orbitalari cheksizlikka intiladi.

Ikkinchi qo'zg'almas P_- nuqtaning holati murakkabroq bo'ladi. $|Q'(P_-)| < 1$ ya'ni $|1 - \sqrt{d^2 - 4ac}| < 1$ tengsizlikni qaraymiz. Bu tengsizlikdan esa $0 < d^2 - 4ac < 4$ shart kelib chiqadi. Bu holda P_- nuqta giperbolik tortuvchi qo'zg'almas nuqta bo'ladi. $d^2 - 4ac = 0$ bo'lganda P_- nuqta neytral qo'zg'almas nuqta bo'ladi. $|Q'(P_-)| > 1$, ya'ni $d^2 - 4ac > 0$ bo'lganda esa giperbolik itaruvchi qo'zg'almas nuqta bo'ladi.

$a < 0$ bo'lganda ham shu kabi tadbiq qilinadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Robert L. Devaney . A First Course in Chaotic Dynamical Systems.
2. Richard_A. Holmgren. A First Course in Discrete Dynamical Systems.

TAJIRIBALARNI REJALASHTIRISHDA MATEMATIK KUTILMANING QO'LLANISHI

Gafurov Maxamat O'ktamovich

F.-m.f.d. prof, Toshkent davlat transport universiteti

Takabayev Umidjon

Andijon davlat universiteti

Zamonaviy matematikaning nisbatan yosh yo'nalishlaridan biri ehtimolliklar nazariyasi va matematik stasistikaning asosiy tushunchalaridan biri – tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalarini o'rganish orqali amaliy masalalarni yechishda muhimligi ko'p mutaxassislar uchun yangilik emasligi ma'lum.

Taqdim etilayotgan ushbu maqolaning maqsadi matematik kutilma tushunchasining tajribalarni rejalashtirish muammolaridagi qo'llanishlarini oddiy bir masala orqali yoritishdan iborat.

Aytaylik bizni qiziqtirayotgan B natijaga erishish maqsadida bir qator tajribalar (ular o'zaro bog'liq bo'lishlari ham mumkin) o'tkazilayotgan bo'lsin. Tajribalar soni m ortishi bilan B natijaga erishish ehtimolligi kamaymasligini tushunish qiyin emas. B hodisaning birinchi m ta tajribada hech bo'lmaganda bir marta ro'y berish ehtimolligini $P(m)$ deb belgilaylik. B hodisa ro'y berishi berishi bilanoq, tajribalarni o'tkazish to'htatiladi. X deb o'tkazilishi kerak bo'lgan tajribalar sonini belgilasak, uning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari $1, 2, \dots, n \dots$ dan iboratligi ravshan.

Masala X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini, ya'ni B hodisaning ro'yobga chiqishi uchun "o'rtacha" tajribalar sonini va dispersiyasini hisoblashdan iborat. Quyida shu masalani yechimini keltiramiz. B natijaga erishguncha o'tkazilishi zarur bo'lgan tajribalar sonini yuqoridan chegaralay – olmasligimizni ta'kidlab o'tamiz.

Aytaylik, B natijaga i –nchi tajribagacha erishilmagan bo'lsa, i –nchi tajribani o'tkazish "zarur" aks holda "zarur emas" deb hisoblaylik.

Quyidagi tasodifiy miqdorlarni kiritamiz: $i = 1, 2, \dots$ uchun

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{agar } i\text{-nchi tajriba "zarur"} \\ 0, & \text{agar } i\text{-nchi tajriba "zarur emas"} \end{cases}$$

U holda Y_i ning taqsimot qonuni

$$P(Y_i = 0) = P(i - 1), \quad P(Y_i = 1) = 1 - P(i - 1)$$

Matematik kutilmasi esa,

$$MY_i = 1 - P(i - 1), \quad i = 1, 2, \dots$$

bo'ladi.

Aytilganlardan

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i$$

va

$$MX = \sum_{i=1}^{\infty} MY_i = \sum_{i=1}^{\infty} [1 - P(i - 1)] = \sum_{l=0}^{\infty} [1 - P(l)] \quad (1)$$

Ravshanki,

$$DX = M \left(\sum_{i=1}^{\infty} Y_i^2 + 2 \sum_{i < j} Y_i Y_j \right) - \left[\sum_{l=0}^{\infty} (1 - P(l)) \right]^2 \quad (2)$$

Tenglikning o'ng tomonidagi matematik kutilmani topishda quyidagilarga e'tibor qaratamiz:

- a) Y_i va Y_i^2 bir hil taqsimotga ega;
- b) $\sum_{i < j} MY_i Y_j = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{\infty} MY_i Y_j$;
- c) $Y_i Y_j$ tasodifiy miqdorlar faqat 1 yoki 0 qiymatlarni qabul qiladi, $P(Y_i Y_j = 0) = P(j - 1)$ va $P(Y_i Y_j = 1) = 1 - P(j - 1)$ ekanligini

Shunday qilib, natijada (2) formulaga ko'ra

$$\begin{aligned} DX &= \sum_{l=0}^{\infty} [1 - P(l)] + 2 \sum_{l=0}^{\infty} l[1 - P(l)] - \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} [1 - P(l)] \right\}^2 \\ &= MX(1 - MX) + 2 \sum_{l=0}^{\infty} l(1 - P(l)) \end{aligned} \quad (3)$$

Keltirilgan (1) va (3) formulalar bo'yicha ba'zi mulohazalarni aytib o'tamiz.

- A) Bu formulalar yuqorida keltirilgan masalaning umumiy ko'rinishdagi yechimlari bo'lib, yuzaki qaraganda ularning tadbirlari ko'rinmaydi. Lekin, B hodisaning qanday aniqlanishiga qarab MX va DX larni sonli qiymatlarini aniqlash mumkin.

- B) Quyidagi masala va uning yechimlari yechimlar qabul qilish nazariyasida, statistic ma'lumotlarni qayta ishlash orqali amaliy hulosalarga kelishda, texnikada va iqtisodiyotda optimal yechimlar qidirishda muhim ahamiyatga ega.
- C) (1) va (3) formulalardagi qatorlar tasodifiy daydishing chegaraviy masalalarini yechishda ko'plab uchrab turadi va ularning yaqinlashish shartlari qidiriladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Эддоус М, Стенсфилд Р. Методы принятия решений. Москва, «Аудит», Издательство «ЮНИТИ» 1997 г.
2. Экономико-математические методы и прикладные модели. Издательство «ЮНИТИ», Москва 2000 г.

QAVARIQ QOPLAMA FUNKSIONALLARINING O'RTA QIYMATLARINI IFODALARI HAQIDA

Hamdamova Surayyo

O'zbekiston Milliy universiteti

Taqsimot qonunning aniqlanish sohasi ko'p o'lchovli qavariq soha bo'lgan holatda, ekstremal tartiblangan statistikaning eng umumiy analogi qavariq qoplama bo'ladi. Oxirgi holat uchun qavariq qoplama taqsimot qonun aniqlanish sohasini baholashda yetarli va asosli statistika bo'ladi.

Qavariq qoplama analitik nuqtaviy nazardan juda murakkab geometrik obyektidir. Shuning uchun, hattoki, uning eng soda funksionallari bo'lmish, uchlarining soni va yuzasini tadqiq qilish oddiy masala emas. Buni shu bilan izohlash mumkinki, P.Groeneboom [1] ishi paydo bo'lgunigacha, bu sohadagi eng buyuk kashfiyotlar deb asosiy funksionallarning o'rta qiymatlarini asimptotik ifodalarini aniqlashgina hisoblanar edi.

Hozirgi vaqtda qavariq qoplama funksionallari sonli xarakteristikalarining asimptotikasi va limit taqsimotining tadqiqi bo'yicha B.Efron [2], A.Reny and R.Sulanke [3], H.Carnal [4], P.Groeneboom [1], Khamdamov I.M.[5] va boshqalar katta natijalar oldilar. Ular qavariq ko'pburchakda yoki ellipsda tekis taqsimlangan binomial nuqtaviy jarayonni Puasson jarayoni bilan approksimatsiyalash usuli yordamida, tanlanma qavariq qoplamaning asosiy funksionallari uchun turli ko'rinishdagi limit teoremlarini isbotlash imkoniyatiga ega bo'ldilar.

Faraz qilaylik

$$R_n = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{2b_n} \leq y \right\}. \quad (1)$$

Quyidagi o'lchovni kiritamiz

$$\Lambda_n(A) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sqrt{b_n}L(b_n)} \iint_A \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(y - \frac{x^2}{2b_n} \right)^\beta L \left(\frac{b_n}{y - \frac{x^2}{2b_n}} \right) \right] dx dy, & \text{agar } A \subset R_n; \\ 0, & \text{agar } A \not\subset R_n, \end{cases} \quad (2)$$

Bu yerda b_n miqdor

$$n x^{-\left(\beta+\frac{1}{2}\right)} L(x) = 1 \quad (3)$$

Tenglamaning eng kichik yechimi,

$$L(u) = \exp \left\{ \int_1^u \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \right\}, \quad \varepsilon(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Faraz qilaylik, $\Pi_n(\cdot) - \Lambda_n(\cdot)$ intensiv o'lchovli, bir jinsli bo'lmagan Puasson nuqtaviy jarayoni (b.j.b.p.n.j.) va $(X_1, Y_1); (X_2, Y_2); \dots; (X_k, Y_k); \dots R_n$ da toraytirilgan $\Pi_n(\cdot)$ b.j.b.p.n.j. realizatsiyasi bo'sin. Bu nuqtalarga tortilgan qavariq qoplamani C_n bilan belgilaymiz.

Har bir $a \in R$ uchun uchlar jarayoni $W_n(a) = (X_n(a), Y_n(a))$, deb $\Pi_n(\cdot)$ b.j.b.p.n.j. realizatsiyasi ichidagi $Y_k - aX_k$ ga minimal qiymat beruvchi (X_k, Y_k) nuqtaga aytiladi.

Faraz qilaylik, $N_n(0, a)$ – miqdor sakrab o'zgaruvchi jarayon $W_n(c)$ $0 \leq c \leq a$ dagi sakrashlar soni, $l_n(0, a)$ – esa $\{W_n(c) \mid 0 \leq c \leq a\}$ nuqtalar to'plamini ketma-ket tutashtirishdan hosil bo'lgan siniq chiziq uzunligi bo'lsin.

U holda quyidagi natija o'rinli

Teorema. Agar

$$R_n(a) = X_n(a) - ab_n, \quad S_n(a) = Y_n(a) - \frac{X_n^2(a)}{2b_n} + \frac{R_n^2(a)}{2b_n}, \quad T_n(a) = (R_n(a), S_n(a))$$

bo'lsa, u holda

$$EN(a) = E \int_0^a M^{(1)}(T(b); R^2) db = aEM^{(1)}(T(0); R^2) \text{ va } EL(0, a) = b_n \int_0^a \sqrt{1+b^2} db,$$

o'rinli, bu yerda

$$M^{(k)}(t; R^2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{b_n}L(b_n)} \int_r^{\sqrt{2b_ns}} (u-r)^k \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left(s - \frac{u^2}{2b_n} \right)^\beta L \left(b_n / \left(s - \frac{u^2}{2b_n} \right) \right) \right\} du.$$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Groeneboom P., Limit theorems for convex hulle//Probab. Th. Rel. Fields, 1988, v.79, N3, pp.327-368.
2. Efron B. (1965). The convex hull of a random set of points. Biometrika, 52, 331-343.
3. Reny A. and Sulanke R. (1963). Uberdiekovexe Hulle von n zufallinggewahlten Punkten. (1963). Z.Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb. 2, 75-84.
4. Carnal H. (1970). Die konvexe Hulle von n rotations symmetrisch verteilten Punkten. Z .Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb. 15, 168-176.
5. Khamdamov I.M. Properties of convex hull generated by inhomogeneous Poisson point process, Ufimsk. Mat. Zh., 2020, Volume 12, Issue 3, p.83–98.

PARAMETRIK VA NOPARAMETRIK OPSIONLARNI NARXLASH MODELLARI

Husanboyev Javohir

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti

Parametrik opsiyonlarni narxlash modeli

Nufuzli maqolada Heston variantini baholash uchun yopiq shaklli yechimlarni olish uchun xarakterli funksiyalarni kiritdi. Agar asosiy ehtimolliklarning xarakteristik funksiyalari analitik ma'lum bo'lsa, bu ehtimolliklarni Furye inversiyasi orqali ifodalash mumkin va shuning uchun opsiyon narxlari uchun yopiq shakldagi yechumlarni olish mumkin.

Xavf-xatarsiz iqtisodiyotda asosiy dividend to'lamaydigan aksiya bahosi $S(t)$ va uning tarkibiy qismlari har qanday t uchun quyidagicha berilgan

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = [R(t) - \lambda\mu_J] + \sqrt{V(t)}d\omega_s(t) + J(t)dq(t) \quad (1)$$

$$dV(t) = [\theta_v - \kappa_v V(t)]dt + \sigma_v \sqrt{V(t)}d\omega_v(t) \quad (2)$$

$$\ln[1 + J(t)] \sim N\left(\ln[1 + \mu_J] - \frac{1}{2\sigma_J^2}, \sigma_J^2\right) \quad (3)$$

Bu yerda $R(t)$ -t vaqtdagi oniy foiz stavkasi, λ yiliga sakrash chastotasi, $v(t)$ -bu aksiyalarni qaytarish dispersiyasining komponenti (sakrash sodir bo'lmasligi sharti bilan), $\omega_s(t)$ va $\omega_v(t)$ larning har biri standart Broun harakati $\text{cov}[d\omega_s(t), d\omega_v(t)] = \rho dt$ ga teng bo'lgan, J_s -foiz sakrash hajmi (sakrashning sodir bo'lish sharti bilan) har doim normal, bir xil va bog'liqsiz taqsimlangan, shartsiz o'rtacha μ_J bilan. $\ln[1 + J(t)]$ ning standart og'ishi (dispersiyasi) σ_J , $q(t)$ intensivligi λ bo'lgan Puasson sakrash hisoblagichi, bunda $\text{Pr}(dq(t) = 1) = \lambda dt$ va $\text{Pr}(dq(t) = 0) = 1 - \lambda dt$. $\kappa_v, \frac{\theta_v}{\kappa_v}$ va σ_v mos ravishda, o'zgarish tezligi, uzoq uddatli o'rtacha va diffuziya o'zgaruvchanli $v(t)$ ning o'zgaruvchanlik koeffitsienti. $q(t)$ va $J(t)$ o'zaro bir-biri bilan korrelyatsiyalanmagan yoki $\omega_s(t)$ va $\omega_v(t)$ biolan korrelyatsiyalanmagan.

Yuqoridagi tengliklardan foydalanib qaytish dispersiyasini ikki komponentga ajratish mumkin

$$\frac{1}{dt} \text{Var}_t \left(\frac{dS(t)}{S(t)} \right) = V(t) + V_J(t) \quad (4)$$

Bu yerda $V_J(t) = \left(\frac{1}{dt} \right) \text{Var}_t [J(t)dq(t)] = \lambda \left[\mu_J^2 + (e^{\mu_J^2} - 1)(1 + \mu_J)^2 \right]$ sakrash

komponentining oniy dispersiyasi. Kelajakdagi pul oqimlarini diskontlash bir faktorli muddatli struktura model (6) ga muvofiq amalga oshiriladi.

$$dR(t) = [\theta_R - \kappa_R R(t)]dt + \sigma_R \sqrt{R(t)}d\omega_R(t) \quad (5)$$

Bu yerda $\kappa_R, \frac{\theta_R}{\kappa_R}$ va σ_R lar mos ravishda o'zgarish tezligi, uzoq muddatli o'rtacha va

$R(t)$ protsessning dispersiya koeffitsienti, $\omega_R(t)$ standart Broun harakati, modeldagi hech bir progress bilan korrelyatsiyalanmagan.

Aksiyaga yozilgan Yevropa call opsiuni uchun K va muddati tugashi τ bo'lsa, uning t vaqtdagi narxi $C(t, \tau)$ ni hal qilish kerak.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} V S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + [R - \lambda \mu_J] S \frac{\partial C}{\partial S} + \rho \sigma_v V S \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial V} + \frac{1}{2} \sigma_v^2 V \frac{\partial^2 C}{\partial V^2} + \\ & + [\theta_v - \kappa_v V] \frac{\partial C}{\partial V} + \frac{1}{2} \sigma_R^2 R \frac{\partial^2 C}{\partial R^2} + [\theta_R - \kappa_R R] \frac{\partial C}{\partial R} - \frac{\partial C}{\partial \tau} - RC + \\ & + \lambda E \{C(t, \tau, S(1+J), R, V) - C(t, \tau; S, R, V)\} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$C(t + \tau, 0) = \max \{S(t + \tau) - K, 0\}$ ga bo'ysunadi. Bakshi (2) modeli buni ko'rsatadiki

$$C(t, \tau) = S(t) \Pi_1(t, \tau; S, R, V) - KB(t, \tau) \Pi_2(t, \tau; S, R, V) \quad (7)$$

Bu yerda $B(t, \tau)$ t vaqtda boshlab τ davrlarda 1\$ to'laydigan nol kuponli obligatsiyaning joriy narxi. Tegishli xarakteristik funksiyalarni inverstatsiya qilish natijasida Π_1 va Π_2 xavf-xatarsiz ehtimollik tiklanadi

$$\Pi_j(t, \tau; S(t), R(t), V(t)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\phi \ln[K]} f_j(t, \tau, S(t), R(t), V(t); \phi)}{i\phi} \right] d\phi \quad (8)$$

$j = 1, 2$ uchun f_j xarakteristik funksiyalar ilovadan topiladi

(7) formuladagi Yevropa opsiuni bahosi modeli eng ko'p o'rganilgan bir necha holatlarni o'z ichiga oladi. Misol uchun Bleck-Scholes modelida $\lambda = \theta_R = \kappa_R = \sigma_R = \theta_v = \kappa_v = \sigma_v = 0$ o'z ichiga oladi, stoxastik o'zgaruvchanli modelda $\lambda = \theta_v = \kappa_v = \sigma_v = 0$, stoxastik sakrovchi o'zgaruvchanli modelda $\lambda = \theta_R = \kappa_R = \sigma_R = 0$ va stoxastik o'zgaruvchanli va stoxastik foiz stavkali model uchun $\lambda = 0$.

Stoxastik o'zgaruvchanli va stoxastik sakrovchi o'zgaruvchanli modellar

(7) formulaning parametrlarini baholash uchun biz tanlangan xatoliklar kvadratlarning yig'indisini $\Phi = \{\kappa_v, \theta_v, \sigma_v, \rho, \lambda, \mu_J, \sigma_J\}$ va $V(t)$ uchun minimizatsiyalaymiz.

$$SSE(t) \equiv \min_{V(t), \Phi} \sum_{n=1}^N (\epsilon_n[V(t), \Phi])^2 \quad (9)$$

uchun

$$\epsilon_n[V(t), \Phi] \equiv O_n(t, \tau_n; K_n) - C_n(t, \tau_n; K_n) \quad (10)$$

Bu yerda N ma'lum bir kundagi opsiyon narxlari soni va $O_n(t, \tau_n; K_n)$ t kun uchun n -variantning bozor narxi.

Hisoblash har bir t kuni uchun takrorlanadi, bu esa tahmin qilingan nuqta o'zgaruvchanligi $\hat{V}(t)$ va taxminiy model $\hat{\Phi}$ parametrlarini beradi. Bu yerda qayd stoxastik o'zgaruvchanli va stoxastik sakrovchi o'zgaruvchanli modellar baholarining terminlari uchun. Boshlang'ich parametr qiymatlarini tanlash ushbu modellar juda muhimdir, chunki ular

parametr yuzasida o'ziga xos beqarorlikni namoyon qiladi va osongina portlashi mumkin. Agar to'g'ri to'g'ri yo'l-yo'riq bo'lmasa, oqilona muvaffaqiyatga erishmasdan; mos keladigan boshlang'ich parametrlarni cheklaydigan nochiziqli optimallashtirish zarur bo'lsa-da, bu kerakli mahalliy optimallikka erishish uchun kafolat emas.

Noparametrik opsiyolarni narxlash modeli

Blaeck-Scholes narxlash formulasining amaliyotchilarni qiziqtirishi ko'pincha dividend to'lamaydigan aktivlar bo'yicha Yevropa opsiyoning narxini aniqlashda uning analitik soddaligidan kelib chiqadi

$$C_t = S_t N(d_1) - Ke^{-rt} N(d_2) \quad (11)$$

$d_1 = [\ln(S_t / K) + (r + 0.5\sigma^2)\tau] / (\sigma\sqrt{\tau})$ va $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$. Bu yerda N birgalikdagi normal taqsimot, S_t asosiy qimmatli qog'ozning narxi, K opsiy sotib oladigan paytdagi narx, r -yetuklik vaqti va σ asosiy aktivning o'zgaruvchanligi. (11) tenglama na jismoniy shaxslarning afzalliklarini, na umumiy bozorning afzalliklarini o'z ichiga oladi.

Parametrik bo'lmagan baholash modellari tabiiy kengayadi, chunki taqsimot haqidagi taxminlarni yengillashtirish osonroq. Dividend to'lamaydigan aktivga Yevropa call opsiyoni narxini belgilashning tabiiy noparametrik funksiyasi opsiy narxini opsiyni tavsiflaydigan o'zgaruvchilar to'plamiga bog'laydi.

$$C_t = f(S_t, K, \sigma_t, i, \tau) \quad (12)$$

bu yerda S_t asosiy qimmatli qog'ozning narxi, K opsiy sotib oladigan paytdagi narx, i foiz stavkasi, τ yetuklik davri.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. G. Bakshi, C. Cao, and Z. Chen, "Empirical performance of alternative option pricing models," *J. Finance*, vol. 52, pp. 2003–2049, 1997.
2. R. Gençay and M. Qi, "Pricing and hedging derivative securities with neural networks and bayesian regularization, early stopping and bagging," *IEEE Trans. Neural Netw.*, vol. 12, no. 4, pp. 726–734, Jul. 2001
3. R. Garcia and R. Gençay, "Pricing and hedging derivative securities with neural networks and a homogeneity hint," *J. Econometrics*, vol. 94, pp. 93–115, 2000

ON PROPERTIES OF A STRUCTURAL PARAMETER OF THE MARKOV Q-PROCESS

Imomov Azam

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Karshi State University

Nazarov Zuhridin

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences

Let $Z(t)$ be the population size at time $t \geq 0$ in a homogeneous continuous time Markov branching process (MBP) with transition probabilities

$$P_{ij}(t) := \mathbf{P} \{ Z(t + \tau) = j \mid Z(\tau) = i, \tau \geq 0, \}$$

for all $i, j \in \mathbf{N}_0 = \{0\} \cup \mathbf{N}$, where $\mathbf{N}$ -is the set of natural numbers. These probabilities are equal to the i -fold convolution of $P_{1j}(t)$, i.e.

$$P_{ij}(t) = \sum_{j_1 + j_2 + \dots + j_i = j} P_{1j_1}(t) \cdot P_{1j_2}(t) \cdot \dots \cdot P_{1j_i}(t)$$

Here in transition probabilities $P_{1j}(t)$ are expressed using the local densities a_j , $j \in \mathbf{N}_0$ by relation

$$P_{1j}(\varepsilon) = \delta_{1j} + a_j \varepsilon + o(\varepsilon) \quad \text{as} \quad \varepsilon \downarrow 0, \quad (1)$$

where δ_{1j} is Kronecker's delta function and $a_j \geq 0$ for $j \in \mathbf{N}_0 \setminus \{1\}$ such that

$$0 < a_0 < -a_1 = \sum_{j \in \mathbf{N}_0 \setminus \{1\}} a_j < \infty;$$

see [3, pp. 11–12, 26].

Define the stochastic matrix $Q_{ij}(t)$, $j \in N_0$ by passing to the limit as follows:

$$Q_{ij}(t) := \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left[Z(t + \tau) = j \mid Z(\tau) = i, Z(t + \tau + k) > 0 \right]$$

for $t, \tau \geq 0$. Then

$$Q_{ij}(t) = \frac{j q^{j-i}}{i \beta^t} P_{ij}(t), \quad (2)$$

where $\beta := \exp \sum_{j \in \mathbf{N}} j a_j q^{j-1}$, and q is an extinction probability of the MBP $Z(t)$. Now define stochastic process $W(t)$, $t \geq 0$ with transition functions

$$\mathbf{P} [W(t + \tau) = j \mid W(\tau) = i] = Q_{ij}(t).$$

This is so-called Markov Q-process (MQP) $W(t)$, $t \geq 0$, defined as a “long-living” Markov population growth system with transition functions $Q_{ij}(t)$; see [5]. The asymptotic and structural properties of MQP were studied also in [6, 7, 8].

Using (1) and (2) the probabilities $Q_{ij}(\varepsilon)$, for $\varepsilon \downarrow 0$, can be presented as

$$Q_{1j}(\varepsilon) = \delta_{1j} + p_j \varepsilon + o(\varepsilon) \quad \text{as} \quad \varepsilon \downarrow 0$$

with transition probability densities

$$p_0 = 0, \quad p_1 = a_1 - \ln \beta < 0, \quad p_j = j q^{j-1} a_j \geq 0, \quad j \in \mathbf{N} \setminus \{1\}.$$

Therefore, the generating function (GF)

$$g(x) := \sum_{j \in \mathbf{N}} p_j x^j = x [f'(qx) - f'(q)]$$

completely determines the MQP, where $f(x)$ is the infinitesimal GF generating the MQP $Z(t)$, that is $f(x) = \sum_{j \in \mathbf{N}_0} a_j x^j$. In this notation $\beta := \exp f'(q)$ and $f(q) = 0$; see [5].

It is known that the regulating parameter for the MBP is the value $f'(1)$ and, according to the trajectory property, three types of processes are distinguished, characterized by its value: $f'(1) < 0$, $f'(1) = 0$ and $f'(1) > 0$. Note that the evolution of the MQP is controlled (regulated) by an essentially positive parameter β and it is known that $\beta = 1$ for $f'(1) = 0$

and $\beta < 1$ if $f'(1) \neq 0$; see [5] and the literature therein. Thus, there are two types of MQP, depending on the values of the parameter β . The above is clearly described in the following local limit theorem.

Theorem A [5]. Let $b < \infty$.

1. If $\beta = 1$, then

$$t^2 Q_{11}(t) \rightarrow \frac{2}{bf(0)} \quad \text{as } t \rightarrow \infty.$$

2. If $\beta < 1$, then

$$Q_{11}(t) \rightarrow \frac{|\ln \beta| A}{f(0)} \quad \text{as } t \rightarrow \infty,$$

where the constant is

$$A = q \exp \left\{ \int_0^q \left[\frac{1}{s-q} - \frac{f'(q)}{f(s)} \right] ds \right\}.$$

It is easy to verify that for $q = 1$, the positive constant A is the Sevastyanov constant from the theory of subcritical MBPs $f'(1) < 0$; see. [3, p. 54].

Let us now consider the following GF:

$$G_i(t; x) := \mathbf{E}_i x^{W(t)} = \mathbf{E} \left[x^{W(t)} | W(0) = i \right] = \sum_{j \in \mathbf{N}} Q_{ij}(t) x^j.$$

It was proved in [5] that

$$G_i(t; x) = x \left[\frac{\Phi(t; qx)}{q} \right]^{i-1} \exp \left\{ \int_0^t b \left(\frac{\Phi(\tau; qx)}{q} \right) d\tau \right\}, \quad (3)$$

where $\Phi(t; x) = \sum_{j \in \mathbf{N}_0} P_{1j}(t) x^j$ and

$$b(x) = \frac{g(x)}{x} = f'(qx) - f'(q).$$

Differentiating at the point $x = 1$, it follows from (3) that

$$\mathbf{E}_i W(t) = i - 1 \beta^t + \mathbf{E}_1 W(t) = \begin{cases} i - 1 \beta^t + bt + 1 & , \beta = 1, \\ i - 1 \beta^t + 1 + \gamma (1 - \beta^t) & , \beta < 1, \end{cases} \quad (4)$$

and

$$\text{Var}_i W(t) = \begin{cases} bti & , \beta = 1, \\ \left[\gamma + i - 1 \quad 1 + \gamma \beta^t \right] (1 - \beta^t) & , \beta < 1, \end{cases}$$

where $\text{Var}_i W(t) = \text{Var} [W(t) | W(0) = i]$ and $\gamma = b/|\ln \beta|$.

In view of all of the above, let us pose the problem of estimating the parameter β from the observed values of $W(t)$. It is obvious from (3) that

$$\mathbf{E} \left[x^{W(t+1)} | W(t) \right] = \left[\frac{\Phi(1; qx)}{q} \right]^{W(t)-1} G(1; x),$$

where $G(t; x) := G_1(t; x)$. Hence we have

$$\mathbf{E}[W(t+1)|W(t)] = W(t) - 1 \cdot \beta + \mathbf{E}_1 W(1).$$

The last relation allows us to write down the equation

$$W(t+1) = W(t) - 1 \cdot \beta + W(1) + \varepsilon(t)$$

with an error $\varepsilon(t)$, having a zero mean $\mathbf{E}\varepsilon(t) = 0$. Based on this equation, we propose the following estimator for β with a known $\mathbf{E}_1 W(1)$:

$$\hat{\beta}(t) := \frac{W(t+1) - \mathbf{E}_1 W(1)}{W(t) - 1}, \quad t > 1.$$

The estimator $\hat{\beta}(t)$ is unbiased for the parameter β . Indeed, according to the Law of total expectation, taking into account the homogeneity of MQP and (4), we have

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\hat{\beta}(t) &= \sum_{j \in N} \mathbf{P}[W(t) = j] \mathbf{E}\left[\frac{W(t+1) - \mathbf{E}_1 W(1)}{W(t) - 1} \middle| W(t) = j\right] \\ &= \sum_{j \in N} Q_{1j}(t) \cdot \left(\frac{\mathbf{E}_j W(1) - \mathbf{E}_1 W(1)}{j - 1}\right) = \beta \sum_{j \in N} Q_{1j}(t) = \beta. \end{aligned}$$

The following theorems characterize the properties of the variance of the estimator $\hat{\beta}(t)$.

Theorem 1. Let $b < \infty$. If $\beta = 1$, then

$$\frac{t}{2} \cdot \text{Var}\hat{\beta}(t) = 1 + O\left(\frac{\ln^2 t}{t}\right) \quad \text{as } t \rightarrow \infty.$$

Theorem 2. Let $b < \infty$. If $\beta < 1$, then

$$\text{Var}\hat{\beta}(t) = O(1) \quad \text{as } t \rightarrow \infty.$$

Theorem 3. Let $b < \infty$ and $\beta = 1$. Then

$$\mathbf{P}[\hat{\beta}(t) - 1 \leq t^{-x}] \rightarrow \mathcal{L}(x) \quad \text{as } t \rightarrow \infty,$$

where

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\theta x} d\mathcal{L}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x+2i\theta/x} dx.$$

REFERENCES

1. Бадалбаев И.С. Мухитдинов А.А. Статистические задачи многотипных ветвящихся процессов. // Ташкент: Фан, 1990.
2. Нагаев А.В. Об оценке среднего числа непосредственных потомков частицы в ветвящемся случайном процессе. // Теория вероятностей и ее примен. 1967. Т.67. Вып.2 с. 363–369.
3. Севастьянов Б.А. Ветвящиеся процессы. // М.: Наука, 1971. 436 с.
4. Imomov A.A. A differential analogue of the main lemma of the theory of Markov branching processes and its applications. // Ukrainian Mathematical Journal. 2005. V. 57, No 2, pp. 307-315.
5. Imomov A.A. On Markov continuous time analogue of Q-processes. // Journal Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2012. V. 84, pp. 57-64.

6. Imomov A.A. Meyliev A.Kh. On asymptotic structure of continuous-time Markov branching processes allowing immigration without higher-order moments. // Ufa Math. Jour. 2021. V. 13, No 1, pp. 137-147.

7. Imomov A.A. Meyliev A.Kh. Об асимптотической структуре некритических марковских ветвящихся случайных процессов с непрерывным временем. // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, 2021, 69, 22-36.

8. Imomov A.A. On estimation of the convergence rate to invariant measures in Markov branching processes with possibly infinite variance and immigration. // Journal Siberian Federal University: Math. and Fiz. 2021. V. 14, No 5, pp. 573-583.

CHEKLI O'LCHAMLI QO'ZG'ALISHGA EGA UMUMLASHGAN FRIDRIXS MODELINING MUHIM VA DISKRET SPEKTRLARI

Ismoilova Dildora

Buxoro davlat universiteti

T^d orqali d o'lchamli torni, $H_0 := C$ orqali bir o'lchamli kompleks fazoni (1-kanal) va $H_1 := L_2(T^d)$ orqali T^d to'plamda aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymat qabul qiluvchi) funksiyalarning Gilbert fazosini (2-kanal) belgilaymiz. H_0 va H_1 fazolarning to'g'ri yig'indisini H orqali belgilaymiz, ya'ni $H := H_0 \oplus H_1$. Bu yerda H_0 fazo Fok fazosining nol zarrachali qism fazosi, H_1 fazo Fok fazosining bir zarrachali qism fazosi va H Gilbert fazosi esa Fok fazosining qirqilgan ikki zarrachali qism fazosini bildiradi.

Mazkur maqolada H Gilbert fazosidagi quyidagicha

$$A := \begin{pmatrix} A_{00} & \mu_0 A_{01} \\ \mu_0 A_{01}^* & A_{11} - V \end{pmatrix}.$$

aniqlangan ikkinchi tartibli blok operatorli matritsani qaraymiz.

$$A_{00} f_0 = a f_0, \quad A_{01} f_1 = \int_{T^d} v_0(t) f_1(t) dt,$$

$$(A_{11} f_1)(x) = u(x) f_1(x), \quad (V f_1)(x) = \sum_{i=1}^n \mu_i v_i(x) \int_{T^d} v_i(t) f_1(t) dt,$$

tengliklar yordamida aniqlanadi. A operatorning parametrlari bo'lgan a, λ, μ_i , $i = \overline{0, n}$ sonlari hamda $u(\cdot), v_0(\cdot)$ va $v_i(\cdot)$ funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

a - fiksirlangan haqiqiy son, μ_k ($k = \overline{0, n}$)- fiksirlangan haqiqiy musbat sonlar (odatda ularga ta'sirlashish parametrlari deyiladi), $u(\cdot)$ va $v_k(\cdot)$ ($k = \overline{0, n}$) funksiyalar esa T^d da aniqlangan haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiyalardir.

A operator uning parametrlariga qo'yilgan yuqoridagi shartlarda H Gilbert fazosidagi chiziqli, chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma bo'ladi. Bunga funksional analizdagi mos ta'riflar yordamida ishonch hozil qilish mumkin.

Zamonaviy matematik fizikada A operatorga ikki kanalli molekulyar-rezonans modeli deyiladi. Ikki va to'rt o'lchamli qo'zg'alishga ega bo'lgan hollar [1]-[2] ishlarda o'rganilgan. Ushbu maqolada chekli o'chamli qo'zg'alishga ega bo'lgan holni qaraymiz.

Chekli o'lchamli qo'zg'alishlarda muhim spektrning o'zgarmasligi haqidagi G.Veyl teoremasiga [3] ko'ra A operatorning muhim spektri uchun

$$\sigma_{ess}(A) = [m; M]$$

tenglik o'rinlidir, bu yerda m va M sonlari

$$m := \min_{x \in T^d} u(x), \quad M := \max_{x \in T^d} u(x).$$

formulalar orqali aniqlangan sonlardir. Ko'rinib turibdiki, A operatorning muhim spektri $\mu_k > 0$, $k = \overline{0, n}$ ta'sirlashish parametrlaridan bog'liq emas.

Funksional analiz fanidan bizga yaxshi ma'lumki, A blok operatorli matritsa o'z-o'ziga qo'shma bo'lganligi boiz, uning barcha xos qiymatlari haqiqiydir. A blok operatorli matritsaning diskret spektrini aniqlashda muhim bo'lgan hamda $C \setminus [m, M]$ sohada regulyar bo'lgan

$$\begin{aligned} \Delta_0(\mu_0, z) &= a - z - \mu_0^2 \int_{T^d} \frac{v_0^2(t) dt}{u(t) - z}; \\ I_{i,j}(\mu_0, z) &= \mu_0 \int_{T^d} \frac{v_0(t) v_i(t) dt}{u(t) - z}; \quad i = \overline{1, n}; \\ \Delta_i(\mu_i, z) &= 1 - \mu_i \int_{T^d} \frac{v_i^2(t) dt}{u(t) - z}; \quad i = \overline{1, n}; \end{aligned}$$

funksiyalarni qaraymiz. Odatda,

$$\Delta_\mu(z) = \begin{pmatrix} \Delta_0(\mu_0, z) & \mu_i I_{0i}(\mu_0, z) \\ \mu_0 I_{i,j}(\mu_0, z) & \Delta_i(\mu_i, z) \end{pmatrix}, \quad \mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n)$$

funksiyaga A operatorga mos Fredgolm determinant deyiladi. Quyidagi teorema A operator va $\Delta_\mu(\cdot)$ funksiya nollari orasidagi munosabatni ifodalaydi.

Teorema. $z \in C \setminus [m; M]$ soni A operatorning xos qiymati bo'lishi uchun $\Delta_\mu(z) = 0$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bu teoremadan A operatorning diskret spektri haqidagi quyidagi tasdiqni hosil qilamiz.

Tasdiq. A operatorning diskret spektri uchun quyidagi tenglik o'rinlidir

$$\sigma_{disc}(A) = \{z \in C \setminus [m; M] : \Delta(\mu_i, z) = 0\}.$$

Hosil bo'lgan tasdiq diskret spektrni o'rganishda muhim hisoblanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI.

1. Тошева Н.А., Исмоилова Д.Э. (2021). Икки каналли молекуляр-резонанс модели хос қийматларининг мавжудлиги. *Scientific progress*. 2:1, 111-120.

2. Ismoilova D.E. (2021). To'rt o'lchamli qo'zg'alishga ega ikki kanalli molekulyar-rezonans modelining muhim va diskret spektrlari. *Scientific progress*. 2:1, 44-50.

3. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.4, Анализ операторов. М., Мир, 1971.

ON P-ADIC GIBBS MEASURES FOR COUNTABLE STATE POTTS MODEL ON A CAYLEY TREE

Khakimov Otabek

PhD, Institute of Mathematics

Abduqodirov Asliddin

Gulistan State University

The Cayley tree Γ^k of order $k \geq 1$ is an infinite tree, i.e., a graph without cycles, such that exactly $k + 1$ edges originate from each vertex. Let $\Gamma^k = (V, L)$ where V is the set of vertices and L the set of edges. Two vertices x and y are called *nearest neighbors* if there exists an edge $l \in L$ connecting them. We shall use the notation $l = \langle x, y \rangle$. A collection of nearest neighbor pairs $\langle x, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, y \rangle$ is called a *path from x to y* . The distance $d(x, y)$ on the Cayley tree is the number of edges of the shortest path from x to y .

For a fixed $x^0 \in V$, called the root, we set

$$W_n = \{x \in V: d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \bigcup_{m=0}^n W_m, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

and denote

$$S(x) = \{y \in W_{n+1}: d(x, y) = 1\}, \quad \forall x \in W_n,$$

the set of *direct successors* of x .

Let Q_p be a field of p -adic numbers. We consider the p -adic Potts model where spin takes values in the set $\Phi = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ and is assigned to the vertices of the Cayley tree $\Gamma^k = (V, L)$. A configuration σ on V is then defined as a function $x \in V \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$; in a similar manner one defines configurations σ_n and σ^n on V_n and W_n , respectively. The set of all configurations on V (resp. V_n, W) coincides with $\Omega = \Phi^V$ (resp. $\Omega_{V_n} = \Phi^{V_n}$; $\Omega_{W_n} = \Phi^{W_n}$). One can see that $\Omega_{V_n} = \Omega_{V_{n-1}} \times \Omega_{W_n}$.

The Hamiltonian $H_n: \Omega_{V_n} \rightarrow Q_p$ of the p -adic countable state Potts model has the form

$$H_n(\sigma) = J \sum_{\langle x, y \rangle \in L_n} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \quad \forall \sigma \in \Omega_{V_n}. \quad (1)$$

here δ is Kronecker symbol and $J \in Q_p$. We always assume that $|J|_p \leq \frac{1}{p}$.

We are going to construct p -adic Gibbs measures for the model (1). To do it first given a set A define $Q_p^A = \{(x_i)_{i \in A}: x_i \in Q_p\}$. Now consider a function $\mathbf{h}: x \in V \rightarrow \mathbf{h}_x = (h_{x,i})_{i \in \Phi} \in Q_p^\Phi$ of x such that

$$|h_{x,i}|_p \leq \frac{1}{p} \quad \text{for all } x \in V, i \in \Phi \quad (2)$$

Fix a sequence $\lambda \in Q_p^\Phi$ such that $|\lambda(n)|_p \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. Such kind of sequences are called *weights*. Given $n = 1, 2, 3, \dots$ define a p -adic probability measure $\mu_{\mathbf{h}}^{(n)}$ on Ω_{V_n} by

$$\mu_{\mathbf{h}}^{(n)}(\sigma) = Z_{n,\mathbf{h}}^{-1} \exp_p(H_n(\sigma)) \prod_{x \in W_n} h_{\sigma(x),x} \prod_{y \in V_n} \lambda(\sigma(y)), \quad (3)$$

Here, Z_n is the corresponding partition function.

We recall that such kind measures in real case was studied in [1]. We are interested to study such kind measures in p -adic settings. Now let us find for what kind of functions $\mathbf{h} = (\mathbf{h}_x: x \in V)$ the measures defined by (3) would satisfy the compatibility condition. The following statement describes conditions on $\mathbf{h}$ guaranteeing the compatibility condition

for the measures $\mu_h^{(n)}$.

Theorem 1. [2] The sequence of measures $(\mu_h^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ satisfy the compatibility condition if and only if for any $x \in V$ the following equation holds:

$$\hat{h}_{i,x} = \frac{\lambda(i)}{\lambda(0)} \prod_{y \in S(x)} F_i(\hat{h}_y, \theta), \quad i \in N$$

here and below $\theta = \exp_p(J)$, a vector $\hat{h} = (\hat{h}_i)_{i \in N} \in Q_p^N$ is defined by a vector $h = (h_i)_{i \in N}$ as follows

$$\hat{h}_i = \frac{\lambda(i)}{\lambda(0)} \cdot \frac{h_i}{h_0}, \quad i \in N$$

and a mapping $F: Q_p^N \rightarrow Q_p^N$ is $F(x, \theta) = (F_i(x, \theta))_{i \in N}$ with

$$F_i(x, \theta) = \frac{(\theta-1)x_i + \sum_{j=1}^{\infty} x_{j+1}}{\theta + \sum_{j=1}^{\infty} x_j}, \quad x = (x_j)_{j \in N}, \quad i \in N.$$

Without loss of generality we may assume that $\lambda(0) = 1$. Then denoting $\lambda_i = \lambda(i)$, $i \in N$ for $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in c_0$ we consider an operator $G_\lambda: m \rightarrow m$ given by

$$(G_\lambda(x))_i = \left(\frac{(\theta-1)\lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_{j+1}}{\theta + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j} \right)^k, \quad i \in N. \quad (4)$$

One can see that a set $E_p^N = \{x \in m: |x_i - 1|_p < 1, \forall i \in N\}$ is closed subset of m .

Proposition 1. Let $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ be a vector on c_0 such that $|\lambda_1 + 1|_p \geq |\lambda_1|_p > |\lambda_j|_p \neq 0$ for every $j \geq 2$. Then the operator G_λ given by (4) has the following properties:

- (1) $G_\lambda(E_p^N) \subset E_p^N$;
- (2) G_λ is a contraction on E_p^N .

Theorem 2. Let $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ be a vector on c_0 such that $|\lambda_1 + 1|_p \geq |\lambda_1|_p > |\lambda_j|_p \neq 0$ for every $j \geq 2$. Then for any $k \geq 1$ there exists a translation-invariant p -adic Gibbs measure for the countable state p -adic Potts model on a Cayley tree order k .

REFERENCES

1. Ganikhodjaev N, The Potts model on Z^d with countable set of spin values, J. Math. Phys. 45 (2004) 1121-1127.
2. Khrennikov A., Mukhamedov F., On uniqueness of Gibbs measure for p -adic countable state Potts model on the Cayley tree, Nonlinear analysis, 71(2009) 5327-5331

ON DYNAMICS OF RIESZ TYPE STOCHASTIC OPERATOR

Khakimov Otabek

PhD, Institute of Mathematics

Saidov Abdulatif

Gulistan State University

Let $m \geq 2$ be an integer and

$$S^{m-1} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m: \sum_{k=1}^m x_k = 1, \quad x_i \geq 0, \quad \forall 1 \leq i \leq m \right\}$$

be a $(m-1)$ -dimensional simplex. The following sets

$$\begin{aligned} \text{int}S^{m-1} &= \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in S^{m-1}: x_i > 0, \quad \forall 1 \leq i \leq m\} \\ \partial S^{m-1} &= S^{m-1} \setminus \text{int}S^{m-1} \end{aligned}$$

are called an *interior* and a *boundary* of the simplex, respectively. We denote by

$\mathbf{c}_m = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\right) \in S^{m-1}$ a center of the simplex and by $\mathbf{e}_k = (\delta_{k1}, \delta_{k2}, \dots, \delta_{km}) \in S^{m-1}$,

$k = \overline{1, m}$ the vertices of the simplex, where δ_{ij} is a Kronecker symbol.

On S^{m-1} we consider the following operator

$$T_A(\mathbf{x})_i = \frac{(A\mathbf{x})_i}{\sum_{k=1}^m (A\mathbf{x})_k}, \quad i = \overline{1, m} \quad (1)$$

where $A: R_+^m \rightarrow R_+^m$ be a linear operator.

We are interesting the following two problems:

- Classification linear operators A for which T_A maps S^{m-1} into itself.
- Studying asymptotical behavior of the trajectory of $\mathbf{x}^{(0)} \in S^{m-1}$ w.r.t. T_A .

For a given matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m$ we denote the following set $I_A = \{(i, j): a_{ij} \neq 0\}$.

Lemma 1. Let T_A be an operator given by (1). If $T_A(S^{m-1}) \subset S^{m-1}$ then for any $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ there exists an index $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ such that $(i, j) \in I_A$.

Lemma 2. Let T_A be an operator given by (1) and $\text{rank}(A) = 1$. If $T_A(S^{m-1}) \subset S^{m-1}$ then T_A is a constant.

Lemma 3. Let $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m$ be a matrix with $\text{rank}(A) > 1$. Then the following assumptions are equivalent:

- i. $T_A(S^{m-1}) \subset S^{m-1}$;
- ii. $\text{sgn}(a_{ij}) = \text{sgn}(a_{kl})$ for any $(i, j), (k, l) \in I_A$.

Remark 1. Keeping in mind $T_A = T_{-A}$, due to Lemma 3 and Lemma 1 without loss of generality we may conclude the following: $T_A(S^{m-1}) \subset S^{m-1}$ if and only if the following statements hold

- (A1) for any $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ there exists $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ such that $(i, j) \in I_A$;
- (A2) $a_{ij} > 0$ for any $(i, j) \in I_A$.

We notice that T_A is a linear if A is stochastic matrix, i.e. $\sum_{i=1}^m a_{ij} = 1$ for any $j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

So, we consider T_A for non-stochastic matrix with non negative elements.

Definition 1. Let a matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m$ has the following properties:

- (A1) $a_{ij} \geq 0$ for every $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$;
- (A2) $\sum_{j=1}^m a_{ij} = 1$ for all $i \in \{1, 2, \dots, m\}$;
- (A3) $\sum_{i=1}^m a_{ii} < m$ for any $i \in \{2, \dots, m\}$.

Then operator T_A associated to A is called *Riesz type stochastic operator* (in short RSO). Moreover, if $a_{ij} \neq 0$ for any $j \geq i$ then RSO associated by $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m$ is called positive RSO.

By $\text{Fix}(T_A)$ we denote the set of all fixed points of RSO T_A , i.e. $\mathbf{x} \in \text{Fix}(T_A)$ if and only if $T_A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Remark 2. We notice that $\mathbf{c}_m$ (center of S^{m-1}) is a fixed point of each RSO. Indeed, for any matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m$ with $\sum_{j=1}^m a_{ij} = 1$, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ one has $A(\mathbf{c}_m) = \mathbf{c}_m$. So, we infer that $T_A(\mathbf{c}_m) = \mathbf{c}_m$.

Proposition 1. Let T_A be a positive RSO. Then T_A has the following properties:

(i) For every $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ a set $M_k = \{x \in S^{m-1} : x_1 = x_2 = \dots = x_k \neq x_{k+1}\}$ is an invariant w.r.t. T_A .

(ii) $T_A(x) \in S^{m-1}$ if and only if $x_1 \neq 0$.

(iii) For every $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ a set $\Gamma_k = \{x \in S^{m-1} : x_i = 0 \text{ for every } i > k \text{ and } x_k \neq 0\}$ is an invariant w.r.t. T_A . Moreover, $\{\Gamma_k\}_{k=1}^m$ be a partition of S^{m-1} .

Example. Let $m = 2$ and $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1-a \end{pmatrix}$ with $0 < a < 1$. Then positive RSO T_A has two fixed points: c_2 and e_2 . Moreover, for any $x^{(0)} \in S^{m-1} \setminus e_2$ it holds

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_A^n(x^{(0)}) = c_2.$$

REFERENCES

1. Mukhamedov F., Ganikhodjaev N., Quantum Quadratic operators and Processes (Lect.Notes Math.). Springer, Berlin, 2015.
2. Khakimov O., On dynamics of Cezaro operator on S^{m-1} , The 41st International Conference on Quantum Probability and related topics, March 28- April 1, 2021, United Arab Emirates University, UAE.

ABOUT DEPENDENCE BETWEEN PQD AND ASSOCIATED VARIABLES

Khalkhadjaev Bakhtiyor

Branch of the Russian State University of Oil and Gas
named after I.M.Gubkin in Tashkent

Abstract In this thesis we look positive dependence, with a particular interest in association, will be introduced. A few useful alternative characterizations of association will be studied. Basic properties are showed showing that, although some vagueness in its definition, association is reach enough to be an interesting structure. We include examples and applications that are illustrative of the scope and usefulness of this dependence notion, introduces the basic notions of positive dependence to be explored throughout this text and establishes a few of the fundamental properties. Before embarking in the main subject, we introduce some really basic notation that will be used throughout this text. We begin with the simplest kind of positive dependence, introduced by Lehmann.

Definition 1. Two random variables X and Y are said to be positively quadrant dependent (PQD) if, for all $x, y \in R$,

$$H(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) - P(X \leq x)P(Y \leq y) \geq 0.$$

Example 1. Let X and Y be jointly distributed as

X \ Y	0	1
0	p_1	p_2
1	p_3	p_4

where $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$. Using the representation of H with distribution functions, it is easily seen that X and Y are positively quadrant dependent if and only if

$$P(X \leq 0, Y \leq 0) - P(X \leq 0)P(Y \leq 0) = p_1 - (p_1 + p_2)(p_1 + p_3) = p_1 p_4 - p_2 p_3 \geq 0.$$

Definition 2. The random variables $X_1, \dots, X_n$ are associated if, given two coordinatewise nondecreasing functions $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{Cov } f(X_1, \dots, X_n), g(X_1, \dots, X_n) \geq 0$$

whenever the covariance exists. Naturally, we may replace nondecreasing functions by nonincreasing functions in the definition above.

A sequence of random variables X_n , $n \in \mathbb{N}$, is associated if, for every $n \in \mathbb{N}$, the family of variables $X_1, \dots, X_n$ is associated.

The extension that proved to be most successful, because it allows for a sufficiently rich theoretical body and has a wide scope of applicability, has been what is known as (positive) association, introduced by Esary, Proschan and Walkup.

Remark 1. It is obvious that if X and Y are associated, they are also PQD. The converse is generally not true as illustrated by the following example from Joag-Dev.

Example 2. Consider discrete variables X_1 and X_2 with joint distribution characterized by Table 1.1. It is a simple matter of routine to verify that these random variables are indeed PQD. In fact, taking into account (1.1), for this joint distribution it is enough to verify the nonnegativity of

$$H(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) - P(X \leq x)P(Y \leq y) \geq 0.$$

$x_1 \backslash x_1$	0	1	2	3
0	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{14}$
1	$\frac{2}{14}$	$\frac{2}{14}$	0	$\frac{3}{14}$

Table 1.1 PQD but not associated random variables

x_1	x_2	$H(x_1, x_2)$	x_1	x_2	$H(x_1, x_2)$
0	0	$\frac{1}{28}$	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	2	$\frac{1}{28}$	1	3	0
0	3	0			

Table 1.2 Verification that the distribution in Table 1.1 is PQD

$$\text{Cov}(f(X_1, X_2), g(X_1, X_2)) = P(X_1 > 0, X_2 > 1) - P(X_1 > 0)P(X_2 > 1) = -\frac{1}{28},$$

so X_1 and X_2 are not associated.

REFERENCES

1. Oliveira P.E., Asymptotics for Associated Random Variables © Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012 y.

2. Joag-Dev, K.: Independence via uncorrelatedness under certain dependence structures. *Ann.Probab.* 11, 1037–1041, 1983 y.
3. Esary, J., Proschan, F., Walkup, D.: Association of random variables with applications. *Ann.Math. Stat.* 38, 1466–1474, 1967 y.
4. Sharakhmetov Sh., R Ibragimov., A characterization of joint distribution of two-valued random variables and its applications. *Journal of Multivariate Analysis*, 2002 y.

THE EXISTENCE OF EIGENVALUES OF THE ONE PARTICLE DISCRETE SCHRÖDINGER OPERATOR

Khalkhuzhaev Ahmad

DSc., Samarkand Branch of the Institute of Mathematics

Khamidov Shakhobiddin

PhD, Samarkand Branch of the Institute of Mathematics

Jumanov Jamol

Jizzakh State Pedagogical Institute

Let $\mathbb{Z}$ be the one dimensional cubical lattice and $\ell^2(\mathbb{Z})$ be the Hilbert space of squaresummable functions and $\ell^1(\mathbb{Z})$ be the Banach space of summable functions on $\mathbb{Z}$.

In the coordinate space representation, the one-particle Schrödinger operator (Hamiltonian) $\hat{H} := \hat{H}(\hat{\mathcal{E}})$ under a potential field $\hat{v} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ is defined as

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V},$$

where the operator $\hat{H}_0$ is a Laurent-Toeplitz-type operator

$$(\hat{H}_0 \hat{f})(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \hat{\mathcal{E}}(x-s) \hat{f}(s), \quad \hat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

in $\ell^2(\mathbb{Z})$, the function $\hat{\mathcal{E}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ satisfies $\hat{\mathcal{E}}(s) = \overline{\hat{\mathcal{E}}(-s)}$, and the operator $\hat{V}$ is the multiplication in $\ell^1(\mathbb{Z})$ by $\hat{v}$. Note that $\hat{H}$ is a self-adjoint bounded operator.

Let $\mathbb{T} := (-\pi, \pi]$ be the one dimensional torus, the dual group to $\mathbb{Z}$, equipped with Haar measure $\eta = \frac{dp}{2\pi}$, and let $L^2(\mathbb{T}, \eta)$ be the Hilbert space of square-integrable functions on $\mathbb{T}$.

In the momentum representation, the operator acts in $L^2(\mathbb{T}, \eta)$ by

$$H = \mathcal{F} \hat{H} \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F} \hat{H}_0 \mathcal{F}^{-1} + \mathcal{F} \hat{V} \mathcal{F}^{-1} = H_0 + V,$$

where

$$\mathcal{F}: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(\mathbb{T}, \eta), \quad (\mathcal{F} \hat{f})(p) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \hat{f}(x) e^{ipx}$$

is the standard Fourier transform with the inverse

$$\mathcal{F}^{-1}: L^2(\mathbb{T}, \eta) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}), \quad (\mathcal{F}^{-1} f)(x) = \int_{\mathbb{T}} f(p) e^{-ipx} \eta dp$$

The operator H_0 is the multiplication operator in $L^2(\mathbb{T}, \eta)$ by the continuous function

$\mathcal{E} := \mathcal{F} \hat{\mathcal{E}} \in C(\mathbb{T})$ and the operator V acts on $L^2(\mathbb{T}, \eta)$ as a convolution-type integral operator

$$(Vf)(p) = \int_{\mathbb{T}} v(p-t) f(t) \eta dt$$

with the kernel distribution $v := \mathcal{F} \hat{v}$.

Hypothesis 1.

- (a) The function $\mathcal{E}$ has a unique non-degenerate minimum at $p = 0$.
 (b) there exists $\gamma \in (0, 1)$, such that $0 < \sum_{x \in \mathbb{Z}} |x|^{1+\gamma} |\hat{v}(x)| < \infty$, where

$$|x| := \sum_{i=1}^d |x_i|$$

The operator H_0 is the multiplication operator by the continuous real function $\mathcal{E}(\cdot)$, therefore, it has only the essential spectrum, i.e.,

$$\sigma(\hat{H}_0) = \sigma(H_0) = \sigma_{ess}(H_0) = [\mathcal{E}_{min}, \mathcal{E}_{max}],$$

where

$$\mathcal{E}_{min} = \min_{p \in \mathbb{T}} \mathcal{E}(p), \quad \mathcal{E}_{max} = \max_{p \in \mathbb{T}} \mathcal{E}(p)$$

Since the perturbation operator $\hat{V}$ is compact, by the Weyl Theorem [5],

$$\sigma_{ess}(\hat{H}) = \sigma_{ess}(\hat{H}_0) = [\mathcal{E}_{min}, \mathcal{E}_{max}]$$

As expected, for any nonzero potential $\hat{v} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, the operator $\hat{H}$ has eigenvalues and they lie to the left or to the right of the essential spectrum $\sigma_{ess}(\hat{H})$ (see [1], [2], [3], [4]).

The following results are related to the existence or non-existence and also the uniqueness of eigenvalues of $\hat{H}$.

Theorem. Assume Hypothesis 1. Then:

1. if $\sum_{x \in \mathbb{Z}} \hat{v}(x) > 0$ then $\sigma_{disc}(\hat{H}) \cap (\mathcal{E}_{max}, +\infty) \neq \emptyset$;
2. if $\sum_{x \in \mathbb{Z}} \hat{v}(x) < 0$ then $\sigma_{disc}(\hat{H}) \cap (-\infty, \mathcal{E}_{min}) \neq \emptyset$

The authors were supported by the Foundation for Basic Research of the Republic of Uzbekistan, project number OT-F4-66.

REFERENCES:

1. B.Simon, The bound state of weakly coupled Schrödinger operators in one and two dimensions, Ann. Physics, 1976, 97, 279-288.
2. M.Klaus, On the bound state of Schrödinger operators in one dimension, Annals of Phys., 1977, 108, No 2, 288-300.
3. S.N.Lakaev, A.M.Khalkhujaev, Sh.S.Lakaev, Asymptotic behavior of an eigenvalue of the two-particle discrete operator, Theor. Math. Phys., 2012, 171, No 3, 438-451.
4. Lakaev S.N., Kholmatov Sh.Yu., Khamidov Sh.I., Bose–Hubbard models with on-site and nearest–neighbor interactions: exactly solvable case, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2021, 54.
5. Reed M., Simon B., Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of operators, Academic Press, N.Y., 1978.

EXISTENCE OF EIGENVALUES IN A SYSTEM OF TWO PARTICLES IN AN OPTICAL LATTICE

Lakaev Saidakhmat

Academician, Samarkand State University

Abduvayitov Saidakbar

Samarkand State University

Let $\mathbb{T}^d$ be d -dimensional torus (Brillouin zone) $\mathbb{T}^d = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^d \equiv (-\pi, \pi]^d$, $d \geq 3$ the Pontryagin dual group of $\mathbb{Z}^d$ and $\eta(dp) = \frac{d^d p}{(2\pi)^d}$ is the (normalized) Haar measure on the torus and $L^2[\mathbb{T}^d]$ be the space of all square-integrable functions defined on $\mathbb{T}^d$ and $L^{2,e}[\mathbb{T}^d] \subset L^2[\mathbb{T}^d]$ be the subspace of even functions.

The two-particle Schrödinger operator $h_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^3$ on lattice $\mathbb{Z}^3$ associated to a system of two bosons acts in $L^{2,e}(\mathbb{T}^3) \subset L^2(\mathbb{T}^3)$ as

$$h_\mu(k) = h_0(k) + \mu v.$$

The operator $h_0(k)$ is multiplication operator by the function $\mathcal{E}_k$:

$$(h_0(k)f)(p) = \mathcal{E}_k(p)f(p), \quad f \in L^{2,e}(\mathbb{T}^3),$$

where

$$\mathcal{E}_k(p) = \varepsilon(k-p) + \varepsilon(p) = 2 \sum_{j=1}^3 \left[1 - \cos \frac{k_j}{2} \cos \left(\frac{k_j}{2} - p_j \right) \right]$$

and

$$(vf)(p) = \int_{\mathbb{T}^3} f(q) d\eta(q), \quad f \in L^{2,e}(\mathbb{T}^3).$$

The function ε has a single nondegenerate minimum at the point $0 \in \mathbb{T}^3$ and hence the point $0 \in \mathbb{T}^3$ is the unique nondegenerate minimum point of the function $\mathcal{E}_0(\cdot)$. Since $\mathcal{E}_k(\cdot)$ is regular on $\mathbb{T}^3$, the implicit function theorem yields that there exists a regular function $p(k) = \frac{k}{2}$ defined in some neighborhood $W_\delta(0)$ of the point $0 \in \mathbb{T}^3$, and the point $p(k) = \frac{k}{2}$ is non-degenerate minimum point of the function $\mathcal{E}_k(\cdot)$, i.e.

$$\mathcal{E}_{\min}(k) := \min_{p \in \mathbb{T}^3} \mathcal{E}_k(p) = \mathcal{E}_k\left(\frac{k}{2}\right) = 2\varepsilon\left(\frac{k}{2}\right), \quad k \in W_\delta(0)$$

Let

$$\mu_{ef}(k) = \left(- \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\eta(dq)}{\mathcal{E}_k(q) - \mathcal{E}_{\min}(k)} \right)^{-1} < 0.$$

Note that non-degeneracy of the minimum of the function $\mathcal{E}_k$ gives the existence of this improper integral. According to the well known Weyl theorem the essential spectrum $\sigma_{\text{ess}}(h_\mu(k))$ of the operator $h_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^3$ coincides with the spectrum $\sigma(h_0(k))$ of $h_0(k)$. More specifically,

$$\sigma_{\text{ess}}(h_\mu(k)) = [\mathcal{E}_{\min}(k), \mathcal{E}_{\max}(k)],$$

where

$$\mathcal{E}_{\min}(k) := \min_{p \in \mathbb{T}^3} \mathcal{E}_k(p) = 2 \sum_{i=1}^3 \left[1 - \cos \left(\frac{k_i}{2} \right) \right]$$

$$\mathcal{E}_{\max}(k) := \max_{p \in \mathbb{T}^3} \mathcal{E}_k(p) = 2 \sum_{i=1}^3 \left[1 + \cos\left(\frac{k_i}{2}\right) \right].$$

Let $\mathbb{C}$ be the complex plane. For any $k \in \mathbb{T}^3$ and $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(h_\mu(k))$ we define the Fredholm determinant $\Delta_\mu(k, z)$ associated with the operator $h_\mu(k)$ by

$$\Delta_\mu(k, z) = 1 + \mu \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\eta(dp)}{\mathcal{E}_k(p) - z}.$$

Note that the function $\Delta_\mu(k, z)$ is regular in $\mathbb{T}^3 \times [\mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(h_\mu(k))]$ and $\Delta_\mu(k, z) \in \mathbb{R}$ for $z \in \mathbb{R}$.

The following lemmas are a simple consequence of the Birman-Schwinger principle and the Fredholm theorem.

Lemma 1. *Let $k \in \mathbb{T}^3$. The point $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess spec}}(h_\mu(k))$ is an eigenvalue of the operator $h_\mu(k)$ if and only if*

$$\Delta_\mu(k, z) = 0.$$

Let

$$\mu_{\min} = \min_{k \in \mathbb{T}^3} \mu_{\text{ef}}(k) = \mu_{\text{ef}}(0), \quad \mu_{\max} = \max_{k \in \mathbb{T}^3} \mu_{\text{ef}}(k)$$

The following theorem asserts the existence of eigenvalues of the operator $h_\mu(k)$ and can be proven in the same way as Theorem 0.1 in [1].

Theorem 1. *Let $d \geq 3$. For any $\mu \neq 0$ and $k \in \mathbb{T}^3$ the essential spectrum of the operator $h_\mu(k)$ satisfies the equality $\sigma_{\text{ess}}(h_\mu(k)) = [\mathcal{E}_{\min}(k), \mathcal{E}_{\max}(k)]$ and:*

1. *If $\mu_{\text{ef}}(k) < \mu < 0$. Then the operator $h_{\mu_{\text{ef}}}(k)$ has no either an eigenvalue below $\mathcal{E}_{\min}(k)$ or virtual level (resonance) at $\mathcal{E}_{\min}(k)$.*
2. *If $\mu = \mu_{\text{ef}}(k)$. Then the operator $h_{\mu_{\text{ef}}}(k)$ has no an eigenvalue below $\mathcal{E}_{\min}(k)$, at the same time it has a virtual level (resonance) at $\mathcal{E}_{\min}(k)$.*
3. *If $\mu < \mu_{\text{ef}}(0)$. Then for any $k \in \mathbb{T}^3$ the operator $h_\mu(k)$ has a unique eigenvalue $e_\mu(k)$ satisfying the relations*

$$e_\mu(k) < \mathcal{E}_{\min}(k), k \in \mathbb{T}^3 \quad \text{and} \quad e_\mu(0) < e_\mu(k), k \in \mathbb{T}^3 \setminus \{0\}.$$

For any $\mu \in (-\infty, 0)$ the eigenvalue $e_\mu(\cdot)$ is holomorphic function on $\mathbb{T}^d$ and for any $k \in \mathbb{T}^3$ the function $e_\mu(k)$ is monotonically decreasing in $\mu \in (-\infty, 0)$. For any $k \in \mathbb{T}^d$ and $\mu \in (-\infty, 0)$ the associated eigenfunction is of the form

$$f_{\mu, e_\mu(k)}(\cdot) = \frac{\mu c(k)}{\mathcal{E}_k(\cdot) - e_\mu(k)},$$

where $c(k) \neq 0$ is a normalizing constant and $f_{\mu, e_\mu(k)}(\cdot)$ is holomorphic in $\mathbb{T}^d$. Moreover, the vector valued mapping

$$f_\mu: \mathbb{T}^d \rightarrow L^2[\mathbb{T}^d, \eta(dk); L^{2,e}(\mathbb{T}^d)], k \rightarrow f_{\mu, e_\mu(k)}$$

is holomorphic on $\mathbb{T}^d$.

REFERENCES:

1. S. N.Lakaev, A.M.Khalkhuzhaev, Sh.S.Lakaev, Asymptotic behavior of an eigenvalue of the two-particle discrete Schrödinger operator. Theor. Math.Phys. **171(3)**, 800-811, (2012).

2. K. Winkler, G. Thalhammer, F. Lang, R. Frimm J. H. Denschlag, A. J. Daley, A. Kantian, H. P. Büchler and P. Zoller: Repulsively bound atom pairs in an optical lattice. LETTERS. Vol. 441|15 June 2006| doi:10.1038/nature04918 nature

THE NUMBER AND LOCATION OF EIGENVALUES OF THE TWO PARTICLE DISCRETE SCHRÖDINGER OPERATORS

Lakaev Saidakhmat

Academician, Samarkand State University

Khamidov Shakhobiddin

PhD, Samarkand Branch of the Institute of Mathematics

Uktamov Aminjon

Samarkand State University

Let $\mathbb{T} = [-\pi, \pi)$ be the one dimensional torus. Let $L^2(\mathbb{T})$ be the Hilbert space of square-integrable functions on $\mathbb{T}$ and $L^{2,e}(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$ be the subspace of even functions on $\mathbb{T}$. For any $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ and $k \in \mathbb{T}$ the bounded and self-adjoint Schrödinger operator $H_{\mu\lambda}(k)$ associated to a system of two identical particles (bosons) moving on the one dimensional lattice Z^d acts in $L^{2,e}(\mathbb{T})$ (see, e.g. [1]) as

$$H_{\mu\lambda}(k) = H_0(k) + V_{\mu\lambda}.$$

Here the non-perturbed operator $H_0(k)$, $k \in \mathbb{T}$ is the multiplication operator by the function $\mathcal{E}_k(\cdot)$ acting in $L^{2,e}(\mathbb{T})$ as

$$(H_0(k)f)(p) = \mathcal{E}_k(p)f(p), \quad \mathcal{E}_k(p) = 2\left[1 - \cos\frac{k}{2}\cos p\right], \quad p \in \mathbb{T}.$$

The perturbation operator $V_{\mu\lambda}$ is defined as

$$(V_{\mu\lambda}f)(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (\mu + \lambda \cos p \cos t) f(t) dt, \quad f \in L^{2,e}(\mathbb{T}).$$

The operator $H_0(k)$, $k \in \mathbb{T}$ is the multiplication operator by the continuous real function $\mathcal{E}_k(p)$ defined on $\mathbb{T}$, therefore its spectrum consist only of the essential spectrum, i.e.

$$\sigma(H_0(k)) = \sigma_{\text{ess}}(H_0(k)) = [\mathcal{E}_{\min}(k), \mathcal{E}_{\max}(k)], \quad (1)$$

with

$$\mathcal{E}_{\min}(k) := \min_{q \in \mathbb{T}} \mathcal{E}_k(q) = 2\left(1 - \cos\frac{k}{2}\right) \geq 0,$$

$$\mathcal{E}_{\max}(k) := \max_{q \in \mathbb{T}} \mathcal{E}_k(q) = 2\left(1 + \cos\frac{k}{2}\right) \leq 4.$$

The perturbation $V_{\mu\lambda}$ is the integral operator of rank-two. Hence, the well known Weyl theorem [2], the essential spectrum of $H_{\mu\lambda}(k)$ coincides with the spectrum of $H_0(k)$, i.e.,

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu\lambda}(k)) = \sigma(H_0(k)).$$

We define the Birman-Schwinger operator in $L^{2,e}(\mathbb{T})$ as

$$B_{\mu\lambda}(k, z) = -V_{\mu\lambda}R_0(k, z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus [\min_{q \in \mathbb{T}} \mathcal{E}_k(q), \max_{q \in \mathbb{T}} \mathcal{E}_k(q)].$$

For any fixed values of the parameters $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$, the determinant of the operator $H_{\mu\lambda}(k) - zI$ is understood as the Fredholm determinant of the operator $I - B_{\mu\lambda}(k, z)$,

$$\Delta(\mu, \lambda; k, z) := \det(I - B_{\mu\lambda}(k, z)) = \det(H_{\mu\lambda}(k) - zI).$$

The determinant $\Delta(\mu, \lambda; k, z)$ of $H_{\mu\lambda}(k)$ can be represented as

$$\Delta(\mu, \lambda; k, z) = \begin{cases} (1 + \mu a(k, z))(1 + \lambda c(k, z)) - \mu \lambda b^2(k, z), & k \neq \pi, \\ (1 + \mu a(\pi; z)) \left(1 + \frac{\lambda}{c}(\pi; z)\right), & k = \pi. \end{cases}$$

where

$$a(k, z) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{dt}{\varepsilon_k(t) - z}, \quad b(k, z) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\cos t dt}{\varepsilon_k(t) - z}, \quad c(k, z) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\cos^2 t dt}{\varepsilon_k(t) - z}.$$

We define the asymptotics of the function $\Delta(\mu, \lambda; k, z)$ at $\varepsilon_{\min}(k)$, the bottom and at $\varepsilon_{\max}(k)$, the top of the essential spectrum of $H_{\mu\lambda}(k)$:

$$\begin{aligned} \Delta(\mu, \lambda; k, z) &= \frac{1}{8\cos \frac{k}{2} \sqrt{\cos \frac{k}{2}}} C_{-\frac{1}{2}}^-(\mu, \lambda; k) (\varepsilon_{\min}(k) - z)^{-\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{1}{8\cos^2 \frac{k}{2}} C_0^-(\mu, \lambda; k) + o(1), \text{ as } z \nearrow \varepsilon_{\min}(k), \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} C_{-\frac{1}{2}}^-(\mu, \lambda; k) &= -\mu\lambda - 2\lambda\cos \frac{k}{2} - 4\mu\cos \frac{k}{2}, \quad C_0^-(\mu, \lambda; k) = -\mu\lambda - 2\lambda\cos \frac{k}{2} + 8\cos^2 \frac{k}{2}. \\ \Delta(\mu, \lambda; k, z) &= \frac{1}{8\cos \frac{k}{2} \sqrt{\cos \frac{k}{2}}} C_{-\frac{1}{2}}^+(\mu, \lambda; k) (z - \varepsilon_{\max}(k))^{-\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{1}{8\cos^2 \frac{k}{2}} C_0^+(\mu, \lambda; k) + o(1), \text{ as } z \searrow \varepsilon_{\max}(k), \end{aligned}$$

where

$$C_{-\frac{1}{2}}^+(\mu, \lambda; k) = \mu\lambda - 2\lambda\cos \frac{k}{2} - 4\mu\cos \frac{k}{2}, \quad C_0^+(\mu, \lambda; k) = -\mu\lambda + 2\lambda\cos \frac{k}{2} + 8\cos^2 \frac{k}{2}.$$

We define for a fixed $k \in \mathbb{T} \setminus \{\pi\}$, a partition of the $\mu - \lambda$ plane of parameters $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ to some connected components $\mathbb{G}_{\alpha\beta}(k)$, $\alpha, \beta = 0, 1, 2$ by means of the curves (hyperbola) $\Gamma_1^-(k), \Gamma_2^-(k)$ and $\Gamma_1^+(k), \Gamma_2^+(k)$, which are zeros of $C_{-\frac{1}{2}}^-(\mu, \lambda; k)$ and $C_{-\frac{1}{2}}^+(\mu, \lambda; k)$ (see Fig. 1).

$$\mathbb{G}_2^+(k) = \{(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^2: C_{-\frac{1}{2}}^+(\mu, \lambda; k) < 0, \quad \lambda > 4\cos \frac{k}{2}\},$$

$$\mathbb{G}_1^+(k) = \{(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^2: C_{-\frac{1}{2}}^+(\mu, \lambda; k) > 0\},$$

$$\mathbb{G}_0^+(k) = \{(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^2: C_{-\frac{1}{2}}^+(\mu, \lambda; k) < 0, \quad \lambda < 4\cos \frac{k}{2}\}$$

and

$$\mathbb{G}_2^-(k) = \{(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^2: C_{-\frac{1}{2}}^-(\mu, \lambda; k) < 0, \quad \lambda < -4\cos \frac{k}{2}\},$$

$$\mathbb{G}_1^-(k) = \{(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^2: C_{-\frac{1}{2}}^-(\mu, \lambda; k) > 0\},$$

$$\mathbb{G}_0^-(k) = \{(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^2: C_{-\frac{1}{2}}^-(\mu, \lambda; k) < 0, \quad \lambda > -4\cos \frac{k}{2}\}.$$

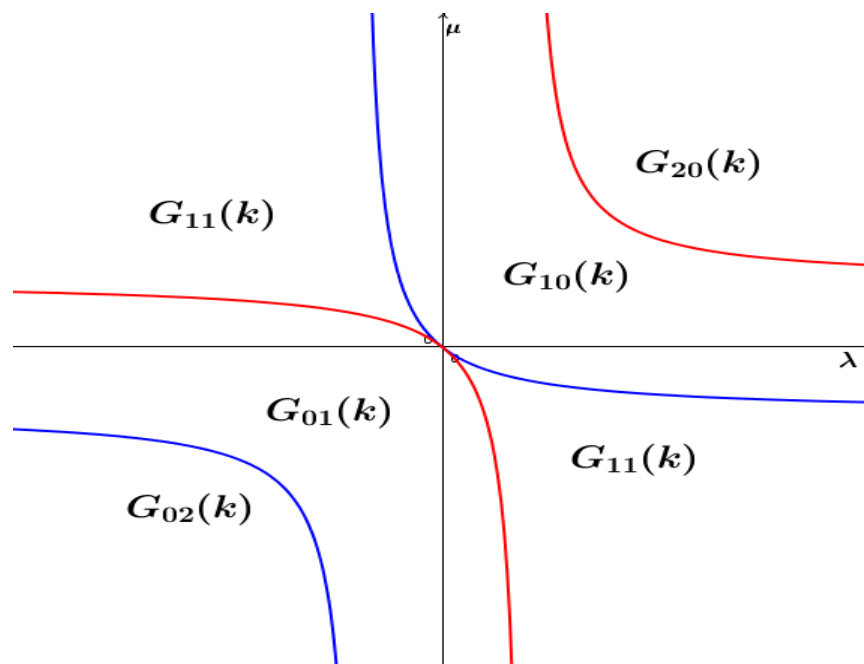


Figure 1.

Theorem 1. Let $k \in \mathbb{T}, k \neq \pi$ be fixed.

1. For any $(\mu, \lambda) \in \mathbb{G}_{20}(k)$ the operator $H_{\mu\lambda}(k)$ has exactly two eigenvalues $z_1(\mu, \lambda; k)$ and $z_2(\mu, \lambda; k)$ in $(-\infty, \mathcal{E}_{\min}(k))$.
2. For any $(\mu, \lambda) \in \mathbb{G}_{10}(k)$ the operator $H_{\mu\lambda}(k)$ has a unique eigenvalue $z_1(\mu, \lambda; k)$, which lies in $(-\infty, \mathcal{E}_{\min}(k))$.
3. For any $(\mu, \lambda) \in \mathbb{G}_{11}(k)$ the operator $H_{\mu\lambda}(k)$ has two eigenvalues satisfying $z_1(\mu, \lambda; k) < \mathcal{E}_{\min}(k)$ and $z_2(\mu, \lambda; k) > \mathcal{E}_{\max}(k)$.
4. For any $(\mu, \lambda) \in \mathbb{G}_{01}(k)$ the operator $H_{\mu\lambda}(k)$ has a unique eigenvalue $z_1(\mu, \lambda; k)$, which lies in $(\mathcal{E}_{\max}(k), +\infty)$.
5. For any $(\mu, \lambda) \in \mathbb{G}_{02}(k)$ the operator $H_{\mu\lambda}(k)$ has two eigenvalues $z_1(\mu, \lambda; k)$ and $z_2(\mu, \lambda; k)$ in $(\mathcal{E}_{\max}(k), +\infty)$.

REFERENCES:

1. Lakaev S.N., Kholmatov Sh.Yu., Khamidov Sh.I., Bose–Hubbard models with on-site and nearest–neighbor interactions: exactly solvable case, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **54**, (2021).
2. Reed M., Simon B., *Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of operators*, Academic Press, N.Y., (1978).

KELI DARAXTIDA μ PARAMETRLI POTTS - SOS MODELI UCHUN TRANSLATION – INVARIANT ASOSIY HOLATLAR

Nematov Mirsulton

Qo`qon davlat pedagogika instituti

$\tau^k = (V, L, i)$, $k \geq 1$ k - tartibli Keli daraxti bo`lsin, bu yerda  $V - \tau^k$  ning uchlari to`plami $L -$ uning qirralari to`plami  $i -$  insidentlik funksiyasi, ya`ni har bir $l \in L$ qirraga

uning oxirgi nuqtalari $x, y \in V$ ni mos qo'yadi. Agar $i(l) = \{x, y\}$ bo'lsa, u holda x, y yaqin qo'shnilar deyiladi va $l = \langle x, y \rangle$ ko'rinishda yoziladi. Keli daraxtida $d(x, y)$ masofa deb x va y uchlarni tutashtiruvchi eng qisqa yo'ldagi qirralar soniga aytiladi:

$$d(x, y) = \min \{d : \exists x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y\},$$

bu yerda $\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle$ yaqin qo'shnilardir.

Ma'lumki, τ^k Keli daraxtini barpo etuvchilari $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k+1}$ va $a_i^2 = e$ bo'lgan ikkinchi tartibli $k+1$ ta siklik gruppalarni erkin ko'paytmasidan iborat bo'lgan G_k gruppaga orqali tasvirlash mumkin (qarang [1]). Fiksirlangan $x^0 \in V$ uchun quyidagicha belgilashni kiritamiz:

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}.$$

$S(x)$ bilan $x \in W_n$ daraxt uchining to'g'ri avlodlar to'plamini belgilaylik, $S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}$. $S_1(x)$ orqali $x \in G_k$ nuqtaning barcha yaqin qo'shnilar to'plamini belgilaylik, ya'ni $S_1(x) = \{y \in G_k : \langle x, y \rangle\}$. Bu $x_\downarrow = S_1(x) \setminus S(x)$ ni hosil qilamiz.

Keli daraxtida spin qiymatlar $\Phi = \{1, 2, 3\}$ to'plamdan qiymat qabul qiladigan yaqin qo'shnilar bilan ta'sirlashuvchi Potts-SOS modelini qaraymiz. U holda V dagi σ konfiguratsiya $x \in V \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$ funksiya kabi aniqlanadi.

μ parametrli Potts-SOS modeli Gamiltoniani quyidagicha ko'rinishda aniqlanadi.

$$H(\sigma) = \mu \cdot J_1 \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + (1 - \mu) \cdot J_2 \sum_{\langle x, y \rangle \in L} |\sigma(x) - \sigma(y)|,$$

bu yerda $J_1, J_2 \in \mathbb{R}^2$, $0 < \mu < 1$.

M – uchlari V da bo'lgan barcha birlik sharlar to'plami bo'lsin. σ konfiguratsiyaning $b \in M$ shardagi qismini σ_b orqali va b sharning markazini c_b orqali belgilaylik. σ_b konfiguratsiya energiyasini quyidagicha aniqlaymiz:

$$U(\sigma_b) = \frac{\mu \cdot J_1}{2} \sum_{x \in S_1(c_b)} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + \frac{(1 - \mu) \cdot J_2}{2} \sum_{x \in S_1(c_b)} |\sigma(x) - \sigma(y)|.$$

Lemma. $k = 2$ bo'lsin. U holda har bir σ_b konfiguratsiya energiyasi uchun quyidagilar o'rinli bo'ladi:

$$U(\sigma_b) \in \{U_1, U_2, \dots, U_{10}\},$$

bu yerda

$$U_1 = \frac{3}{2} \mu \cdot J_1, \quad U_2 = \mu \cdot J_1 + \frac{1}{2} (1 - \mu) \cdot J_2, \quad U_3 = \frac{1}{2} \mu \cdot J_1 + (1 - \mu) \cdot J_2,$$

$$U_4 = \frac{3}{2} (1 - \mu) \cdot J_2, \quad U_5 = \mu \cdot J_1 + (1 - \mu) \cdot J_2, \quad U_6 = \frac{1}{2} \mu \cdot J_1 + 2(1 - \mu) \cdot J_2, \quad U_7 = 3(1 - \mu) \cdot J_2,$$

$$U_8 = \frac{1}{2} \mu \cdot J_1 + \frac{3}{2} (1 - \mu) \cdot J_2, \quad U_9 = 2(1 - \mu) \cdot J_2, \quad U_{10} = \frac{5}{2} (1 - \mu) \cdot J_2.$$

Quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$A_\xi = \{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 : U_\xi = \min \{U_1, U_2, \dots, U_{10}\}\}.$$

Hisob kitoblar A_i , $i = \overline{1,10}$ to'plamlarni quyidagicha bo'lishini ko'rsatadi:

$$A_1 = \left\{ (J_1, J_2) \in R^2; J_1 \geq 0, J_2 \geq \frac{\mu}{(1-\mu)} J_1; J_1 \leq 0, J_2 \geq \frac{\mu}{2(1-\mu)} J_1 \right\},$$

$$A_2 = \left\{ (J_1, J_2) \in R^2; J_1 \geq 0, J_2 = \frac{\mu}{(1-\mu)} J_1 \right\},$$

$$A_3 = \left\{ (J_1, J_2) \in R^2; J_1 \geq 0, J_2 = \frac{\mu}{(1-\mu)} J_1 \right\},$$

$$A_4 = \left\{ (J_1, J_2) \in R^2; J_1 \geq 0, J_2 \leq \frac{\mu}{(1-\mu)} J_1 \right\},$$

$$A_5 = \left\{ (J_1, J_2) \in R^2; J_1 \leq 0, J_2 = \frac{\mu}{2(1-\mu)} J_1 \right\},$$

$$A_6 = \left\{ (J_1, J_2) \in R^2; J_1 \leq 0, J_2 \leq \frac{\mu}{2(1-\mu)} J_1 \right\},$$

$$A_7 = \left\{ (J_1, J_2) \in R^2; J_1 \leq 0, J_2 \leq \frac{\mu}{2(1-\mu)} J_1 \right\},$$

$$A_8 = \{ (J_1, J_2) \in R^2; J_1 = 0, J_2 = 0 \},$$

$$A_9 = \{ (J_1, J_2) \in R^2; J_1 \geq 0, J_2 = 0 \},$$

$$A_{10} = \{ (J_1, J_2) \in R^2; J_1 \geq 0, J_2 = 0 \},$$

va $\bigcup_{i=1}^{10} A_i = R^2$.

[2] ishda Potts modeli uchun translatsion-invariant asosiy holatlar o'rganilgan va bu maqoladagi usullardan foydalanib quyidagi teorema isbot qilingan.

Teorema. Agar $(J_1, J_2) \in A_i$ bo'lsa, u holda $\sigma(x)=1$, $\sigma(x)=2$, $\sigma(x)=3$, $\forall x \in V$ konfiguratsiyalar translatsion – invariant asosiy holat bo'ladi.

ADABIYOTLAR

1. Rozikov U.A. Gibbs measures on Cayley trees. World scientific, 2013.
2. Rahmatullaev M.M, Rasulova M.A. Periodic and Weakly Periodic Ground States for the Potts Model with Competing Interactions on the Cayley Tree. Siberian Advances in Mathematics. ISSN 1055 – 1344. 2016. Vol. 26, №3. pp. 215–229.

BIRJINSILI BO'LMAGAN PUASSON NUQTAVIY JARAYONIDAN YARALGAN QAVARIQ QOPLAMA UCHLARINING TAQSIMOTI

Qarshiyev Umidjon

O'zbekiston Milliy universiteti

Ushbu maqola, parabola ichida bir jinsli bo'lmagan Puasson taqsimotiga ega nuqtaviy jarayonidan yaralgan qavariq qoplama uchlari jarayonining tayin vaqtdagi aniq taqsimot qonunini aniqlashga va [1,2] ishlarda boshlangan tadqiqotni davom ettirishga bag'ishlangan.

Bu yerda

$$R_n = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{2b_n} \leq y \right\}.$$

deb belgilab, quyidagi o'lchovni kiritamiz

$$\Lambda_n(A) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sqrt{b_n}L(b_n)} \iint_A \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(y - \frac{x^2}{2b_n} \right)^\beta L \left(\frac{b_n}{y - \frac{x^2}{2b_n}} \right) \right] dx dy, & \text{agar } A \subset R_n; \\ 0, & \text{agar } A \not\subset R_n, \end{cases}$$

b_n miqdor esa

$$nx^{-(\beta+\frac{1}{2})}L(x) = 1$$

tenglamaning eng kichik yechimi,

$$L(u) = \exp \left\{ \int_1^u \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \right\}, \quad \varepsilon(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty \quad (1)$$

differentsillanuvchi Karamata ma'nosidagi sekin o'zgaruvchili funktsiyaning (s.o'.f.) integral tasviri.

Faraz qilaylik, $\Pi_n(\cdot) - \Lambda_n(\cdot)$ intensiv o'lchovli, bir jinsli bo'lmagan Puasson nuqtaviy jarayoni (b.b.p.n.j.) va $(X_1, Y_1); (X_2, Y_2); \dots; (X_k, Y_k); \dots$ R_n da toraytirilgan $\Pi_n(\cdot)$ b.b.p.n.j. realizatsiyasi bo'lsin. Bu nuqtalarga tortilgan qavariq qoplamani C_n bilan belgilaymiz.

Har bir $a \in R$ uchun uchlar jarayoni $W_n(a) = (X_n(a), Y_n(a))$, deb $\Pi_n(\cdot)$ b.b.p.n.j. realizatsiyasi ichidagi $Y_k - aX_k$ ga minimal qiymat beruvchi (X_k, Y_k) nuqtaga aytiladi.

Tarifga ko'ra, $W_n(a)$ sakrab o'zgaruvchi nostatsionar Markov jarayoni bo'ladi. Quyidagi teoremlarda $W_n(a)$ ning turli holatlariga mos taqsimotning ko'rinishi keltirilgan.

Teorema. Faraz qilaylik $s = y - ax + \frac{a^2 b_n}{2}$, $r = x - ab_n$ bo'lsin, u holda

$$1) \quad P(W_n(a) \in (dx, dy)) = \frac{1}{2\pi\sqrt{b_n}L(b_n)} \exp \left\{ -\frac{s^{\beta+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}L(b_n)} \int_0^1 \frac{t^\beta L\left(\frac{b_n}{st}\right)}{\sqrt{1-t}} dt \right\}.$$

$$\cdot \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(y - \frac{x^2}{2b_n} \right)^\beta L \left(\frac{b_n}{y - \frac{x^2}{2b_n}} \right) \right] dx dy;$$

$$2) \quad P(W_n(a) = W_n(0)/W_n(0) = (x, y)) =$$

$$= \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi\sqrt{b_n}L(b_n)} \int_{x-ab_n}^{\sqrt{2b_n}s} \left(s - \frac{u^2}{2b_n}\right)^\beta L\left(b_n / \left(s - \frac{u^2}{2b_n}\right)\right) du - \int_x^{\sqrt{2b_n}y} \left(y - \frac{u^2}{2b_n}\right)^\beta L\left(b_n / \left(y - \frac{u^2}{2b_n}\right)\right) dy \right\}.$$

Yuqorida keltirilgan teorema I.M.Xamdamov tomonidan [2] maqolada hususiy hol, ya'ni faqat $L(x) = 1$ uchun olingan natijasini (1) ko'rinishdagi s.o'.f. uchun umumlashtiradi.

ADABIYOTLAR

1. Groeneboom P., Limit theorems for convex hulle//Probab. Th. Rel. Fields, 1988, v.79, N3, pp.327-368.
2. Khamdamov I.M. On Limit Theorem for the Number of Vertices of the Convex Hulls in a Unit Disk, Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 2020, 13(3), p.275–284.

KO'P O'LCHOVLI NORMAL TAQSIMOT

Quljanov O'tkir

PhD, Samarqand davlat universiteti

Eshmuxammedov Abdulla

Samarqand davlat universiteti

Ehtimollar nazariyasidagi ko'p o'lchovli normal taqsimot (yoki ko'p o'lchovli Gauss taqsimoti)- bir o'lchovli normal taqsimotning umumlashmasi hisoblanadi.

Ta'rif 1. Ko'p o'lchovli normal taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy vektor Gauss vektori deyiladi.

Tasodifiy vektor

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

agar quyidagi ekvivalent shartlardan biri to'g'ri bo'lsa, ko'p o'lchovli normal taqsimotga ega bo'ladi

1.1. Vektor komponentlarining ixtiyoriy chiziqli kombinatsiyasi

$$\sum_{i=1}^n a_i X_i < x$$

normal taqsimotga ega yoki o'zgarmas hisoblanadi.

1.2. Bog'liq bo'lmagan standart normal tasodifiy miqdorlar vektori $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)^T$, haqiqiy vektor $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^T$ va $n \times m$, o'lchovli A matritsa mavjudki:

$$X = AZ + \mu.$$

tenglik o'rinli bo'ladi

1-teorema. $\mu \in \mathbb{R}^n$ vektori va $n \times n$ o'lchamli manfiy bo'lmagan aniq simmetrik matritsa Σ mavjudki, X vektorning xarakteristik funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\varphi_X(t) = e^{i\mu^T u - \frac{1}{2}u^T \Sigma u}, u \in \mathbb{R}^n.$$

2. **Aynimagan normal taqsimotning zichligi**

Agar biz faqat aynimagan kovariatsiya matritsasi bo'lgan taqsimotlarni hisobga qarasak, quyidagi ta'rif ham ekvivalent bo'ladi:

$\mu \in \mathbb{R}^n$ vektori va musbat aniqlangan $n \times n$, simmetrik matritsa mavjudki, X vektorining ehtimollik zichligi:

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

ko'rinishga ega, bu yerda $|\Sigma|$ –matritsaning determinanti, Σ^{-1} esa Σ , ga teskari matritsadir.

μ vektor X o'rta qiymatlarining vektori, Σ - uning kovariatsiya matritsasi.

$n = 1$ bo'lsa, ko'p o'lchovli normal taqsimot oddiy normal taqsimotga aylanadi.

Agar X tasodifiy vektori ko'p o'lchovli normal taqsimotga ega bo'lsa, u holda $X \sim N(\mu, \Sigma)$ deb yoziladi.

3. Ikki o'lchovli normal taqsimot

Ko'p o'lchovli normal taqsimotning alohida holati ikki o'lchovli normal taqsimotdir. Bu holda, matematik kutilishlari μ_1, μ_2 , dispersiyalari σ_1^2, σ_2^2 va kovariatsiyasi σ_{12} ga teng bo'lgan ikkita X_1, X_2 tasodifiy miqdorga ega bo'lamiz. Bunday holda, kovariatsiya matritsasi 2 o'lchamga ega va uning determinanti

$$\det \Sigma = \sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)$$

ga teng, bu yerda $\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}$ - tasodifiy miqdorlarning korrelyatsiya koeffitsienti.

2-teorema. Ikki o'lchovli aynimagan (korrelyatsiya koeffitsienti modul bo'yicha birga teng emas) normal taqsimotning zichligini quyidagicha yozish mumkin:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \rho \frac{2(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}.$$

Agar

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2), \sigma_{12} = \text{cov}(X; Y)$$

bo'lsa, (ya'ni, X, Y bog'liq bo'lsa), ularning yig'indisi hali ham normal taqsimlangan, ammo dispersiyada qo'shimcha had paydo bo'ladi.

$$2\sigma_{12}: X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_{12}).$$

4. Ko'p o'lchovli normal taqsimotning xossalari

4.1. Agar $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ vektor ko'p o'lchovli normal taqsimotga ega bo'lsa, uning $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ komponentlari bir o'lchovli normal taqsimotga ega bo'ladi. Komponentlar bog'liq bo'lmaganda teskarisi o'rinli bo'ladi.

4.2. Agar $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlar bir o'lchovli normal taqsimotga ega bo'lsa va birgalikda bog'liq bo'lmasa, $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ tasodifiy vektori ko'p o'lchovli normal taqsimotga ega bo'ladi. Bunday vektorning Σ kovariant matritsasi diagonallidir.

4.3. Agar $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ ko'p o'lchovli normal taqsimotga ega bo'lsa va uning komponentlari juft-juft korrelyatsiylanmagan bo'lsa, ular bog'liq bo'lmagan bo'ladi. Biroq, agar ba'zi $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ tasodifiy miqdorlar bir o'lchovli normal taqsimotlarga ega bo'lsa va juft-juft korrelyatsiylanmagan bo'lsa, bundan ular bog'liq bo'lmaganligi va ko'p o'lchovli normal taqsimotga ega bo'lishi kelib chiqmaydi.

Misol. $X \sim N(0; 1)$ va $\alpha = \pm 1$ teng ehtimolliklari ega va ko'rsatilgan normal miqdorrga bog'liq bo'lmasin. U holda agar $Y = \alpha X \sim N(0; 1)$ bo'lsa, X va Y ning

korrelyatsiyasi nolga teng. Biroq, bu tasodifiy miqdorlar bog'liq va 1-tasdiqqa ko'ra, ko'p o'lchovli normal taqsimotga ega emas.

ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Shirayev A.N. Veroyatnost: V 2-x kn. — 4-ye izd., pererabot. i dop. — M.: MSNMO, 2007. Kn. 1.- 552 s.

2. Novoselov A.A. Izbrannoye: normalnost sovmestnogo raspredeleniya. Sovremennyye risk - sistemy. M., 2014.

KUTISH JOYLARI SONI CHEKLANGAN SISTEMALAR NOSTATSIONAR NAVBAT UZUNLIKLARI TAQSIMOTLARI UCHUN IKKILANMA MUNOSABAT

Qurbonov Habibullo

F.-m. f. n. SamDU

Axmatova Shaxnoza

SamDU

Quyidagicha xarakterlanadigan $G_1|G_2|1|N - F_1$ va $G_2|G_1|1|N - F_2$ bir kakalli xizmat ko'rsatish sistemalarini qaraymiz:

1. F_1 sistema— t_n xizmat jarayoni boshlangandan keyin n —talabning sistemaga kelib tushish momenti va $z_n = t_n - t_{n-1}, n \geq 1, t_0 = 0$ bo'lsin. Faraz qilaylik, $z_1, z_2, \dots, z_n$ lar bog'liq bo'lmagan va bir xil $A(t) = P(z_n < t), n \geq 1$, taqsimot funksiyasiga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlar bo'lsin.

Talablarga ularning kelish tartibida xizmat ko'rsatiladi. Xizmat ko'rsatish vaqti uzunliklari $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ lar bog'liq bo'lmagan bir xil $B(t) = P(s_n < t), n \geq 1$, taqsimot funksiyasiga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlarni tashkil etsin.

Kutish joylari soni N ga teng ($N \geq 1$).

2. F_2 sistema — F_1 sistemada $A(t)$ va $B(t)$ taqsimot funksiyalarini o'zaro almashtirib, ikkinchi F_2 sistemani hosil qilamiz. Bu yerda agar t_n^* —xizmat jarayoni boshlangandan keyin n —talabning sistemaga kelib tushish momenti bo'lsa, $z_n^* = t_n^* - t_{n-1}^*, n \geq 1$, tasodifiy miqdorlar $B(t) = P(z_n^* < t), n \geq 1$, taqsimotga ega bo'ladi. Shuningdek, n —talabga xizmat ko'rsatish vaqti uzunligi s_n^* tasodifiy miqdorning taqsimoti $A(t) = P(s_n^* < t), n \geq 1$, bo'ladi.

Yuqorida ta'riflangan F_1 va F_2 sistemalar ikkilanma xizmat ko'rsatish sistemalari deyiladi.

Quyidagi belgilashlarni kiritaylik:

$\xi_1(t)$ va $\xi_2(t)$ —mos holda F_1 va F_2 sistemalarda t momentda mavjud bo'lgan talablar soni;

$$P_k^{(j)}(t) = P\left(\xi_1(t) = k, \sup_{0 \leq u \leq t} \xi_1(u) \leq N, \inf_{0 \leq u \leq t} \xi_1(u) > 0 / \xi_1(0) = j\right), \\ k = \overline{1, N}, j = \overline{1, N}.$$

$$Q_k^{(j)}(t) = (P(\xi_2(t) = k, \sup_{0 \leq u \leq t} \xi_2(u) \leq N, \inf_{0 \leq u \leq t} \xi_2(u) > 0 / \xi_2(0) = j), \\ k = \overline{1, N}, j = \overline{1, N}.$$

Teorema. $k = \overline{1, N}$ va $j = \overline{1, N}$ lar uchun ushbu munosabat o'rinli:

$$P_k^{(j)}(t) = Q_j^{(k)}(t) \quad (1)$$

Ushbu munosabat $N = \infty$ uchun ham o'rinli.

Izoh. (1) munosabat

$$A(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \lambda > 0, t > 0$$

hol uchun [4] ishda keltirilgan natijaning umumlashmasi hisoblanadi. Shuningdek, (1) munosabatga o'xshash tenglik [3] ishda $M|G|1|N$ va $GJ|M|1|N-1$ sistemalar o'rtasida ham ko'rsatilgan.

Teoeremaning isboti. Avval F_1 sistemani qaraylik. $\eta_1(t)$ va $\eta_2(t)$ mos holda $(0, t)$ vaqt oralig'ida kelib tushgan va xizmati tugallangan talablar soni bo'lsin. U holda ushbu munosabatlar o'rinli:

$$k \leq j \text{ da}$$

$$P_k^{(j)}(t) =$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} P(\eta_1(t) = m, \eta_2(t) = j - k + m, \sup_{0 \leq u \leq t} \xi_1(u) \leq N, \inf_{0 \leq u \leq t} \xi_1(u) > 0), \quad (2)$$

$$k > j \text{ da}$$

$$P_k^{(j)}(t) =$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} P(\eta_1(t) = k - j + m, \eta_2(t) = m, \sup_{0 \leq u \leq t} \xi_1(u) \leq N, \inf_{0 \leq u \leq t} \xi_1(u) > 0), \quad (3)$$

Agar

$$(\eta_1(t) = m, \sup_{0 \leq u \leq t} \xi_1(u) \leq N) = (z_1 + \dots + z_m < t < z_1 + \dots + z_{m+1})$$

va

$$(\eta_2(t) = m, \inf_{0 \leq u \leq t} \xi_1(u) > 0) = (s_1 + \dots + s_m < t < s_1 + \dots + s_{m+1})$$

tengliklarni e'tiborga olsak, $k \leq j$ da quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi:

$$\begin{aligned} & P\left(\eta_1(t) = m, \eta_2(t) = j - k + m, \sup_{0 \leq u \leq t} \xi_1(u) \leq N, \inf_{0 \leq u \leq t} \xi_1(u) > 0\right) = \\ & = P(z_1 + \dots + z_m < t < z_1 + \dots + z_{m+1}, s_1 + \dots + s_{j-k+m} < t < s_1 + \dots + s_{j-k+m+1}). \end{aligned}$$

$s_1, s_2, \dots$ tasodifiy miqdorlar kiruvchi talablar oqimiga bog'liq bo'lmaganligi sababli ushbu tenglikdan quyidagi munosabatga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} & P\left(\eta_1(t) = m, \eta_2(t) = j - k + m, \sup_{0 \leq u \leq t} \xi_1(u) \leq N, \inf_{0 \leq u \leq t} \xi_1(u) > 0\right) = \\ & P(z_1 + \dots + z_m < t < z_1 + \dots + z_{m+1}) \cdot P(s_1 + \dots + s_{j-k+m} < t < s_1 + \dots + s_{j-k+m+1}) = \\ & = [P(z_1 + \dots + z_m < t) - P(z_1 + \dots + z_{m+1} < x)] \cdot [P(s_1 + \dots + s_{j-k+m} < t) - \\ & P(s_1 + \dots + s_{j-k+m+1}) - P(s_1 + \dots + s_{j-k+m+1} < t)] \end{aligned} \quad (4)$$

Agar $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ va $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ lar bog'liq bo'lmagan va mos holda $A(t)$ va $B(t)$ taqsimotlarga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini tashkil etishni e'tiborga olsak, (4) tenglik quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$P(\eta_1(t) = m, \eta_2(t) = j - k + m, \sup_{0 \leq u \leq t} \xi_1(u) \leq N, \inf_{0 \leq u \leq t} \xi_1(u) > 0) = [A^{*(m)}(t) - A^{*(m+1)}(t)] \cdot [B^{*(j-k+m)}(t) - B^{*(j-k+m+1)}(t)], \quad (5)$$

bu yerda $A^{*(m)}(t)$ va $B^{*(m)}(t)$ -mos holda $A(t)$ va $M(t)$ funksiyalarning k karrali bog'lanmasi.

$$P(\eta_1(t) = k - j + m, \eta_2(t) = m, \sup_{0 \leq u \leq t} \xi_1(u) \leq N, \inf_{0 \leq u \leq t} \xi_1(u) > 0) = [A^{*(k-j+m)}(t) - A^{*(k-j+m+1)}(t)] \cdot [B^{*(m)}(t) - B^{*(m+1)}(t)], \quad (6)$$

(5) va (6) tengliklarga ko'ra (2) va (3) munosabatlar quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$P_k^{(j)}(t) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} [A^{*(m)}(t) - A^{*(m+1)}(t)] \cdot [B^{*(j-k+m)}(t) - B^{*(j-k+m+1)}(t)], & k \leq j \text{ da} \\ \sum_{m=0}^{\infty} [A^{*(k-j+m)}(t) - A^{*(k-j+m+1)}(t)] \cdot [B^{*(m)}(t) - B^{*(m+1)}(t)], & k > j \text{ da} \end{cases} \quad (7)$$

Yuqoridagi mulohazalarning takrorlab, $Q_k^{(j)}(t)$ funktsiya uchun ushbu munosabatni hosil qilamiz:

$$Q_k^{(j)}(t) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} [B^{*(m)}(t) - B^{*(m+1)}(t)] \cdot [A^{*(j-k+m)}(t) - A^{*(j-k+m+1)}(t)], & k \leq j \text{ da} \\ \sum_{m=0}^{\infty} [B^{*(k-j+m)}(t) - B^{*(k-j+m+1)}(t)] \cdot [A^{*(m)}(t) - A^{*(m+1)}(t)], & k > j \text{ da} \end{cases} \quad (8)$$

(7) va (8) munosabatlardan (1) tenglik kelib chiqadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания, М.: Наука, 1987.
2. Клейнарк Л. Теория массового обслуживания, Т.1, М.: М.: Машиностроение, 1979.
3. Азларов Т.А., Курбанов Х. Соотношение двойственности для нестационарных распределений длин очередей систем М/6/1/Ни G-J /M/1/N-1, Док. АНУзССР. 1980, №10, 3-4.
4. Shanbhag D.N. On a duality principle in the theory of queues. Operat. Res., 1966,14, №5, 947-949.

A P-ADIC DYNAMICAL SYSTEM: LIMIT POINTS

Rozikov Utkir

Doctor of sciences in physics and mathematics, V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics

Safarov Janibek

National University of Uzbekistan

Theory of p -adic numbers is one of very actively developing area in mathematics. It has numerous applications in many branches of mathematics, biology, physics and other sciences (see for example [1]- [4] and the references therein).

Let Q be the field of rational numbers.

For each fixed prime number p , every rational number $x \neq 0$ can be represented in the form $x = p^r \frac{n}{m}$, where $r, n \in \mathbb{Z}$, m is a positive integer, $(p, n) = 1$, $(p, m) = 1$.

The p -adic norm of x is given by

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-r}, & \text{for } x \neq 0, \\ 0, & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

The completion of Q with respect to p -adic norm defines the p -adic field which is denoted by Q_p (see [1]). The algebraic completion of Q_p is denoted by C_p and it is called the set of *complex p -adic numbers*.

Consider the dynamical system associated with the function f defined on C_p by

$$f(x) = ax^b, \quad a \neq 0, \quad a \in C_p, \quad b \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

where $x \neq 0$.

For $x \in C_p$ denote by $f^n(x)$ the n -fold composition of f with itself:

$$f^n(x) = f(f(f \dots (f(x)) \dots)).$$

n times

For arbitrary given x_0 and f the trajectory of x_0 is the sequence of points

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0), x_3 = f^3(x_0), \dots$$

We are interested to study the limit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

A point x is called a fixed point for f if $f(x) = x$.

The function (1) has fixed points $x_k, k = 1, 2, \dots, |b-1|$, which are solutions to

$$x^{b-1} = \frac{1}{a} \text{ in } C_p.$$

For these fixed points we have

$$|x_k|_p = \alpha = (|a|_p)^{-1/(b-1)}. \quad (2)$$

For any $a \in C_p$ and $r > 0$ denote

$$U_r(a) = \{x \in C_p : |x - a|_p < r\},$$

$$V_r(a) = \{x \in C_p : |x - a|_p < r\},$$

$$S_r(a) = \{x \in C_p : |x - a|_p = r\}.$$

Lemma 1. If $b \in \mathbb{Z}, b < 0$ and a is defined by (2) then the following assertions hold

1. The sphere $S_a(0)$ is invariant with respect to f , (i.e., $f(S_a(0)) \subset S_a(0)$);
2. $f(U_a(0)) \subset C_p \setminus V_a(0)$;
3. $f(C_p \setminus V_a(0)) \subset U_a(0)$.

We can explicitly calculate f^n :

Lemma 2. For any $x \in C_p \setminus \{0\}$ we have

$$f^n(x) = a^{\frac{b^n-1}{b-1}} \cdot x^{b^n}, \quad n \geq 1.$$

Theorem 1. If $b \in \mathbb{Z}, b < 0$ and a is defined by (2). Then

1. if $x \in U_a(0)$ then

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{2k}(x) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |f^{2k-1}(x)|_p = +\infty;$$
2. if $x \in S_a(0)$ then $f^n(x) \in S_a(0), n > 1$.
3. if $x \in C_p \setminus V_a(0)$ then

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f^{2k}(x)|_p = +\infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f^{2k-1}(x) = 0.$$

REFERENCES

1. Koblitz N. *p*-adic numbers, *p*-adic analysis and zeta-function. Springer, Berlin, 1977.
2. Rozikov U.A. *p*-adic dynamical systems of the function ax^2 . *p-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl.* 2021. V.13, No. 3, p. 239-249.
3. Rozikov U.A., Sattarov I.A. *p*-adic dynamical systems of (2,2)-rational functions with unique fixed point. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2017, V. 105, p. 260-270.
4. Vladimirov V. S., Volovich I. V., Zelenov E. I. *p*-Adic Analysis and Mathematical Physics (Series Sov. and East Eur. Math., Vol. 10), World Scientific, River Edge, N. J. (1994).

BA'ZI FUNKSIYALARNING QO'ZG'ALMAS NUQTALARI VA ORBITALARI**Shamsiyeva O'g'iloy**

Toshkent davlat transport universiteti

Agar berilgan momentda sistemaning holatini tavsiflovchi kattaliklar to'plami berilgan bo'lib, ma'lum qoidaga ko'ra bu kattaliklarning so'nggi momentlardagi qiymatlarini aniqlash mumkin bo'lsa, bunday kattaliklarga dinamik o'zgaruvchilar va unga mos sistemaga dinamik sistema deyiladi.

Sistemaning dinamik holatini ifodalovchi dinamik o'zgaruvchilar joylashgan koordinata o'qlaridagi holatlar fazoli portret yoki fazalar fazosi deyiladi. Fazalar fazosining o'lchamlari turli sistemalar uchun turlicha, masalan, ossillyator uchun 2 (holatni oniy koordinata va tezlik beradi). Fazalar fazosidagi nuqta tasviriy nuqta deb yuritiladi. Fazalar fazosidagi sistema holatining o'zgarishini aks ettiruvchi orbita tasviriy orbita yoki sistemaning *fazaviy portreti* deyiladi. O'zgarish qoidasini esa evalyutsiya operatori aniqlaydi. Agar sistemaning holati N kattalik bilan aniqlansa holatning vaqt bo'yicha o'zgarishi, ya'ni sistema dinamikasini N o'lchovli fazalar fazosidagi nuqtaning orbitasi bo'yicha harakati sifatida tasavvur etish mumkin.

Dinamik sistemalar ikki xil - konservativ va dissipativ bo'ladi. Konservativlik deganda energiyaning saqlanishi tushuniladi. Hususan, ishqalanishsiz mehanik tebranishlar konservativ sistemaga misol bo'ladi. Ishqalanish bo'lganda esa energiya saqlanmaydi, dissipatsiyaga uchrab, issiqlikka aylanadi. Bu dissipativ dinamik sistema bo'ladi.

Ta'rif 1. ([1]-[2]) $y = F(x)$ funksiyaning berilgan $x_0 \in R$, nuqtadagi orbitasi deb, quyidagicha aniqlanuvchi

$$\{x_0, F(x_0), F^2(x_0), \dots, F^n(x_0), \dots\}$$

to'plamga aytiladi.

Bu yerda $F(x_0) = F(x_0), F^2(x_0) = F(F(x_0)), \dots, F^n(x_0) = F(F(\dots F(x_0)\dots))$ va x_0 $y = F(x)$ funksiyaning qo'zg'almas nuqtasi.

Ta'rif 2. ([1]-[2]) Agar $y = F(x)$ funksiya va $x_0 \in R$ nuqta uchun $F(x_0) = x_0$ shart o'rinli bo'lsa, u holda x_0 nuqta $F(x)$ funksiyaning qo'zg'almas nuqtasi deyiladi.

Ta'rif 3. ([1]-[3]) Agar $\forall n > 0$ uchun $F^n(x_0) = x_0$ shu shart bajarilsa x_0 qo'zg'almas nuqta davriy qo'zg'almas nuqta deyiladi.

Ta'rif 4. ([2]-[4]) $F(x_0) = F(x_0 + T) = F(x_0 + 2T) = \dots = F(x_0 + nT)$ tenglikni qanoatlantiruvchi $T > 0$ songa $F(x)$ ning x_0 nuqtadagi davri deyiladi.

Masalan $F(x) = x^3$ funksiyaning qaraymiz. Bu funksiyaning uchta qo'zg'almas nuqtalari mavjud va ular $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$. Bu nuqtalarning orbitalarini ko'ramiz.

$$\begin{aligned} \{1, (1)^3, ((1)^3)^3, \dots, (((1)^3 \dots)^3)^3\} &= \{1, 1, \dots, 1\}, \\ \{-1, (-1)^3, ((-1)^3)^3, \dots, (((-1)^3 \dots)^3)^3\} &= \{-1, -1, \dots, -1\}, \\ \{0, (0)^3, ((0)^3)^3, \dots, (((0)^3 \dots)^3)^3\} &= \{0, 0, \dots, 0\} \end{aligned}$$

Demak, berilgan 3 ta nuqta ham davriy qo'zg'almas nuqta bo'ladi. Yuqoridagi ma'lumotlarni batavsil yoritish uchun yana bir nechta misollarni ko'ramiz.

1) Berilgan $F(x) = x^2 - 2$ funksiyaning haqiqiy qo'zg'almas nuqtalari va ularning orbitasini topamiz.

Qo'zg'almas nuqtani topish uchun $F(x) = x$ tenglikni qarab chiqish yetarli. Demak, $x^2 - 2 = x$ tenglamani yechish orqali funksiyaning qo'zg'almas nuqta(lari)si topiladi. $x^2 - x - 2 = 0$ kvadrat tenglamaning $x_1 = -1, x_2 = 2$ bo'lgan ildizlari funksiyaning qo'zg'almas nuqtalari bo'ladi.

$$\left\{ -1, (-1)^2 - 2, ((-1)^2 - 2)^2 - 2, \dots, \left(\left(\left(\dots (-1)^2 - 2 \right)^2 - 2 \right)^2 - 2 \dots \right)^2 - 2 \right\} = \{-1, -1, \dots, -1, \dots\}$$

to'plam $x_1 = -1$ nuqtaning davriy orbitasi bo'ladi.

$$\left\{ 2, (2)^2 - 2, ((2)^2 - 2)^2 - 2, \dots, \left(\left(\left(\dots (2)^2 - 2 \right)^2 - 2 \right)^2 - 2 \dots \right)^2 - 2 \right\} = \{2, 2, \dots, 2, \dots\}$$

to'plam esa $x_2 = 2$ nuqtaning orbitasi bo'ladi.

2) Berilgan $F(x) = x \sin x$ funksiyaning haqiqiy qo'zg'almas nuqtalari va ularning orbitalarini topamiz.

Qo'zg'almas nuqtaning shartidan quyidagi tenglikni hosil qilamiz va qo'zg'almas nuqtani topish uchun $F(x) = x$ tenglikni qarab chiqish yetarli. Demak $x \sin x = x$ tenglamani echish maqsadida, $x \sin x - x = 0$ tenglamadan $\sin x = 1$ va $x = 0$ larni hosil qilamiz. Demak, $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ va $x_2 = 0$ nuqtalar $F(x)$ funksiyaning qo'zg'almas nuqtasi bo'ladi. x_1 nuqta uchun 2π musbat davri bo'ladi.

1-hol. $n = 0$ bo'lganda quyidagi to'plam

$$\left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} \right), \frac{\pi}{2} \sin \left(\left(\dots \sin \left(\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} \right) \right) \right), \dots \right\} = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2}, \dots \right\} \text{ quyidagi}$$

$x_1 = \frac{\pi}{2}$ nuqtaning davriy orbitasi bo'ladi.

2-hol. $n = 1$ bo'lgan hol uchun quyidagi to'plam

$$\left\{ \frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \sin \frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \sin \left(\frac{5\pi}{2} \sin \frac{5\pi}{2} \right), \frac{5\pi}{2} \sin \left(\left(\dots \sin \left(\frac{5\pi}{2} \sin \frac{5\pi}{2} \right) \right) \right), \dots \right\} = \left\{ \frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots, \frac{5\pi}{2}, \dots \right\}$$

$x_1 = \frac{5\pi}{2}$ nuqtaning davriy orbitasi bo'ladi.

3-hol. $n = 2$ bo'lganda quyidagi to'plam

$$\left\{ \frac{9\pi}{2}, \frac{9\pi}{2} \sin \frac{9\pi}{2}, \frac{9\pi}{2} \sin \left(\frac{9\pi}{2} \sin \frac{9\pi}{2} \right), \frac{9\pi}{2} \sin \left(\left(\dots \sin \left(\frac{9\pi}{2} \sin \frac{9\pi}{2} \right) \right) \right), \dots \right\} = \left\{ \frac{9\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \dots, \frac{9\pi}{2}, \dots \right\}$$

$x_1 = \frac{9\pi}{2}$ nuqtaning davriy orbitasi bo'ladi.

$$\{0, 0 \sin 0, 0 \sin(0 \sin 0), 0 \sin(\dots \sin(0 \sin 0))\dots\} = \{0, 0, \dots, 0, \dots\} \text{ to'plam } x_2 = 0$$

nuqtaning davriy orbitasi bo'ladi.

Teorema. $F(x) = x \sin x$ funksiyaning barcha qo'zg'almas nuqtalaridagi orbitalari davriy orbita bo'ladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI.

1. Devaney, K. Dynamical Systems for Puppies. *Advances in Puppy Math* 123 (2009), 1-8000.
2. Alexander, D., Iavernaro, F., and Rosa, A. *Early Days in Complex Dynamics: A History of Complex Dynamics During 1906-1942*. American Math Society. 2012.
3. Barnsley, M. *Fractals Everywhere*, Academic Press, 1988.
4. Douady, A. and Hubbard, J. On the Dynamics of Polynomial-like Maps. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* 18 (1985), 287.

BOSHLANG'ICH SINF O'QUVCHILARINI XOTIRASINI MUSTAHKAMLASH BO'YICHA OLIB BORILGAN SO'NGGI TAJRIBALARNING STATISTIK TAHLILI

Shukurillayeva Kibriyo

Andijon davlat universiteti

Psixologik jarayonlarni ma'lum bir son yoki sifat belgi bo'yicha o'rganishda statistik metodlardan foydalanish bilan bizni qiziqtirayotgan bosh gipotezani to'g'ri yoki to'g'ri emasligini tekshirish mumkin bo'ladi. ([1] va [2] larga qaralsin). Bizni quyidagi gipotezalarni tekshirish asosiy vazifalarimizdan iborat:

H_0 : O'quvchilarni xotirasini mustahkamlash bo'yicha tajribalar effekt berdi.

H_1 : O'quvchilari xotirasini mustahkamlash bo'yicha tajribalar effekt bermadi.

Ilova qilinayotgan adabiyotlarda bunday gipotezalarni tekshirish bo'yicha turli statistik kriteriyalar mavjud. Biz ushbu axborotda gipotezalarni ketma-ket tekshirish prinsipiga asoslangan nazorat kartalar (NK) deb nomlanuvchi statistik instrumentlardan foydalanish haqida fikr yuritamiz.

Dastlab bu instrumentni ishlatish haqida ma'lumotlarni qisqa bayon etaylik.

NK lar o'rganilayotgan psixologik jarayonni turg'unligini va tarqoqligini ta'minlab beruvchi statistik instrument bo'lib, uni "jarayonni ovozi" deb ham nomlanadi. NK statistik diagramma bo'lib unda jarayonni holati ko'rinib turadi, faqat uni o'qishni bilish kerak xolos. Undan foydalangan holda jarayonni izidan chiqaruvchi muhim yoki muhim bo'lmagan faktorlarni aniqlash mumkin bo'ladi. Muhim faktorlar bartaraf qilingandan so'ng jarayon stabillashadi. NK ni harakatga keltirish uchun uning asosiy xarakteristikalarini aniqlash zarur. Eng birinchisi nazorat qilinuvchi statistika aniqlanadi. U bevosita bizni qiziqtiruvchi sifat ko'rsatkich hisoblanadi. So'ng NK ning yuqori nazorat chizig'i (UCL), quyi nazorat chizig'i (LCL) va o'rta chizig'i (CL) lar aniqlanadi. Bu tushunchalar bo'yicha [3] adabiyotdan foydalanish mumkin. Agar nazorat qilinuvchi miqdorning qiymatlari (LCL; UCL) intervalga tushsa, u holda jarayon statistik nazoratda deyiladi. Xususan H_0 gipoteza o'rinli bo'ladi. Aks holda jarayon izidan chiqqan hisoblanadi va uni to'g'irlash choralari ko'riladi, ya'ni xususan H_1 gipoteza o'rinli bo'ladi. NK larning turli xillari mavjud.

Biz bu axborotda “O’rta qiymatlar va tarqoqli ko’lami” nomli $\bar{X} - R$ kabi belgilanuvchi qo’shaloq NK dan foydalanamiz. Bu NK bir paytta jarayonni turg’unligini va tarqoqligini tekshirib boradi. NK lar bilan biz vaqt davomida o’tkazayotgan tajribalarimiz orqali gipotezalarni tekshirib boramiz.

Ma’lumki, boshlang’ich sinf o’quvchilarini bilim saviyasini yaxshilashning bir usuli ularni xotirasini mustahkamlashdir. Shu nuqtai nazardan so’nggi tajribamizda, avval o’tkazgan tajribalarimiz natijasida o’quvchilarni xotiralari qay darajada mustahkamlanganligini tekshiramiz. Ya’ni xotirani kuchaytiruvchi metodlarni to’la qo’lladik. Buning uchun o’quvchilarni raqamlarni eslab qolish, tayanch tushunchalarni eslab qolish bo’yicha 10 ta tajriba o’tkazildi va sinaldi. 25 nafar o’quvchi qatnashdi, o’quvchilar 10 ballik sistemada baholandi. Tajriba natijalari quyidagi jadvalda keltirilgan.[1-jadval].

Nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_{i1}	8	9	7	10	8	6,5	7	8,5	10	10
X_{i2}	10	10	9	7	7	8	8,5	9	9	8
X_{i3}	9,5	7,5	10	10	8	9	10	9	10	8
X_{i4}	10	8	9,5	8	9	8	9	8	10	9
X_{i5}	8	7	10	8	9	9	8	9	10	9
X_{i6}	9	9	8	9	8	9	9	9	9	8
X_{i7}	6,5	7,5	7,5	8,5	9,5	7,5	8	8	8	9
X_{i8}	7	10	8	7,5	10	8,5	7	7	8	8
X_{i9}	8,5	9	9	8	10	10	6,5	7	7	7
X_{i10}	9	8	9	8	8	10	10	9	7,5	7,5
X_i	8,6	8,5	8,7	8,4	8,7	8,6	8,3	8,4	8,9	8,4
R_i	3,5	2,5	3	3	3	3,5	3,5	2	3	3
G.Nº	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X_{i11}	9	7	7	8	9	10	6,5	8	9	7
X_{i12}	9	8	7	10	10	9	8,5	10	10	9
X_{i13}	10	8	6,5	9	9	8	9	8	7,5	10
X_{i14}	10	9	7	10	8	8	8	9	6,5	8
X_{i15}	10	10	8	10	9	8,5	8	9	8,5	9
X_{i16}	9	9	7,5	9	9	9	7	8	9	9
X_{i17}	9	9	8	7,5	10	9	7,5	7,5	9	10
X_{i18}	8	9,5	9	8	9,5	9,5	6,5	10	10	9
X_{i19}	8	8	9	9	9	10	8	10	10	9
X_{i20}	9	8	8,5	9	9	10	10	9	8	8
X_i	9,1	8,6	7,8	8,9	9,2	9,1	7,9	8,9	8,8	8,8
R_i	2	3	2,5	2,5	2	2	3,5	2,5	3,5	3
G.Nº	21	22	23	24	25					
X_{i21}	7,5	8	9	9	8					
X_{i22}	9	8	9,5	10	9					
X_{i23}	10	9	8	9	10					

X_{i4}	7,5	9	8	8	10
X_{i5}	7	8	10	9	9
X_{i6}	6,5	7	9	10	9,5
X_{i7}	9	8	9	7	8
X_{i8}	10	9	7	8	8
X_{i9}	9	9	7	10	9
X_{i10}	9	7	7	9	7
X_i	8,5	8,2	8,4	8,9	8,8
R_i	3,5	2	3	3	3

Bunga ko'ra o'rta qiymat - $\bar{X}$ va tarqoqlik ko'lami - R larning qiymatlari aniqlandi.

Agar effekt beruvchi nuqta sifatida $\bar{X} = 8,6$ va $R = 2,8$ deb olsak. U holda $\bar{X} - R$ NK larni chegaralari quyidagicha bo'ladi:

$$LCL_x = 7,7; UCL_x = 9,5; CL_x = 8,6$$

$$LCL_R = 0,6; UCL_R = 4,9$$

Natijalarni taqqoslasak, $\bar{X}_i \in (7,7; 9,5)$ va $\bar{R}_i \in (0,6; 4,9)$, $i = \overline{1,10}$ ekanligini ko'rayapmiz. Demak, nazorat qilinuvchi miqdorning qiymatlari (LCL ; UCL) intervalga tushdi, u holda jarayon statistik nazoratda. Xususan H_0 gipoteza o'rinli bo'ladi. H_1 gipoteza rad etiladi. Ya'ni o'quvchilarni ularni bilim saviyasini oshiruvchi miyani funksiyasi hisoblangan "xotira" talab darajasida ekan.

Shu bilan biz tajribalarimiz natijasida NK dan foydalangan holda o'quvchilarni bilim saviyasi qay darajada yaxshilanganligini bilib oldik.

ADABIYOTLAR:

1. А.Н.Кричевец, А.А.Корнеев, Е.И.Рассказова Основы статистики для психологов. Акрополь, Москва, 2019
2. Е.В.Сидоренко. Методы математической обработки в психологии. Речь. Санкт-Петербург, 2003.
3. С.А.Ахмедов. Жараёнларни статистик бошқариш. Анду, Андижон. 2005

KICHIK KVADRATLAR USULI VA UNING TATBIQLARI

Sobitaliyev Shaxzod

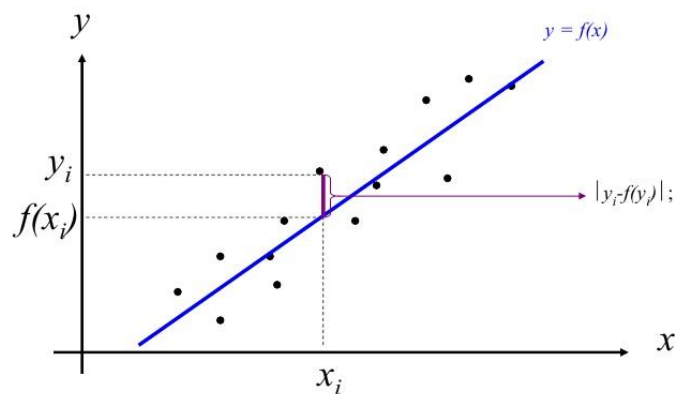
Namangan Davlat Universiteti

Kirish. Amaliy statistika va muhandislikning ko'plab sohalarida biz ikkita o'zgaruvchini o'z ichiga olgan tajribalar va masalalarga duch kelamiz. Masalan, $P = a + bv^3$ formula bo'yicha kemanding v tezligi dvigatelning ot kuchi P ga qarab o'zgarishi ma'lum. Bu yerda a va b aniqlanishi kerak bo'lgan no'malum parametrlardir. Buning uchun biz tezlik va unga mos kelgan ot kuchi uchun bir nechta qiymatlar to'plamini olamiz. Asosiy masala shundaki, tezlik v va ot kuchi P lar uchun eng yaxshi qiymatlarni topishdir. Shunday qilib, umumiy masala ma'lum bir kuzatilgan (x_i, y_i) , $i=1,2,\dots,n$ qiymatlar to'plamidan x va y o'zgaruvchilari o'rtasida mavjud bo'lishi mumkin bo'lgan tegishli munosabat yoki qonunni aniqlashdan iboratdir. x va y larni bog'lovchi bunday munosabat empirik qonun deb ataladi. No'malum qiymatlarni prognoz qilish uchun mos kelishi mumkin bo'lgan "eng yaxshi egri

chiziq" tenglamasini topish masalasi juda dolzarbdir. Quyida egri chiziqni topishning standart usullari keltirilgan [1,3].

- Grafik usuli;
- O'rtachalarni guruhlash usuli;
- Momentlar usuli;
- Eng kichik kvadratlar usuli.

Asosiy qism. Biz ushbu maqolada eng kichik kvadrat usuli va uning tatbiqlari haqidagi masalalarni muhokama qilamiz. Odatda matematik tenglama tajriba ma'lumotlariga mos keladi. Bu ma'lumotlar asosida to'g'ri chiziq grafigi chiziladi. Ushbu usulning kamchiliklaridan biri shundaki, chizilgan to'g'ri chiziq yagona bo'lmasligi mumkin, eng kichik kvadratlar usuli berilgan ma'lumotlar asosida "eng yaxshi egri chiziq" qurishning eng tizimli prosedurasi bo'lib, amaliy masalalarda keng qo'llaniladi. Buni kompyuter dasturlarida ham osongina amalga oshirish mumkin.



Aytaylik, berilgan ma'lumotlar asosida ushbu $y = ax + b$ to'g'ri chiziqni o'tkazamiz (1-rasmga qarang). Eng yaxshi ya'ni barcha nuqlarga nisbatan optimal to'g'ri chiziqni topish uchun quyidagi ifodaga minimal qiymat beruvchi a va b topilishi talab qilinadi:

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n |y_i - (a + bx_i)|. \quad (1)$$

Ushbu (1) yig'indi absolut og'ish (yoki chetlanish) deb ataladi. Yuqoridagi ifodani minimumini topishimiz uchun a va b parametrlar bo'yicha xususiy hosila olib 0 ga tenglaymiz.

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \quad \text{va} \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0. \quad (2)$$

Masalaning murakkabligi shundaki, absolut qiymat funksiyasi nolda differentsiallanuvchi emas, shuning uchun (2) sistemani yechimini topa olmasligimiz mumkin. Ushbu muammoga eng kichik kvadratlar usuli javob berib eng yaxshi mos chiziqni aniqlashni o'z ichiga oladi, qachonki xatolik mos keladigan chiziqdagi y qiymatlari va berilgan y -qiymatlar o'rtasidagi kvadratik yig'indisi bo'lsa. Demak, xatolar kvadratlarining yig'indisi quyidagicha bo'ladi.

$$S = \sum_{i=1}^m [y_i - (a + bx_i)]^2. \quad (3)$$

(3) ifodaning minimumiga erishishi uchun ikkita parametrlar bo'yicha xususiy hosilalar olamiz.

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^m [y_i - (a + bx_i)],$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^m x_i [y_i - (a + bx_i)],$$

Yuqoridagi ifodalarni 0 ga tenglab soddalashtirsak,

$$ma + b \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m y_i,$$

$$ma \sum_{i=1}^m x_i + b \sum_{i=1}^m x_i^2 = \sum_{i=1}^m x_i y_i.$$

x_i va y_i miqdorlar ma'lum bo'lgani uchun, yuqoridagi ikkita tenglama (normal tenglamalar deyiladi) no'malum parametrlar a va b uchun yechilishi mumkin. $\frac{\partial S}{\partial a}$ va $\frac{\partial S}{\partial b}$

xususiylar hosilalardan mos ravishda a va b parametrlar bo'yicha hosila olinsa, u holda ular berilgan nuqtalarda musbat bo'ladi. Bunda S yig'indi minimumga erishishini aniqlash mumkin. Demak

$$A = \frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = -2 \sum_{i=1}^m (-1) = 2m > 0,$$

$$B = \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = -2 \sum_{i=1}^m x_i \cdot (-x_i) = 2 \sum_{i=1}^m x_i^2 > 0,$$

$$C = \frac{\partial^2 S}{\partial b \partial a} = -2 \sum_{i=1}^m x_i \cdot (-1) = 2 \sum_{i=1}^m x_i,$$

$$A \cdot B - C^2 = 4m \sum_{i=1}^m x_i^2 - 4(\sum_{i=1}^m x_i) \cdot (\sum_{i=1}^m x_i),$$

Minimum uchun $A \cdot B - C^2 > 0$ bo'lishi kerak. Bu esa quyidagi Koshi-Shvartz tengsizligidan kelib chiqadi:

$$(\sum_{i=1}^m x_i)^2 < m (\sum_{i=1}^m x_i^2).$$

Chiziqli approksimatsiyani boshqacha usulda, ya'ni quyidagi ifodani minimallashtirish orqali ham topish mumkin.

$$S(a, b) = \max_{1 \leq i \leq m} \{|y_i - (a + bx_i)|\}.$$

Ushbu minimaks usulda odatda xatoga yo'l qo'yilgan ma'lumotlarning bir qismiga haddan tashqari vazn beradi, absolut og'ish usuli esa taxminiy qiymatdan sezilarli darjada farq qiladigan nuqtaga yetarli darajada vazn bermaydi. Eng kichik kvadratlar usuli qolgan ma'lumotlarga mos kelmaydigan nuqtaga sezilarli darajada ko'proq vazn beradi, lekin bu nuqta yaqinlashuvda to'liq ustun bo'lishiga yo'l qo'ymaydi.

Shunday qilib, yuqoridagi chiziqli $y = ax + b$ modeldagi no'malum parametrlar uchun statistik baho eng kichik kvadratlar usuli yordamida topilgan baho deyiladi va quyidagicha aniqlanadi [1-2].

$$a = \frac{m \sum_{i=1}^m x_i y_i - \sum_{i=1}^m x_i \sum_{i=1}^m y_i}{m \sum_{i=1}^m x_i^2 - (\sum_{i=1}^m x_i)^2}; \quad b = \frac{\sum_{i=1}^m y_i \sum_{i=1}^m x_i^2 - \sum_{i=1}^m x_i \sum_{i=1}^m x_i y_i}{m \sum_{i=1}^m x_i^2 - (\sum_{i=1}^m x_i)^2}.$$

Vaqtli qatorlar tahlilimizda ya'ni trend chizig'ini aniqlashda kichik kvadrat usuli juda ham qulay hisoblanadi. Eng yaxshi moslik chizig'i bu turli nuqtalarning og'ishlari chetlanishlari yig'indisi 0 ga teng bo'lgan chiziqdir. Bu trend qiymatlarini hosil qilishning eng yaxshi usulidir. Bundan tashqari chetlanishlarning kvadratlari yig'indisi minimal bo'ladi. Shunday qilib, bu usul eng kichik kvadratlar usuli bo'lib, u quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

1) y -haqiqiy qiymat va $\hat{y}$ baholanayotgan o'zgaruvchining chetlanishlari yig'indisi 0 ga teng, ya'ni

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i) = 0.$$

2) y va $\hat{y}$ lar qiymatlarining chetlanishlari kvadratlari yig'indisi minimal bo'lsin, ya'ni

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \rightarrow \min$$

Prosedurasi: *i*) trend to'g'ri chizig'ini $y = ax + b$ deb olamiz, bu yerda y haqiqiy qiymatlar, x bu vaqt, a va b lar no'malum parametrlar.

ii) No'maum a va b parametrlarni quyidagi noreal tenglamalar sistemasi orqali baholaymiz:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i = na + b \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{cases}$$

bu yerda n -berilgan ma'lumotdagi yillar soni.

iii) Vaqtni o'rta nuqtasini boshlang'ich koordinata deb qabul qilib, $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ ni olamiz.

iv) $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ bo'lganidan, ikkita normal tenglamadan a va b ni aniqlaymiz.

$$a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \bar{y} \text{ va } b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Bu yerda a -bu y ning o'rtacha qiymati, b esa o'zgarish tezligini ifodalaydi. Ushbu topilganlarni $y = a + bx$ trend chiziq tenglamasiga qo'shib, eng yaxshi trend to'g'ri chizig'ini hosil qilamiz.

Shunday qilib, ushbu maqolada kichik kvadratlar usuli iqtisodiyotdagi vaqtli qatorlarni tahlili va ular asosida prognozlashtirishda juda muhim ahamiyatga ega ekanligi hamda ular bilan bog'liq masalalar muhokama etiladi [3-5].

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Das N.G. Statistical Methods, Mc Graw Hill, 2017.
2. Abdushukurov A.A. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, O'quv qo'llanma, T.: 2010.
3. Cheryl A. Willard Statistical Methods, Pyrczak Publishing, 2010.
4. Wolberg J. Data analysis using the method of least squares, Springer, 2006.
5. Robert H. Shumway, David S. Stoffer Time series analysis and its applications, Springer, 2017.

ON POLAR OF THE SPACES OF PROBABILITY AND IDEMPOTENT PROBABILITY MEASURES

Tagaymurotov Abror

Chirchik State Pedagogical Institute

Consider a set $\mathbb{R}_{max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ which we equip with two new operations: 'addition' $\oplus$ and 'multiplication' $\odot$, defined as

$$\begin{aligned} u \oplus v &= \max\{u, v\}, & u, v &\in \mathbb{R}_{max}, \\ u \odot v &= u + v, & u, v &\in \mathbb{R}_{max}. \end{aligned}$$

Then $\mathbf{0} := -\infty$ is the zero of $\mathbb{R}_{max}$ according to $\oplus$, and $\mathbf{1} := 0$ is the unit of $\mathbb{R}_{max}$ according to $\odot$. It is known [1] that $(\mathbb{R}_{max}, \oplus, \odot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ is idempotent semifield, (i. e. $u \oplus u = u$ for all $u \in \mathbb{R}_{max}$), that means:

- the addition $\oplus$ and the multiplication $\odot$ are associative;
- the addition $\oplus$ is commutative;
- the multiplication $\odot$ is distributive with respect to the addition $\oplus$:

$$\begin{aligned} u \odot (v \oplus w) &= u \odot v \oplus u \odot w \text{ and} \\ (u \oplus v) \odot w &= u \odot w \oplus v \odot w \end{aligned}$$

for all $u, v, w \in \mathbb{R}_{max}$.

Let $0 \leq x \leq 1$. Then it is evident that $-\infty \leq h \log_a x \leq 0$ where a is a real number such $a > 1$ and h is any fixed positive number. So, one can define a map

$$\Phi_h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_{max}$$

by the rule

$$\Phi_h(x) = h \log_a x.$$

One can verify that $\Phi_h(x + y) = h \log_a(x + y)$ converges to $\max\{\Phi_h(x), \Phi_h(y)\}$ as h tends 0. Indeed, let $u = \Phi_h(x) = h \log_a x$, $v = \Phi_h(y) = h \log_a y$. Then $x = a^{\frac{u}{h}}$, $y = a^{\frac{v}{h}}$. If $u > v$ then

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \Phi_h(x + y) &= \lim_{h \rightarrow 0} h \log_a(x + y) = \lim_{h \rightarrow 0} h \log_a \left(a^{\frac{u}{h}} + a^{\frac{v}{h}} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h \log_a a^{\frac{u}{h}} \left(1 + a^{\frac{v-u}{h}} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} h \log_a a^{\frac{u}{h}} = u. \end{aligned}$$

If $v > u$ then

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \Phi_h(x + y) &= \lim_{h \rightarrow 0} h \log_a(x + y) = \lim_{h \rightarrow 0} h \log_a \left(a^{\frac{u}{h}} + a^{\frac{v}{h}} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h \log_a a^{\frac{v}{h}} \left(a^{\frac{u-v}{h}} + 1 \right) = \lim_{h \rightarrow 0} h \log_a a^{\frac{v}{h}} = v. \end{aligned}$$

If $v = u$ then one has

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \Phi_h(x + y) &= \lim_{h \rightarrow 0} h \log_a(x + y) = \lim_{h \rightarrow 0} h \log_a \left(a^{\frac{u}{h}} + a^{\frac{v}{h}} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h \log_a 2a^{\frac{u}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(h \log_a 2 + h \log_a a^{\frac{u}{h}} \right) = u. \end{aligned}$$

Consider the n th power $\mathbb{R}_{max}^n$ of $\mathbb{R}_{max}$ end enter in it the pointwise order:

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) \leq (v_1, v_2, \dots, v_n) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \leq v_1, \\ u_2 \leq v_2, \\ \dots, \\ u_n \leq v_n, \end{cases}$$

$u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}_{max}^n$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{max}^n$. Then it is easy to see that

$$\begin{aligned} (u_1, 0, \dots, 0) + (0, u_2, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, u_n) &= (u_1, u_2, \dots, u_n) = \\ &= (u_1, -\infty, \dots, -\infty) \oplus (-\infty, u_2, \dots, -\infty) \oplus \dots \oplus (-\infty, -\infty, \dots, u_n) \end{aligned}$$

for every $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}_{max}^n$.

Let X be a compact Hausdorff space, $\mathcal{C}(X)$ the algebra of all continuous maps on X with respect to usual algebraic operation. Define on $\mathcal{C}(X)$ operations $\oplus$ and $\odot$ by

$$\varphi \oplus \psi = \max\{\varphi, \psi\} \text{ and } \varphi \odot \psi = \varphi + \psi, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{C}(X).$$

The set of all probability measures on X (i. e.

- normed ($\mu(1_X) = 1$),

- additive ($\mu(\varphi + \psi) = \mu(\varphi) + \mu(\psi)$, $\varphi, \psi \in C(X)$),

- homogeneous ($\mu(\lambda\varphi) = \lambda\mu(\varphi)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C(X)$)

functionals on $C(X)$) denotes [2] by $P(X)$.

The set of all idempotent probability measures on X (i. e.

- normed ($\mu(1_X) = 1$),

- max-plus-additive ($\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$, $\varphi, \psi \in C(X)$),

- max-plus-homogeneous ($\mu(\lambda \odot \varphi) = \lambda \odot \mu(\varphi)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C(X)$)

functionals on $C(X)$) denotes [3] by $I(X)$.

Sets $P(X)$ and $I(X)$ consider as subspaces of $\mathbb{R}^{C(X)}$ and equip with the pointwise convergence topology. For a given compact Hausdorff space X obtained spaces both are compact Hausdorff spaces. For every compact metrizable space X the spaces $P(X)$ and $I(X)$ re homeomorphic. There is an example of finite discrete space for which functors P and I are not isomorphic.

In the present paper we show that sets $P(X)$ and $I(X)$ have a relation on the language of polar when given set X is finite.

If X consists of n elements then $C(X) = \mathbb{R}^n$ and

$$P(X) = \{\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i} : \alpha_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1\},$$

and

$$I(X) = \{\mu = \bigoplus_{i=1}^n \lambda_i \odot \delta_{x_i} : \lambda_i \geq \mathbf{0} = -\infty, \bigoplus_{i=1}^n \lambda_i = \mathbf{1} = 0\}.$$

It is well known that $P(X)$ is a closed convex subset of $\mathbb{R}^n$, and $I(X)$ is a closed max-plus-convex subset of $\mathbb{R}_{max}^n$.

Recall that a set A is called convex (respectively, max-plus-convex) if

$$x, y \in A \Rightarrow \alpha x + \beta y \in A \text{ for every } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ such that } \alpha + \beta = 1$$

$$(\text{respectively, } u, v \in A \Rightarrow \alpha \odot u \oplus \beta \odot v \in A \text{ for every } \alpha, \beta \in \mathbb{R}_{max} \text{ such that } \alpha \oplus \beta = \mathbf{1}).$$

Let $C \subset \mathbb{R}^n$ be a convex set. The set

$$C^0 = \{x^* : \langle x, x^* \rangle \leq 1, \quad \forall x \in C\}$$

is called a polar of C . The functional

$$k(x) = \gamma(x|C) = \inf\{t \geq 0 : x \in tC\}$$

is called gauge or Minkowski functional of C . The functional

$$k^0(x^*) = \gamma(x^*|C^0) = \inf\{t \geq 0 : x^* \in tC^0\}$$

is called polar of $k(x)$, where C^0 polar of C .

Theorem 1. Let $|X| = n$. Then

$$I(X) = \{(\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_n^*) \in (P(X))^0 - 1 : \xi_1^* \oplus \xi_2^* \oplus \dots \oplus \xi_n^* = \mathbf{1}\}.$$

Corollary 1. Let

$$k(x) = \gamma(x|P(X)) = \inf\{t \geq 0 : x \in tP(X)\}, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n,$$

$$k^0(x^*) = \gamma(x^*|(I(X))^0) = \inf\{t \geq -\infty : x^* \in t \odot I(X)\}, x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in \mathbb{R}_{max}^n.$$

Then functions $k(x)$, $k^0(x^*)$ are mutually polar each to other.

REFERENCES

1. Zaitov A. A. On a metric on the space of idempotent probability measures. Applied General Topology, 2020, No 1, P. 35-51.

2. Tagaymurotov A. O. The Minkowski functional as a metric on the space of probability measures. Bulletin of Institute of Mathematics, 2021, V. 4, No 4, P. 47-50.

3. Zarichnyi M. M. Spaces and maps of idempotent measures, Izv. Math., 2010, V. 74, No 3, P. 481-499.

EKSPERIMENTAL MA'LUMOTLAR ASOSIDA KO'P FAKTORLI CHIZIQLI REGRESSIYA TENGLAMASINI TUZISH VA TAHLIL QILISH

Takabayev Umidjon

Andijon davlat universiteti

Hozirgi zamonaviy ishlab chiqarishda texnologik jarayonlarni modellashtirish, optimallashtirish va tahlil qilish asosiy ustuvor vazifa bo'lib kelmoqda. Texnologik jarayonlarni modellashtirishning bir nechta usullari mavjud ulardan biri eksperimental-statistik modellashtirishdir. Biz ushbu maqolada don mahsulotlarini quritish jarayonini tahlil qilishni ko'rib chiqamiz. Bug'doy doni massasining fizik-kimyoviy xususiyatlarini aniqlaydigan eng muhim parametr namlikdir. Donning harorati, yangiligi, shuningdek sifati ko'p jihatdan unga bog'liq. Shuning uchun, donni quritish nafaqat donni zararsizlantirish, balki uning sifatini yaxshilashni ham ta'minlaydigan texnologik jarayon sifatida ahamiyat kasb etadi. Aylanma don quritgichlari quritish uskunalarga qo'yiladigan talablarga to'liq javob beradi, ammo ular uchun don quritishdagi samaradorlikni oshirish va uning sifatini yaxshilash vazifalari ham dolzarbdir.

Hozirgi paytda don mahsulotlarini quritishda mahsulotning sifat va miqdor ko'rsatkichlari, namligini, haroratini ma'lum belgilangan me'yorlarda saqlagan holda quritish asosiy dolzarb vazifa bo'lib kelmoqda. Shuning uchun biz quritish jarayonidagi eksperimental ma'lumotlar asosida ko'p faktorli chiziqli regressiya tenglamasini tuzish va tahlil qilishni amalga oshiramiz. Regressiya tenglamasining koeffitsientlarini matritsa usuli yordamida aniqlaymiz. Tenglamaning parametrlarini baholab, statistik mezonlar asosida tekshirish amalga oshiramiz.

Eksperimental ma'lumotlar asosida quyidagi kirish va chiqish faktorlari: x_1 - bug'doyning boshlang'ich harorati, x_2 - bug'doyning boshlang'ich namligi, x_3 - qurilmaning ishlash vaqti, x_4 -qurilmaning ishlash quvvati, y -jarayon yakulangandan so'ng bug'doyning namligini hisobga olgan holda biz mikroto'lqinli quritish apparatidagi o'tkazilgan tajribalar asosida ko'p faktorli chiziqli regressiya tenglamasini tuzamiz. Laboratoriya sharoitida olingan eksperimental ma'lumotlar quyidagi jadvalda keltirilgan.

№	Harorat °C	Namlik %	Vaqt sek	Quvvat Watt	Namlik chiqish %
	x_1	x_2	x_3	x_4	y
1	18	12,1	40	100	11,3
2	20	14,2	45	110	13,2
3	22	13,5	50	120	12,2
4	25	12,9	55	130	10,2
5	27	15,7	60	140	10,1
6	30	19,4	65	150	10,1
7	21	18,6	70	160	10
8	27	17,3	80	170	10,6

9	29	16,1	90	180	10,5
10	33	19,1	100	190	10,4
11	18	14,9	120	200	10,2
12	25	13,6	140	210	10
13	26	14,4	160	220	9,9
14	29	12,3	155	230	9,8
15	31	13,8	180	240	10,2
16	32	11,6	175	250	10,2
17	35	16,2	185	260	10
18	32	15,3	200	270	10
19	30	14,1	210	280	10
20	22	16,1	220	300	9,7

1-topshiriq. Demak, berilgan ma'lumotlar asosida ko'p faktorlik regressiya tenglamasining koeffitsientlarini aniqlaymiz. Regressiya tenglamasining koeffitsientlari b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 ning qiymatlari matritsa usulida quyidagi formula yordamida aniqlanadi

$$B = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (1)$$

bu yerda B vektor - qidirilayotgan regressiya tenglamasining koeffitsientlarini bildiradi.

Berilgan kirish qiymatlari orqali X va Y matritsani hosil qilamiz. X matritsaning birinchi ustundagi 1 qiymati b_0 boshlangich koeffitsientni topish uchun yoziladi.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 18 & 12,1 & 40 & 100 \\ 1 & 20 & 14,2 & 45 & 110 \\ 1 & 22 & 13,5 & 50 & 120 \\ 1 & 25 & 12,9 & 55 & 130 \\ 1 & 27 & 15,7 & 60 & 140 \\ 1 & 30 & 19,4 & 65 & 150 \\ 1 & 21 & 18,6 & 70 & 160 \\ 1 & 27 & 17,3 & 80 & 170 \\ 1 & 29 & 16,1 & 90 & 180 \\ 1 & 33 & 19,1 & 100 & 190 \\ 1 & 18 & 14,9 & 120 & 200 \\ 1 & 25 & 13,6 & 140 & 210 \\ 1 & 26 & 14,4 & 160 & 220 \\ 1 & 29 & 12,3 & 155 & 230 \\ 1 & 31 & 13,8 & 180 & 240 \\ 1 & 32 & 11,6 & 175 & 250 \\ 1 & 35 & 16,2 & 185 & 260 \\ 1 & 32 & 15,3 & 200 & 270 \\ 1 & 30 & 14,1 & 210 & 280 \\ 1 & 22 & 16,1 & 220 & 300 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 11,3 \\ 13,2 \\ 12,2 \\ 10,2 \\ 10,1 \\ 10,1 \\ 10 \\ 10,6 \\ 10,5 \\ 10,4 \\ 10,2 \\ 10 \\ 9,9 \\ 9,8 \\ 10,2 \\ 10,2 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 9,7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

Noma'lumlarni topish uchun biz, maxsus matematik amallarni bajarishga mo'ljallangan MatLab matematik paketidan foydalanamiz $X^T * X$ ning qiymatini hisoblaymiz

$$X^T * X = \begin{pmatrix} 20 & 532 & 301.2 & 2400 & 3910 \\ 532 & 14646 & 8054 & 66715 & 107030 \\ 301.2 & 8054.2 & 4634 & 35732 & 58787 \\ 2400 & 66715 & 35732 & 359750 & 538350 \\ 3910 & 107030 & 58787 & 258350 & 832900 \end{pmatrix}$$

Endi $(X^T * X)^{-1}$ va matritsani teskarisini va $X^T * Y$ matritsani ko'paytmasini aniqlaymiz

$$X^T * X = \begin{pmatrix} 4.15 & -0.03 & -0.05 & 0.03 & -0.03 \\ -0.03 & 0.007 & -0.009 & 0.006 & -0.006 \\ -0.05 & -0.006 & 0.02 & 0.009 & -0.003 \\ 0.03 & 0.009 & 0.003 & 0.008 & -0.009 \\ -0.03 & -0.008 & -0.003 & -0.007 & 0.007 \end{pmatrix}$$

So'nggi qadamda korrelyatsiya koeffitsientlarini hisoblaymiz va tenlamani hosil qilamiz.

$$X^T * Y = \begin{pmatrix} 208.6 \\ 5511.6 \\ 3134.36 \\ 24444.5 \\ 40149.6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 14.39 \\ -0.01 \\ 0.01 \\ 0.03 \\ 0.04 \end{pmatrix}$$

Regressiya tenglamasining umumiy ko'rinishi quyidagicha $\hat{y} = 14.39 - 0.01 \cdot x_1 + 0.01 \cdot x_2 + 0.03 \cdot x_3 + 0.04 \cdot x_4$

2-topshiriq. Hosil qilingan regressiya tenlamasini monandligi va ahamiyatligini tekshiramiz: $R^2, \bar{R}^2$ va F

Determinatsiya koeffitsienti $R^2 = \frac{Q_R}{Q_y}$ ning qiymatini quyidagi formula yordamida aniqlaymiz:

$$Q_y = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = 14.162, \quad Q_R = (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = 11.601.$$

$$\text{Demak, } R^2 = \frac{11.601}{14.162} = 0.819$$

Endi $\bar{R}^2$ determinatsiyaning qiymatini quyidagi formula yordamida aniqlaymiz

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) * \frac{n - 1}{n - m - 1} = 1 - (1 - 0.819) * \frac{20 - 1}{20 - 4 - 1} = 0.77$$

Ko'p faktorli regressiya tenglamasining bog'liqligini tekshiramiz, buning uchun R^2 determinatsiya koeffitsientining statistik bog'liqligi haqidagi gipotezani tekshirish talab qilinadi va u quyidagicha amalga oshiriladi.

$$\begin{cases} H_0: R^2 = 0 \\ H_1: R^2 > 0 \end{cases}$$

F – statistikaning qiymatlarini hisoblaymiz

$$F_{kuz} = \frac{R^2}{1 - R^2} * \frac{n - m - 1}{m} = \frac{0.819}{1 - 0.819} * \frac{20 - 4 - 1}{4} = 28.17$$

$$F_{tab} = 2.901$$

Xulosa. Demak, o'tkazilgan tekshirishlar shuni ko'rsatadiki, determinatsiya koeffitsienti 0.7 dan katta bo'lganligi uchun, hosil qilingan regressiya tenglamasini jarayonning matematik modeli sifatida tanlashga imkon beradi. $F_{kuz} > F_{tab}$ esa matematik modelning ahamiyatligini bildiradi. Tajribadan olingan Y ning qimati X_j qiymatlar o'rtasidagi bog'liqlikni anglatadi. Hosil qilingan matematik model orqali nazariy eksperiment o'tkazish mumkin. Buning uchun real jarayonda qurilma ustida kirish va chiqish qiymatlarini olib, yuqoridagi ketma-ketlik orqali moddani quritish natijasi haqida tahminiy tavsif berish mumkin bo'ladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Гмурман В.Е Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособия для вузов. – М.: Высшая школа., 2003. – 479с
2. Т.Н. Гартман, Д.В. Клушин. Основы компьютерного моделирования химико-технологических процессов: Учеб пособие для вузов.– М.:«Академкнига», 2006. - 416 с.
3. Евдокимов А. Н., Курзин А. В. Моделирование химико-технологических процессов (экспериментально-статистические модели): учебное пособие. ВШТЭ СПбГУПТД. – СПб. 2018. – 106 с
4. Уилиям Г.Г. Эконометрических анализ. пер с англ; под науч. ред. С. С. Синельникова и М.Ю Турунцевой. – М.: Издательский дом «Дело» РАНХГигС, 2016-752 с.

**TO'RT HOLATLI HC MODELLARINING BIRI UCHUN DAVRIY GIBBS
O'LCHOVLARI HAQIDA**

Tojiboyev Bahtiyor

Namangan davlat universiteti

Burxonova Maloxatxon

Namangan davlat universiteti

Gibbs o'lchovlari nazariyasining asosiy masalasi berilgan gamiltonianga mos barcha Gibbs o'lchovlarini tavsiflashdan iborat. Gibbs o'lchovi tushunchasi va Gibbs o'lchovlari nazariyasiga oid boshqa tushunchalar bilan [1]-[4] ishlarda tanishish mumkin.

Har bir Gibbs o'lchoviga fizik sistemaning bitta fazasi mos qo'yiladi va agar Gibbs o'lchovlari soni o'zgarsa, u holda faza almashishi mavjud, ya'ni fizik sistema bir holatdan ikkinchi holatga o'tadi deyiladi.

Faraz qilaylik, $\tau^k = (V, L)$ Keli daraxti bo'lsin. Agar $i(l) = \{x, y\}$ bo'lsa, u holda x va y lar eng yaqin qo'shnilar deyiladi va $l = \langle x, y \rangle$ kabi belgilanadi.

Fiksirlangan $x^0 \in V$ uchun ushbu belgilashlar kiritiladi:

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\},$$

Bunda $d(x, y)$ – $x, y \in V$ uchlar orasidagi masofa. $x \in W_n$ uchun esa quyidagicha belgilash kiritamiz: $S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}$. $S(x)$ to'plam x uchning to'g'ri avlodlari deyiladi.

Qaralayotgan modelda har bir x uchga $\sigma(x) \in \{0, 1, 2, 3\}$ qiymatlardan biri mos qo'yiladi. $\sigma(x) = 1, 2, 3$ ekanligi x uchning “band”ligini, $\sigma(x) = 0$ esa uning “vakant” ekanligini ifodalaydi. Keli daraxtida konfiguratsiya $V \rightarrow \Phi = \{0, 1, 2, 3\}$ kabi aniqlangan. V da aniqlangan barcha konfiguratsiyalar to'plami Ω orqali belgilanadi. Xuddi shunga o'xshash, $V_n(W_n)$ da konfiguratsiyalar aniqlanadi va $V_n(W_n)$ da aniqlangan barcha konfiguratsiyalar to'plami $\Omega_{V_n}(\Omega_{W_n})$ kabi belgilanadi.

Φ to'plamni biror G grafning uchlarini to'plami sifatida qaraymiz. Agar V (V_n) dagi ixtiyoriy x, y yaqin qo'shnilar uchun $\{\sigma(x), \sigma(y)\} - G$ grafning qirrasini bo'lsa, u holda σ konfiguratsiya Keli daraxtida (V_n yoki W_n) G -joiz konfiguratsiya deyiladi. G -joiz konfiguratsiyalar to'plamini Ω^G ($\Omega_{V_n}^G$) orqali belgilaymiz. G graf uchun aktivlik to'plami $\lambda: G \rightarrow R_+$ funksiyadir. λ funksiyani $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ uchlardagi λ_i qiymatlari uchun "aktivligi" deyiladi.

Berilgan G va λ lar uchun G -HC modelning gamil'taniani ushbu

$$H_G^\lambda(\sigma) = \begin{cases} \sum_{x \in V} \ln \lambda_{\sigma(x)}, & \text{agar } \sigma \in \Omega^G, \\ +\infty, & \text{agar } \sigma \notin \Omega^G. \end{cases}$$

orqali aniqlanadi.

Ta'rif 1. [5] Agar shunday λ aktivlik mavjud bo'lsaki, mos gamil'tanian kamida 2 ta TIGO' ga ega bo'lsa, u holda G unimodur graf deyiladi.

Bu ishda $\lambda_0 = 1, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ bo'lgan hollarni ko'ramiz va ushbu hollarga mos keluvchi davriy Gibbs o'lchovlarini o'rganamiz. Ma'lumki [5], to'rt holatli unimodur graflar: tayoq, kalit, umumlashgan kalitdan iborat. Quyidagi G grafni qaraylik:

$$\text{tayoq: } \{0, 1\} \quad \{1, 2\} \quad \{2, 3\}.$$

$\sigma_n \in \Omega_{V_n}^G$ uchun $\# \sigma_n = \sum_{x \in V_n} \mathbf{1}(\sigma_n(x) \geq 1)$ σ_n dagi band uchlar soni deb olamiz.

$z: x \rightarrow z_x = (z_{0,x}, z_{1,x}, z_{2,x}, z_{3,x}) \in R_+^4$ V dagi vektor funksiya bo'lsin. $n = 1, 2, \dots$ va $\lambda > 0$ uchun

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = \frac{1}{Z_n} \lambda^{\# \sigma_n} \prod_{x \in W_n} z_{\sigma_n(x), x}. \quad (1)$$

kabi aniqlangan Ω_{V_n} to'plamda $\mu^{(n)}$ ni ehtimollik taqsimotini ko'raylik.

$\mu^{(n)}$ ehtimollik o'lchovlari ketma-ketligi muvofiqlashgan deyiladi, agar istalgan $n \geq 1$ va $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$ uchun quyidagi tenglik bajarilsa:

$$\sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) \mathbf{1}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega_{V_n}) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}), \quad (2)$$

bu yerda

$$\mathbf{1}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega_{V_n}) = \begin{cases} 1, & \text{agar } \sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega_{V_n} \\ 0, & \text{agar } \sigma_{n-1} \vee \omega_n \notin \Omega_{V_n}. \end{cases}$$

Bu holda Kolmogorov teoremasiga ko'ra, $(\Omega, \mathbf{B})$ da barcha n va $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$ uchun yagona μ o'lchovi mavjud.

$$\mu(\{\sigma \in \Omega: \sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n).$$

Ta'rif 2. (1) formula va (2) shart yordamida aniqlangan μ o'lchov $\lambda > 0$ da $z: x \in V \setminus \{x^0\} \mapsto z_x$ funksiyaga mos HC-Gibbs o'lchov deyiladi.

G grafning qirralar to'plami $L(G)$ bo'lsin. G grafning qo'shnilik matritsasini $A \equiv A^G = (a_{ij})_{i,j=0,1,2,3}$ bilan belgilaymiz, ya'ni

$$a_{ij} \equiv a_{ij}^G = \begin{cases} 1, & \text{agar } \{i, j\} \in L(G), \\ 0, & \text{agar } \{i, j\} \notin L(G). \end{cases}$$

bo'lsin.

Teorema 1. [6]. (1) formula bilan berilgan ehtimolliklar o'lchovlari ketma-ketligi $\mu^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$ muvofiqlik shartini qanoatlantirishi uchun ixtiyoriy $x \in V$ da

$$\begin{aligned} z_{1,x} &= \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{i0} + a_{i1}z_{1,y} + a_{i2}z_{2,y} + a_{i3}z_{3,y}}{a_{00} + a_{01}z_{1,y} + a_{02}z_{2,y} + a_{03}z_{3,y}}, \\ z_{2,x} &= \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{i0} + a_{i1}z_{1,y} + a_{i2}z_{2,y} + a_{i3}z_{3,y}}{a_{00} + a_{01}z_{1,y} + a_{02}z_{2,y} + a_{03}z_{3,y}}, \\ z_{3,x} &= \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{i0} + a_{i1}z_{1,y} + a_{i2}z_{2,y} + a_{i3}z_{3,y}}{a_{00} + a_{01}z_{1,y} + a_{02}z_{2,y} + a_{03}z_{3,y}}. \end{aligned}$$

tengliklar o'rinli bo'lishi zarur va yetarli, bu yerda $z'_{i,x} = \lambda z_{i,x} / z_{3,x}$, $i = 0, 1, 2$.

$z_{0,x} \equiv 1$ va $z_{i,x} = z'_{i,x} > 0$, $i = 1, 2, 3$ bo'lsin. U holda har bir $x \in V \rightarrow z_x = (z_{1,x}, z_{2,x}, z_{3,x})$ ixtiyoriy funksiyalar uchun Gibbsning HC-o'lchoviga quyidagi funksional tenglamalar sistemasining bitta yechimi mos keladi.

$$z_{i,x} = \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{i0} + a_{i1}z_{1,y} + a_{i2}z_{2,y} + a_{i3}z_{3,y}}{a_{00} + a_{01}z_{1,y} + a_{02}z_{2,y} + a_{03}z_{3,y}}, \quad i = 1, 2, 3$$

Davriy Gibbs o'lchovlari uchun quyidagi teoremlar o'rinli.

Teorema 2. HC-modeli uchun har qanday chekli indeksli $G \subset G_k$ normal bo'luvchi uchun barcha G -davriy Gibbs o'lchovlari yo translyatsion-invariant yoki $G_k^{(2)}$ -davriy Gibbs o'lchovi bo'ladi.

Teorema 3. $k = 2$ yoki $k = 3$ bo'lsin. U holda HC modeli uchun unumdor graf tayoq bo'lganda $G_k^{(2)}$ -davriy Gibbs o'lchovlari translyatsion-invariant bo'ladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Георги Х.-О. Гиббсовские меры и фазовые переходы. – М.: Мир, 1992.
2. Preston C. J. Gibbs States on countable sets. Cambridge Tracts Math. 1974.– 68.
3. Синай Я. Г. Теория фазовых переходов. Строгие результаты. – М.: Наука, 1980.
4. Rozikov U. A. Gibbs measures on Cayley trees. World Scientific. – 2013.
5. Brightwell G., Winkler P. Graph homomorphisms and phase transitions. J. Combin. Theory Ser. B. – 1999. – 77, – P. 221–262.
6. Martin J. B., Rozikov U. A., Suhov Yu. M. A three state hard-core model on a Cayley tree. J. Nonlin. Math. Phys. – 2005. – 12, № 3. – P. 432–448.

NATURAL SONNI ABSOLYUT BO'LAKLASHDAGI BUTUN YECHIMLARI SONI

Tursunov Bekzod

Andijon davlat universiteti

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = n \quad (1)$$

tenglamaning nomanfiy yechimlari soni C_{n+k-1}^n taga teng [1]. (1) ning barcha natural yechimlari soni C_{n-1}^{k-1} orqali topiladi [2].

Bizni qiziqtirgan masala

$$|x_1| + |x_2| + |x_3| + \dots + |x_k| = n \quad (2)$$

tenglamaning butun yechimlari sonini topishdan iborat. Dastlab masalani $k \leq n$ hol uchun yechamiz.

(2) ning har bir butun yechimlarini (1) ning har bir yechimlaridagi natural sonlarni qarama – qarshisiga o'zgartirish orqali hosil qilamiz.

Masalan: $(p_1, p_2, 0, 0, \dots, 0)$ ($p_1 + p_2 = n$, $p_1, p_2 \in N$) orqali yana (2) ning

$$(-p_1, p_2, 0, 0, \dots, 0)$$

$$(p_1, -p_2, 0, 0, \dots, 0)$$

$$(-p_1, -p_2, 0, 0, \dots, 0)$$

yechimlarni hosil qilamiz.

Ko'rish mumkinki tarkibida 2 ta natural son mavjud (1) ning har bir yechimidan (2) ning $C_2^0 + C_2^1 + C_2^2$ ta butun yechimlarini hosil qilish mumkin.

C_2^0 – 2 ta butun yechimlar ichida manfiy yechimlari yo'q; $(p_1, p_2, 0, 0, \dots, 0)$

C_2^1 – 2 ta butun yechimlar ichida bitta manfiy yechim bor; $(-p_1, p_2, 0, 0, \dots, 0)$ va $(p_1, -p_2, 0, 0, \dots, 0)$.

C_2^2 – 2 ta butun yechimlar ichida ikkita manfiy yechim bor; $(-p_1, -p_2, 0, 0, \dots, 0)$.

(1) ning tarkibida 2 ta natural son mavjud barcha yechimlari soni $C_{n-1}^{2-1} \cdot C_k^2$ ta bo'lib, ularning har biri orqali $C_2^0 + C_2^1 + C_2^2 = 2^2$ ta (2) ning butun yechimlarini hosil qilish mumkin. Demak, (2) ning tarkibida noldan farqli ikkita butun sonlar qatnashgan yechimlari soni $(C_2^0 + C_2^1 + C_2^2) \cdot C_{n-1}^{2-1} \cdot C_k^2 = 2^2 \cdot C_{n-1}^{2-1} \cdot C_k^2$ ga teng.

Huddi shunday mulohaza yuritishni davom ettirib tarkibida k ta natural son qatnashuvchi (1) tenglamaning yechimidan $2^k \cdot C_{n-1}^{k-1} \cdot C_k^k$ ta (2) ning yechimlarini hosil qilish mumkin. $1 \leq k \leq n$ bo'lganda (2) ning barcha butun yechimlari soni

$$\sum_{i=1}^k 2^i \cdot C_{n-1}^{i-1} \cdot C_k^i$$

formula orqali topiladi.

Yuqoridagi natijalarni umumlashtirgan holda quyidagi teoremani keltirish mumkin:

Teorema 1.

Berilgan $k, n \in N$ ($k \leq n$) sonlar uchun $|x_1| + |x_2| + |x_3| + \dots + |x_k| = n$ tenglamaning $x_i \in Z, i = \overline{1, k}$ shartlarni qanoatlantiruvchi $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$ yechimlari soni S_n^k quyidagicha topiladi:

$$S_n^k = \sum_{i=1}^k 2^i \cdot C_{n-1}^{n-i} \cdot C_k^i$$

Biz (2) masalani $k \leq n$ hol uchun hal qildik. Tenglamani $k > n$ hol uchun yechganimizda har bir yechim tarkibida ko'pi bilan n ta butun son qatnashadi va qolgan barcha butun yechimlar faqat nollardan iborat bo'ladi. (2) ning barcha yechimlarini (1) ning barcha nomanfiy yechimlaridagi natural sonlarni qarama – qarshisiga o'zgartirib hosil qilganimiz sababli $k > n$ holda ham shunday yo'l tutamiz. Hisoblashlarda bo'laklashlar soni $k > n$ da n tadan ortib ketmaydi.

Demak bo'laklashlar soni umumiy holda ko'pi bilan k ta yoki n tadan iborat bo'ladi va quyidagi umumlashgan teorema o'rinli

Teorema 2.

Berilgan $k, n \in N$ sonlar uchun $|x_1| + |x_2| + |x_3| + \dots + |x_k| = n$ tenglamaning $x_i \in Z, i = \overline{1, k}$ shartlarni qanoatlantiruvchi $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$ yechimlari soni S_n^k quyidagicha topiladi:

$$S_n^k = \sum_{i=1}^{\min(n,k)} 2^i \cdot C_{n-1}^{n-i} \cdot C_k^i$$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. И.И.Ежов, А.В.Скороход, М.И.Ядренко “Элементы комбинаторики”. Москва “Наука” 1977. стр 32.
2. К.А.Рыбникова Комбинаторный анализ. Москва “Наука” 1982. стр 15.

BATTACHARIYANING QUYI CHEGARALAR SISTEMASI VA ULAR BILAN BOG'LIQ STATISTIK MASALALAR

Umarov Tursunboy

Namangan Davlat Universiteti

Kirish. Matematik statistikadan ma'lumki, (Ω, P) ehtimollik fazosida aniqlangan $X=X(\omega)$ tasodifiy miqdorni kuzatadigan tajribalar bog'liqsiz ravishda bir xil sharoitda cheksiz sonda o'tkazilib, ularning natijalari esa bo'g'liq bo'lmagan va bir xil taqsimlangan $\{X_1, X_2, \dots\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligidan iborat deb hisoblanadi, hamda n ta tajribada $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ –statistik to'plam, ya'ni statistik tanlanma kuzatiladi. Har bir fiksirlangan ω uchun bu tanlanmaning amaldagi qiymati mos ravishda $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ sonlardan iborat bo'ladi. Biz statistik tanlanma va uning qiymatlarini mos ravishda $X^{(n)} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ va $x^{(n)} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ vektorlar kabi belgilab olamiz. $x^{(n)}$ barcha mumkin bo'lgan qiymatlar to'plamini $\mathcal{X}$ orqali belgilab olamiz. Bu to'plam tanlanma to'plam deb ataladi. $\mathcal{X}$ to'plam ostilaridan tuzilgan Borel σ -algebrasi $\mathcal{B}$ bo'lsin. $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ o'lchovli fazoda $X^{(n)}$ tanlanma ushbu $P(\mathcal{B}) = P(\omega: X^{(n)}(\omega) \in B), B \in \mathcal{B}$ taqsimotni hosil qiladi. Matematik statistikaning asosiy vazifasi $X^{(n)}$ tanlama, tajriba natijalari orqali P taqsimotni aniqlash yoki baholashdan iboratdir [4]. Shu bilan P taqsimot biror $\{P\}$ oilaga tegishli deb hisoblanadi.

Ushbu $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \{P\})$ ehtimollik fazolari oilasi statistik model deb ataladi. Agar $\{P\}$ oila parametrlantirilgan bo'lsa, ya'ni biror θ parametrga bog'liq bo'lsa, u holda $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \{P_\theta, \theta \in \Theta\})$ model parametrik statistik model deyiladi.

Nuqtaviy baholarga qo'yiladigan asosiy talab ularning asosliligi, siljimaganligi va risk funksiyasining minimalligi xossalriga ega bo'lishidir. Asoslilik xossasi tanlanma hajmini yetarlicha katta bo'lganligida namoyon bo'ladi. Lekin tanlanma hajmi chekli bo'lganda risk funksiyasining minimalligi xossasi o'rganiladi. Siljimagan statistik baholar uchun risk

funksiyasi kvadratik bo'lgan holda dispersiya bilan ustma-ust tushadi. Bu holda eng kichik dispersiyaga ega bo'lgan baho eng yaxshi, effektiv baho deb ataladi.

Asosiy qism. Taqsimotlar oilasi ma'lum shartlarni qanoatlantirganda dispersiya uchun quyi chegarani ko'rsatish mumkin. Bu shartlar Kramer-Rao regularlik shartlari deb ataladi [1-3]. Shved matematigi Xarald Kramer va hind matematigi Kalyampudi Raolar bir-biriga bog'liqsiz ravishda tengsizlik isbotlaganda ushbu shartlarni kiritgani uchun ularning nomiga Kramer-Rao tengsizligi deb atalgan.

$(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_\theta)$ statistik modelda hajmi n ga teng bo'lgan $X^{(n)}$ tanlanma va uning qiymatlari $x^{(n)}$ bo'lsin. Ushbu $L(\theta, x) = L(\theta, x_1, x_2, \dots, x_n)$ –haqiqatga o'xshashlik funksiyasini aniqlaymiz va quyidagi regularlik shartlari o'rinli bo'lsin deb faraz qilamiz.

- i) $L > 0$ va θ bo'yicha hamma yerda differensiallanuvchi;
- ii) Ushbu $U(\theta, x) = \frac{\partial \ln L(\theta, x)}{\partial \theta}$ funksiya chekli dispersiyaga ega bo'lsin;
- iii) Chekli ikkinchi tartibli momentga ega bo'lgan $\hat{\theta}_n(x)$ statistika uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'lsin.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\mathcal{X}} \hat{\theta}_n(x) L(\theta, x) dx = \int_{\mathcal{X}} \hat{\theta}_n(x) \frac{\partial}{\partial x} L(\theta, x) dx. \quad (1)$$

- iv) Agar yuqoridagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\hat{\theta}_n(x)$, differensiyalanuvchi funksiya $\tau(\theta)$ uchun siljimagan baho bo'lsa, u holda ular uchun quyidagi tengsizlik bo'ladi.

$$D_\theta(\hat{\theta}_n(x)) \geq \frac{(\tau'(\theta))^2}{nI(\theta)}, \quad (2)$$

bu yerda $I(\theta) = M\left(\frac{dx \ln L(\theta, x)}{d\theta}\right)^2$ –Fisher informatsiyasi, $L(\theta, x)$ -zichlik funksiyasi bo'ladi, agar X uzliksiz bo'lsa $\{X=t\}$ hodisaning ehtimolligi bo'ladi, faqat va faqat shu holdaki, agar quyidagi tengsizlik bajarilsa

$$\frac{d \ln L(\theta, x)}{d\theta} = a(\theta)(\hat{\theta}_n(x) - \tau(\theta)).$$

Kramer-Rao tensizligining quyidagi xususiy holi ham ishlatiladi. Regularlik shartlari bajarilganda $\hat{\theta}_n(x)$ -baxo θ parameter uchun siljimagan baho bo'lsa, u holda

$$D_\theta(\hat{\theta}_n(x)) \geq \frac{1}{I_n(\theta)},$$

tengsizlik o'rinli. Bunda $\hat{\theta}_n(x) - \theta = a(\theta) \cdot U(\theta, x)$ bo'lgandagina o'rinli bo'ladi.

Agar (2) tengsizlikda tenlik o'rinli bo'lsa, u holda $\hat{\theta}_n(x)$ baho Kramer-Rao ma'nosida effektiv baho deyiladi. Tengsizlikning hajmi n ortgani sari baholarning asimptotik effektivligini quyidagicha miqdorning 1ga yaqinligi bilan hisoblash mumkin:

$$0 \leq \text{eff}(\hat{\theta}_n, \theta) = \frac{1}{I_n(\theta) D_\theta(\hat{\theta}_n)} \leq 1.$$

Ushbu maqolada biz Battachariyaning quyi chegaralar sistemasi va ular bilan bog'liq statistik masalalar muhokama qilinadi va tadqiq qilinadi [2,4].

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Боровков А.А. Математическая статистика. Отценка параметров, проверка гипотез. –Москва: Наука 1984. –472с.
2. Закс III. Теория статических выводов. –Москва: Мир 1975. –776с.
3. Козлов М.В., Прохоров А.В. Введение в математическую статистику. –Москва: МГУ. 1987. –263с.

4. Farmonov Sh.K., Abdushukorov A.A. Matematik statistika. 1-qism: parametrlarni baholash. Toshkent: universitet.1994. -67 b.

UMUMLASHGAN FRIDRIXS MODELLARI OILASI XOS QIYMATLARINING SONI VA JOYLASHUV O'RNI

Xayitova Xilola

Buxoro davlat universiteti

$\mathbb{T}^d$ orqali d o'lchamli torni, $\mathbb{C}$ orqali bir o'lchamli kompleks fazoni va $L_2(\mathbb{T}^d)$ orqali $\mathbb{T}^d$ to'plamda aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymat qabul qiluvchi) funksiyalarning Gilbert fazosini belgilaymiz.

Ixtiyoriy $f = (f_0, f_1), g = (g_0, g_1) \in \mathbb{C} \oplus L_2(\mathbb{T}^d)$ elementlar uchun ularning skalyar ko'paytmasi

$$(f, g) = f_0 \overline{g_0} + \int_{\mathbb{T}^d} f_1(t) \overline{g_1(t)} dt$$

tenglik yordamida aniqlanadi. $f = (f_0, f_1)$ ning normasi esa

$$\|f\| = \sqrt{|f_0|^2 + \int_{\mathbb{T}^d} |f_1(t)|^2 dt}$$

kabi aniqlanadi.

Mazkur ishda $\mathbb{C} \oplus L_2(\mathbb{T}^d)$ Gilbert fazosidagi quyidagi ikkinchi tartibli operatorli matritsani qaraymiz.

$$h_{\mu, \lambda}(\gamma) := \begin{pmatrix} h_{00}(x) & \frac{\lambda}{\sqrt{2}} h_{01} \\ \frac{\lambda}{\sqrt{2}} h_{01}^* & h_{11}^0(\gamma, x) - \mu V \end{pmatrix}$$

Bu yerda matritsaviy elementlar

$$\begin{aligned} h_{00}(x)f_0 &= u(x)f_0, & h_{01}f_1 &= \int_{\mathbb{T}^d} v(t)f_1(t)dt, \\ (h_{01}^*f_0)(y) &= v(y)f_0, & (h_{11}^0(\gamma; x)f_1)(y) &= w_\gamma(x, y)f_1(y), \\ (vf_1)(y) &= \int_{\mathbb{T}^d} f_1(t)dt \end{aligned}$$

qoidalar yordamida ta'sir qiladi. $u_1(\cdot), v(\cdot)$ funksiyalar $\mathbb{T}^d$ da aniqlangan haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiyalar.

Ikkinchi tartibli matritsaviy model operatorning muhim spektri tushunchasiga to'xtalib o'tamiz. Matritsaviy operatorni quyidagicha ko'rinishda ifodalaymiz:

$$h_{\mu, \lambda}(\gamma; x) := h_{00}(\gamma) + v_{\mu, \lambda}.$$

$$\text{Bu yerda, } h_{00}(\gamma; x) := \begin{pmatrix} h_{00}(x) & 0 \\ 0 & h_{11}^0(\gamma, x) \end{pmatrix}, \quad v_{\mu, \lambda} := \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda}{\sqrt{2}} h_{01} \\ \frac{\lambda}{\sqrt{2}} h_{01}^* & -\mu v \end{pmatrix}.$$

Bizga yaxshi ma'lumki, chekli o'lchamli qo'zg'alishlarda muhim spektrning o'zgarmasligi to'g'risidagi mashhur Veyl teoremasiga ko'ra $\mathbf{h}_{\mu,\lambda}(\gamma; x)$ va $h_{00}(\gamma; x)$ operatorli matritsalarining muhim spektrlari ustma-ust tushadi.

Demak, $\mathbf{h}_{\mu,\lambda}(\gamma; x)$ operatorli matritsaning aniqlanishiga ko'ra, uning muhim spektri uchun

$$\sigma_{ess}(\mathbf{h}_{\mu,\lambda}(\gamma; x)) = \sigma_{ess}(h_{00}(x))$$

tenglik o'rinli bo'lib, operatorli matritsaning muhim spektri $\sigma_{ess}(h_{00}(x)) = \overline{Imw_\gamma(x; \cdot)} = [m_\gamma(x); M_\gamma(x)]$ kesmadan iborat. Bu yerda,

$$m_\gamma(x) = \min_{y \in \mathbb{T}^d} w_\gamma(x, y), \quad M_\gamma(x) = \max_{y \in \mathbb{T}^d} w_\gamma(x, y).$$

Operatorli matritsaning diskret spektrini aniqlashda muhim bo'lgan hamda $\mathbb{C} \setminus [m_\gamma(x); M_\gamma(x)]$ sohada quyidagi bo'lgan $\Delta_{\mu,\lambda}(\gamma, x; z)$ funksiyani qaraymiz:

$$\Delta_{\mu,\lambda}(\gamma, x; z) = \left(u(x) - z - \frac{\lambda^2}{2} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{v^2(t) dt}{w_\gamma(x, t) - z} \right) \left(1 - \int_{\mathbb{T}^d} \frac{dt}{w_\gamma(x, t) - z} \right) - \frac{\mu\lambda}{2} \left(\int_{\mathbb{T}^d} \frac{v(t) dt}{w_\gamma(x, t) - z} \right)^2$$

Quyidagi lemma $\mathbf{h}_{\mu,\lambda}(x)$ operatorli matritsaning xos qiymatlari va $\Delta_{\mu,\lambda}(\gamma, x; \cdot)$ funksiya nollari orasidagi munosabatni ifodalaydi.

1-Lemma. $z \in \mathbb{C} \setminus [m(x); M(x)]$ soni $\mathbf{h}_{\mu,\lambda}(\gamma; x)$ operatorning xos qiymati bo'lishi uchun $\Delta_{\mu,\lambda}(\gamma, x; z) = 0$ bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. $z \in \mathbb{C} \setminus [m(x); M(x)]$ soni $\mathbf{h}_{\mu,\lambda}(\gamma; x)$ operatorning xos qiymati bo'lsin. U holda

$$\mathbf{h}_{\mu,\lambda}(\gamma; x)f = zf, \quad f = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}.$$

tenglamani qaraymiz. 1-lemmadan $\mathbf{h}_{\mu,\lambda}(\gamma; x)$ operatorning diskret spektri uchun

$$\sigma_{disc}(\mathbf{h}_{\mu,\lambda}(\gamma; x)) = \{z \in \mathbb{C} \setminus [m(x), M(x)]: \Delta_{\mu,\lambda}(\gamma, x; z) = 0\}$$

tenglik kelib chiqadi.

Ishning asosiy natijasi quyidagi teoremda o'z aksini topgan.

Teorema. $\mathbf{h}_{\mu,\lambda}(\gamma; x)$ operator ko'pi bilan 3 ta xos qiymatga ega. Ulardan ikkitasi muhim spektrdan chapda, bittasi esa muhim spektrdan o'ngda joylashgan bo'ladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Birman M.S, Salomjak M.Z. Spectral theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space. Dordrecht: D. Reidel P.C., 313 P. (1987).
2. Расулов Т.Х. Существенный спектр одного модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке. Теоретическая и математическая физика. 2011, -Т. 166, -№ 1, -С. 95-109.
3. Alberverio.S, Lakayev S.N., Makatov K.A., Muminov Z.I. The threshold effects for the two-particle Hamiltonians on lattices. Comm. Math. Phys.,262 (2006), pp.91-115.

TO'LIQSIZ KUZATUVCHILAR HOLI UCHUN HAQIQATGA O'XSHASHLIKNING EFFEKTIV METODI

Zaxidov Dilshodbek

ADU

Abdulvoxidov Alisher

ADU

O'ngdan tsenzurlangan tasodifiy modelni qaraymiz. Aytaylik $X_1, \dots, X_n$ umumiy taqsimot funksiyasi F bilan birga qiziqish tug'diruvchi tasodifiy miqdor bo'lsin. Bu miqdorlar o'ngdan G umumiy taqsimot funksiyasi bilan o'zaro bog'liq bo'lmagan $Y_1, \dots, Y_n$ tasodifiy miqdorlar bilan tasodifiy ravishda tsenzurlanadi. Ushbu $C^{(n)} = \{(Z_k, \delta_k), k = 1, \dots, n\}$ tanlanmani qaraymiz, bunda $Z_k = \min(X_k, Y_k)$, umumiy taqsimot funksiyasi. $H(x) = 1 - (1 - F(x))(1 - G(x))$ va $\delta_k = I(X_k \leq Y_k)$ bo'lgan o'zaro bog'liqsiz (erkli) tasodifiy miqdorlardir. Masala quyidagi integral funksionalni baholashdan iboratdir:

$$\theta = \theta(F) = \int \Psi(x) dF(x),$$

Bunda $\Psi(x)$ o'lchamga ega funksiya. F taqsimot funksiyaning baxosi sifatida quyidagi [1] dagi munosabatlarning darajali bahosidan foydalanamiz: $F_n^*(x) = 1 - (1 - H_n(x))^{R_n(x)}$, bunda $H_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(Z_k \leq x) - H(x)$ uchuun taqsimotning effektiv funksiyasi (e.f.r) va

$$R_n(x) = \sum_{k=1}^n \delta_k I(Z_k \leq x) \left[1 - H_n(Z_k) + \frac{1}{n} \right]^{-1} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n I(Z_k \leq x) \left[1 - H_n(Z_k) + \frac{1}{n} \right]^{-1} \right\}^{-1}.$$

Ushbu F_n^* baho $(-\infty, T]$ oraliqdagi boshqa baholarga qaraganda ko'pgina optimal xossalarga ega, bunda $T < T_H = \inf\{x \in R^1: H(x) = 1\}$. Shuning uchun $\theta(F)$ o'rniga quyidagi kesik funksionalni (yana qarang [7,8]):

$$\theta_T(F) = \int \Psi^*(x) dF(x), \quad \Psi^*(x) = \Psi(x) I(x \leq T).$$

Bu holda tegishli baho sifatida

$$\theta_T(F_n^*) = \int \Psi^*(x) dF_n^*(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n U_k + O_p\left(n^{-\frac{1}{2}}\right), \quad (1)$$

bunda $U_i = U_i(F, G)$ – o'zaro bog'liqsiz (erkli) va bir xil taqsilangan tasodifiy miqdorlar. Effektiv haqiqatga o'xshashlik metodini qo'llash (tarqatish) uchun va noto'liq ma'lumotlarning qaraliyotgan modellari uchun ushbu tasodifiy miqdorlarni kiritamiz $V_k = \Psi^*(Z_k) \cdot \Delta F_n^*(Z_k)$, $\Delta F_n^*(Z_k) = F_n^*(Z_k) - F_n^*(Z_k - 0)$ shu bilan birga tegishli haqiqatga o'xshashlik tegishli effektiv bahosi funksiyasi,

$$R_n^*(\theta_T) = \prod_{k=1}^n np_k^*,$$

$n \sum_{k=1}^n p_k^*(V_k - \theta_T) = 0$, $\sum_{k=1}^n p_k^* = 1$ chegaralangangan va ushbu

$$\Lambda_n(p^*; \gamma; \lambda) = \sum_{k=1}^n \log(np_k^*) - n\gamma \sum_{k=1}^n p_k^*(V_k - \theta_T) + \lambda \left(\sum_{k=1}^n p_k^* - 1 \right)$$

lagranjian bilan.

Tegishli tenglamalar sistemasining yechimi

$$p_k^* = \frac{1}{n(1 + \lambda_n(V_k - \theta_T))}, \quad k = 1, \dots, n,$$

bo'lib, bunda λ_n quyidagi tenglamani qanoatlantiradi:

$$\sum_{k=1}^n \frac{V_k - \theta_T}{1 + \lambda(V_k - \theta_T)} = 0.$$

Faraz qilyalik,

$$\mathfrak{S}_v^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} D_F \left(n^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^n V_k \right) < \infty. \quad (2)$$

Ushbu statistikani aniqlaymiz

$$q_n^*(\theta) = -2 \log R_n^*(\theta_T) = 2 \sum_{k=1}^n \log(1 + \lambda(V_k - \theta_T)).$$

Teorema. O'ngdan tsenzurlangan tasodifiy model uchun (2) shart o'rinli bo'lsin. U holda $n \rightarrow \infty$ uchun

$$\frac{D_F V_1}{\mathfrak{S}_v^2} q_n^*(\theta_T) \Rightarrow \chi_1^2. \quad (3)$$

(3) natija quyidagi 2 ta teoremlarni umumlashtiradi.

Teorema 2[5]. Aytaylik $X_1, \dots, X_n$ tanlanma F taqsimotga tegishli va $\mu = EX_1$, hamda $\sigma^2 = DX_1 \in (0, +\infty)$. U holda $n \rightarrow \infty$ bo'lganda $q_n(\mu) \Rightarrow \chi_1^2$, bunda “ $\Rightarrow$ ” belgi taqsimotning yaqinlashuvchi ekanligini va X_l^2 tasodifiy miqdor – ozodlik darjasi l bo'lgan xi- kvadrat taqsimot bilan taqsimlangan tasodifiy miqdor ekanligini bildiradi.

Teorema 3. Faraz qilaylik $X_1, \dots, X_n$ tanlanma F dan olingan bo'lsin. $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s) \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^s$ uchun $\Psi(\cdot; \theta) \in \mathbb{R}^s$ bo'lsin. Agar $E_F \Psi(X; \theta) = 0$ va ushbu $Cov_F(\Psi(X; \theta), \Psi^T(X; \theta))$ korrelyatsiya matritsasining rangi $q > 0$ bo'lsa, u holda $n \rightarrow \infty$ bo'lganda:

$$q_n(\theta) = -2 \log \mathcal{R}_n(\theta) \Rightarrow \chi_q^2.$$

o'rinli bo'ladi.

Undan $\theta_T(F)$ – kesik integral uchun asimptotik ishonchlilik oralig'ini qurish uchun foydalanish mumkin. Bu natija avtorlarning ishlarini [2] davom ettirib ichki tanlanmaning bir jinsliligini tekshirish masalasini umumlashtiradi

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Абдушукуров А.А. Статистика неполных наблюдений. Ташкент. 2009. Университет. 269р.
2. Абдулвахидов А.Л., Захидов Д.Г. Двухвыборочные критерии согласия при случайном цензурировании справа. //Матер.научно-практ.конф. «СТАТИСТИКА и ее применения». Ташкент. Филиал МГУ. 2019. с.369-371.
3. Bickel P.J., Klaassen C.A.J., Ritov E., J.A.Wellner. Efficient and adaptive estimation for semiparametric model. Baltimore: Johns Hopkins Press.1993.
4. Borwein J.M., Lewis A.S. Duality relationships for entropy-like minimization problem.// SIAM J. Control Optim., 1991. v.29, N.2, p.325-338.
5. Owen A.B. Empirical likelihood. Chapman and Hall. /CRC.2001.

6. Qin J., Lawless J. Empirical likelihood and general estimating equation. //Annals of Statistics, 1994. v.22, N.1, p.300-325.
7. Zakhidov D.G., Iskandarov D.Kh. Empirical likelihood confidence intervals for truncated integrals. //AMSA-2019. Russia. Novosibirsk. 2019.p.102-104.
8. Zakhidov D.G., Iskandarov D.Kh. Empirical likelihood confidence intervals for censored integrals.// Computer Data Analysis and Modeling: Stochastic and Data Science. CDAM-2019. Belorussia. Minsk.2019.p.335-336.

ЗАКОНЫ АРКСИНУСА И СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДЕНИЕ

Абдуллаев Алишер

Национальный университет Узбекистана

Давайте поговорим о проигрышах, но сначала скажем несколько слов о первом и втором законах арксинуса. Эти принципы относятся к случайному блужданию. Поток торговых P&L в некоторых случаях может быть неслучайным, хотя обычно большинство потоков торговых прибылей и убытков почти случайны, что можно подтвердить серийным тестом и коэффициентом линейной корреляции. Законы арксинуса предполагают, что вы заранее знаете сумму, которую можно выиграть или проиграть, и допускают, что сумма, которую можно выиграть, равна сумме, которую можно проиграть, и эта сумма постоянна. В нашей дискуссии мы допустим, что сумма, которую вы можете выиграть или проиграть, — это 1 доллар за каждую игру. Законы арксинуса также допускают, что у вас есть 50% шанс выигрыша и 50% шанс проигрыша. Таким образом, законы арксинуса предполагают игру, где математическое ожидание составляет 0. Эти предположения относятся к играм, которые значительно проще, чем торговля. Однако первый и второй законы арксинуса в точности относятся к только что описанной игре. Конечно, напрямую они не применимы к реальной торговле, но для наглядности мы не будем различать игру и торговлю. Представим себе действительно случайную последовательность, такую, как бросок монеты¹, где мы получаем 1 единицу, когда выигрываем, и теряем 1 единицу, когда проигрываем. Если бы мы строили кривую баланса за X число бросков, то наносили бы точки с координатами (X, Y), где X представляет собой номер броска, а Y — наш общий выигрыш или проигрыш после этого броска. Введем понятие положительной области, когда кривая баланса находится выше оси X или на оси X, если предыдущая точка была выше X. Таким же образом мы определим отрицательную область, когда кривая баланса находится ниже оси X или на оси X, если предыдущая точка была ниже X. Логично предположить, что общее количество точек в положительной области будет примерно равно общему количеству точек в отрицательной области. На самом деле это не так. Если бросить монету N раз, то вероятность (Prob) осуществления K событий в положительной области составит:

$$\text{Prob} \sim 1/(\pi * K^{0.5} * (N - K)^{0.5}) \quad (1)$$

Символ ~ означает, что обе части стремятся к равенству в пределе. В этом случае, так как или K, или (N - K) стремятся к бесконечности, обе части

уравнения будут стремиться к равенству. Таким образом, если бросить монету 10 раз (N = 10), мы получим следующие вероятности нахождения в положительной области:

K	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Вероятность	0,14795	0,1061	0,0796	0,0695	0,065	0,0637	0,065	0,0695	0,0796

Можно ожидать попадания в положительную область 5-ти из 10-ти бросков, но это наименее вероятный результат! Наиболее вероятным результатом будет нахождение в положительной области при всех бросках или ни при одном! Этот принцип формально описывается в первом законе арксинуса, который гласит:

Для фиксированного A ($0 < A < 1$), когда N стремится к бесконечности, время, проведенное в положительной области (т.е., когда $K / N < A$), будет определяться следующим образом:

$$\text{Prob}\left\{\left(\frac{K}{N}\right) < A\right\} = 2/(\pi * \text{ARCSIN}(A)^{0.5}) \quad (2)$$

N = количество бросков;

K = количество бросков в положительной области.

Даже при $N = 20$ вы получите очень хорошее приближение для вероятности.

Уравнение (2), то есть первый закон арксинуса, говорит нам, что с вероятностью 0,1 кривая баланса счета проведет 99,4% времени в одной области (положительной или отрицательной). С вероятностью 0,2 кривая баланса будет находиться в той же области 97,6% времени. С вероятностью 0,5 кривая баланса счета проведет в одной области более 85,35% времени. Настолько упряма кривая баланса простой монетки!

Существует также второй закон арксинуса, который основан на уравнении (2) и дает те же вероятности, что и первый закон арксинуса, но применяется к другому случаю, максимуму или минимуму кривой баланса. Второй закон арксинуса гласит, что максимальная (или минимальная) точка кривой баланса вероятнее всего будет при начальном или конечном бросках, чем в середине игры. Распределение будет таким же, как и в случае со временем, проведенным в одной области!

Если вы бросаете монету N раз, вероятность достижения максимума (или минимума) в точке K на кривой баланса также описывается уравнением

Время, проведенное в проигрыше

Вспомните первоначальные предположения в законах арксинуса. Законы арксинуса допускают 50% шанс выигрыша и 50% шанс проигрыша. Более того, они допускают, что вы выигрываете или проигрываете одинаковые суммы, а поток сделок случаен. Торговля является значительно более сложной игрой. Таким образом, в чистом виде законы арксинуса не применимы к торговле. Законы арксинуса верны при нулевом арифметическом математическом ожидании. Таким образом, согласно первому закону, мы можем интерпретировать процент времени, проведенного с любой стороны нулевой линии, как процент времени с любой стороны арифметического математического ожидания. Так же обстоит дело и со вторым законом, где вместо того, чтобы искать абсолютный максимум и минимум, мы поищем максимум выше математического ожидания и минимум ниже его. Минимум ниже математического ожидания может быть больше, чем максимум выше него, если минимум был позднее, и арифметическое математическое ожидание было повышающейся линией (как в торговле), а не горизонтальной линией на нулевом уровне. Таким образом, мы можем

считать, что общая идея законов арксинуса применима к торговле. Однако вместо горизонтальной линии на нулевом уровне следует начертить линию, направленную вверх со скоростью арифметической средней торговли (если торговля ведется постоянным количеством контрактов). Если мы используем торговлю фиксированной долей, то линия будет направлена вверх, становясь более крутой со скоростью среднего геометрического. Мы можем интерпретировать первый закон арксинуса следующим образом: наша система будет находиться с одной стороны линии математического ожидания большее число сделок, чем с другой стороны этой линии. В отношении второго закона арксинуса можно сказать, что максимальные отклонения от линии математического ожидания (выше или ниже ее) будут чаще встречаться рядом с начальной или конечной точкой кривой баланса и реже в середине. Отметим еще одну характеристику, которая очень важна при торговле с оптимальным f . Эта характеристика касается времени, которое вы проводите между двумя пиками баланса. Если вы торгуете на уровне оптимального f (в одной рыночной системе или портфелем рыночных систем), период самого длительного проигрыша¹ (не обязательно наибольшего) может составить от 35 до 55% времени, на протяжении которого ведется торговля.

Это справедливо независимо от того, какой временной период вы рассматриваете! (Время здесь измеряется в сделках). Это правило не жесткое. Скорее, это возможное проявление сути законов арксинуса в реальной жизни.

Данный принцип справедлив независимо от того, насколько длинный или короткий период времени вы рассматриваете. Мы можем находиться в проигрыше приблизительно от 35 до 55% времени за весь период работы торговой программы! Это верно независимо от того, используем мы одну рыночную систему или портфель. Поэтому надо быть готовыми к периодам проигрыша 35-55% времени торговой программы, тогда мы сможем психологически подготовиться к торговле в эти периоды. Собираетесь ли вы управлять чьим-то счетом, отдать деньги в управление или торговать со своего собственного счета, вы должны помнить о законах арксинуса и знать, что может произойти с кривой баланса, а также помнить правило 35-55%. Таким образом, вы будете готовы к тому, что может произойти в будущем. Мы достаточно подробно изучили эмпирические подходы. Кроме того, мы обсудили многие характеристики торговли фиксированной долей и узнали некоторые полезные методы, которые будут использоваться в дальнейшем. Мы увидели, что приторговле на оптимальных уровнях следует ожидать не только значительных падений баланса счета, но и длительного периода времени, необходимого для того, чтобы снова заработать проигранные деньги. В следующей главе мы поговорим о параметрических подходах.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Г.Фалин, Г.И.Фалин. *Введение в математику финансов и инвестиций для актуариев*
2. Г.И.Фалин. *Математический анализ рисков в страховании.*
3. W. Feller, "An introduction to probability theory and its applications"
4. E. Sparre Andersen. On the fluctuations of sums of random variables. *Mathematica Scandinavica*, 1954.

5. A. Clauset, M. Kogan, and S. Redner. Safe leads and lead changes in competitive team sports. *Physical Review E*, 2015.
6. S. R. Dunbar. Topics in probability theory and stochastic processes: The arcsine law.
7. W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Wiley, 1968.
8. Arcsine laws for random walks generated from random permutations with applications to genomics. <http://arxiv.org/abs/2001.08857>
9. Математика управления капиталом **РАЛЬФ ВИНС**
10. Arcsinelaw. URL: http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Arcsine_law&oldid=45212

ТАНЛАНМА АСИММЕТРИЯ ВА ЭКСЦЕСС КОЭФФИЦИЕНТЛАРИНИНГ ЛИМИТ ТАКСИМОТЛАРИ ҲАҚИДА

Аблазова Камола

Андижон давлат университети

Каримова Нилуфар

Андижон давлат университети

Исмоилов Каримжон

Андижон давлат университети

Айтайлик X тасодифий миқдор маълум бир маҳсулотнинг ишчи характеристикасининг қийматларини ифодаласин ва нормал тақсимланган бўлсин. Мисол сифатида автомобил панелларини маълум бир қўйим (спес) бўйича грунтовка қилинлиги қийматларини X нинг хусусий қийматлари деб қарашимиз мумкин. [1] да технологик жараёнларни бошқаришда “Асимметрия-Эксцесс” номли қўшалок НКдан фойдаланиш мумкинлиги ва НКнинг характеристикаларини аниқлашимизда танланма асимметрия ва эксцесс коэффицентлари тақсимотларининг квантиллари ишлатилган.

Ушбу ахборотда бу танланма характеристикаларнинг лимит тақсимотлари ҳақида фикр юритамиз. Эҳтимоллар назариясида узлуксиз X тасодифий миқдорнинг зичлик функциясини хоссаларини ўрганишда қуйидаги формулалар билан аниқланувчи асимметрия (a) ва эксцесс (γ) коэффицентларидан фойдаланилади:

$$a = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}; \gamma = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3, \text{ бу ерда } \mu_k = E(X - E(X))^k, k = 2, 3, 4 \text{ -марказий моментлар}$$

Бунда агар зичлик функциянинг графиги симметрик бўлса, у ҳолда $a = 0$ ва a нинг қийматлари бўйича зичлик функциянинг симметриклик даражаси аниқланади. Нормал тақсимланган тасодифий миқдор учун $a = 0$ ва $\gamma = 0$, ҳамда $\gamma > 0$ ($\gamma < 0$) да тақсимот мусбат эксцессга (манфий эксцессга) эга дейилади

Математик статистика масалаларида X дан олинган $\vec{X} = (x_1, \dots, x_n)$ танланмага асосланган ҳолда a ва γ га эҳтимол бўйича яқинлашувчи танланма асимметрия ва эксцесс коэффицентлари:

$$a_n = \frac{M_3}{S_n^3} \text{ ва } \gamma_n = \frac{M_4}{S_n^4} - 3 \text{ бу ерда } M_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k, k = 3, 4$$

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$; $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ ёрдамида зичлик функциянинг симметриклиги ва тиклиги текширилади.

Бизнинг ишларда вақт давомида олинган танланмалар асосида Хнинг зичлик функциясини симметриклиги ва тиклиги НКлар орқали амалга оширилган. Яъни бу НКлар билан қуйидаги гипотезалар маълум қийматдорлик даражасида текширилган:

$$H_0: a = 0; H_1: a \neq 0 \text{ ва } H_0: \gamma = 0; H_1: \gamma \neq 0$$

Бунда a_n ва γ_n ларни тақсимотларини квантиллари эса [2] даги жадваллардан аниқланган. Шу сабабли a_n ва γ_n ларни тақсимотлари қандай кўринишда деган табиий савол туғилади. Шу саволларга жавоб берамиз.

$A_{nk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$ k-тартибли танланма момент ва $M_{nk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k$ марказий танланма моментлар орасида маълум боғланиш мавжуд:

$$S^2 = \mu_2 = A_{2n} - \bar{X}^2; \quad M_{3n} = A_{3n} - 3\bar{X}A_{2n} + 2\bar{X}^3; \quad M_{4n} = A_{4n} - 4\bar{X}A_{3n} + 6\bar{X}^2A_{2n} - 3\bar{X}^4, \text{ бу ерда } \bar{X} = A_{1n}. \quad (1)$$

Энди уларга асосланиб асимметрия ва эксцесс танланма коэффицентларини ёзишимиз мумкин бўлади, яъни $a_n = \frac{1}{S_n^3} M_{3n}$ ва $\gamma_n = \frac{1}{S_n^4} M_{4n}$ (2)

Масалани қўйилишига асосан A_{1n} ва μ_{2n} ларни берилганини ҳисобга олсак (1) ни (2) га қўйганимизда ҳар бир қўшилувчини тақсимотини аниқлашимиз мумкин бўлар экан. Бу эса қуйидаги теоремага асосланган бўлади:

Теорема[3]. A_{nk} асимптотик нормал бўлиб лимит тақсимоти $N(\alpha_k, \frac{\alpha_{2k} - \alpha_k^2}{n})$ каби бўлади, бу ерда $\alpha_k = EX^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i^k$.

Демак (2)ни қўшилувчилари нормал конунга (маълум бир параметрли) ҳисоблашимиз мумкин экан. Албатта бу тақсимот кўриниши анча мураккаб бўлади ва танланма хажми n га боғлиқ бўлади. Шу сабабли n нинг турли қийматлари учун H_0 гипотеза шарти остидаги тақсимотларнинг графиклари мавжуд ва мос квантиллار жадваллари ишлаб чиқилган [4].

АДАБИЁТЛАР

1. Ахмедов С.А, Аблазова К.С.. “Некоторые статистические инструменты при исследовании устойчивости технологического процесса.” Доклады Академии наук Республики Узбекистан 2019-3:16-19.
2. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. “Таблицы математической статистики.” 1983— М.: Наука.
3. Ивченко Г.И, Ю.И.Медведев “Математическая статистика” —М.:Высш.шк. 1984.
4. <https://ami.nstu.ru> «Control_Chart new_normal_red». Критерии проверки нормальности наблюдаемых величин

МАРТИНГАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИОНАЛОВ ВЕРШИННОГО ПРОЦЕССА ВЫПУКЛОЙ ОБОЛОЧКИ

Абсаттарова Хурзада

НУУЗ имени Мирзо Улугбека

Пусть

$$R_n = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{2b_n} \leq y \right\}.$$

Введем следующую меру

$$\Lambda_n(A) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sqrt{b_n}L(b_n)} \iint_A \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(y - \frac{x^2}{2b_n} \right)^\beta L \left(\frac{b_n}{y - \frac{x^2}{2b_n}} \right) \right] dx dy, & A \subset R_n. \\ 0, & \text{при } A \not\subset R_n, \end{cases}$$

где $L(x)$ – медленно меняющаяся функция в смысле Карамата, представимая в виде

$$L(u) = \exp \left\{ \int_1^u \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \right\}, \quad \varepsilon(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

и b_n наименьший корень уравнения

$$nx^{-\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}L(x)=1.$$

Пусть $\Pi_n(\cdot)$ – неоднородный пуассоновский точечный процесс (н.п.т.п.) с интенсивностью $\Lambda_n(\cdot)$, и пусть $(X_1, Y_1); (X_2, Y_2); \dots; (X_k, Y_k); \dots$ реализации н.п.т.п. $\Pi_n(\cdot)$ в R_n . Обозначим через C_n выпуклые оболочки, порожденные этими случайными точками.

Вершинным процессом $W_n(a) = (X_n(a), Y_n(a))$ для любого $a \in R$ назовем такую точку (X_k, Y_k) реализации н.п.т.п. $\Pi_n(\cdot)$, для которой $Y_k - aX_k$ принимает минимальное значение.

Обозначим через $N_n(0, a)$ число скачков скачкообразного процесса $W_n(c)$ в пределах $0 \leq c \leq a$.

Следуя работы [1-3], в настоящей работе, мы исследуем свойства вершинного процесса выпуклой оболочки, порожденной неоднородным пуассоновским точечным процессом внутри параболы R_n . При этом мера интенсивности пуассоновского закона связана с правильно меняющимися функциями вблизи границы носителя.

$$\begin{aligned} M^{(k)}(t; R^2) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{b_n}L(b_n)} \int_r^{\sqrt{2b_ns}} (u-r)^k \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left(s - \frac{u^2}{2b_n} \right)^\beta L \left(\frac{b_n}{s - \frac{u^2}{2b_n}} \right) \right\} du = \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{b_n}L(b_n)} \int_0^{\sqrt{2b_ns}-r} u^k \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left(s - \frac{(u+r)^2}{2b_n} \right)^\beta L \left(\frac{b_n}{s - \frac{(u+r)^2}{2b_n}} \right) \right\} du, \end{aligned}$$

где $t = (r, s)$.

Теорема. Процессы

$$N_n(0, a) - \int_0^a M^{(1)}(T_n(b); R^2) db \text{ и}$$

$$N_n^2(0, a) - \int_0^a [2N_n(0, b) + 1] M^{(1)}(T_n(b); R^2) db$$

образует мартингал относительно σ -алгебры $\mathfrak{F}_{n,a} = \sigma\{T_n(c) : 0 \leq c \leq a\}$.

Здесь

$$R_n(a) = X_n(a) - ab_n, \quad S_n(a) = Y_n(a) - \frac{X_n^2(a)}{2b_n} + \frac{R_n^2(a)}{2b_n},$$

$$T_n(a) = (R_n(a), S_n(a)).$$

ЛИТЕРАТУРЫ

1. Groeneboom P., Limit theorems for convex hulls//Probab. Th. Rel. Fields, 1988, v.79, N3, pp.327-368.
2. Hueter I., The convex hull of a normal sample//Adv. Appl. Prob. 1994, 26, pp.855-875.
3. Formanov Sh.K., Khamdamov I.M., On some properties of vertex processes of random convex hulls, Cite as: AIP Conference Proceedings 2365, 060012 (2021); <https://doi.org/10.1063/5.0057259>, Published Online: 16 July 2021. 7P.

О ПРОДОЛЖЕНИЯХ ИДЕМПОТЕНТНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Актамов Феруз

Чирчикский государственный педагогический институт

В заметке обсуждается один из основных принципов функционального анализа для идемпотентных функционалов – теорема Хана-Банаха о продолжении.

Традиционную математику над числовыми полями можно трактовать как квантовую науку. Имеется и ее «классический аналог» – идемпотентная математика, т. е. математика над полуполями (и полукольцами) с идемпотентным сложением. Для идемпотентных полуполей выполнены все стандартные аксиомы, кроме наличия вычитания; вместо этого выполняется свойство идемпотентности сложения: $x + x = x$. Типичным примером является алгебра Max-Plus, состоящая из вещественных чисел (и символа «минус бесконечность», играющего роль нуля) и имеющая операцию maximum в качестве сложения и обычное сложение в качестве (нового) умножения.

Напомним [1], что множество S называется *полукольцом*, если в нем определены две операции: $\oplus$ — сложение и $\odot$ — умножение, удовлетворяющие следующим условиям:

- сложение $\oplus$ и умножение $\odot$ ассоциативны;
- сложение $\oplus$ коммутативно;
- умножение $\odot$ дистрибутивно относительно сложения $\oplus$:

$$x \odot (y \oplus z) = x \odot y \oplus x \odot z \text{ и}$$

$$(x \oplus y) \odot z = x \odot z \oplus y \odot z$$

для всех $x, y, z \in S$.

Единицей полукольца S называется такой элемент $1 \in S$, что $1 \odot x = x \odot 1 = x$ для всех $x \in S$. Нулем полукольца S называется такой элемент $0 \in S$, что $0 \neq 1$ и $0 \oplus x = x \oplus 0 = x$ для всех $x \in S$. Полукольцо S называется *идемпотентным полукольцом*, если $x \oplus x = x$ для всех $x \in S$. (Идемпотентное) полукольцо S с элементами 0 и 1 называется (*идемпотентным*) *полуполем*, если для любого ненулевого элемента множества S существует обратный элемент.

Положим $u \oplus_h v = \Phi_h(x + y)$ и $u \odot v = \Phi_h(xy)$, т. е. $u \oplus_h v = h \ln \left(e^{\frac{u}{h}} + e^{\frac{v}{h}} \right)$ и $u \odot v = u + v$. Образ $\Phi_h(0) = -\infty$ обычного нуля 0 является нулем 0 и образ $\Phi_h(1) = 0$ обычной единицы 1 – единицей 1 в S относительно этих операций. Таким образом, S приобретает структуру полукольца $\mathbb{R}^{(h)}$, изоморфного $\mathbb{R}_+$.

Непосредственная проверка показывает, что $u \oplus_h v \rightarrow \max\{u, v\}$ при $h \rightarrow 0$. Несложно проверить, что S образует полукольцо относительно сложения $u \oplus v = \max\{u, v\}$ и умножения $u \odot v = u + v$ с нулевым элементом $0 = -\infty$ и единицей $1 = 0$. Обозначим это полукольцо через $\mathbb{R}_{\max}$; оно является идемпотентным полуполем. Переход из $\mathbb{R}^{(h)}$ к предельному состоянию $\mathbb{R}_{\max}$ при $h \rightarrow 0$ и процедура квантования аналогичны. Здесь параметр h играет роль постоянной Планка. Поэтому полуполе $\mathbb{R}_+ \cong \mathbb{R}^{(h)}$ рассматривают как «квантовый» объект, а $\mathbb{R}_{\max}$ – как результат его деквантования. Изложенный переход из $\mathbb{R}_+$ к $\mathbb{R}_{\max}$ называется *деквантованием Маслова*. Идемпотентная математика продвинута весьма далеко (в частности, построен идемпотентный функциональный анализ [1]) и имеет многочисленные приложения (в особенности в задачах оптимизации и оптимального управления [2, 3]).

Пусть L – *max-plus-линейное пространство* над идемпотентным полуполем $\mathbb{R}_{\max}$, т. е. для любых $x, y \in L$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\max}$ имеет место $\alpha \odot x \oplus \beta \odot y \in L$.

Функционал $f: L \rightarrow \mathbb{R}$ называется *max-plus-линейным*, если

$$f(\alpha \odot x \oplus \beta \odot y) = \alpha \odot f(x) \oplus \beta \odot f(y)$$

для произвольных $x, y \in L$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\max}$. *max-plus-линейные функционалы* иногда называются *любого идемпотентными функционалами* (или *идемпотентными мерами*).

Определение 1. Подмножество B *max-plus-линейного пространства* L называется *max-plus-линейным подпространством*, если для любых $x, y \in B$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\max}$ имеет место включение $\alpha \odot x \oplus \beta \odot y \in B$.

Следующее утверждение можно рассматривать как аналог теоремы Хана-Банаха.

Теорема 1. Пусть B является *max-plus-подпространством* *max-plus-пространства* L . Тогда для любого идемпотентного функционала $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ существует идемпотентный функционал $f_0: L \rightarrow \mathbb{R}$, такой, что $f_0|_B = f$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Маслов В. П., Колокольцов В. Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. – М.: Физматлит, 1994.
2. Колокольцов В. Н., Маслов В. П. Идемпотентный анализ как аппарат теории управления. // Функци. анализ и его прилож. – 1989. – 23, № 1. – С. 1-14.

3. Колокольников В. Н., Маслов В. П. Идемпоентный анализ как аппарат теории управления и оптимального синтеза. // Функци. анализ и его прилож. – 1989. – 23, № 4. – С. 53-62.

4. Заитов А. А., Ишметов А. Я. Гомотопические свойства пространства $I_f(X)$ идемпотентных вероятностных мер. // Мат. заметки. – 2019. – 106, № 4. – С. 531-542.

ОСНОВНЫЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ ИЗИНГА С КОНКУРИРУЮЩИМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ И ВНЕШНИМ ПОЛЕМ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ ПОРЯДКА 4

Аскарв Жавохир

Наманганский государственный университет

Пусть $\tau^k = (V, L)$, $k \geq 1$ есть дерево Кэли порядка k , где V - множество вершин, L - множество ребер τ^k . Известно, что τ^k можно представить как G_k - свободное произведение $k + 1$ циклических групп второго порядка (см. [1], [2]).

Мы рассматриваем модель, где спин принимает значения из множества $\Phi = \{-1, 1\}$. Тогда конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \mapsto \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$.

Обозначим через $S(x)$ множество "прямых потомков" точки $x \in G_k$, через $S_1(x)$ обозначим множество всех ближайших соседей точки $x \in G_k$, т.е. $S_1(x) = \{y \in G_k : \langle x, y \rangle \text{ и } \{x_1\} = S_1(x) \setminus S(x)\}$.

Пусть $G_k/G_k^* = \{H_1, \dots, H_r\}$ фактор группа, где G_k^* - нормальный делитель индекса $r \geq 1$.

Определение 1. Конфигурация $\sigma(x)$ называется G_k^* -периодической, если $\sigma(x) = \sigma_i$ при $x \in H_i$, $\forall x \in G_k$. G_k -периодическая конфигурация называется трансляционно-инвариантной.

Определение 2. Конфигурация $\sigma(x)$ называется G_k^* - слабо периодической, если $\sigma(x) = \sigma_{ij}$ при $x_i \in H_i$, $x \in H_j$, $\forall x \in G_k$.

Гамильтониан модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями и внешним полем

$$H(\sigma) = J_1 \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y) + J_2 \sum_{\substack{\langle x, y \rangle \in L \\ d(x, y) = 2}} \sigma(x)\sigma(y) + \alpha \sum_{x \in V} \sigma(x) \quad (1)$$

где $J_1, J_2, \alpha \in \mathbb{R}$ - константы не равны нулю, α - внешнее поле.

Пусть M - множество единичных шаров с вершинами в V . Мы назовем сужение конфигурации σ на шаре $b \in M$ ограниченной конфигурацией σ_b . Символом c_b обозначим центр единичного шара b . Определим энергию конфигурации σ_b на b следующим образом:

$$H(\sigma) = \frac{1}{2} J_1 \sum_{x \in S_1(c_b)} \sigma(c_b)\sigma(y) + J_2 \sum_{\substack{x, y \in b: \\ d(x, y) = 2}} \sigma(x)\sigma(y) + \alpha \sigma(c_b), \quad (2)$$

Пусть $k = 4$. Следующая лемма доказана.

Лемма. Для каждой конфигурации φ_b мы имеем

$$U(\varphi_b) \in \{U_i : i = 1, 2, \dots, 12\},$$

где

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{5}{2}J_1 + 10J_2 + \alpha, & U_2 &= \frac{5}{2}J_1 + 10J_2 - \alpha, & U_3 &= \frac{3}{2}J_1 + 2J_2 + \alpha, \\
 U_4 &= \frac{3}{2}J_1 + 2J_2 - \alpha, & U_5 &= \frac{1}{2}J_1 - 2J_2 + \alpha, & U_6 &= \frac{1}{2}J_1 - 2J_2 - \alpha, \\
 U_7 &= -\frac{1}{2}J_1 - 2J_2 + \alpha, & U_8 &= -\frac{1}{2}J_1 - 2J_2 - \alpha, \\
 U_9 &= -\frac{3}{2}J_1 + 2J_2 + \alpha, & U_{10} &= -\frac{3}{2}J_1 + 2J_2 - \alpha, \\
 U_{11} &= -\frac{5}{2}J_1 + 10J_2 + \alpha, & U_{12} &= -\frac{5}{2}J_1 + 10J_2 - \alpha,
 \end{aligned}$$

Определение 3. Конфигурация φ называется основным состоянием для гамильтониана H , если

$$U(\varphi_b) = \min\{U_1, U_2, U_3, \dots, U_{12}\}$$

для любого $b \in M$.

Обозначим

$$A_\xi = \left\{ (J_1, J_2, \alpha) \in R^3 : U_\xi = \min\{U_1, U_2, U_3, \dots, U_{12}\} \right\} \quad (4)$$

С помощью (4) найдем следующие множества:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \{ (J_1, J_2, \alpha) \in R^3 : J_1 \leq 0, J_1 + 8J_2 \leq 0, \alpha \leq 0 \}, \\
 A_2 &= \{ (J_1, J_2, \alpha) \in R^3 : J_1 \leq 0, J_1 + 8J_2 \leq 0, \alpha \geq 0 \}, \\
 A_3 &= \left\{ (J_1, J_2, \alpha) \in R^3 : J_1 \leq 0, -\frac{J_1}{8} \leq J_2 \leq -\frac{J_1}{4}, \alpha \leq 0 \right\}, \\
 A_4 &= \left\{ (J_1, J_2, \alpha) \in R^3 : J_1 \leq 0, -\frac{J_1}{8} \leq J_2 \leq -\frac{J_1}{4}, \alpha \geq 0 \right\}, \\
 A_5 &= \{ (J_1, J_2, \alpha) \in R^3 : J_1 \leq 0, J_1 + 4J_2 \geq 0, \alpha \leq 0 \}, \\
 A_6 &= \{ (J_1, J_2, \alpha) \in R^3 : J_1 \leq 0, J_1 + 4J_2 \geq 0, \alpha \geq 0 \}, \\
 A_7 &= \{ (J_1, J_2, \alpha) \in R^3 : J_1 \geq 0, J_1 - 4J_2 \leq 0, \alpha \leq 0 \}, \\
 A_8 &= \{ (J_1, J_2, \alpha) \in R^3 : J_1 \geq 0, J_1 - 4J_2 \leq 0, \alpha \geq 0 \}, \\
 A_9 &= \left\{ (J_1, J_2, \alpha) \in R^3 : J_1 \geq 0, \frac{J_1}{8} \leq J_2 \leq \frac{J_1}{4}, \alpha \leq 0 \right\}, \\
 A_{10} &= \left\{ (J_1, J_2, \alpha) \in R^3 : J_1 \geq 0, \frac{J_1}{8} \leq J_2 \leq \frac{J_1}{4}, \alpha \geq 0 \right\}, \\
 A_{11} &= \{ (J_1, J_2, \alpha) \in R^3 : J_1 \geq 0, J_1 - 8J_2 \geq 0, \alpha \leq 0 \}, \\
 A_{12} &= \{ (J_1, J_2, \alpha) \in R^3 : J_1 \geq 0, J_1 - 8J_2 \geq 0, \alpha \geq 0 \},
 \end{aligned}$$

$$\text{и } \bigcup_{i=1}^{10} A_i = R^3.$$

Пусть $A \subset \{1, 2, \dots, k+1\}$. $H_A = \left\{ x \in G_k : \sum_{j \in A} w_j(x) - \text{четно} \right\}$, где $w_j(x)$ — число

a_j в слове x . H_A — является нормальным делителем индекса 2 в G_k .

Рассмотрим фактор группу $G_k/H_A = \{H_A, G_k \setminus H_A\}$. Для простоты обозначим $H_0 = H_A, H_1 = G_k \setminus H_A$.

H_A -периодические конфигурации имеют следующий вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_0, & \text{если } x \in H_0, \\ a_1, & \text{если } x \in H_1, \end{cases}$$

где $a_0, a_1 \in \Phi$.

В следующей теореме доказаны описания множества периодических основных состояний, соответствующих нормальным делителям индекса 2 группового представления дерева Кэли для модели (1) на дереве Кэли порядка $k = 4$.

Теорема 1. Пусть $k = 4$. Тогда для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями и внешним полем $\alpha \neq 0$ верны следующие утверждения:

I. а) $\varphi(x) = 1, \forall x \in V$ конфигурация является трансляционно-инвариантным основным состоянием на множестве A_1 ;

б) $\varphi(x) = -1, \forall x \in V$ конфигурация является трансляционно-инвариантным основным состоянием на множестве A_2 ;

II. Всякие H_A -периодические основные состояния являются трансляционно-инвариантными.

H_A -слабо периодические конфигурации имеют следующий вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_{00}, & \text{если } x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_0, \\ a_{01}, & \text{если } x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_1, \\ a_{10}, & \text{если } x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_0, \\ a_{11}, & \text{если } x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_1, \end{cases}$$

где $a_{i,j} \in \Phi, i, j \in \{0, 1\}$.

В следующей теореме доказаны описания множества слабо периодических основных состояний, соответствующих нормальным делителям индекса 2 группового представления дерева Кэли для модели (1) на дереве Кэли порядка $k = 4$.

Теорема 2. Пусть $k = 4$. Тогда для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями и внешним полем $\alpha \neq 0$ всякие H_A -слабо периодические основные состояния являются трансляционно-инвариантными.

Пусть φ — произвольная конфигурация.

Теорема 3. Для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями и внешним полем $\alpha \neq 0$, конфигурация φ стала основным состоянием, необходимо и достаточно, чтобы она была трансляционно-инвариантной.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ:

1. Rozikov U.A. Gibbs measures on Cayley trees. World scientific. 2013.
2. M.M.Rakhmatullaev, M.A.Rasulova. Periodic and Weakly Periodic Ground States for the Potts Model with Competing Interactions on the Cayley Tree. 2016. ISSN 1055-1344, Siberian Advances in Mathematics, Vol. 26, No.3, pp.215 - 229.

СТАТИСТИК БАҲОЛАШ НАЗАРИЯСИДА КОРРЕЛЯЦИЯ КОЕФФИЦИЕНТИ

Ахмаджонов Абдурахим

Наманган Давлат Университети

Кириш. Маълумки, тасодифий микдорларнинг уч турдаги боғлиқлигини келтиришимиз мумкин. Улар функционал боғлиқлик, корреляцион боғлиқлик ва статистик боғлиқликдир. Функционал боғлиқлик бу — шундай боғлиқликки X ўзгарувчининг ҳар бир қийматига Y ўзгарувчининг мос фақат битта қиймати мос қўйилади. Масалан, умумий ишлаб чиқарилган маҳсулотни ишчилар сони ва битта ишчининг ишлаган маҳсулотига боғлиқлиги. Иқтисодиётда кўп ҳолларда ўзгарувчи

қийматлар орасидаги шундай боғлиқликлар мавжудки, бунда бир ўзгарувчининг ҳар бир қийматига мос равишда қандайдир аниқланган бўлиши шарт эмас, бошқа ўзгарувчининг мумкин бўлган қийматлар тўпламига боғлиқ бўлади. Бошқача қилиб айтганда, бир ўзгарувчининг ҳар бир қийматига бошқа ўзгарувчининг аниқланган шартли тақсимои мос қўйилади. Ушбу боғлиқлик статистик (ёки стохастик, эҳтимоллик) боғлиқлик дейилади. Статистик боғлиқликка ташкилотни ишлаб чиқариш ишини унинг электр таъминотига боғлиқлигини мисол сифатида келтириш мумкин. Корреляцион боғлиқлик (ёки корреляция) – бу шундай статистик боғланиш ки бир миқдорнинг ҳар бир қийматига бошқа миқдорнинг мос аниқ қиймати шартли математик кутилмасини (ўртача қиймати) мос қўйилишидир. Бундан ташқари, ўзгарувчилар орасидаги корреляцион боғлиқлик шундай функционал боғлиқлик ки миқдорлар бирининг қийматини бошқасини шартли математик қийматини мослиғидир. Масалан, инсоннинг бўйи узунлиғи ва оғирлиғи орасидаги боғлиқлик, тана ҳарорати ва пульс частотаси орасидаги боғлиқлик корреляцион боғлиқликка мисол бўла олади.

Математик статистикада корреляция ва регрессия тушунчалари жуда муҳим тушунчалардан бири ҳисобланади. Корреляция ва регрессия тушунчалари бир-бири билан чамбарчас боғлиқ бўлсада, улар бир-биридан фарқ қилади [1]. Корреляция икки ўзгарувчи ўртасидаги боғланиш даражаси сифатида тавсифланиши мумкин, регрессия эса бир ўзгарувчининг белгиланган қийматлари (бу боғлиқ, эгзоген, тушунтириладиган, регрессор, ташувчи ёки прогноз қилувчи ўзгарувчи деб аталади), иккинчи (боғлиқ, натижавий, жавоб ўзгарувчилик ёки изоҳланадиган ўзгарувчи) ўзгарувчининг барча мос келадиган қийматлари ўртасидаги муносабатлар шаклини ифодалайди. Умуман олганда, айтиш мумкин ки, ўзаро боғлиқлик даражасини ўрганиш корреляцияни текширишга олиб келади [3], боғлиқлик шаклини ўрганиш эса регрессия назариясига олиб келади. Агар X ўзгарувчиси Y ўзгарувчининг тасодиғий ковариати бўлса, яъни X ва Y биргаликда ўзгарса (узлуксиз ўзгарувчилар), бизни прогноз қилишдан кўра чизиқли муносабатларни кучини ва танланма корреляция коэффициентини ($r(x,y)$) аниқлаш кўпроқ қизиқтиради.

Корреляция атамаси биринчи бўлиб, 1888 йилда Ф. Галтон томонидан киритилган бўлиб, лекин унинг формуласини 1896 йилда К.Пирсон томонидан ишлаб чиқилган. Шунинг учун ҳам одатда Пирсон (кўпайтмали-момент) корреляцияси деб аталади.

Дарҳақиқат, корреляция диаграммаси, шунингдек тарқалиш (scatter) диаграммаси сифатида ҳам танилган, ҳамда статистик сифатни назорат қилишнинг етти асосий воситалардан биридир [3]. Эмпирик муносабатлардан фойдаланиш мумкин, яъни ҳосилдорлик ва шарт-шароитларни аниқлаш учун, ёки чизиқли эркин энергия муносабатларида, миқдорий тузилма фаолият муносабатлари ва миқдорий тузилма мулкый муносабатларида жараёни оптималлаштиришга эришиш мумкин. Бироқ корреляция шунчаки текисликдаги чизмаларга қараганда анча кенгрок қўлланилиши мумкин бўлган тушунчадир. Бундан ташқари бир нечта боғлиқсиз ўзгарувчиларнинг бошқа битта ўзгарувчи билан боғлиқлигини “кўп ўлчовли корреляция” тушунчаси ҳам мавжуд, у бир ўзгарувчини бошқаси билан ўзаро боғлиқлиғи бўлиб, учинчи ёки қўшимча ўзгарувчиларни назорат қилади.

Агар кўп факторли дизайндаги бирон бир фактор билан боғлиқ бўлган параметр баҳолари бошқасиники билан боғлиқ бўлмаса, экспериментал дизайн ортогонал

дейилади. Бу ортогонал дизайнни асосий принципи бўлиб, у кўпинча эффектларни ҳисоблаш учун [4] оддий формуладан фойдаланишга имкон беради. Кластерда корреляция ва ковариация тушунчалари марказий рол ўйнайди ва корреляция объектлар ўртасидаги ўхшашликни аниқлаш учун ишлатилади [5]. Факторлар таҳлили, хулқ-атвор гинетик моделлари, структуравий тенгламалар моделлари ва бошқа тегишли методологияларда маълумотларнинг асосий борлиги сифатида корреляция коэффициентидан фойдаланади [6]. Каноник корреляция таҳлили икки кўп ўлчовли ўзгарувчилар орасидаги чизикли муносабатларни ўлчаш усулидир [7]. Ўзига хос хусусиятларга эга бўлган номинал ва тартибланган ўзгарувчилар учун (ва катта қаторлар учун ҳам) бошқа кўринишдаги боғлиқлик корреляция коэффициентлари ҳам мавжуддир. Улар адабиётларда Спирмanning ρ коэффициенти, Кендаллнинг τ коэффициенти ёки Хёфдингни Δ ва Жиннинг γ коэффициенти каби келтирилгандир [8].

Асосий қисм. Корреляция тушунчаси ўз навбатида ковариация тушунчасига боғлиқдир. Ковариация бу X ва Y ўртасидаги корреляция ўлчовидир ва қуйидаги формула билан аниқланади.

$$\text{Cov}(X,Y)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}), \quad (1)$$

Бу ерда $\bar{x}$ ва $\bar{y}$ лар тенглама ўртача қийматларидир.

Агар иккита ўзгарувчи чизикли боғлиқ бўлса, у ҳолда ковариация мусбат ёки манфий ишорага қараб мусбат ёки манфий бўлади.

Агар X ва Y боғлиқсиз бўлса, яъни ўзаро боғлиқ бўлмаса, у ҳолда ковариация нолга тенг бўлади. Аммо бунинг тескараси ҳамма вақт ҳам ўринли бўлмайди. Чунки ковариацияси (корреляцияси) нолга тенг бўлган кучли боғланган тасодикий ўзгарувчиларга мисолларни кўпинча чизикли бўлмаган ҳолда кўриш мумкин. Баъзи адабиётларда ковариация кўпинча “этиборга олинмасида, дисперсия тасодикий ўзгарувчининг ўзи билан ковариациянинг махсус ҳолатидир. Дисперсиянинг квадрат илдизи стандарт четланиш (оғиш) деб аталади. (бош тўплам учун δ , танланма учун s билан белгиланади) ва ҳар доим мусбат бўлади ковариация ҳеч бўлмаганда ҳақиқий ноаниқлик бюджетларни ҳисоблашда ёки кузатув занжирларини яратишда ҳисобга олиниши керак. Масалан, сувнинг қайнаш нуқтасини буғ босимини ўлчаш орқали аниқлашда ковариацияни ҳисобга олиш зарурияти бунга яхши мисол бўла олади.

Ковариация кўпинча боғлиқликни яхши таърифловчи ўлчов эмас, чунки унинг қиймати X ва Y лар учун ўлчовлар шкаласига боғлиқ ва умумий ўлчов сифатида фойдаланишдан олдин уни стандартлаштириш керак. Танланма ковариациясини тенгламадаги X ва Y ларга мос равишда S_x ва S_y стандарт четланишларга кўпайтмасига бўлиб, биз $r(X,Y)$ корреляция коэффициентини ҳосил қиламиз. Қуйидаги формуладан фойдаланишимиз мумкин:

$$r(X,Y)=\frac{\text{COV}(X,Y)}{S_x \cdot S_y}$$

$$\text{Бундан эса } r(X,Y)=\frac{\sum_{i=1}^n((x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}))}{\sqrt{\sum_{i=1}^n((x_i-\bar{x})^2(y_i-\bar{y})^2)}} \text{ формуласини ҳосил қилишимиз мумкин.}$$

Корреляциянинг қуйидаги турлари мавжуд.

1. Жуфт корреляция – икки белги орасидаги боғлиқлик (натижавий ва факторли ёки икки факторли).

2. Хусусий корреляция – бошқа факторли белгининг фиксирлангандаги натижавий ва бир факторли белгилар орасидаги боғлиқлик.

3. Тўпلامли корреляция – натижавий ва тадқиқотга кирувчи икки ёки кўп факторли белгилар орасидаги боғлиқлик.

Ушбу мақолада корреляция коэффицентини баҳолаш ва баҳонинг асосий хоссалари ўрганилади. Баҳолашда ёрдамчи функциялардан ҳам фойдаланилади.

Фойдаланилган адабиётлар

1. Warren W. G., Correlation or regression: bias or precision. Applied Statistic 20 (1971):148–164.
2. Rodgers J. L. and Nicewander W. A., Thirteen ways to look at the correlation coefficient. The American Statistician 42 (1998):59–66.
3. Yafle R. A., Common correlation and reliability analysis with SPSS for Windows (2003), <http://www.nyu.edu/its/socsci/Docs/correlate.html>.
4. de Levie R., Two linear correlation coefficients. Journal of Chemical Education 80 (2003):1030–1032.
5. Lee Baker Beginner's Guide to Correlation Analysis, 2018.
6. Thomas J. Archdeacon Correlation and Regression Analysis, 1994.
7. Vijaya Kumar B. V. K. Correlation Pattern Recognition, 2010.
8. Albert M. Liebetrau Measures of Association, 2003.

ЖАРАЁНЛАРНИ СТАТИСТИК БОШҚАРИШДА НАЗОРАТ КАРТАЛАР МЕТОДИНИНГ МОҲИЯТИ ВА БАЪЗИ ЯНГИ НАТИЖАЛАР

Ахмедов Сохибжон

Ф.-м.ф.н., АндДУ

Аблазова Камолахон

АндДУ

Юлдашев Хушнудбек

АндДУ

Айтайлик корхонада кўп сонли бир жинсли маҳсулотлар ишлаб чиқарилаётган бўлсин. Z тасодикий миқдор тайин маҳсулотнинг ишчи характеристикаси, z_0 унинг номинал қиймати ва $[z_0 - \Delta z, z_0 + \Delta z]$ ихтирочи-муҳандис тайинланган қўйим бўлсин. Қўйимча мос маҳсулот сифатли акс ҳолда сифатсиз ҳисобланади.

“Иккита бир хил объект бўлмайди” деган аксиомага асосан кўп ҳолда $Z \neq z_0$ муносабат ўринли бўлади, шу сабабли қўйим тушунчаси пайдо бўлган. “Қўйимни назорат қилиш билан сифатли маҳсулотлар миқдорини ошириш” номли муҳандислик концепцияси тарихан ўзини оқламаган. Корхоналарда чиқимлар, йўқотишлар ошган ва истеъмолчилар талаблари тўлиқ қондирилмаган.

Америкалик олим-муҳандис У.Шухарт 1924 йилда математик статистика хулосаларига асосланиб ишлаб чиқаришда бўлаётган тарқоқликларни камайтириш методини яратди. Унинг издошлари Д.Джуран, Э.Деминг ва бошқалар бу методнинг потенциал имкониятларини оширишга катта ҳисса қўшишди [1-5]. Бу метод ҳозирда жараёнларни статистик бошқаришнинг назорат карталар методи деб номланади.

Янги методнинг илм фан жамоатчилиги ва ишлаб чиқариш корхоналарининг муҳандислари, менеджерлари ва раҳбарлари томонидан қабул қилиш жараёни узоққа чўзилган. 20 асрнинг 80 йилларидан сўнг барча ривожланган мамлакатларнинг ишлаб чиқариш корхоналарида маҳсулот ишлаб чиқарувчи инструментлар қаторига назорат карта (НК) лар деб номланувчи статистик инструментлар кириб келди. 90-йилларидан бошлаб эса бу метод ишлаб чиқариш корхоналарида, хизмат кўрсатиш доираларида, тиббиётда, маъорифда, давлат бошқарувида, кичик ва ўрта бизнесда ва бошқа соҳаларда қўлланила бошланди. Илмий, илмий-амалий мақолалар ва китоблар сони кескин ортди ва ортмоқда [6].

Фикрларимизни давом эттириш учун НК тушунчаси ва НК методининг жараёнларни статистик бошқариш (ЖСБ)даги функцияси ҳақида қисқача тўхтаймиз.

Z дан тайинланган бирлик вақтларда $\vec{Z} = (z_1, z_1, \dots, z_n)$ оний танламалар оламиз ва маҳсулот сифати билан корреляцияси бор бўлган $g = g(z_1, z_1, \dots, z_n)$ статистикани аниқлаймиз. Бу статистика энг содда ҳолда Z тасодифий миқдорнинг моментларини статистик баҳолари бўлиши мумкин. g тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси - $a = Mg$ ва унинг ўртача квадратик оғиши - $\sigma = \sqrt{Dg}$ ёрдамида ёки уларнинг статистик баҳолари билан қуйидаги миқдорларни аниқлаймиз: $LCL = a - 3\sigma$; $UCL = a + 3\sigma$; $CL = a$.

Текисликда горизонтал ўқда танлама олиш моментларини, вертикал ўқда g ни қийматларни ва LCL , CL ва UCL нуқталарни аниқлаймиз. LCL , CL ва UCL нуқталардан горизонтал ўққа параллел тўғри чизиқлар ўтказиб сўнг текисликда g га мос нуқталарни топиб кесмалар билан бирлаштирамиз. Хосил бўлган диаграмма g - НК дейилади. LCL g ни қуйи назорат чегараси, CL g ни ўрта чизиги ва UCL g ни юқори назорат чегараси дейилади. Агар $g \in (LCL, UCL)$ бўлса маҳсулот ишлаб чиқариш билан боғлиқ жараён статистик назорат (ЖСН) да, акс ҳолда ЖСН эмас дейилади. ЖСН бўлганда Z ни сонли характеристикалари деярли ўзгармас бўлади ва зичлик функцияси ёки унинг баҳосини ҳолати ва формаси ўзгармайди. Бундай ҳолда биз жараён стабил дейилади. НК ни юқоридагидек аниқлаш У.Шухарт усули дейилади. Хозирда бу каби НК лардан инглиз тилида иш юритувчи маҳсулот ишлаб чиқарувчи корхоналарида фойдаланилади.

Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика методлари билан кўп ҳолларда g статистиканинг тақсимооти ёки лимит тақсимоотини аниқлаш ва унга мос квантилар жадвалларини топиш мумкин бўлади. Бундай ҳолларда НК чегаралари ишончли интерваллар усули билан топилади. Бунда g нинг 99% ли ишончли интервал чегара-лари LCL ва UCL сифатида олинади. Баъзан жараённи қандай ҳолатда эканлигини аниқлаш мақсадида g – НК нинг огоҳлантирувчи чизиқлари ҳам киритилади. Бу чизиқлар g учун 95% ли ишончли интервалнинг чегаралари каби топилади [7]. g - НК ларнинг бундай турлари кўпроқ немис тилида иш юритадиган маҳсулот ишлаб чиқарувчи корхоналарда ишлатилади.

НК ларни ишлатиш механизми статистик гипотезаларни кетма-кет текшириш принципига асосланган. НК диаграммалари турли хил мутахассисларнинг умумий тили ҳисобланиб жараённи ҳолати тўғрисида информация бериб туради. Шу сабабли кўп корхоналарда НК лар юридик ҳужжат сифатида ҳам ишлатилади.

Маҳсулот чиқаётган ҳар қандай жараён куйидаги тўрт ҳолатдан бирида бўлиши мумкин:

- а) ЖСН ва 100% маҳсулот қўйимга мос;
- б) ЖСН ва маълум миқдорда сифатсиз маҳсулотлар бор;
- в) ЖСН эмас ва 100% маҳсулот қўйимга мос;
- г) ЖСН эмас ва кўп сондаги маҳсулотлар сифатсиз.

ЖСБ да НК лар билан б) ва в) ҳолатларни а) ҳолатга келтириш мумкин бўлади. г) ҳолатда НК лар билан жараёни изидан чиқарувчи муҳим сабабларни аниқлаб уларни бартараф қилиш керак бўлади. Сўнг уни аста-секинлик билан в), б) ва а) ҳолатларга ўтказилади. в) ҳолатни аниқлашда огоҳлантирувчи чизиқлари бор НК лардан фойдаланиш самара беради. Ишлаб чиқаришда маҳсулот ишлаб чиқариш жараёни ўзгариб туради. Агар НК ларни ишлатмасак энтропия таъсирида жараён г) ҳолатга қараб кета беради. ЖСБ да муаммога қараб турли НКлар ишлатилади. Албатта бу ишлар вақт ва маблағ талаб қилади, лекин кейинчалик келадиган фойда сарф харажатларда анча юқори бўлади [8].

ЖСБ да НК методини моҳияти ҳақидаги қисқа баёнимиздан хулоса чиқарсак У.Шухарт яратган жаҳоншумул янгилик ёрдамида 20 асргача келган муаммолар ечимини топди.

Муаллифлар автомобил ишлаб чиқишдаги ва ўқув жараёнидаги муаммоларни таҳлил қилиш мақсадида НК лар методи қўллаш билан боғлиқ илмий, илмий-амалий ишларни бажаришмоқда. Бу ерда бажарган ишларимиздан баъзиларини келтирамиз.

НК лар билан жараён ҳолатини тўғри башорат қилиш учун НК чегараларини тўғри аниқлаш муҳим ҳисобланади. Чегараларни аниқлаш пайтида жараёни стабил бўлиши талаб қилинади. Ишлаб чиқаришда бу ишлар жараён ҳолатини ўрнанишнинг дастлабки босқичида амалга оширилади. [9; 10] мақолаларимизда маҳсулотнинг ишчи характеристикаси бир ёки икки ўлчамли нормал тасодифий миқдор бўлганда жараёни стабиллигини аниқловчи НК лар топилган. [11; 12] да топилган НК ларнинг амалда қўлланиши кўрсатилган.

[13, 14] да эса психологик экспериментларни статистик таҳлил қилишнинг НК лар усуллари кўрсатилган. [15] да хотирали НК ларни ўқув жараёнини яхшилашдаги аҳамияти баён қилинган.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР:

1. Shewhart W. A. "Economic Control of Quality of Manufactured Product." - ASQ (republished). 1931/1980 - 501 P.
2. Shewhart W. A. "Statistical Methods from the Viewpoint of Quality Control." – N.Y., Dover Publications, Inc., (republished). 1939/1986. - 160 P
3. Деминг Э. Новая экономика. – М.: ЭКСМО. 2006. – 208 с. (W.E. Deming. The New Eco-nomics: For Industry, Government, Education.– MIT, 2nd Ed., 1994).
4. Деминг Э. "Выход из кризиса. Новая парадигма управления людьми, системами и процессами." – М.: Альпина Бизнес Букс. 2007. – 370 с. (W.E. Deming. Out of Crisis. – First MIT edition, 2000)
5. Джуран Дж. "У истоков статистического контроля качества." – Надежность и контроль качества, 1998.- №7. - С. 50-54; №8. - С. 13-21.

6. Адлер Ю.П., Максимова О.В., Шпер В.Л.. Контрольные карты Шухарта в России и за рубежом: краткий обзор современного состояния (статистические аспекты). – Журнал «Стандарты и качество», 2011, № 8, с. 1-40 .

7. Миттаг Й.,Ринне Х. “Статические методы обеспечения качества.” – М.: “Машиностроение”. 1995.-616 с.

8. Дональд Уилер, Дэвид Чамберс. Статистические управления процессами: Оптимизация бизнеса с использованием контрольных карт Шухарта. Москва. ООО «Альпина Бизнес Букс» 2009.

9. Ахмедов С.А., Аблазова К.С. “Некоторые статистические инструменты при исследовании устойчивости технологического процесса.” Доклады Академии наук Республики Узбекистан 2019-3:16-19.

10. Ахмедов С.А., Аблазова К.С. “Некоторые контрольные карты основанные на статистические гипотезы относительно корреляций двух измеримых признаков.” Бюллетень Института математики 2019.- 6: 7-12.

11. Ablazova K.S. “Some control chart based on the consent criteria” International Scientific Journal Theoretical & Applied Science, USA Philadelphia, 2019. 11: 23-28.

12. Ablazova K.S. “On a statistical control of a technological process described by a two-dimensional normal distribution” International Journal of Statistics and Applied Mathematics, India, 2020.-5(4):131-134.

13. S. A. Axmedov., X. D. Yuldashev. О контрольных картах проверяющие однородности двух выборок. STOXASTIK TAHLILNING DOLZARB MUAMMOLARI mavzusidagi ilmiy konferensiya materiallari. Toshkent. 20-21 fevral 2021 yil, (I-Qism), 116-118 s.

14. Axmedov S. A., Yuldashev X. D., Shukurillayeva K. N. Pedagogik va psixologik jarayonlarni organishda nazorat kartalardan foydalanish haqida. SARIMSOQOV O'QISHLARI xorijiy olimlar ishtirokidagi ilmiy konferensiyasi. Toshkent. 16-18 sentabr 2021 yil. 292-294 s.

15. С. А. Ахмедов., Х.Д.Юлдашев. О победе над «Кривой забывания Эббингауза» при помощи контрольных карт. «СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ СТОХАСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА», посвященная 100-летию со дня рождения академика С.Х.Сираждинова. 21-22 сентября 2020 г. Ташкент. 162-164 с.

ПОЛИГАРМОНИК ОПЕРАТОРГА ДОИР БЎЛГАН БАЪЗИ МАСАЛАЛАР

Гаимназаров Олимжон

п.ф.б.ф.д., Гулистон давлат университети

Қодирова Наргизахон

Гулистон давлат университети

Гаффарова Сарвиноз

Гулистон давлат университети

Фараз қилайлик $f(x,y)$ функция x ва y ўзгарувчиларга нисбатан 2π даврга эга бўлсин.

Энди

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Лаплас оператори ёрдамида

$$\gamma(u, v) = \Delta^r f(u, v) = \Delta(\Delta^{r-1} f(u, v))$$

кўринишда тузилган оператор полигармоник оператор дейилади [1-2].

Агар $f(u, v)$ функция учун

$$\|\gamma(u, v)\|_p = \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\gamma(u, v)|^p du dv \right\}^{\frac{1}{p}} \leq 1, \quad 1 \leq p < \infty, \quad (1)$$

$$\|\gamma(u, v)\|_{\infty} = \text{vrai sup} |\gamma(u, v)| \leq 1, \quad p = \infty$$

шартлар бажарилса, у ҳолда бундай $f(u, v)$ функциялар синфини Λ_p^r деб белгилаймиз.

Энди $f(x, y)$ функциянинг даврийлигини эътиборга олсак

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \gamma(u, v) du dv = 0 \quad (2)$$

эканлиги ҳосил бўлади.

Λ_p^r синфдаги функцияларни

$$f(x, y) = \frac{a_{00}}{4} + (-1)^r \cdot \pi^{-2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \gamma(u+x, v+y) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \lambda_{k,l} \cos ku \cos lv (k^2 + l^2)^{-r} du dv$$

кўринишда тасвирлаш мумкин (Я.С.Бугров) [2], бу ерда

$$\lambda_{k,l} = \begin{cases} 1 & k, l > 0 \\ \frac{1}{2} & k = 0, l > 0 \\ \frac{1}{2} & k > 0, l = 0 \end{cases}$$

Қуйидаги белгилашларни киритамиз

$$E_{m,n}(\Lambda_{\infty}^r) = \sup_{f \in \Lambda_{\infty}^r} \sup_{x,y} |f(x, y) - S_{m-1,n-1}(f; x, y)|,$$

$$E_{m,n}(\Lambda_1^r) = \sup_{f \in \Lambda_{\infty}^r} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x, y) - S_{m-1,n-1}(f; x, y)| dx dy,$$

бу ерда $S_{m-1,n-1}(f; x, y)$ $f(x, y)$ функциянинг x га нисбатан $m-1$ тартибли, y га

нисбатан $n-1$ тартибли Фуре қаторинг хусусий йиғиндиси бўлиб, Λ_{∞}^r ва Λ_1^r функциялар синфига тегишли.

Қуйидаги муносабатлар ўринли эканлигини қайд қилиб ўтамыз [2]

$$E_{m,n}(\Lambda_{\infty}^r) = 16\pi^{-4}(m^2 + n^2)^{-r} \ln n \ln m + O(m^{-2r} \ln m + n^{-2r} \ln n), \quad (3)$$

$$E_{m,n}(\Lambda_1^r) = 16\pi^{-4}(m^2 + n^2)^{-r} \ln n \ln m + O(m^{-2r} \ln m + n^{-2r} \ln n), \quad (4)$$

бу $m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty, 0 < c_1 \leq m/n \leq c_2$, да асимптотик тенгликдан иборат ($c_1, c_2 \rightarrow$ абсолют ўзгармаслар), бу ерда r тайин қиймат бўлиб Δ^r оператор тайинланган ифодадан иборат.

Бир ўзгарувчи функциялар учун С. А. Теляковский қуйидагини ҳосил қилган. Агар функция

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \gamma(x+t) \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos\left(kt + L \frac{\pi}{2}\right) dt$$

кўринишда бўлиб, бунда

$$|\gamma(t)| \leq 1, \int_{-\pi}^{\pi} \gamma(t) dt = 0$$

бўлса, у ҳолда $S_{n-1}(f; x)$ Фуре қаторининг хусусий йиғиндиси учун юқоридаги (3) типдаги тенгсзлик ўринли бўлади.

Қуйида икки ўзгарувчи функциялар учун юқоридаги (3) ва (4) асимптотик тенгликларни r нинг ўсишига боғлиқ равишда кўриб ўтамыз, яъни Δ^r оператор ўзгарувчидир.

Теорема 1. Ушбу муносабат

$$E_{m,n}(\Lambda_{\infty}^r) = 16\pi^{-4}(m^2 + n^2)^{-r} \ln\left(\frac{m}{\min(m, 2r+1)}\right) \ln\left(\frac{n}{\min(n, 2r+1)}\right) + O\left(m^{-2r} \ln\left(\frac{2m}{\min(m, 2r+1)}\right) + n^{-2r} \ln\left(\frac{2n}{\min(n, 2r+1)}\right)\right) \quad (5)$$

ўринлидир, бунда $O(1)$ миқдор m, n, r ларга нисбатан текис чегараланаган.

Теорема 2. m, n ва r ларга боғлиқ равишда қуйидаги муносабат ҳосил бўлади.

$$E_{m,n}(\Lambda_1^r) = 16\pi^{-4}(m^2 + n^2)^{-r} \ln\left(\frac{m}{\min(m, 2r+1)}\right) \ln\left(\frac{n}{\min(n, 2r+1)}\right) + O\left(m^{-2r} \ln\left(\frac{2m}{\min(m, 2r+1)}\right) + n^{-2r} \ln\left(\frac{2n}{\min(n, 2r+1)}\right)\right) \quad (6)$$

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

1. Азларов Т., Мансуров Х. Математик анализ, Т.1993, 1995 й. 1, 2 том.
2. Бугров Я.С. приближение тригонометрическими полиномами классов функций, определяемых полигармоническим оператором. УМН, т.ХІІІ, вып.2, 1958, с.149-156.

3. Гаймназаров Г., Гаймназаров О.Г. Функционал анализ курсидан масалалар ечиш. Т. «Фан ва технология», 2006 й., 114 б.

О ВЕЩЕСТВЕННЫХ КОРНЯХ УРАВНЕНИЯ $v = b(\lambda - \lambda v)$ И СРЕДНОМ ЗНАЧЕНИИ ПЕРИОДА ЗАНЯТОСТИ СИСТЕМЫ С ОГРАНИЧЕННОЙ ОЧЕРЕДЬЮ

Курбонов Хабибулло

Самаркандский государственный университет

Бозорова Угиллой

Самаркандский государственный университет

Рассматривается система массового обслуживания с одним прибором и со следующими данными: входящий поток пуассоновский с параметром λ ; длительности времен обслуживания независимые, одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $B(x)$, $[B(+0) = 0]$ и со средним значением μ^{-1} ; количество мест для ожидающих ограничено числом k ($k \geq 1$). Описанную систему, обычно, обозначают символом $M | G | 1 | k$.

Пусть ζ_k период занятости и $\rho = \lambda \mu^{-1}$ загрузка рассматриваемой системы. Положим

$$b(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dB(x).$$

В теории массового обслуживания изучение характеристик систем обслуживания часто связано с исследованием вещественных корней функционального уравнения

$$v = b(\lambda - \lambda v), \quad (1)$$

где v – комплексная переменная. Известно, что это уравнение при $\rho < 1$ в круге $|v| \leq 1$ имеет два вещественных корня: $v_1 = 1$ и $v_2 = r$ ([1], стр.62).

В данной работе рассматривается вопрос о существовании вещественных корней уравнения (1) при любом фиксированном значении ρ и исследуется предельное поведение корня, отличного от единицы, при $\rho \rightarrow 1$. Также, изучаются асимптотические соотношения, связанные со средним значением случайной величины.

Т е о р е м а 1. Уравнение (1) в области определения функции $b(\lambda - \lambda v)$ имеет два вещественных корня: $v_1 = 1$ и $v_2 = r$, причем $r < 1$ при $\rho > 1$; $r > 1$ при $\rho < 1$; $r = 1$ при $\rho = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $Y(v) = b(\lambda - \lambda v) - v$ и исследуем поведение функции $Y(v)$ при вещественных не отрицательных значениях v .

Поскольку $Y(v) = 0$, то $v = 1$ при любом ρ является корнем уравнения (1).

Пусть $\rho < 1$. Тогда при $v \leq 1$

$$Y'_v(v) = b'_v(\lambda - \lambda v) - 1 \leq Y'_v(1) - \rho - 1 < 0. \quad (2)$$

Если учесть, что $Y(0) = b(\lambda) > 0$, то из (2) следует, что в интервале $(0, 1)$ уравнение (1) не имеет решения.

Далее, пусть $v > 1$ и $A > 0$ некоторое фиксированное число такое, что

$$\int_A^{\infty} e^{-\lambda x} dB(x) > 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} Y(v) &= \int_0^A e^{-\lambda(1-v)x} dB(x) + \int_A^\infty e^{-\lambda(1-v)x} dB(x) - v \geq \\ &\geq e^{\lambda Av} \int_A^\infty e^{-\lambda x} dB(x) - v = e^{\lambda Av} \left(\int_A^\infty e^{-\lambda x} dB(x) - v e^{-\lambda Av} \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $Y(v) \rightarrow \infty$ при $v \rightarrow \infty$. Следовательно, найдется такое число $r > 1$ (так как $Y'_v(1) < 0$), что $Y(r) = 0$. Если учесть выпуклость функции $Y(v)$, то это число единственное.

Случай $\rho > 1$ доказан в работе [1] (стр.62). Если $\rho \rightarrow 1$, то $Y'_v(1) \rightarrow 0$ и, следовательно, $r \rightarrow 1$.

Для того, чтобы завершить доказательству теоремы заметим, что по принципу аналитического продолжения функцию $Y(v)$ можно единственным образом продолжить на полуплоскость $\operatorname{Re} v \geq 0$.

Т е о р е м а 2. Если

$$\sigma^2 = \int_0^\infty x^2 dB(x) < \infty,$$

то при $\rho \rightarrow 1$ справедливо соотношение

$$r = 1 + \frac{2(1-\rho)}{\lambda^2 \sigma^2} + 0(1-\rho). \quad (3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 1 имеет место соотношение

$$b(\lambda - \lambda v) - v = \varphi(v)(v-1)(v-r), \quad (4)$$

где $\varphi(v) \neq 0$ при $v = 1$ и $v = r$.

С другой стороны, разлагая функцию $b(\lambda - \lambda v)$ в ряд в окрестности точки $v = 1$, имеем

$$b(\lambda - \lambda v) - v = \frac{\lambda^2 \sigma^2}{2} (v-1)(v-1 - \frac{2(1-\rho)}{\lambda^2 \sigma^2} + 0(|1-v|^2)). \quad (5)$$

Отсюда, полагая $v = r$, получим

$$r = 1 + \frac{2(1-\rho)}{\lambda^2 \sigma^2} + 0(1-r). \quad (6)$$

Далее, согласно соотношениям (4) и (5) имеем

$$\varphi(v)(v-r) = \frac{\lambda^2 \sigma^2}{2} \left(v-1 - \frac{2(1-\rho)}{\lambda^2 \sigma^2} \right) + 0(|1-v|)$$

Отсюда, при $v = 1$ получим

$$1-r = \varphi^{-1}(1)(1-\rho). \quad (7)$$

Поскольку $\varphi(1) \neq 0$, то на основе (7) из (6) получим утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е. Соотношение (3) можно уточнить сколько угодно, требуя существование моментов более высоких порядков. Например, если

$$\alpha_3 = \int_0^\infty x^3 dB(x) < \infty,$$

то разлагая в ряд функцию $b(\lambda - \lambda v)$ в окрестности точки $v = 1$, находим

$$b(\lambda - \lambda v) - v = -\frac{\lambda^3 \alpha_3}{6}(v-1)(v-q_1)(v-q_2) + O(|1-v|^3),$$

где

$$q_{1,2} = 1 + \frac{3\sigma^2}{2\lambda\alpha_3} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{8\alpha_3(1-\rho)}{3\lambda\sigma^4}} \right).$$

Повторяя ход доказательства теоремы 2 получим, что при $\rho \rightarrow 1$

$$r = 1 + \frac{4(1-\rho)}{\lambda^2 \sigma^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{8\alpha_3(1-\rho)}{3\lambda\sigma^4}} \right)} + O((1-\rho)^2). \quad (8)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Климов Г.Б. Стохастические системы обслуживания. М.: Наука, 1966, 62-66.
2. Harris T.J. The remaining busy period of finite queue, Oper.Res., v.19, 1971, 219-223.

ДИНАМИКА СЕМЕЙСТВА СТОХАСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА ТРЕТИЙ СТЕПЕНИ

Курганов Карим

Национальный Университет Узбекистана

Шаропов Авазбек

Национальный Университет Узбекистана

В симплексе $S^2 = \{(x, y, z) \in R^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z = 1\}$ кубический стохастический оператор вольтерровского типа имеет вид :

$$V_{32} : \begin{cases} x' = x[x^2 + 3axy + 3dxz + 3(1-b)y^2 + 3(1-c)z^2 + 6e_1yz] \\ y' = y[y^2 + 3bxy + 3eyz + 3(1-a)x^2 + 3(1-f)z^2 + 6e_2xz] \\ z' = z[z^2 + 3cxz + 3fyz + 3(1-d)x^2 + 3(1-e)y^2 + 6e_3xy] \end{cases}$$

где $a, b, c, d, e, f, e_1, e_2, e_3 \in [0, 1]$ и $e_1 + e_2 + e_3 = 1$.

Исследуем , когда оператор V_{32} будет « не общего положения », то есть. a, b, c, d, e, f или некоторые пары равняются на $\frac{2}{3}$.

Если $a = b = c = d = e = f = \frac{2}{3}$, то все грани $\overline{M_1 M_2}, \overline{M_1 M_3}, \overline{M_2 M_3}$,

неподвижны , а оператор V_{32} имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x' = x[1 + (6e_1 - 2)yz] \\ y' = y[1 + (6e_2 - 2)xz] \\ z' = z[1 + (6e_3 - 2)xy] \end{cases}$$

Теорема. 1) Если $e_1 = e_2 = e_3$, то V_{32} тождественный оператор.

2) Если $e_i = \sup\{e_1, e_2, e_3\}$, то для $(x^0, y^0, z^0) \in \text{int } S^2$, вся траектория

сходятся к M_i .

3) Если $e_1 = e_2 \succ e_3$, то для $(x^0, y^0, z^0) \in \text{int } S^2$, вся траектория сходится к $\overline{M_1 M_2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. U.U.Jamilov, K.A.Kurganov. On-non ergodicity of volterra cubik stochastic operator. Доклады А.Н.Республики Узбекистан 2017.3 стр.8-11.
2. U.U.Jamilov, K.A.Kurganov. On a Non-Volterra Cubic Stochastic Operator. Lobachevski Journal of Mathematics, 2021, Vol 42, No.12.
3. K.A.Kurganov, U.U.Jamilov, M.O.Okhunova . On a Family of Volterra Cubic Stochastic Operators. Lobachevski Journal of Mathematics, 2021, Vol 42, No.12.

ЗАМЕЧАНИЕ ОЦЕНКИ ЛЕВИ – ПРОХОРОВА МЕЖДУ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ ПРОЦЕССОВ, ПОРОЖДЕННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Маматов Хусниддин

к.ф.-м.н., Университет общественной безопасности
Республики Узбекистан

Семимартингал – это стохастический процесс, представимый в виде суммы процесса локально ограниченной вариации и локального мартингала. В случае дискретного времени произвольная последовательность случайных величин $(X_n)_{n \geq 0}$ является семимартингалом. В частности семимартингал будет произвольная последовательность, образованная суммами случайных величин (не обязательно независимых и имеющих моменты). В случае непрерывного времени типичным примером такого процесса может служить всякий случайный процесс $(X_t)_{t \geq 0}$ с независимыми приращениями, для которого $\text{Mexp}(i\lambda X_i)$ является функцией локально ограниченной вариации при любых $\lambda \in R$. К классу семимартингалов относятся широкие классы точечных процессов, процессов Ито, процессов диффузионного типа и др.

В работе [1] установлена справедливости функциональной центральной предельной теоремы для последовательности семимартингалов, т.е. теоремы о слабой сходимости их вероятностных распределений к распределению непрерывного гауссовского мартингала (в частности, к распределению винеровского процесса).

Будем предполагать, что $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – полное вероятностное пространство с выделенным на нем неубывающим семейством $F = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ σ -алгебр удовлетворяющих стандартным условиям, т.е. $\mathcal{F}_0$ пополнена множествами меры нуль из $\mathcal{F}$ и семейство F непрерывно справа. Через $(D_{[0,\infty)}, D_{[0,\infty)})$ будем обозначать измеримое пространство непрерывных справа и имеющих пределы слева функции $x: [0, \infty) \rightarrow R$ с топологией Скорохода. Запись (X, F) используется для обозначения F – согласованного случайного процесса X с траекториями из пространства $D_{[0,\infty)}$.

Через L_T обозначим метрику Леви – Прохорова на $D_{[0,T]}$, т.е.

$$L_T(Q_1, Q_2) = \inf\{\varepsilon: Q_1(B) \leq Q_2(B^\varepsilon) + \varepsilon, \quad \forall B \in \mathcal{D}_{[0,T]}\},$$

где Q_1, Q_2 – вероятность меры для $D_{[0,\infty)}$, $B^\varepsilon = \{r_T x: d_T(r_T x, B) < \varepsilon\}$,

$$(r_T x)(t) = x(t), t \leq T, d_T - \text{метрика на } \mathbf{D}_{[0,T]}.$$

Пусть $X^n = (X_t^n, \mathcal{F}_t^n)$ – семимартингалы $n \geq 1$, заданные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с выделенными потоками фильтрациями

$$\mathcal{F}^n = (\mathcal{F}_t^n)_{t \geq 0}, X_0^n = 0.$$

Из результата работы [1] при некоторых условиях вытекает что $X^n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, где $X = (X_t, \mathcal{F}_t)$, X – непрерывный семимартингал с независимыми приращениями. Запись $X^n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ будет обозначать слабую сходимость распределений X^n к распределению X .

В работе [2] получена оценка в метрике Леви – Прохорова между распределениями X^n и X в терминах предсказуемых характеристик семимартингалов.

Пусть $f(t, x)$ – непрерывная по паре переменных функция. Согласно [3] имеет место слабая сходимость в топологии Скорохода в пространстве $\mathbf{D}$.

$$\int_0^\cdot f(s, X_s^n) dX_s^n \xrightarrow{\mathcal{D}} \int_0^\cdot f(s, W(s)) dW(s)$$

где $W = (W(t), \mathcal{F}_t)$ – винеровский процесс (относительно некоторого потока $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$)

Пусть

$$Z^n = \int_0^t (s, X_s^n) dX_s^n,$$

$$Z^n = \int_0^t f(s, W(s)) dW(s)$$

функция $f(s, x)$ – непрерывная вместе со своими частными производными $\frac{\partial f}{\partial s}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ и обладающая свойством $|Df(s, x)| \leq l(t)(1 + |x|^\alpha)$ для всех $(s, x) \in [0, t] \times R$ и некоторых постоянных $l(t)$, $\alpha \geq 0$, где $\mathbf{D}$ оператор вида $\frac{\partial}{\partial s}$, $\frac{\partial}{\partial x}$, I (I – тождественный оператор).

Основная цель настоящей статьи дать оценку для метрики Леви – Прохорова L_T между распределениями Z^n и Z в терминах предсказуемых характеристик семимартингалов.

СПИСОК ИСПОЛЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Функциональная интегральная продольная теорема для семимартингалов. Теория вероятности и её применении, 1980, том XXV №4, стр 683-703;
2. Кубилюс К. Скорость сходимости в функциональной предельной теореме для семимартингалов. Литовский математический сборник, 1985, том XXV, №1, стр 84-95;
3. Маматов Х.М. Слабая сходимость стохастических интегралов по семимартингалам. Успехи математических наук. – 1986. – том 41 - №5, стр. 187 – 188.

О НОВЫХ МЕРАХ ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛИ ЖЕСТКОЙ СЕРДЦЕВИНЫ С ДВУМЯ СОСТОЯНИЯМИ

Махаммадалиев Мухторжон

Наманганский государственный университет

Орипов Хамидулло

Наманганский государственный университет

Пусть $\Gamma^k = (V, L)$ есть дерево Кэли порядка $k \geq 1$. Для фиксированной $x^0 \in V$ обозначим $W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}$, $V_n = \bigcup_{j=0}^n W_j$, где $d(x, y)$, $x, y \in V$ есть расстояние между вершинами x, y . Для $x \in W_n$ обозначим (множество прямых потомков вершины x) $S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}$.

Пусть $\Phi = \{0, 1\}$ и $\sigma \in \Phi^V$ – конфигурация, то есть $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi : x \in V\}$. Конфигурация σ называется допустимой, если $\sigma(x)\sigma(y) = 0$ для любых соседних $\langle x, y \rangle$ из $V(V_n$ или W_n , соответственно) и обозначим множество таких конфигураций через Ω (Ω_{V_n} и Ω_{W_n}).

Гамильтониан НС-модели определяется по формуле

$$H(\sigma) = J \sum_{x \in V} \sigma(x), \quad \sigma \in \Omega, \quad J \in \mathbb{R}.$$

Известно, что существует взаимнооднозначное соответствие между множеством V вершин дерева Кэли порядка $k \geq 1$ и группой G_k , являющейся свободным произведением $k+1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, \dots, a_{k+1}$, соответственно (см. [1]).

Понятие меры Гиббса вводится стандартным образом (см. [2]-[3]).

Известно [4], что каждой мере Гиббса для НС-модели на дереве Кэли можно сопоставлять совокупность величин $z = \{z_x, x \in G_k\}$, удовлетворяющих

$$z_x = \prod_{y \in S(x)} (1 + \lambda z_y)^{-1},$$

где $\lambda = e^{J_1} > 0$ – параметр, $J_1 = -J\beta$, $\beta = 1/T$, $T > 0$ – температура.

Определение. Совокупность величин $z = \{z_x, x \in G_k\}$ называется $\hat{G}_k$ – периодической, если $z_{yx} = z_x$ для $\forall x \in G_k, y \in \hat{G}_k$. G_k –периодические совокупности называются трансляционно-инвариантными.

Ниже мы построим новые решения функционального уравнения (1). А именно, положим m и r – неотрицательные целые числа такие, что $0 \leq m \leq k$, и $0 \leq r \leq k$.

Рассмотрим граничное условие $z = \{z_x, x \in G_k\}$, вершины в $S(x)$ принимающими значения z_1, z_2 определяется следующими шагами:

- если в вершине x имеем $z_x = z_1$, тогда на m вершин в $S(x)$ имеет значение z_1 , а на других вершинах принимает значение z_2 ;

• если в вершине x имеем $z_x = z_2$, тогда на r вершин в $S(x)$ имеет значение z_2 , а на других вершинах принимает значение z_1 .

Мера, соответствующая z_x , определенная указанным выше методом, называется $(m; r)$ – альтернативной мер Гиббса (АМГ).

Теорема 1 [5]. Для любого нормального делителя $\mathcal{G} \subset G_k$ всякая $\mathcal{G}$ – периодическая мера Гиббса НС-модели является либо трансляционно-инвариантной, либо $G_k^{(2)}$ – периодической мерой Гиббса, где

$$G_k^{(2)} = \{x \in G_k : |x| - \text{четное число}\}.$$

Замечание. 1. $(0; 0)$ – АМГ совпадают с $G_k^{(2)}$ – периодическими мерами Гиббса. 2. $(k; k)$ – АМГ совпадают с трансляционно-инвариантной мерой Гиббса. 3. $(m; r)$ – АМГ совпадают с $(r; m)$ – АМГ.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $k = 3$, $\lambda_{cr} = \frac{27}{4}$. Тогда для НС-модели при $\lambda \leq \lambda_{cr}$ $(1; 0)$ – АМГ $((0; 1) - \text{АМГ})$ единственна, которая является трансляционно-инвариантной, а при $\lambda > \lambda_{cr}$ существуют ровно три $(1; 0)$ – АМГ, одна из которых является трансляционно-инвариантной, а две другие $(1; 0)$ – АМГ $((0; 1) - \text{АМГ})$ (не периодическими).

Теорема 3. Пусть $m + r \geq k - 1$. Тогда для НС-модели $(m; r)$ – АМГ единственна. Более того, эта мера совпадает с единственной трансляционно-инвариантной мерой Гиббса.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Ганиходжаев Н.Н., Розиков У.А., Теор. Мат. Физ., **111**: 1, 1997, 109-117.
2. Георги Х.-О. Гиббсовские меры и фазовые переходы. М. “Мир” 1992.
3. Rozikov U. A., Gibbs Measures on Cayley Trees, World Sci., Singapore 2013.
4. Suhov Yu.M., Rozikov U.A. Queueing Systems, **46**, 2004, p. 197-212
5. Розиков У. А., Хакимов Р. М. Теор. Мат. Физ. **173** : 1, 2012, 60–70.
6. D.Gandolfo, F.Haydarov, U. Rozikov, J.Ruiz New, Journal of Statistical Physics, **153**, 2013, 400-411.

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ПОТТСА С КОНЕЧНЫМ РАДИУСОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Махмудов Жасур

Наманганский государственный университет

Рашидов Акрам

Наманганский государственный университет

Парпиева Нозима

Наманганский государственный университет

Дерево Кэли (решётка Бете) T^k порядка $k \geq 1$ это бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ рёбер. Пусть $T^k = (V, L)$, где V множество вершин графа T^k , L множество рёбер T^k . Две вершины x, y называются ближайшими соседями, если существует ребро $l \in L$, соединяющее эти вершины, и обозначается $l = \langle x, y \rangle$. Коллекция пар $\langle x, x_1 \rangle, \dots, \langle x, x_{d-1} \rangle, y$ называется путём от x до y . Тогда число $d(x, y), x, y \in V$ - количество рёбер в кратчайшем пути от x до y называется расстоянием от x до y .

Для $x^0 \in V$ положим

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \bigcup_{k=0}^n W_k.$$

Множество

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}, \quad x \in W_n,$$

назовем множеством *прямых потомков вершины x* .

Рассмотрим полубесконечное дерево Кэли (решетка Бете) T^2 порядка 2, Исследуется модель Поттса с тремя значениями спина $\Phi = 1, 2, 3$, и соответствующим Гамильтонианом с взаимодействием ближайших соседей J_1 и взаимодействием продольных вторых соседей J_p .

(Формальный) вид Гамильтониана имеет вид

$$H(\sigma) = -J_1 \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - J_p \sum_{>\tilde{x}, y <} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \quad (1)$$

где $J_1, J_p \in \mathbb{R}$ соответственно взаимодействие ближайшего соседа $\langle x, y \rangle$ и взаимодействие продольных вторых соседей $>\tilde{x}, y <$.

В [1] Формирующая функция Z_n гамильтониана (1) дается в виде

$$Z_n = (u_1^{(n)} + 2u_2^{(n)})^2 + (u_3^{(n)} + u_4^{(n)} + u_5^{(n)})^2, \quad n \geq 1. \quad (2)$$

где $u^{(n)} = (u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, u_3^{(n)}, u_4^{(n)}, u_5^{(n)})$ удовлетворяет следующему рекуррентному уравнению

$$\begin{aligned}
u_1^{(n+1)} &= a(bu_1^{(n)} + 2u_2^{(n)})^2 \\
u_2^{(n+1)} &= (bu_3^{(n)} + u_4^{(n)} + u_5^{(n)})^2 \\
u_3^{(n+1)} &= (u_1^{(n)} + (b+1)u_2^{(n)})^2 \\
u_4^{(n+1)} &= a(u_3^{(n)} + bu_4^{(n)} + u_5^{(n)})^2 \\
u_5^{(n+1)} &= (u_3^{(n)} + u_4^{(n)} + bu_5^{(n)})^2,
\end{aligned} \tag{3}$$

здесь $a = \exp(J_1\beta)$, $b = \exp(J_p\beta)$.

Рекуррентное уравнение (3) может быть записано в виде $u^{(n+1)} = F(u^{(n)})$, $n \geq 0$, которое в теории динамических систем называется *траекторией* фиксированной точки $u^{(0)}$ под действием отображения F .

Найдём неподвижные точки отображения F , т.е. корни уравнения $F(u) = u$. В парамагнитных фазах (высоко симметричные фазы), $u_1 = u_4$ и $u_2 = u_3 = u_5$. Легко проверить, что множество

$$M = \{u = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) \in R_+^5 : u_1 = u_4, u_2 = u_3 = u_5\}$$

является инвариантным множеством относительно преобразования F [2].

Пусть $T_c = \frac{J_p}{\ln \frac{\sqrt{73}-1}{2}}$, $J_p > 0$. Получена следующая важная теорема.

Теорема. 1) Если $T \geq T_c$, то модель (3.4.1) имеет единственную парамагнитную трансляционно-инвариантную меру Гиббса;

2) Если $T < T_c$, то существуют точно три (соотв. две) парамагнитные трансляционно-инвариантные меры Гиббса и, следовательно, имеет место фазовый переход, если (J_1, J_p) удовлетворяют определенным условиям. Эти условия находятся в ходе доказательства теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ganikhodjaev N.N., Mukhamedov F.M., Pah C.H. Phase diagram of the three states Potts model with next nearest neighbour interactions on the Bethe lattice // Phys. Lett. A 373: 2008, pp.33-38.

[2] A.Mariz, C.Tsallis, E.L.Albuquerque, Phase diagram of the Ising model on a Vayley tree presence of competing interactions and magnetic field. J.Stat.Phys. 40:577-592 (1985).

ДВУХТИПНЫЙ ВЕТВЯЩИЙСЯ ПРОЦЕСС С ИММИГРАЦИЕЙ (2-СХЕМА)

Машраббоев Ахмадали

Нам. Г.У

Тулаков Сирожддин

Нам. Г.У

Рассмотрим следующие модели ветвящихся процессов с иммиграцией.

Процесс иммиграции происходит в целочисленные моменты времени с производящей функцией

$$G^i(s) = \sum_{k \geq 0} G_k^i s^k, \quad i=1,2$$

(G_k^i -вероятность того, что иммигрировало k частиц i -того типа), а процесс размножения является ветвящимся процессом с непрерывным временем с производящей функцией плотностей

$$f^i(s) = \sum_{k \geq 0} f_k^i s^k,$$

(Вероятность превращения одной частицы i -того типа в k частиц за время $t \rightarrow 0$ равна $f_k^i t + o(t)$ когда $k \neq 1$, и $1 + f_1^i t + o(t)$, когда $k = 1$, причем $\sum_{k \geq 0} f_k^i = 0$).

Будем говорить, что начальный период жизни ветвящегося процесса, начинающегося с n частиц с иммиграцией, имеет длину τ , если число частиц

$$\eta^i(0) = n_i, \quad \eta^i(t) > 0 \quad \text{для всех } t, \quad 0 \leq t < \tau, \quad \text{а } \eta^i(\tau) = 0$$

$$\gamma_i(t) = P\{\eta^i(t) = 0 / \eta^i(0) = 0\}$$

Теорема. Пусть $F_i'(1) = 1$, $F_i(0) > 0$ и $F_i''(1) = 2p_i$,

$$\sum_{k=2}^{\infty} F_k^i k^2 \ln k < \infty, \quad g_0^i < 0, \quad g_i^1(1) = \lambda_i, \quad \sum_{k=2}^{\infty} g_k^i k^2 \ln k < \infty$$

тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\theta_i - 1} Q_n^i = R_i, \quad 0 < R_i < \infty$$

где c_i – некоторая константа, $\theta_i = \frac{\lambda_i}{p_i}$, $[t]$ – целая часть t , и $\{t\}$ – дробная часть t .

Доказательство $\theta_i > 1$ то в условиях теоремы и используя

$$\gamma_i(t) = c_i e^{-2p_i \theta_i \{t\}} [t]^{-\theta_i} (1 + o(1)), \quad (*)$$

$$\text{используя} \quad a_i(0) = \int_0^{\infty} \gamma_i(t) dt, \quad b_n^i(0) = \int_0^{\infty} \gamma_i(t) F_{[t]}^{n_i}(0) dt < \infty.$$

Применим теорему от уровня восстановления,

тогда

$$Q_{n_i} = \lim_{t \rightarrow \infty} u_{n_i}(t) = \frac{b_n^i(0)}{a_i(0)}$$

по условию

$$F_i'(1) = 1, \quad F_i''(1) = 2p_i < \infty, \quad \text{то}$$

$$F_{t_i}(0) = 1 - \frac{1}{p_i t} + o\left(\frac{1}{t}\right)$$

Используя (*), получаем

$$\int_1^{\infty} \gamma_i(t) F_{[t]}^{n_i}(0) dt = \int_1^T \gamma_i(t) F_{[t]}^{n_i}(0) dt + \\ + c \int_T^{\infty} e^{-2p_i\{t\}} [t]^{-\theta_i} \left(1 - \frac{1}{p_i[t]} + o\left(\frac{1}{t}\right)\right)^n dt + \backslash \\ + c \int_T^{\infty} e^{-2p_i\{t\}} [t]^{-\theta_i} o(1) \left(1 - \frac{1}{p_i[t]} + o\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt,$$

где T выбрано так, чтобы $1 - \frac{1}{p_i[t]} > 0$

$$\text{и } \left| o\left(\frac{1}{t}\right) \right| < \frac{p_1^i - p^i}{p_1^i p^i} \quad \text{при некотором } p_1^i > p^i \text{ и } \forall t \geq T,$$

и при любом z_i , $0 < z_i < \infty$,

$$\int_1^T \gamma_i(t) F_{[t]}^{n_i}(0) dt = \theta(n^{-z_i}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

Отсюда вытекает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Севастьянов Б.А. Ветвящиеся процессы М.Наука, 1971г, 436 с
2. Харрис Т. Теория ветвящихся случайных процессов М, 1966 г, 356 с
3. Ватулин Б.А Асимптотика вероятности попадания в нуль ветвящихся процессов с иммиграцией «Теор. вероятн. и ее примен.» 1974, XIX, е1. С26-35.
4. Ибрагимов Р, Машраббоев А, Собитов Р. Двухтипный ветвящийся процесс с иммиграцией (схема 1) Материалы VII ферганской конференции «Предельные теоремы теории вероятностей и их приложения» (Ферганский коллоквиум) Посвященной памяти академика С. Х. Сиражидинова (г. Наманган, 11-12 мая 2015 г) С. 30-31

ТАСОДИФИЙ ИНДЕКСЛИ ЛИМИТ ТЕОРЕМАЛАРДА ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАРИНИНГ СОНЛИ ХАРАКТЕРИСТИКАЛАРИНИ ҲИСОБЛАШ

Неъматов Ислон

Фарғона давлат университети

Рўзиков Махаммаджон

Фарғона давлат университети

Таъриф. Агар

$$1. \quad \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots \quad (1)$$

тасодифий микдорлар кетма-кетлиги ўзаро боғлиқ бўлмаса.

2. $v = v(\lambda)$, $(\lambda > 0)$ - тасодифий микдор бутун мусбат қийматларни қабул қилувчи тасодифий микдор бўлса,

3. (1) ва v тасодифий микдорлар ўзаро боғлиқ бўлмаса, у ҳолда $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots, v$ тасодифий микдорларни Вальд конунига бўйинсуувчи тасодифий микдорлар деб юритилади.

(1)дан қуйидаги йиғиндини тузамиз:

$$\zeta_v = \sum_{j=1}^v \xi_j \quad (2)$$

$$M\xi_j = a_j, \quad D\xi_j = \nu_j^2$$

$v = v(\lambda)$, учун $p(v = k)$ деб,

$$Mv = \sum_{k=1}^{\infty} k p(v = k) = \alpha$$

$$Dv = \sum_{k=1}^{\infty} (k - \alpha)^2 p(v = k) = \gamma^2$$

деб белгилаймиз.

Қуйидаги белгилашни киритамиз:

$$A_k = \sum_{j=1}^k a_j, \quad A_v = \sum_{j=1}^v a_j, \quad MA_v = \sum_{k=1}^{\infty} A_k p(v = k) = \rho$$

$$DA_v = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k - \rho)^2 p(v = k) = \gamma_1^2,$$

$$V_k^2 = \sum_{j=1}^k \nu_j^2, \quad V_v^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k^2 p(v = k)$$

$$MV_v^2 = \sum_{k=1}^{\infty} V_k^2 p(v = k) = \sigma^2,$$

Лемма.

$$M\zeta_v = \sum_{k=1}^{\infty} A_k p(v = k) = \rho,$$

$$MA_v = M\zeta_v = \rho$$

Исботи [2] да берилган.

Теорема 1. (2) йиғиндининг дисперсияси

$$D\zeta_v = \sigma^2 + \gamma_1^2$$

Теорема 2. $\beta_3 = M\zeta_v^2 - 3M\zeta_v^2\rho + 2\rho^2$.

Исбот. $\beta_3 = M(\zeta_v - M\zeta_v^2)^3 = M(\zeta_v - \rho)^3$.

Буни кубга кўтариб, соддалаштирсак

$$M\zeta_v^3 - 3\rho M\zeta_v^2 + 3\rho^3 - \rho^3 = M\zeta_v^3 - \rho \cdot 3M\zeta_v^2 + 2\rho^2.$$

(2) тасодифий миқдорларга қийматлар бериб $M\zeta_v^3$, Mv_v^2 ларни қийматлари топилади.

АДАБИЁТЛАР

1. H.Robbins. Asymptotic distribution of the sum of a random number of random variables. Bull of the Amer. Math. Soc, 54, № 12 1948, 1151-1161
2. И.Неъматов. Кандидатская диссертация. 1975

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ОДНОРОДНОГО ПУАССОНОВСКОГО ТОЧЕЧНОГО ПРОЦЕССА В КОНУСЕ

Омонова Нигора

Национальный Университет Узбекистана

Пусть K – конус, образованный двумя лучами $\ell_i = (z : z = te_i, t > 0)$, $i = 1, 2$, где e_1 и e_2 – единичные векторы. Обозначим через α угол между e_1 и e_2 и положим $e_0 = e_1 + e_2$.

Пусть далее $\Pi(\cdot)$ – о.п.т.п. с интенсивностью $\lambda(\cdot)$ ($\lambda(\cdot)$ – Лебегово мера). Обозначим через $\Pi(K)$ сужение этого процесса на K . Рассмотрим выпуклую оболочку C , порожденную $\Pi(K)$, и множество ее вершин Z .

Обозначим через $z_0 \in Z$ ту из вершин, для которой $(e_0, z - z_0) \geq 0$ для всех $z \in Z$. Очевидно, что z_0 определена однозначно почти наверное. При этом прямая

$$(e_0, z - z_0) = 0 \quad (1)$$

является опорной для C .

Настоящая работа, следуя [1,2], посвящена изучению свойств выпуклых оболочек, порожденных независимыми наблюдениями над случайным вектором, имеющем пуассоновское распределение в конусе K .

Рассмотрим треугольник, образованный лучами ℓ_i , $i = 1, 2$ и опорной прямой (1). Множество внутренних точек этого треугольника обозначим через δ_0 , а площадь – через ξ_0 .

Справедлива следующая

Теорема. Случайные величины ξ_0 и η_0 независимы,

$$\begin{cases} \xi_0 = \frac{1}{2} \left(x_0 + y_0 \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right)^2 \sin \alpha, \\ \eta_0 = \frac{y_0}{\sin \alpha \left(x_0 + y_0 \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right)} \end{cases}$$

причем ξ_0 экспоненциально распределена со средним 1, а η_0 равномерно распределена в $[0, 1]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Groeneboom P., Limit theorems for convex hulle//Probab. Th. Rel. Fields, 1988, v.79, N3, pp.327-368.
2. Formanov Sh.K., Khamdamov I.M., On some properties of vertex processes of random convex hulls, Cite as: AIP Conference Proceedings 2365, 060012 (2021); <https://doi.org/10.1063/5.0057259>, Published Online: 16 July 2021. 7P.

СТАТИСТИКАНИНГ АСИМПТОТИК ЕТАРЛИЛИК ШАРТЛАРИ ҲАҚИДА

Расулов Олимжон

Наманган давлат университети

Кириш. Математик статистикада статистик маълумотлар функцияси, яъни статистиканинг етарлилиги тушунчаси энг фундаментал тушунчалардан биридир. Бизга маълумки, бундан функциялар етарли статистикалар деб аталади. Статистик баҳолаш назариясининг кўп тушунчалари статистикаларнинг етарлилик хоссасига асослангандир. Етарли статистикалар ёрдамида тузилган статистик баҳолаш кўпгина яхши хоссаларга эга бўлади. Масалан, агар статистик баҳонинг ўзи етарли статистиканинг чизиқли функцияси бўлса, у ҳолда унинг ўзи ҳам етарли статистик баҳо бўлади. Бундай масалалар билан шуғулланаётганимизда биз албатта бир нечта етарли статистикаларга дуч келишимиз мумкин. Масалан, ихтиёрий статистик модел учун ҳар доим иккита етарли статистика мавжуддир. Булар статистик танланманинг ўзи ва ундан тузилган вариация катордир. Булар одатда маълумотлар сонини камайтирмаганликлари учун тривиал етарли статистикалар деб аталади. Бизга маълумотлар сонини камайтирувчи, лекин етарлилик хоссаларини сақлаб қолувчи статистикаларни амалиётда қўлланилганда яхши натижаларни беради. Бундай статистикалар минимал етарли статистикалар деб аталади.

Асосий қисм. Математик статистикада статистик тажрибалардан олинган кузатувлар, яъни $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$ тенгламанинг бирор $T = T(X^{(n)})$ функцияси ҳам муҳим ўрин тутади. Амалиётда бирор статистик хулосалар қилиш учун тажрибалар сонини орттириш яхши натижа беради, лекин бу ўз навбатида олинаётган сонли маълумотлар тўпламини, яъни $X^{(n)}$ тенглама ҳажмининг ортишига олиб келади, бундай катта ҳажмли танланмалар билан ишлаш ҳам иктисодий томондан, ҳам вақт нуқтаи-назаридан ноқулай бўлганлиги учун $X^{(n)}$ танланманинг барча маълумотларини ўзида мужассам қилувчи бирор $T = T(X^{(n)})$ функция билан ишлашга, яъни етарли статистикаларга мурожаат қилиш зарурати туғилади.

1-таъриф [1]. $X^{(n)}$ танланманинг ихтиёрий $T = T(X^{(n)})$ ўлчовли функциясига статистика деб аталади.

Биз $X^{(n)}$ статистик танланманинг қийматларини $x^{(n)}$ кўринишида белгилаб оламиз. Математик статистиканинг асосий масаласи бу кузатилаётган $X^{(n)} = x^{(n)}$ танланма нуқта орқали $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \{P\})$ -статистик моделдаги асл P тақсимотни аниқлашдан иборатдир. Чунки, айнан $x^{(n)}$ лар P ҳақидаги маълумотга эгадир. Агар бирор статистик модел танланган бўлса, у ҳолда $x^{(n)}$ даги маълумот $\{P\}$ оиладан асл P ни танлаш имконини беради. Демак, юқоридагиларни инобатга олган ҳолда, унинг бирор $T = T(x^{(n)})$ функцияси, яъни статистика билан ишлаш зарурати туғилади. Бундай статистикалар бир нечта бўлиши мумкин, биз уни ичидан энг минимал ўлчовли статистикани танлашимиз мақсадга мувофиқ бўлади. Айнан шундай статистикалар етарли статистикалар дейилади.

Энди етарли статистиканинг умумий таърифини, дастлаб дискрет модел учун киритамиз, фараз қилайлик, $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \{P\})$ -дискрет статистик модел, яъни $X^{(n)}$ танланма P -дискрет тақсимотга эга X тасодикий миқдорни кузатиш натижасида олинган бўлсин.

$\{P\}$ оиладан олинган ихтиёрий P учун ва берилган $T=T(X^{(n)})$ статистика ёрдамида $P_t(B)$ шартли тақсимотлар оиласини тузамиз:

$$P_t(B) = \frac{P(B \cap \{x^{(n)} \in \mathcal{X}: T(x^{(n)})=t\})}{P(\{x^{(n)} \in \mathcal{X}: T(x^{(n)})=t\})}. \quad (1)$$

2-Ta'rif [4]. $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \{P\})$ -дискрет статистик модел учун $T(X^{(n)})$ статистика етарли статистика деб аталади, агар ҳар бир t га P_t шартли тақсимотлар $P \in \{P\}$ га боғлиқ бўлмаса. Агар $\{P\}$ оила $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ параметрик бўлса, у ҳолда (1) ифодани қуйидагича ёзиш ҳам мумкин:

$$P_t(B) = \frac{P_\theta(B \cap \{x^{(n)} \in \mathcal{X}: T(x^{(n)})=t\})}{P_\theta(\{x^{(n)} \in \mathcal{X}: T(x^{(n)})=t\})}. \quad (2)$$

Шартли тақсимот (1) ни ҳисоблаш, ҳар доим ҳам осон бўлавермайди. Шунинг учун амалиётда унинг ўрнига етарли статистикани аниқлашнинг етарлилик критерияси ўринли эканлигини текшириш қулайдир. Фараз қилайлик, дискрет статистик моделда, $g(t, \theta) = P_\theta(\{x^{(n)} \in \mathcal{X}: T(x^{(n)}) = t\})$, функцияни аниқлаймиз. Бундан эса, (2) тенгликни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$P_\theta(x^{(n)}) = g(t, \theta) P_t(x^{(n)}), \quad T(x^{(n)}) = t. \quad (3)$$

Агар $h(x^{(n)}) = P_t(x^{(n)})$ деб олсак, у ҳолда (3) тенгликка асосан

$$P_\theta(x^{(n)}) = g(T(x^{(n)}), \theta) h(x^{(n)}), \quad x^{(n)} \in \mathcal{X}. \quad (4)$$

P_θ тақсимотни (4) каби ёзиб олиш факторлаштириш деб аталади. Бу ерда $h(x^{(n)})$ функция $\theta \in \Theta$ га боғлиқ эмас ва $g(T(x^{(n)}), \theta)$ функция эса θ га ва $x^{(n)}$ га T статистика орқали боғлиқдир. Тушунарлики, h ни турли танлаш ҳисобида факторлаштириш тенглиги ҳам ягона эмаслиги мумкин. Демак, $T(x^{(n)})$ етарли статистика бўлса, у ҳолда (4) ифода ўринли экан [2-4]. Тескариси ҳам ўринлидир.

Шундай қилиб, ушбу мақолада статистикаларнинг асимптотик етарлилик шартларига оид масалалар муҳокама қилинади. Ўнг томондан тасодифий цензурланган моделда ҳам айрим етарли статистикалар ўрганилади.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

1. Боровков А.А. Математическая статистика. Оценка параметров, проверка гипотез.-Москва: Наука. 1984.-472с.
2. Закс Ш. Теория статических выводов.-Москва: Мир. 1975.-776с.
3. Козлов М.В., Прохоров А.В. Введение в математическую статистику.-Москва: МГУ. 1987.-263 с.
4. Форманов Ш.К., Абдушукуров А.А. Математик статистика. 1-қисм: Параметрларни баҳолаш.-Тошкент: Университет. 1994.-67-б.

ОПЕРАТОРЛИ МАТРИЦАЛАРГА МОС БЛОК СОНЛИ ТАСВИРНИНГ АСОСИЙ ХОССАЛАРИ

Расулов Тўлқин

DSc, Бухоро давлат университети

Гильберт фазосидаги чизикли операторлар учун сонли тасвир тушунчаси операторлар спектрал назариясининг муҳим тушунчаларидан биридир. Бу назариядан бизга яхши маълумки, чизикли операторнинг спектри комплекс сонлар тўпламининг қисм тўплами бўлади. Бундан ташқари, агар берилган A чизикли оператор

чегараланган бўлса, у ҳолда унинг спектри маркази ноль нуктада ва радиуси $\|A\|$ га тенг ёпиқ доирада сақланади. Шу ўринда табиий савол пайдо бўлади: чизикли операторнинг спектрини ўзида сақловчи ҳамда маркази ноль нуктада ва радиуси $\|A\|$ га тенг ёпиқ доирадан кичикроқ тўплам мавжудми? Чизикли операторлар учун сонли тасвир тушунчаси бундай хоссага эга тўпламлардан бири эканлигини унинг қуйида баён қилинган хоссалари орқали кўриш мумкин.

Фараз қилайлик, H - комплекс Гильберт фазоси ва $A: H \rightarrow H$ - чизикли оператор бўлиб, $D(A) \subset H$ унинг аниқланиш соҳаси бўлсин. Ушбу

$$W(A) := \{(Ax, x) : x \in D(A), \|x\| = 1\}$$

тўпламга A операторнинг сонли тасвири дейилади. Умумий ҳолда $W(A)$ тўплам очик тўплам ҳам ёпиқ тўплам ҳам бўлмайди. $W(A)$ очик тўплам бўладиган, ёпиқ тўплам бўладиган ҳамда очик ҳам ёпиқ ҳам бўлмайдиган чизикли операторларга кўплаб мисоллар келтириш мумкин. Аниқланишига кўра $W(A)$ тўплам комплекс сонлар тўпламининг қисм тўплами бўлиб, $W(A)$ тўпламнинг геометрик хоссаларидан фойдаланиб A оператор ҳақида маълумот олиш мумкин.

Сонли тасвир тушунчаси биринчи мартаба [1] сонли матрицалар учун киритилган. Унда матрицанинг сонли тасвири унинг барча хос қийматларини сақлаши ва бундай тўпламнинг чегараси қавариқ чизик бўлиши исботланган. [2] ишда эса $W(A)$ нинг қавариқ тўплам эканлиги исботланган. Кейинчалик [3] ишда чизикли чегараланган оператор ҳам бундай хоссага эга бўлиши ва унинг спектри сонли тасвир ёпиғи $\overline{W(A)}$ тўпламда ётиши кўрсатилган.

Шуни алоҳида таъкидлаб ўтиш жоизки, агар чизикли операторнинг спектри иккита кесишмайдиган тўпламларнинг бирлашмасидан иборат бўлса, у ҳолда сонли тасвир спектрнинг жойлашув ўрнини етарлича тавсифлай олмайди. Юқоридаги каби ҳолатларда спектрнинг жойлашув ўрнини янада аниқроқ аниқлаш мақсадида [4] мақолада квадратик сонли тасвир тушунчаси киритилган. Ўқувчига қулайлик учун бу тушунчанинг таърифини келтирамиз.

Фараз қилайлик $H = H_1 \oplus H_2$ ва $A \in L(H)$ бўлсин, бу ерда H_1 ва H_2 лар Гильберт фазолари. У ҳолда A операторни ҳамиша

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (1)$$

2-тартибли операторли матрица кўринишида тасвирлаш мумкин [5], бу ерда $A_{ij}: H_j \rightarrow H_i$, $i, j = 1, 2$ матрицавий элементлар чизикли чегараланган операторлар.

A блок операторли матрица учун квадратик сонли тасвир тушунчасига таъриф берамиз. $(\cdot, \cdot)_i$ ва $\|\cdot\|_i$ лар орқали мос равишда H_i , $i = 1, 2$ Гильберт фазолардаги скаляр кўпайтма ва нормаларни белгилаймиз.

Таъриф. Қуйидаги

$$A_f := \begin{pmatrix} (A_{11}f_1, f_1)_{H_1} & (A_{12}f_2, f_1)_{H_1} \\ (A_{21}f_1, f_2)_{H_2} & (A_{22}f_2, f_2)_{H_2} \end{pmatrix}, \quad f = (f_1, f_2) \in H$$

матрицанинг барча хос қийматлари тўпламига $A \in L(H)$ блок операторли матрицанинг (1) кўринишига мос квадратик сонли тасвир дейилади, бунда $\|f_i\|_i = 1$, $i = 1, 2$ ва $W^2(A)$ каби тасвирланади, яъни

$$W^2(A) := \bigcup_{\|f_i\|_i=1, i=1,2} \sigma_p(A_f), \quad f = (f_1, f_2) \in H.$$

Квадратик сонли тасвир спектрни ўзида сақловчи сонли тасвирдан кўра кичикроқ тўплам эканлигини айтиш мумкин.

2×2 блок операторли матрицалар учун киритилган квадратик сонли тасвир тушунчасини $n \times n$ блок операторли матрица ҳолига умумлаштириш масаласи чегараланган операторлар учун [5,6] мақолаларда, чегараланмаган операторлар учун [7] мақолада тадқиқ қилинган.

Фараз қилайлик $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, H_i , $i = 1, \dots, n$ - Гильберт фазолари ва $H := H_1 \oplus \dots \oplus H_n$. У ҳолда $A \in L(H)$ ҳамиша

$$A := \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

кўринишдаги блок операторли матрица кўринишида тасвирланади, бу ерда $A_{ij} : H_j \rightarrow H_i$, $i, j = 1, \dots, n$ матрицавий элементлар чизиқли чегараланган операторлар.

Ушбу

$$S_{H_1 \oplus \dots \oplus H_n} := S_{H_1} \times \dots \times S_{H_n} = \{f = (f_1, \dots, f_n) \in H, \|f_i\|_i = 1, i = 1, \dots, n\}$$

тўплам орқали H_i даги S_{H_i} бирлик сфералар кўпайтмасини белгилаймиз.

Агар $H_1 \oplus \dots \oplus H_n$ ёйилма фиксирланган бўлса, у ҳолда $S_{H_1 \oplus \dots \oplus H_n}$ белгилаш ўрнига S^n ёки S_H белгилашлардан фойдаланиш мумкин.

Ҳар бир $f = (f_1, \dots, f_n) \in S_{H_1 \oplus \dots \oplus H_n}$ учун

$$A_f := ((A_{ij} f_j, f_i))_{i,j=1}^n \in M_n(\mathbb{C})$$

каби аниқланган $n \times n$ матрицани қараймиз.

Таъриф. Ушбу

$$W_{H_1 \oplus \dots \oplus H_n}(A) := \bigcup_{f \in S^n} \sigma_p(A_f),$$

тўпламга A операторли матрицанинг (2) кўринишига мос блок сонли тасвири дейилади.

H Гильберт фазонинг фиксирланган ёйилмаси учун $W^n(A) = W_{H_1 \oplus \dots \oplus H_n}(A)$ белгилаш ишлатилади.

Энди блок сонли тасвирнинг асосий хоссаларини келтирамиз [5].

1) Агар $n = 1$ бўлса, у ҳолда блок сонли тасвир одатдаги сонли тасвир билан устма-уст тушади; $n = 2$ бўлганда, блок сонли тасвир квадратик сонли тасвир деб ҳам юритилади; $n = 3$ бўлса, у ҳолда блок сонли тасвир кубик сонли тасвир деб юритилади.

2) Агар $A \in M_n(\mathbb{C})$ - n -тартибли матрица бўлса, у ҳолда $W^n(A)$ тўплам A матрицанинг хос қийматлари тўплами билан устма-уст тушади.

- 3) Сонли тасвир ва блок сонли тасвир орасида $W^n(A) \subset W(A)$ боғланиш мавжуд.
- 4) Агар A операторли матрица юкори учбурчак ёки куйи учбурчак шаклга эга бўлса, у ҳолда $W^n(A) = W(A_{11}) \cup \dots \cup W(A_{nn})$ тенгли ўринли бўлади.
- 5) Агар $A \in L(H)$ бўлса, у ҳолда $W^n(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|A\|\}$ муносабат ўринлидир.
- 6) Агар $\dim H < \infty$ бўлса, у ҳолда $W^n(A)$ ёпиқ тўпламдир.
- 7) A ўз-ўзига қўшма операторли матрица, яъни $A^* = A$ бўлса, у ҳолда $W^n(A) \subset \mathbb{R}$ муносабат ўринлидир.
- 8) Агар $A \in L(H)$ бўлса, у ҳолда $\sigma_p(A) \subset W^n(A)$, $\sigma(A) \subset \overline{W^n(A)}$ хосса ўринли бўлиб, у спектрал муносабатлар хоссаси деб юритилади.

Таъкидлаш лозимки, нуқтали спектр билан боғлиқ спектрал муносабат чегараланмаган n -тартибли операторли матрицалар учун ҳам ўринлидир. Бироқ оператор спектри билан боғлиқ спектрал муносабат қўшимча шартлар асосида бажарилади [7].

Қуйида уч диагоналли 3×3 блок операторли матрицалар учун кубик сонли тасвирни ҳисоблашда қулай бўлган алтернатив формулани келтираимиз.

$H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$ Гильберт фазосида

$$A := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12}^* & A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{23}^* & A_{33} \end{pmatrix}$$

3×3 блок операторли матрицани қараймиз, бу ерда A_{ij} матрицавий элементлар H_j ни H_i га ўтказувчи чизиқли чегараланган операторлар, яъни $A_{ij} \in L(H_j, H_i)$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \leq j$.

$f = (f_1, f_2, f_3) \in H$ элемент ёрдамида қуйидаги миқдорларни аниқлаймиз:

$$a_{ij}(f) := (A_{ij} f_j, f_i);$$

$$p(f) := -\frac{1}{6}((a_{11}(f) - a_{22}(f))^2 + (a_{11}(f) - a_{33}(f))^2 + (a_{22}(f) - a_{33}(f))^2)$$

$$-|a_{12}(f)|^2 - |a_{22}(f)|^2 (< 0);$$

$$q(f) := |a_{12}(f)|^2 a_{33}(f) + |a_{23}(f)|^2 a_{11}(f) - a_{11}(f)a_{22}(f)a_{33}(f)$$

$$- \frac{2}{27}(a_{11}(f) + a_{22}(f) + a_{33}(f))^3$$

$$+ \frac{1}{3}(a_{11}(f)a_{22}(f) + a_{11}(f)a_{33}(f) + a_{22}(f)a_{33}(f) - |a_{12}(f)|^2 - |a_{23}(f)|^2)$$

$$\times (a_{11}(f) + a_{22}(f) + a_{33}(f));$$

$$\varphi(f) := \arccos \left(-\frac{3q(f)}{2p(f)} \sqrt{-\frac{3}{p(f)}} \right);$$

$$\Lambda_k(f) := \frac{1}{3}(a_{11}(f) + a_{22}(f) + a_{33}(f)) + 2\sqrt{-\frac{p(f)}{3}} \cos \frac{\varphi(f) + 2k\pi}{3}; \quad k = 1, 2, 3.$$

Ишнинг асосий натижаларидан бирини баён қиламиз. Унда A блок операторли матрицанинг $W^3(A)$ кубик сонли тасвирини ҳисоблаш формуласи келтирилган.

1-теорема. A операторнинг кубик сонли тасвири $W^3(A)$ учун

$$W^3(A) = \bigcup_{k=1}^3 \bigcup_{\|f_i\|=1, i=1,2,3} \Lambda_k(f), \quad f = (f_1, f_2, f_3) \in H$$

тенглик ўринли.

1-теорема A операторнинг чегараларини ўрганишда ва улар учун оптимал баҳолашлар олишда муҳим аҳамиятга эга [7]. 1-теоремани исботлашда кубик алгебраик тенгламалар ечимини топишнинг Кардано усулидан фойдаланилади.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

1. Toeplitz O. Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejer. Math. Z., 2:1-2 (1918), pp. 187-197.
2. Hausdorff F. Der Wertvorrat einer Bilinearform. Math. Z., 3:1 (1919), pp. 314-316.
3. Wintner A. Zur Theorie der beschränkten Bilinearformen. Math. Z., 30:1 (1929), pp. 228-281.
4. Langer H., Tretter C. Spectral decomposition of some nonselfadjoint block operator matrices. J. Oper. Theory, 39 (1998), pp. 339-359.
5. Tretter C. Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications. Imperial College Press, 2008, P. 297.
6. Tretter C., Wagenhofer M. The block numerical range of an $n \times n$ block operator matrix. SIAM J. Matrix Anal. Appl. 24:4 (2003), pp. 1003-1017.
7. Rasulov T.H., Tretter C. Spectral inclusion for diagonally dominant unbounded block operator matrices. Rocky Mountain J. Math., 2018, No. 1, pp. 279-324.

H_A – ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОСНОВНЫЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ λ -МОДЕЛИ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Рахматуллаев Музаффар

Д.ф.-м.н., Институт математики АНРУз

Расулова Мухайё

Наманганский государственный университет

Пусть $\tau^k = (V, L)$, $k \geq 1$ есть дерево Кэли порядка k , где V – множество вершин, L – множество ребер τ^k . Известно, что τ^k можно представить как G_k – свободное произведение $k+1$ циклических групп второго порядка [1].

Мы рассматриваем модель, где спин принимает значения из множества $\Phi = \{1, 2, \dots, q\}$, $q \geq 2$.

Гамильтониан λ -модели имеет вид

$$H(\sigma) = \sum_{\substack{\langle x, y \rangle: \\ x, y \in V}} \lambda(\sigma(x), \sigma(y)) \quad (1)$$

где

$$\lambda(i, j) = \begin{cases} \bar{a}, & \text{если } |i - j| = 2, \\ \bar{b}, & \text{если } |i - j| = 1, \\ \bar{c}, & \text{если } i = j, \end{cases}$$

$$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{R}.$$

Для пары конфигураций σ и φ , совпадающих почти всюду, т.е. всюду, за исключением конечного числа точек, мы рассматриваем относительный гамильтониан $H(\sigma, \varphi)$

$$H(\sigma, \varphi) = \sum_{\substack{\langle x, y \rangle: \\ x, y \in V}} (\lambda(\sigma(x), \sigma(y)) - \lambda(\varphi(x), \varphi(y))). \quad (2)$$

Определим энергию конфигурации σ_b на b следующим образом:

$$U(\sigma_b) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\langle x, y \rangle: \\ x, y \in b}} \lambda(\sigma(x), \sigma(y)). \quad (3)$$

Лемма 1 [2]. Относительный гамильтониан (2) имеет вид

$$H(\sigma, \varphi) = \sum_{b \in M} (U(\sigma_b) - U(\varphi_b)).$$

В работе рассматривается случай $q = 3$, то есть $|\Phi| = 3$.

Пусть $\varphi_b(c_b) = d$, $|B_d| = i$, $|B_f| = n$, тогда $|B_g| = k + 1 - i - n$, где $d \neq f, d \neq g, f \neq g$, $d, f, g \in \Phi$. Легко доказать следующую лемму.

Лемма 2 [2]. Для каждой конфигурации φ_b мы имеем

$$U(\varphi_b) \in \{U_{i,n} : i = 0, 1, \dots, k+1, n = 0, 1, \dots, k+1-i\},$$

где

$$U_{i,n} = \frac{i\bar{a} + n\bar{b} + (k+1-i-n)\bar{c}}{2}. \quad (4)$$

Определение 1. Конфигурация φ называется основным состоянием относительно гамильтониана (1), если

$$U(\varphi_b) = \min \{U_{i,n} : i = 0, 1, \dots, k+1, n = 0, 1, \dots, k+1-i\}$$

для любого $b \in M$.

Обозначим $C_{i,n} = \{\varphi_b : U(\varphi_b) = U_{i,n}\}$ и

$$A_{\xi,\eta} = \{J \in \mathbb{R}^2 : U_{\xi,\eta} = \min \{U_{i,n} : i = 0, 1, \dots, k+1, n = 0, 1, \dots, k+1-i\}\}. \quad (5)$$

В случае $k \geq 2$ с помощью (5) вычислим:

$$A_{0,0} = \{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \in \mathbb{R}^3 | \bar{c} \leq \bar{b} \leq \bar{a}\} \cup \{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \in \mathbb{R}^3 | \bar{c} \leq \bar{a} \leq \bar{b}\},$$

$$A_{0,1} = A_{0,2} = \dots = A_{0,k} = \{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \in \mathbb{R}^3 | \bar{b} = \bar{c} \leq \bar{a}\},$$

$$A_{0,k+1} = \{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \in \mathbb{R}^3 | \bar{b} \leq \bar{c} \leq \bar{a}\} \cup \{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \in \mathbb{R}^3 | \bar{b} \leq \bar{a} \leq \bar{c}\},$$

$$A_{1,0} = A_{2,0} = \dots = A_{k,0} = \{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \in \mathbb{R}^3 | \bar{a} = \bar{c} \leq \bar{b}\},$$

$$A_{k+1,0} = \{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \in \mathbb{R}^3 | \bar{a} \leq \bar{b} \leq \bar{c}\} \cup \{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \in \mathbb{R}^3 | \bar{a} \leq \bar{c} \leq \bar{b}\}$$

$$\text{и } R^3 = \bigcup_{i,n} A_{i,n}.$$

Пусть $A \subset \{1, 2, \dots, k+1\}$. $H_A = \{x \in G_k : \sum_{j \in A} w_j(x) - \text{четно}\}$, где $w_j(x)$ – число a_j в слове x . H_A является нормальным делителем индекса 2.

Рассмотрим фактор группу $G_k/H_A = \{H_A, G_k \setminus H_A\}$. Для простоты обозначим $H_0 = H_A, H_1 = G_k \setminus H_A$.

H_A -периодические конфигурации имеют следующий вид:

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_0, & \text{если } x \in H_0, \\ \sigma_1, & \text{если } x \in H_1, \end{cases}$$

где $\sigma_0, \sigma_1 \in \Phi$.

В следующей теореме описаны периодические основные состояния для λ -модели, соответствующие нормальным делителям индекса 2 группового представления дерева Кэли.

Теорема 1. Пусть $k \geq 2, |A| = n, n \in \{1, 2, \dots, k+1\}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $|\sigma_0 - \sigma_1| = 0$, тогда соответствующие конфигурации σ на множестве $A_{0,0}$ являются периодическими основными состояниями;

2) если $|\sigma_0 - \sigma_1| = 1$, тогда соответствующие конфигурации σ на множестве $A_{0,n}$ являются периодическими основными состояниями;

3) если $|\sigma_0 - \sigma_1| = 2$, тогда соответствующие конфигурации σ на множестве $A_{n,0}$ являются периодическими основными состояниями.

Замечание 1. Периодические основные состояния в пункте 1) теоремы 1 являются трансляционно-инвариантными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rozikov U.A. Gibbs measures on Cayley trees. World scientific. 2013.
2. Мухамедов Ф.М., Рахматуллаев М.М., Расулова М.А. Слабо периодические основные состояния для λ -модели. Укр. мат. журн., 2020, Т. 72, № 5.

ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ ОДНОЙ МОДЕЛИ ИЗИНГА С КОНЕЧНЫМ РАДИУСОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Рашидов Акрам

Наманганский государственный университет

Парпиева Нозима

Наманганский государственный университет

Махмудов Жасур

Наманганский государственный университет

Дерево Кэли (решётка Бете) T^k порядка $k \geq 1$ это бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ рёбер. Пусть

$T^k = (V, L)$, где V множество вершин графа T^k , L множество рёбер T^k . Две вершины x, y называются ближайшими соседями, если существует ребро $l \in L$, соединяющее эти вершины, и обозначается $l = \langle x, y \rangle$. Коллекция пар $\langle x, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, y \rangle$ называется путём от x до y . Тогда число $d(x, y), x, y \in V$ - количество рёбер в кратчайшем пути от x до y называется расстоянием от x до y .

Для $x^0 \in V$ положим

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \bigcup_{k=0}^n W_k.$$

Множество

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}, \quad x \in W_n,$$

назовем множеством *прямых потомков вершины x* .

Рассмотрим полубесконечное дерево Кэли (решетка Бете) T^2 порядка 2, Исследуется модель типа Изинга на дереве Кэли с конкурирующими взаимодействиями J_1 – ближайших соседей, J_2 – продольных вторых соседей, и J_3 – одноэтажных вторых соседей, где спиновые переменные принимают значения из множества $\Phi = \{-1, +1\}$. Формальный гамильтониан модели определяется по формуле

$$H(\sigma) = -J_1 \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y) - J_2 \sum_{\langle x, y \rangle} \sigma(x)\sigma(y) - J_3 \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y) \quad (1)$$

где $J_1, J_2, J_3 \in R$ определяют взаимодействия соответственно ближайших и вторых соседей.

В [1] выведена следующая рекуррентная система уравнений

$$\begin{aligned} u_1^{(n+1)} &= a(b^2 c u_1^{(n)^2} + 2c^{-1} u_1^{(n)} u_2^{(n)} + c b^{-2} u_2^{(n)^2}) \\ u_2^{(n+1)} &= a^{-1} \left(b^2 c u_3^{(n)^2} + 2c^{-1} u_3^{(n)} u_4^{(n)} + c b^{-2} u_4^{(n)^2} \right) \\ u_3^{(n+1)} &= a^{-1} \left(b^{-2} c u_1^{(n)^2} + 2c^{-1} u_1^{(n)} u_2^{(n)} + c b^2 u_2^{(n)^2} \right) \\ u_4^{(n+1)} &= a^1 \left(b^{-2} c u_3^{(n)^2} + 2c^{-1} u_3^{(n)} u_4^{(n)} + c b^2 u_4^{(n)^2} \right) \end{aligned}$$

где $a = \exp(J_1 \beta)$, $b = \exp(J_2 \beta)$, $c = \exp(J_3 \beta)$ и

Статсумма Z_n в терминах (u_i) задается как

$$Z_n = \left(u_1^{(n)} + u_2^{(n)} \right)^2 + \left(u_3^{(n)} + u_4^{(n)} \right)^2.$$

Также в [1] указано, что если $u_1 = u_4$ и $u_3 = u_2$, то намагнитченность равна нулю и соответствующая фаза называется парамагнитной.

Это рекуррентное уравнение (2) может быть переписано в векторном виде как $u^{n+1} = F(u^n), n \geq 0$.

Рассмотрим неподвижные точки, т.е., корни уравнения $F(u) = u$, называемые трансляционно-инвариантными точками.

Пусть $T_c = \frac{2J_2}{\ln \sqrt{1+\sqrt{3}}}$, $J_2 > 0$.

Теорема. Пусть $J_2 > 0$. Тогда при $T > T_c$ для модели (1) существует единственная парамагнитная трансляционно-инвариантная мера Гиббса.

Если $T < T_c$, то существуют точно три (соотв. точно две) парамагнитные трансляционно-инвариантные меры Гиббса при условии, что (J_1, J_2, J_3) удовлетворяют определенным условиям, т.е. происходит фазовый переход.

Определенные условия для (J_1, J_2, J_3) точно находятся и указывается в доказательстве теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vannimenus J. Modulated phase of an Ising system with competing interactions on a Cayley tree // Z.Phys., 1981, V. 43. pp.141-148 .
2. Rahmatullaev A.M. On paramagnetic phases of the Vannimenus model. // UzMJ, 2012. -№1. pp.141-149.

ТАСОДИФИЙ ЦЕНЗУРЛАНИШЛИ УМУМЛАШГАН МОДЕЛДА ВЕКТОР – ҚИЙМАТЛИ ЭМПИРИК КАЦ ПРОЦЕССЛАРИНИНГ АППРОКСИМАЦИЯСИ

Сайфуллоева Гулноз

Навоий давлат педагогика институти

Бизга $\{\Omega, A, P\}$ эхтимоллар фазосида $X_1, X_2, \dots$ боғлиқсиз ва бир хил $F(x) = P(X_m \leq x)$ тақсимот функциясига ва $Y_1, Y_2, \dots$ боғлиқсиз, бир хил параметри 1 га тенг ($EY_m = 1, m \geq 1$) Пуасссон тақсимотига эга иккита ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий микдорлар кетма кетликлари берилган бўлсин. Агар $v(n) = Y_1 + \dots + Y_n$ деб олсак, унда $v(n) \sim \Pi(n)$, яъни $v(n)$ параметри n га тенг бўлган ($Ev(n) = n$) кетма-кетликни ҳосил қилади. 1949-йилда М.Кац (М.Кас [5]) номаълум F учун қуйидаги эмпирик статистикани баҳо сифатида таклиф қилган:

$$F_n^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{v(n)} I_{(-\infty, x]} X_m, & \text{агар } 1 \text{ эхтимоллик билан } v_n \geq 1 \text{ булса,} \\ 0, & \text{агар } 1 \text{ эхтимоллик билан } v_n = 0 \text{ булса.} \end{cases}$$

Эслатиб ўтамоғимиз, классик эмпирик тақсимот функцияси $F(x)$ га альтернатив баҳо сифатида

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n I_{(-\infty, x]} X_m, \quad x \in R.$$

Мос равишда Кац ва классик эмпирик процесслар

$$\beta_n^*(x) = \sqrt{n} (F_n^*(x) - F(x)), \quad x \in R,$$

$$\beta_n(x) = \sqrt{n} (F_n(x) - F(x)), \quad x \in R$$

формулалар билан аниқланади. Маълумки, классик эмпирик процесс $\beta_n(x)$ ни $B_n(F(x))$ Броун кўприклари кетма-кетлиги орқали кучли аппроксимация қилиш натижаси жуда кўп олимлар томонидан тадқиқ этилган бўлиб, оптимал аппроксимация, яъни яқинлашиш тезлиги яхшилаб бўлмайдиган тартиб 1974 йилда Комлош-Майор-Тушнадилар томонидан ўрнатилган эди. Шу каби аппроксимация натижаси [4] да $\beta_n^*(x)$ Кац процесси учун исботланган.

Тасодикий цензурланишнинг умумий модели [1-4] қуйидагича аниқланган. Фараз қилайлик, $\{\Omega, A, P\}$ эҳтимоллик фазосида тақсимот функцияси $H(x)$ дан иборат Z тасодикий миқдор берилган бўлсин:

$$H(x) = P(Z \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Бутун ва фиксерланган $k \geq 1$ учун $A^{(1)}, \dots, A^{(k)}$ жуфт-жуфти билан биргаликда бўлмаган ва тўла группани ташкил этувчи ҳодисалар ёрдамида

$$H(x; i) = P(Z \leq x, A^{(i)}), \quad i \in J = \{1, \dots, k\}$$

субтақсимотларни киритамиз. Бизни нафақат Z тасодикий миқдор, балки $\{(Z, A^{(i)}), i \in J\}$ жуфтликлар ҳам қизиқтирсин. Фараз қилайлик $\{(Z_m, A_m^{(1)}, \dots, A_m^{(k)}), m \geq 1\}$ орқали $(Z, A^{(1)}, \dots, A^{(k)})$ тўплани $\{\Omega, A, P\}$ даги боғлиқ бўлмаган такрорий кузатилиши бўлсин. Биз $H(x), H(x; 1), \dots, H(x; k)$ лар узлуксиз бўлсин деб фараз қиламиз. $H_n(x)$ ва $H_n(x; i)$ лар орқали $H(x)$ ва $H(x; i)$ ларнинг одатдаги эмпирик баҳоларини белгилаймиз:

$$\begin{aligned} H_n(x) &= \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n I(Z_m \leq x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ H_n(x; i) &= \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n I(Z_m \leq x, \delta_m^{(i)} = 1), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (1)$$

бу ерда $\delta_m^{(i)} = I(A_m^{(i)})$ орқали $A_m^{(i)}$ ҳодисанинг индикаторини белгиладик. Тушунарлики, $H(x; 1) + \dots + H(x; k) = H(x)$ ва $H_n(x; 1) + \dots + H_n(x; k) = H_n(x)$ тенгликлар барча $x \in \mathbb{R}$ учун ўринли.

У ҳолда $H(x)$ ва $H(x; i) = P(Z_m \leq x, \delta_m^{(i)} = 1), i \in J$ тақсимотлар учун Кац эмпирик баҳоларини қуйидаги мос кўринишда киритишимиз мумкин:

$$H_n^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{v(n)} I(Z_m \leq x), & \text{агар бир эҳтимоллик билан } v_n \geq 1 \text{ булса,} \\ 0, & \text{акс ҳолда,} \end{cases}$$

ҳамда

$$H_n^*(x; i) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{v(n)} I(Z_m \leq x, \delta_m^{(i)} = 1), & \text{агар бир эҳтимоллик билан } v_n \geq 1 \text{ булса,} \\ 0, & \text{акс ҳолда.} \end{cases}$$

Бу ерда $H_n^*(x; 1) + \dots + H_n^*(x; k) = H_n^*(x)$ $x \in \mathbb{R}$. Қуйидаги эмпирик процессларни киритамиз:

$$\begin{aligned} a_n^{(i)*}(x) &= \sqrt{n} (H_n^*(x; i) - H(x; i)), \quad i \in J \\ a_n^{(0)*}(x) &= \sqrt{n} (H_n^*(x) - H(x)), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Бу процесслар учун [] теоремасининг қуйидаги аналогини ўринлидир.

Теорема 1. Агар асосий эҳтимоллик фазоси $\{\Omega, A, P\}$ етарлича бой бўлса, у ҳолда шундай $k+1$ та Гаусс процесслари кетма-кетликлари $W_n^{(0)}(x), W_n^{(1)}(x), \dots, W_n^{(k)}(x)$ ларни аниқлаш мумкинки, $a_n^*(t) = (a_n^{(0)*}(t_0), a_n^{(1)*}(t_1), \dots, a_n^{(k)*}(t_k))$ ва $W_n^*(t) = (W_n^{(0)}(t_0), W_n^{(1)}(t_1), \dots, W_n^{(k)}(t_k))$, $t = (t_0, t_1, \dots, t_k)$ лар учун қўйидаги ўринлидир:

$$P \left\{ \sup_{t \in \mathbb{R}^{k+1}} \|a_n^*(t) - W_n^*(t)\|^{(k+1)} > C^* n^{-1/2} \log n \right\} \leq K^* n^{-r}, \quad (2)$$

бу ерда $r \geq 2$ ихтиёрий бутун сон, $C^* = C^*(r)$ ва K^* лар мусбат сонлардир. Бундан ташқари, $W_n^*(t)$ нинг ўзи $(k+1)$ – ўлчовдаги вектор-қийматлик Гаусс процесси бўлиб,

$$EW^{(i)}(x) = 0, \quad (x, i) \in \mathbb{R} \times \bar{\mathfrak{T}}$$

ва ихтиёрий $i, j \in J$, $i \neq j$, $x, y \in \mathbb{R}$ учун

$$\begin{aligned} EW_n^{(0)}(x)W_n^{(0)}(y) &= \min \{H(x), H(y)\}, \\ EW_n^{(i)}(x)W_n^{(j)}(y) &= \min \{H(x; i), H(y; j)\}, \\ EW_n^{(i)}(x)W_n^{(0)}(y) &= \min \{H(x; i), H(y)\}. \end{aligned} \quad (3)$$

ФҲЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

- 1) Абдушукуров А.А. Statistics of incomplete data. Tashkent. Unisersity Press, 2009, 269 p.
- 2) Абдушукуров А.А. Сайфуллоева Г.С. Empirical Kac processes under general random censorship model.//ITMM2021. 20th International Conference named after A.F.Terpugov Information Technologies and Mathematical Modelling, Russia, Tomsk.
- 3) Burke M.D., Csörgő S., Horváth L. Strong approximations of some biometric estimates under random censorship.//Z. Wahrschein. Verw. Gebiete. 1981, v.56, p.87-112.
- 4) Burke M.D., Csörgő S., Horváth L. A correction to and improvement of “Strong approximations of some biometric estimates under random censorship.” Probab.Th.Rel.Fields. 1988, v.79. p.51-57.
- 5) Kac M. On deviation between theoretical and empirical distributions. //Proc. Nat. Acad. Sci.USA 1949. v.35. p.252-257.

МЕНЕЖМЕНТДА МЕНЕДЖЕРНИНГ СТАТИСТИК МЕТОДЛАРИ БЎЙИЧА ФАОЛИЯТИ

Толибжонов Ботирбек
АДУ

Фараз қилайлик X маҳсулотнинг ишчи характеристикасини билдирувчи тасодифий миқдор ва τ муҳандислар томонидан X учун белгиланган номинал қиймат бўлсин. Ишлаб чиқаришда доимо $X = \tau$ бўлиши кутилади, лекин “Иккита бир хил объектлар бўлмайди” деган аксиомага асосан $X \neq \tau$, ҳамда X нинг қиймати тасодифий бўлади. Агар $X \neq \tau$ ҳолат кўп кузатилса, у ҳолда маҳсулотнинг ишчи характеристикаси яроқсиз бўлишни бошлайди. Бу эса маҳсулотнинг ўзини яроқсиз қилиб қўяди ва ишлаб

чиқаришда ҳар томонлама (пул, материал каби) йўқотишга олиб келади. Бундай муаммони ҳал қилиш тарихи 2-3 асрга тўғри келган.

Дастлаб бу муаммо муҳандислик методлари билан ҳал қилинган. Бунинг учун X га қўйим (допуск, спес) қўйилган: $\tau \pm \Delta x$, Δx дан четланиши. Δx шундай танланганки $X \in (\tau - \Delta x, \tau + \Delta x)$ бўлганда ишчи характеристика маҳсулот сифатига таъсир этмаган. Бу метод яхши бўлса ҳам, катта йўқотишларга олиб келган, чунки маҳсулот сифатли бўлиши учун X нинг қиймати қўйимга тушиши зарур. Агар тушмаса маҳсулот қайта тайерланган еки ташлаб юборилган. Ундан ташқари X қўйим ичида бўлганда ҳам сифатсиз маҳсулотлар сони ортиб борган. Бундай муаммолар бизнес билан шуғулланаётганларни банкрот даражасига олиб келган [1-2].

Узоқ давом этган бу ҳолатни 1924 йили American Telephone and Telegraph корпорациясининг муҳандиси У. Шухарт томонидан эҳтимоллар назарияси ва математик статистика тушунчаларидан фойдаланган ҳолда тарққликни минималлаштириш ғояси ҳал қилди. Бу ғояга асосан у қуйидаги кўринишдаги статистик инструмент яратди:

- Хдан n ҳажмли танланма олинади ва натижада $\vec{X} = (X_1 \dots X_n)$ ҳосил қилинади. Унга асосан сифат билан корреляцияланган $g = g(\vec{X})$ статистика (сифатни назорат қилувчи тасодифий миқдор) қурилади.
- $a = Mg(\vec{X})$ учун $LCL = a - 3\sigma$ қуйи назорат чегара ва $UCL = a + 3\sigma$ чегаралар ҳосил қилинади.
- Агар $g \in (LCL, UCL)$ бўлса ўрганилаётган жараён статистик назоратда дейилади ва маҳсулот сифатли ҳисобланади. Акс ҳолда $g \notin (LCL, UCL)$ бўлса жараённинг ҳолатини яхшилаш чоралари кўрилади.

У. Шухарт бу ғоя асосида турли хил шу каби инструментлар яратди. Улар Шухартнинг содда назорат карталари (НК) деб номланган. Масалан $g = \bar{X}$ – ўрта қийматлар НК; $g = M$ – медианалар НК; $g = P$ – сифатсиз маҳсулотлар улуши НК; $g = U$ – нуқсонлар улуши НК; $g = R$ – тарққлик кўлами; $g = C$ – нуқсонли маҳсулотлар сони НК каби.

У. Шухарт ва унинг шогирдлари ва давомчилари Д. Джуран, Э. Деминг каби олимлар бу ғояни амалга ошириш учун мақолалар ва бир нечта китоблар езишган. Афсуски дастлабки 50 йил ичида У. Шухартнинг бу ғоясини олимлар тушинишмади ва бу бир техник ғоя деб ҳисобланди. Лекин бу ғоя асосида ишлаб чиқариш йўлга қўйилганда (айниқса Японияда) $X \in (\tau - \Delta x, \tau + \Delta x)$ бўлиши масаласи ҳал бўла бошлади ва компаниялар сифатли арзон маҳсулотлар ишлаб чиқара бошлади. Бу ғалаба бу усулни қўлламаётган бошқа компанияларга ҳам ўз таъсирини кўрсатди. XX асрнинг 80 йилларидан бошлаб НК АҚШ, Россия, Европанинг бир қатор катта давлатлари корпорацияларида ишлатила бошланди. Шундан сўнг бу йўналиш бўйича илмий журналларда мақолалар сони кескин ортди. Ўзбекистонда бу метод қўшма корхоналар билан бирга кириб кела бошлади. Хозирда дунедаги энг ривожланган ва катта корхоналарда НК методи маҳсулот сифатини аниқловчи ҳужжатга айланди. Ҳар бир жараён ўз тилида “сўзлашади”. Бу “сўзлашув” тили инсонлар сўзлашадиган тилдан фарқли бўлиб, уни тушуниш учун бу тилни инсонлар тилига “таржима” қилиш керак. Бунда бизга назорат карталари ердан беради. Назорат карталари – бирор жараён билан

содир бўлаётган муаммолар ҳақида маълумотни инсонга тушуниш имконини берадиган “тил” ҳисобланади. Айтайлик бирор бизнес жараён содир бўлаётганда муаммо пайдо бўлди. НК бизга бу жараёндаги муаммо ҳақида маълумот беради, ва бу жараёнга аралашши керакми еки керак эмасми деган саволга жавоб олиш имконини беради.

Шухартнинг назорат карталари олдин фақат техник ва мураккаб муҳандислик муаммоларни ҳал қилишда қўлланилган ва назорат карталарини бизнесда қўллаб бўлмайди деб билишган. Бироқ Доктор Деминг бундай фикрда эмас эди. 1938 йили Доктор Деминг Қишлоқ хўжалиги вазирлиги қошидаги магистратурада Шухарт маърузаларини ўқий бошлади ва 1939 йили ушбу маърузаларни “Сифат назорати нуқтаи назаридан статистик методлар” номли китобда жамлаб чоп эттирди. Доктор Деминг статистик методларни менежерларга ишлаб чиқаришнинг ҳар бир босқичида қўллашни тавсия қилган. Биринчи бўлиб Доктор Деминг Япониялик 45 та тадбиркор билан учрашувлар ўтказди ва бу учрашувларда статистик методларни бизнесда қўллаш қанчалар самарали эканлигини уларга тушунтирди. Кейинчалик Япониядаги катта корхоналар менежерлари Доктор Деминг билан бирга иш олиб бориб, статистик методлардан фойдаланиб катта ютуқларга эришишди.

Хозирда ҳар бир корхонада У. Шухарт методи билан маҳсулот сифатини яхшилаш биринчи навбатда менежерларга боғлиқ бўлиб қолмоқда. Бунинг учун менежер статистик методлар бўйича маълум бир билим ва кўникмаларга эга бўлмоғи лозим. Статистик методлар сифат ҳақида маълумот йиғиб уни таҳлил қилишнинг эффектив усули ҳисобланади. Бу методларни қўллаш катта сарф харажатларсиз сифат менежменти соҳасида қаралган жараёнлар ҳақида маълум бир даражада маълумот олиш, турли хил муаммоларни олдиндан кўра билиш ва ҳал қилиш имконини беради.

Менежмент – бу турли хил корхоналар иш фаолиятини яхшилашга қаратилган бошқарув кўринишлари, методлари ва замонавий технологиялар йиғиндиси. Менежер эса корхонадаги иш жараёнларини бошқарувчи раҳбар. Менежернинг асосий вазифаси бошқариш. Бошқариш деганда режалаштириш, ташкиллаштириш каби тушунчалар тушунилади. Бугунги кунда менежерлар статистик фикрлаш қобилиятига эга бўлиши керак. Статистик фикрлаш – вақт, пул, ўзгарувчанликни бирлаштиришга қаратилган кенг тушунча ҳисобланади. Менежерлар корхона олдида қўйган мақсадни бажарилишини таъминлаши зарур. Менежер фақат қисқа муддатли фойдани эмас, балки узоқ муддатли масалаларни ечишга ҳаракат қилиши керак. Хозирги иқтисодий ривожланиш даврида менежерлардан янгича фикрлаш қобилияти талаб қилинади. Улар ҳозирда сифатни яхшилашга ҳаракат қилиши керак. Менежер доимий равишда компания фаолиятини яхшилашга хизмат қилувчи чоралар кўрмоғи, турли хил муаммоларни ҳал қилмоғи лозим. Шунингдек корхонанинг барча тармоқларига янгиликлар киритиши керак ва ҳар бир аниқланган камчиликларни ўз вақтида бартараф этилишини таъминлаши керак. Энг асосийси менежер ишчилар, ходимлар орасида дўстона алоқа ўрнатишга интилиши зарур ва улар орасида носоғлом рақобат муҳитини йўқотиши керак.

Энди эса Шухартнинг НКларини амалиётда қўлланилишига бир мисол келтирамиз. XX аср охирида Доктор Демингнинг шогирди, Жанубий Америкадаги бир компания президенти НКларини қўллашни бошлайди. 1980 йили компания компьютерлар учун диск ишлаб чиқарётган эди. Бу компания ҳам бошқа

компанияларга ўхшаб иш юритаётган эди. Ишлаб чиқариш даврининг бошида фойда 20% эди ва жараенни яхшилаш натижасида фойдани ўртача 66% га кўтаришнинг имкони бўлди. Бироқ бу кўрсаткич етарли хисобланмади. 30 га яқин кимегар, мухандислар камчиликларни бартараф этиб сифатсиз махсулотлар сонини камайитиришга ҳаракат қила бошлашди. Лекин 1980 йил охирига келиб компания раҳбари 2 йил ичида махсулдорликни икки бараварга ошириш вазифасини қўйди. Бунинг учун корхона раҳбари завод ишчиларига жараенни яхшилашни ўргатиш учун статист ёллади. Биринчи НКлар 1981 йилнинг январь ойида тайерланди ва ой охирига бориб жами 130 та НК қўлланилаётган эди. Январь ойида компания фойдаси 71% ва август ойига бориб эса 94% гача ортди. Жами 130 та НКдан 25 таси ишлаб чиқариш жараенини назорат қилиш учун ишлатилди. 1981 йил охирига бориб дисклар нархини 20% га туширишга эришилиб, 1982 йилнинг апрель ойида ишлаб чиқаришни 50% га оширишга эришилди. Завод худуди ўзгармаган холди 1982 йил охирига бориб сотув даражаси 100 млн долларга етди.

Шу мисолнинг ўзида кўриш мумкинки, НКлари ишлаб чиқариш жараенида қанчалар катта фойда келтириши мумкин эканлигини. Яни завод ишлаб чиқариш майдони ҳам, ишчилар сони ҳам ўзгармаган холда, фойда сезиларли равишда ортган.

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати:

1. Д. Уилер, Д. Чамберс. Статистическое управление процессами. Оптимизация бизнеса с использованием контрольных карт Шухарта. 2009.
2. С. Ахмедов. Жараенларни статистик бошқариш. 2005.

О ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫХ МЕРАХ ГИББСА ДЛЯ НС-МОДЕЛЕЙ С ТРЕМЯ СОСТОЯНИЯМИ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ ПОРЯДКА ЧЕТЫРЕ

Хакимов Рустамжон

д.ф.-м.н., Институт Математики

Аминжонов Нилуфар

НамГУ

Хошимов Дониёр

НамГУ

Описание всех предельных мер Гиббса, в частности, трансляционно-инвариантных мер Гиббса, для данного гамильтониана является одним из основных задач теории гиббсовских мер. Определение меры Гиббса и понятия, связанные с этой теорией, вводятся стандартным образом (см. например [1]-[2]).

Пусть $\mathfrak{T}^k = (V, L)$ есть дерево Кэли порядка $k \geq 1$. Расстояние $d(x, y)$, $x, y \in V$ на дереве Кэли это количество ребер кратчайшей пути, соединяющей вершины x, y . Для фиксированного $x^0 \in V$ обозначим

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \bigcup_{j=0}^n W_j, \quad L_n = \{l = \langle x, y \rangle \in L \mid x, y \in V_n\}.$$

Рассмотрим НС-модель ближайших соседей с тремя состояниями на однородном дереве Кэли. В этой модели каждой вершине x ставится в соответствие одно из значений $\sigma(x) \in \{0, 1, 2\}$. Значения $\sigma(x) = 1, 2$ означают, что вершина x 'занята', а

значение $\sigma(x) = 0$ означает, что вершина x – вакантна. Конфигурация $\sigma = \{\sigma(x), x \in V\}$ на дереве Кэли задается как функция из V в $\{0, 1, 2\}$. Множество всех конфигураций на V обозначается через Ω . Аналогичным образом можно определить конфигурации в V_n (W_n), и множество всех конфигураций в V_n (W_n) обозначается как Ω_{V_n} (Ω_{W_n}).

Из работы [3] известно четыре типа плодородных графов с тремя вершинами 0, 1, 2 (на множестве значений $\sigma(x)$). Рассмотрим два из них:

Петля: $\{0, 0\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 1\}, \{2, 2\}$; Жезл: $\{0, 1\}; \{0, 2\}, \{1, 1\}, \{2, 2\}$.

Конфигурация σ называется G -допустимой конфигурацией на дереве Кэли (в V_n или W_n), если $\{\sigma(x), \sigma(y)\}$ – ребро G для любой ближайшей пары соседей x, y из V (из V_n). Обозначим множество G -допустимых конфигураций через Ω^G ($\Omega_{V_n}^G$).

Множество активности [3] для графа G есть функция $\lambda: G \rightarrow R_+$. Значение λ_i функции λ в вершине $i \in \{0, 1, 2\}$ называется ее «активностью».

Пусть $L(G)$ – множество ребер графа G , обозначим через $A \equiv A^G = (a_{ij})_{i,j=0,1,2}$ матрицу смежности G , т.е.

$$a_{ij} \equiv a_{ij}^G = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i, j\} \in L(G), \\ 0, & \text{если } \{i, j\} \notin L(G). \end{cases}$$

Известно [2], что каждой мере Гиббса для НС-модели на дереве Кэли можно сопоставлять совокупность векторов $z = \{z_x, x \in G_k\}$, удовлетворяющих

$$z'_{1,x} = \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{10} + a_{11}z'_{1,y} + a_{12}z'_{2,y}}{a_{00} + a_{01}z'_{1,y} + a_{02}z'_{2,y}}, \quad z'_{2,x} = \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{20} + a_{21}z'_{1,y} + a_{22}z'_{2,y}}{a_{00} + a_{01}z'_{1,y} + a_{02}z'_{2,y}},$$

$$\text{где } z_x = (z_{1,x}, z_{2,x}) \in R_+^2, \quad z'_{i,x} = \frac{\lambda z_{i,x}}{z_{0,x}}, \quad i = 1, 2.$$

Рассмотрим трансляционно-инвариантные решения: $z_x = z \in R_+^2$, $x \neq x_0$, которым соответствуют трансляционно-инвариантные меры Гиббса (ТИМГ).

Известна следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $k \geq 2$ и $\lambda_{cr} = \frac{1}{k-1} \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^k$. Тогда для НС-модели в случае

$G = \text{петля}$ при $\lambda > \lambda_{cr}$ существуют не менее трех ТИМГ, а при $\lambda \leq \lambda_{cr}$ существует ровно одна ТИМГ.

Замечание. 1. В случае $G = \text{жезл}$ доказана аналогичная теорема, где $\lambda_{cr} = \frac{1}{k-1} \cdot \left(\frac{2}{k}\right)^k$ (см. [4]).

2. При $k = 2$ и $k = 3$ доказано, что при $\lambda > \lambda_{cr}$ существуют ровно три ТИМГ (см. [5], [6]).

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 2. При $k = 4$ и $\lambda_{cr} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^4$ для НС-модели в случае $G = \text{петля}$ при $\lambda > \lambda_{cr}$ существуют ровно три ТИМГ, а при $\lambda \leq \lambda_{cr}$ существует ровно одна ТИМГ.

Теорема 3. При $k = 4$ и $\lambda_{cr} = \frac{1}{48}$ для НС-модели в случае $G = \text{жезл}$ при $\lambda > \lambda_{cr}$ существуют ровно три ТИМГ, а при $\lambda \leq \lambda_{cr}$ существует ровно одна ТИМГ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Георги Х.-О. Гиббсовские меры и фазовые переходы. М. "Мир" 1992.
2. Rozikov U. A. Gibbs Measures on Cayley Trees, World Sci., Singapore 2013.
3. Brightwell G., Winkler P. Graph homomorphisms and phase transitions. J. Combin. Theory Ser. B. – 1999. – 77, – P. 221–262.
4. Rozikov U.A, Khakimov R.M. Gibbs measures for fertile three-state hard core models on a Cayley tree. Queueing Systems, – 2015, Vol.81, - № 1. –P. 49-69.
5. Хакимов Р.М. Трансляционно-инвариантные меры Гиббса для плодородных моделей НС с тремя состояниями на дереве Кэли. Теор. и матем. физика, – 2015. – Том 183, № 3. –С. 441-449.
6. Розиков У. А., Шоюсупов Ш.А., ТМФ, 156:3 (2008), 412-424.

ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ ГРАДИЕНТНЫЕ МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛИ НС-БЛЮМА-КАПЕЛЯ В СЛУЧАЕ "ЖЕЗЛ" НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Хатамов Носиржон

К.ф.-м.н., Институт Математики АН РУз

Эркабоева Зулхаё

Наманганский государственный университет

Адашев Кахрамон

Наманганский государственный университет

Работа посвящена новому разделу теории мер Гиббса, так называемой градиентной мере Гиббса (см.[1]). В данной статье изучается модель НС-Блюма-Капеля со счетным множеством значений спина в случае "жезл" на дереве Кэли.

Модель Блюма-Капеля-эта двумерная спиновая система, где спин может принимать три значения (в случае конечное число значений): $-1, 0, 1$. Первоначально он был введен для изучения $He^3 - He^4$ фазового перехода (см.[3]). Можно думать о ней как о системе частиц со спином. Значение $\sigma(x) = 0$ спина на узле решетки (или на узле дерева) x будет соответствовать отсутствию частиц (вакансия), в то время как значения $\sigma(x) = -1, 1$ будут соответствовать присутствию на узле x частицы со спином $-1, 1$, соответственно. По поводу других результатов по модели Блюма-Капеля смотрите, например [4]-[7].

Дерево Кэли $\mathfrak{Z}^k = (V, L)$ порядка $k \geq 1$ – бесконечное дерево, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ ребро, где V есть множество вершин $\mathfrak{Z}^k$, L – его множество ребер. Пусть i – функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру

$l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то вершины x и y называются *ближайшими соседями* и обозначаются через $\langle x, y \rangle$. Пусть $d(x, y), x, y \in V$ есть расстояние между вершинами x, y , т.е. количество ребер кратчайший пути, соединяющей x и y .

Пусть $x^0 \in V$ – фиксированная точка. Будем писать $x \prec y$, если путь от x^0 до y проходит через x . Положим

$$W_n = \{x \in V : d(x^0, x) = n\}, \quad V_n = \{x \in V : d(x^0, x) \leq n\}.$$

Точка y называется "*прямым потомком*" точки x , если $x \prec y$ и $d(x, y) = 1$. Обозначим через $S(x)$ – множество "*прямых потомков*" точки $x \in V$.

Рассмотрим модель НС-Блюма-Капеля ближайших соседей со счетным числом состояний на дереве Кэли. Конфигурация $\sigma(x) = \{\sigma(x) | x \in V\}$ на дереве Кэли задается как функция из V в множество $\mathbb{Z}$, т.е. в этой модели каждой вершине x ставится в соответствие одно из значений $\sigma(x)$, $x \in \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел. Значения $\sigma(x) \neq 0$ означают, что вершина x "занята", а значение $\sigma(x) = 0$ означает, что вершина x "вакантна".

Здесь рассмотрим множество $\mathbb{Z}$ как множество вершин некоторого бесконечного графа G . С помощью графа G определим G – допустимую конфигурацию следующим образом. Конфигурация $\sigma(x)$ называется G – *допустимой конфигурацией* на дереве Кэли если $\{\sigma(x), \sigma(y)\}$ – ребро графа G для любой ближайшей пары соседей x, y из V . Обозначим множество G – допустимых конфигураций через Ω^G .

Гамильтониан модели Блюма-Капеля определяется таким образом:

$$H(\sigma) = J \sum_{\langle x, y \rangle, x, y \in V} (\sigma(x) - \sigma(y))^2, \quad (1)$$

где $J \in \mathbb{R}$.

Пусть $L(G)$ – множество ребер графа G . Обозначим через $A \equiv A^G = (a_{ij})_{i, j = -1, 0, +1}$ матрицу смежности G , т.е.

$$a_{ij} \equiv a_{ij}^G = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i, j\} \in L(G), \\ 0, & \text{если } \{i, j\} \notin L(G). \end{cases}$$

Пусть B есть $\sigma(x)$ – алгебра, порожденная цилиндрическими подмножествами Ω^G . Понятие меры Гиббса и градиентных мер Гиббса для модели Блюма-Капеля определяется стандартным образом (см. [1], [2]).

Пусть $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Известно, что (см. [1]) каждой (градиентной) мере Гиббса на (Ω^G, B) соответствует совокупность векторов $z_x = \{z_{i,x}, i \in \mathbb{Z}_0\} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}_0}$ такая, что $\forall x \in V$ имеют место следующие равенства:

$$z_{i,x} = \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{i0} \theta^{i^2} + \sum_{m \in \mathbb{Z}_0} a_{im} \theta^{(i-m)^2} z_{m,y}}{a_{00} + \sum_{m \in \mathbb{Z}_0} a_{0m} \theta^{m^2} z_{m,y}}, \quad i \in \mathbb{Z}_0, \quad (2)$$

где $\theta = \exp\{-J\beta\}$, $\beta = 1/T$, T – температура.

Таким образом, задача описания (градиентных) мер Гиббса сведена к нахождению решений системы уравнений (2). Но изучать эту систему уравнений в случае произвольного графа G нелегко.

Поэтому, мы рассмотрим конкретный граф G , определенный следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = -1, j = -1 \text{ или } i = 1, j = 1, \\ 1, & \text{если } j = i + 1 \text{ или } j = i - 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

где $i, j \in \mathbb{Z}$.

При таком графе из (2) получим

$$\begin{cases} z_{1,x} = \prod_{y \in S(x)} \frac{\theta + z_{1,y} + \theta z_{2,y}}{\theta(z_{-1,y} + z_{1,y})}, \\ z_{-1,x} = \prod_{y \in S(x)} \frac{\theta + z_{-1,y} + \theta z_{-2,y}}{\theta(z_{-1,y} + z_{1,y})}, \\ z_{i,x} = \prod_{y \in S(x)} \frac{z_{i-1,y} + z_{i+1,y}}{z_{-1,y} + z_{1,y}}, \quad i \in \mathbb{Z}_0 \setminus \{-1, 1\}. \end{cases} \quad (3)$$

Рассмотрим трансляционно-инвариантные решения, т.е. $z_x = z \in \mathbb{R}_+^\infty$. В этом случае уравнение (3) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} z_1 = \left(\frac{\theta + z_1 + \theta z_2}{\theta(z_{-1} + z_1)} \right)^k, \\ z_{-1} = \left(\frac{\theta + z_{-1} + \theta z_{-2}}{\theta(z_{-1} + z_1)} \right)^k, \\ z_i = \left(\frac{z_{i-1} + z_{i+1}}{z_{-1} + z_1} \right)^k, \quad i \in \mathbb{Z}_0 \setminus \{-1, 1\}. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $\theta > 0$, $z_i > 0$.

Проанализировать решения системы уравнений (4) непросто. Поэтому предположим $z_{2i} = 1$, $i \in \mathbb{Z}_0$ в системе уравнений (4). Тогда первое и второе уравнения этой системы имеет вид:

$$\begin{cases} z_1 = \left(\frac{2\theta + z_1}{\theta(z_{-1} + z_1)} \right)^k, \\ z_{-1} = \left(\frac{2\theta + z_{-1}}{\theta(z_{-1} + z_1)} \right)^k. \end{cases} \quad (5)$$

С начала решим системы уравнений (5). Пусть $z_1 = z_{-1} = z$. Тогда из (5) получаем

$$z = \left(\frac{2\theta + z}{2\theta z} \right)^k. \quad (6)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. При $k \geq 2$. Для любого $\theta > 0$ уравнение (6) имеет единственное положительное решение.

Рассмотрим случай, когда $k = 2$. В этом случае справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $k = 2$. Тогда для системы уравнений (5) существует $\theta_{cr} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ такое, что при $\theta \geq \theta_{cr}$ существует ровно одна решение (z^*, z^*) , при $\theta < \theta_{cr}$ существуют ровно три решений (z^*, z^*) , (z_1^*, z_{-1}^*) , (z_{-1}^*, z_1^*) .

Из Теорема 2 следует следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $k = 2$. Тогда для модели НС-Блюма-Капеля (соответствующей графу G) существует $\theta_{cr} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ такое, что при $\theta \geq \theta_{cr}$ существует ровно одна трансляционно-инвариантная градиентная мера Гиббса μ_0 , при $\theta < \theta_{cr}$ существуют ровно три трансляционно-инвариантные градиентные меры Гиббса μ_0, μ_1, μ_2 .

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Henning F., Kulske C., Le Ny A., Rozikov U. A. Gradient gibbs measures for the SOS-model with countable values on a Cayley tree. Electron. J. Probab., vol.24, 2019.
2. U.A. Rozikov. Gibbs measures on Cayley trees. World Scientific.-2013.
3. E.N.Cirillo, E.Olivieri. Metastability and nucleation for the Blume-Capel model. Different mechanisms of transition. Journal of Statistical Physics, 83 (1996), 473-554.
4. N.Khatamov, R.Khakimov. Translation-invariant Gibbs measures for the Blume-Capel model on a Cayley tree. JMAG. 2019, Vol.15, No. 2, pp.239-255.
5. N.M.Khatamov. Translation-invariant extreme Gibbs measures for the Blume-Capel model with a wand on a Cayley tree. Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal, Vol 72, No. 4(2020), p.540-556.
6. Н.М.Хатамов. Структуры Холлидея в модели Блюма-Капелья молекулы ДНК. ТМФ, 206:3 (2021), 439-447.
7. N.M.Khatamov. Holliday junctions in the NC Blume-Capel model in "one case" on DNA. Nanosystems: physics, chemistry, mathematics, 12:5 (2021), 563-568.

ОБ АСИМПТОТИКЕ СРЕДНЕГО ВРЕМЕНИ ДОСТИЖЕНИЯ ВЫСОКОГО УРОВНЯ ПРОЦЕССОМ С ЗАДЕРЖИВАЮЩЕЙ ГРАНИЦЕЙ

Ходжибаев Вали

Д.ф.-м.н., Наманганский инженерно-строительный институт

Институт Математики АН РУз

Олимжонова Махлиё

Наманганский государственный университет

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ и $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$ взаимно независимые последовательности независимых случайных величин, одинаково распределённых внутри каждой последовательности, $P(\tau_1 > 0) = 1$. Обозначим

$$S_0 = 0, S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n, \tau(t) = \max\{k \geq 1: \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_k < t\},$$

$$\xi(t) = S_{\tau(t)}, \xi(0) = 0.$$

Последовательность $\{S_n\}$ описывает случайное блуждание частицы на числовой прямой с независимыми скачками $\{\xi_i\}$, происходящими через единичные промежутки времени, т.е. она соответствует случаю $P(\tau_1 = 1) = 1$. Процесс $\xi(t)$ называется обобщённым процессом восстановления, и в общем случае, не является однородным. Если случайная величина τ_1 показательна распределена, то $\xi(t)$ является однородным и называется обобщённым пуассоновским процессом.

Введём случайный процесс $\eta(t, a)$, $a \geq 0$ с задержкой на границе полуинтервала $[-a, \infty)$:

$$\eta(0, a) = 0, \eta(t, a) = \xi(t) - a - \min\{-a; \inf_{s \leq t} \xi(s)\}.$$

Такая схема случайных процессов присутствует в многих моделях задач последовательного анализа, теории хранения запасов, систем обслуживания с ограничениями и др. Для произвольного числа $b > 0$ введём случайную величину $\theta(a, b)$, равную моменту первого достижения уровня b траекториями случайного процесса $\eta(t, a)$:

$$\theta(a, b) = \inf\{t > 0 : \eta(t, a) \geq b\}.$$

Целью данной заметки является нахождение асимптотических разложений для среднего значения $E\theta(a, b)$ случайной величины $\theta(a, b)$ при $a + b \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$, когда $\xi(t)$ представляет собой обобщенный процесс восстановления. Литература, посвященная к изучению случайной величины $\theta(a, b)$, обширна. Приведем лишь некоторые работы, которые имеют непосредственное отношение к результатам настоящей работы. В случае $P(\tau_1 = 1) = 1$, то есть когда $\xi(t)$ является случайным блужданием с дискретным временем, получены асимптотические разложения для $E\theta(0, b)$ в [1], для характеристической функции распределения $\theta(a, b)$ в [2] при $a + b \rightarrow \infty$. В работах [1], [2] на распределение ξ_1 накладываются, в основном, условия крамеровского типа. В [3] доказаны предельные теоремы для распределения походящим образом нормированной случайной величины $\theta(a, b)$ в случае, когда

$$P(\tau_1 = 1) = 1, P(\xi_1 = -1) + P(\xi_1 = 0) + P(\xi_1 = 1) = 1.$$

В [4] для обобщённого пуассоновского процесса с положительными скачками и отрицательным сносом доказаны предельные теоремы для математического ожидания и преобразования Лапласа -Стилтьеса случайной величины $\theta(a, b)$ при $a + b \rightarrow \infty$. В случае, когда $\xi(t)$ является однородным процессом с независимыми приращениями в [5] установлены асимптотические разложения для $E\theta(0, b)$, а в [6] для преобразования Лапласа - Стилтьеса нормированной случайной величины $\theta(a, b)$ при $a + b \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$. В работах [5], [6] требуется существование у процесса $\xi(t)$ диффузионной компоненты или сноса. Тем самым из рассмотрения исключаются ступенчатые процессы. В связи с этим здесь рассматривается случай, когда $\xi(t)$

является обобщённым процессом восстановления, т.е. ступенчатым (но необязательно однородным). Библиографические сведения по данной задаче можно найти в [2] , [6].

Здесь приводим результат для случая $E\xi_1 < 0$. Аналогичным способом получены результаты и для случаев $E\xi_1 = 0, E\xi_1 > 0$. В данной работе существенно используются результаты работ [1] и [7], в связи с чем будем предполагать, выполненными следующие условия (см. [1] , [7]).

(C₁) Распределение ξ_1 содержит абсолютно непрерывную компоненту.

(C₂) $Ee^{\lambda\xi_1} < \infty$ при $-\alpha \leq \lambda \leq \beta, \alpha > 0, \beta > 0, E\xi_1 < 0, Ee^{\beta\xi_1} > 1$.

Пусть $f(\lambda) = Ee^{\lambda\xi_1}$. Известно (см , например, [8]), что в условиях (C₁) и (C₂) существует единственное положительное решение $\lambda = q$ уравнения $f(\lambda) = 1$, $0 < q < \beta$. А функция $r(\lambda) = 1 - f(\lambda)$ допускает факторизацию $r(\lambda) = r_+(\lambda)r_-(\lambda)$ при $-\alpha \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \beta$. Функции $r_{\pm}(\lambda)$ называются компонентами факторизации и для них известны различные представления через характеристик ξ_1 (см.напр. [8]).

Теорема. Пусть выполнены условия (C₁), (C₂) . Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что при $a \rightarrow \infty, b \rightarrow \infty$ □

$$E\theta(a,b) = |E\xi_1|^{-1} E\tau_1 \{c_1 e^{q(a+b)} - c_2 e^{qa} - 2a - b + c_3 + c_4(2b + c_5)e^{-qb}\} + \\ + o(e^{(2q-\beta)(a+b)}) + o(e^{-\alpha(a+b)}) + O(e^{qb-\varepsilon a}) + (a+b)O(e^{-(q+\varepsilon)b}) + O(e^{-(q+\varepsilon)a}),$$

где коэффициенты $c_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$ явным образом выражаются через значений компонент факторизации $r_{\pm}(\lambda)$ и их производных в точках 0 и q.

Отметим, что величина ε , участвующая в теореме, связана с возможностью функции $r(\lambda)$ сохранять свойство аналитичности в полосе $0 < \operatorname{Re} \lambda < q + \varepsilon$ и не иметь там комплексных нулей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лотов В.И. О случайных блужданиях в полосе. Теория вероятн. и ее примен.1991, том 36, выпуск 1, стр.160-165.
2. Лотов В.И. О достижении высокого уровня блужданием с задержкой в нуле. Сибирский матем. журн , 1999, том 40, № 6, стр.1276-1288 .
3. Булинская Е.В. О пересечении высокого уровня некоторым классом случайных процессов с дискретным временем. Фундаментальная и прикладная математика,1995, Т.1, №.1,стр. 81-107.
4. Корольюк В.С. Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. Киев, Наукова думка, 1975.
5. Khodjibayev V.R. Asymptotic representations for characteristics of exit from an interval for stochastic processes with independent increments. Siberian Adv.Math ,1997,Т. 7, №.3, pp.75-86.
6. Lotov V.I.Khodjibayev V.R.On the limit theorems for the first exit time from a strip for stochastic processes II.SiberianAdv.Math.,1998, v.8, №.4, p.41-59.

7.Лотов В.И. Об аппроксимации математического ожидания времени первого выхода случайного блуждания из интервала. Сиб. матем. журн., 2016, том 57, №.1, стр.113-120.

8. Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М:Наука, 1972, 368 с.

О КРАЙНИХ ТОЧЕК МНОЖЕСТВА БИСТОХАСТИЧЕСКИХ КВАДРАТИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Эшниязов Абдумалик

Гулистанский государственный университет

В работе [1] выделен класс квадратичных стохастических операторов (КСО), отображающих конечномерный симплекс в себя, которые называются бистохастическими квадратичными операторами (б.к.о.). б.к.о. тесно связаны с понятием мажоризации и применяются не только в задачах популяционной генетики [1], [10], но и в задачах экономики [11]. В математической экономике б.к.о называется оператором благосостояния. Изучение б.к.о было начато в работе [1] и было получено необходимое и достаточное условие для бистохастичности оператора. Эту теорему мы приведем ниже и неоднократно будем ею пользоваться. В данной работе показано, что множество б.к.о является выпуклым многогранником. Поэтому представляет интерес аналог теоремы Биркгофа о крайних точках множества бистохастических матриц [9]. Получены необходимые и достаточные условия для бистохастичности. Замечено, что множество всех бистохастических квадратичных операторов, действующих в S^{n-1} , образует многогранник. Более того определено количество крайних точек множества б.к.о в двумерном симплексе.

Пусть $S^{n-1} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0 \right\}$ – стандартный симплекс в R^n . Следуя [11], обозначим через $x_{\downarrow} = (x_{[1]}, \dots, x_{[n]})$, где $x_{[1]} \geq \dots \geq x_{[n]}$ – координаты точки $x \in S^{n-1}$, упорядоченные по невозрастанию.

Определение 1. [11]. Если $x, y \in S^{n-1}$ и выполнены неравенства $\sum_{i=1}^k x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^k y_{[i]}$, $k = \overline{1, n}$, то говорят, что y мажорирует x и пишут $x < y$.

Эти термины и обозначения введены Харди, Литтльвудом и Поля [12]. Очевидно, для любого $x \in S^{n-1}$ имеем

$$\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right) < x < (1, 0, \dots, 0).$$

Как известно [11], необходимым и достаточным условием для выполнения отношения $x < y$ является существование бистохастической матрицы P , такой, что $x = Py$. Напомним, что матрица $P = (P_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ называется бистохастической (дважды стохастической, двояко стохастической), если $P_{ij} \geq 0$, $\sum_{i=1}^n P_{ij} = \sum_{j=1}^n P_{ij} = 1$.

Следовательно, для бистохастической матрицы P справедливо отношение $Px \prec x$ для любой точки $x \in S^{n-1}$. Последнее свойство может быть принято в качестве определения бистохастичности P [11]. Следуя этому, мы сохраним термин бистохастичность за произвольным непрерывным (вообще говоря, нелинейным) оператором $V: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$, удовлетворяющим условию

$$Vx \prec x, \quad (1)$$

для всех $x \in S^{n-1}$.

В частности, квадратичный стохастический оператор $V: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ определяется равенством

$$(Vx)_k = \sum_{i,j=1}^n P_{ij,k} x_i x_j, \quad k = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где $P_{ij,k} = P_{ji,k} \geq 0$ и $\sum_{k=1}^n P_{ij,k} = 1$, при выполнении (1) называется бистохастическим (далее б.к.о.).

Теорема 1. [3] Если $V: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ – б.к.о., то коэффициенты $P_{ij,k}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\text{а) } \sum_{i,j=1}^n P_{ij,k} = n, \quad \forall k = \overline{1, n} \quad (3)$$

$$\text{б) } \sum_{j=1}^n P_{ij,k} \geq \frac{1}{2}, \quad \forall i, k = \overline{1, n} \quad (4)$$

$$\text{в) } \sum_{i,j \in I_t} P_{ij,k} \leq t, \quad \forall t, k = \overline{1, n}, \quad (5)$$

где $I_t = \{i_1, i_2, \dots, i_t\}$ – произвольное подмножество множества $I = \{1, 2, \dots, n\}$, содержащее t элементов.

Рассмотрим следующее уравнение относительно T .

$$A = \frac{1}{2}(T + T'), \quad (6)$$

где T' – транспонированная матрица.

Теорема 3. [4] Пусть $A = (a_{ij})$ – неотрицательная симметрическая матрица. Тогда для выполнения неравенства $x_{[n]} \leq (Ax, x) \leq x_{[1]}$, при всех $x \in S^{n-1}$, необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{i,j \in I_t} a_{ij} \leq t$, для любого $I_t = \{i_1, \dots, i_t\}$, где $t = \overline{1, n}$, причем при $t = n$ имеет место равенство.

Введём обозначения:

$$\mathfrak{Z}_k = \left\{ T = (t_{ij}), i, j = \overline{1, n}: 0 \leq t_{ij} \leq 1, \sum_{j=1}^n t_{ij} = k \right\}, \quad 1 \leq k \leq n$$

$$\mathbb{U}_k = \left\{ A = (a_{ij}): a_{ij} = a_{ji}, A = \frac{1}{2}(T + T'), T \in \mathfrak{Z}_k \right\}, \quad 1 \leq k \leq n$$

Далее $\mathbb{U}_k$ будем называть симметризацией $\mathfrak{Z}_k$.

Теорема 4. [4] Если $A \in \mathbb{U}_k$, то для любого $x \in S^{n-1}$ выполняется неравенство:

$$x_{[n]} + x_{[n-1]} + \dots + x_{[n-k+1]} \leq (Ax, x) \leq x_{[1]} + \dots + x_{[k]}.$$

Перечислим несколько простых свойств множеств $\mathbb{U}_k$, которые нам понадобятся.

Через E обозначим матрицу порядка $n \times n$, все элементы которой суть 1.

Теорема 5. [4] Верны следующие предложения:

- i) $A \in \mathbb{U}_k \Leftrightarrow E - A \in \mathbb{U}_{n-k}$, $k = \overline{1, n-1}$;
- ii) $\mathbb{U}_k \cap \mathbb{U}_l = \emptyset$, при $k \neq l$;
- iii) $\mathbb{U}_k = \{E\}$;
- iv) $A \in \mathbb{U}_k \Rightarrow \frac{p}{k} \cdot A \in \mathbb{U}_p$, $1 \leq p \leq k$;
- v) $\mathbb{U}_k + \mathbb{U}_l \supset \mathbb{U}_{k+l}$, $k+l \leq n$;
- vi) $\mathbb{U}_k$ — многогранник.

Квадратная матрица называется матрицей перестановки (перестановочной матрицей), если в каждой ее строке и в каждом столбце стоит ровно одна единица, а все остальные элементы являются нулями.

Напомним, что точка x множества A некоторого векторного пространства называется крайней, если $A \setminus \{x\}$ является выпуклым множеством. Множество всех крайних точек множества A обозначается через $\text{extr}A$.

Согласно теореме Биркгофа [9],

(I) крайними точками выпуклого множества бистохастических матриц являются матрицы перестановок,

(II) множество бистохастических матриц совпадает с замыканием выпуклой оболочки множества матриц перестановок.

Разумеется, если верно (I), то (II) вытекает из

(II') множество бистохастических матриц совпадает с замыканием выпуклой оболочки множества своих крайних точек.

Из приведенного определения бистохастичности, получение каких либо свойств б.к.о. является трудным.

Следовательно, получение необходимых и достаточных свойств для бистохастичности к.с.о. является весьма полезным.

Теорема 6. Пусть $V = (A_1 | A_2 | \dots | A_m) \in \mathbb{B}$. Если для некоторой перестановки π любых $m-1$ элементов из $\{1, 2, \dots, m\}$, $A_{\pi(k)} \in \text{extr}\mathbb{U}_1$, то $V \in \text{extr}\mathbb{B}$.

Теорема 7. Пусть $V = (A_1 | A_2 | A_3) \in \mathbb{B}$. $V \in \text{extr}\mathbb{B}$ тогда и только тогда, когда по крайней мере два из трех матриц A_1, A_2, A_3 являются крайними в $\mathbb{U}_1$.

Теорема 8. Если $A = (a_{ij}) \in \text{extr}\mathbb{U}_1$, то $a_{ii} = 0 \vee 1$, при $i \neq j$, $a_{ij} = 0 \vee 0,5 \vee 1$.

При $m=2$ условия теоремы 2 являются необходимыми и достаточными. Также количество крайних точек равно 4 и ими являются:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$$

Обозначим:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

Следствие 1. Если $m=3$, то $A \in \text{extr}U_1$ тогда и только тогда $a_{ii} = 0 \vee 1$, при $i \neq j$, $a_{ij} = 0 \vee 0,5 \vee 1$ и $A \neq H$. Более того, $|\text{extr}U_1| = 25$.

Следствие 2. При $m=3$, $|\text{extr}\mathbb{B}| = 222$.

Доказательство. Пусть $V = \text{extr}\mathbb{B}$, $V = (A_1 | A_2 | A_3)$. Из теоремы 6 следует, что $A_2, A_3 \in \text{extr}U_1$ с точностью до перестановки. Поэтому $A_1 + A_2 + A_3 = E$ следует, что либо $A_1 \in \text{extr}U_1$, либо $A_1 = H$.

Надо выбрать те тройки крайних точек, сумма которых равна E . Количество таких троек равно 37.

За счет перестановки получаем: $|\text{extr}\mathbb{B}| = 37 \times 3! = 222$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ганиходжаев Р.Н. Исследования по теории квадратичных стохастических операторов, Дис...докт. физ.-мат. наук, Ташкент, 1993.
2. Ганиходжаев Р.Н. К определению квадратичных бистохастических операторов // Успехи мат. наук.т.48, вып 4(292), 1993, С. 231.
3. Ганиходжаев Р.Н. О количестве вершин многогранника бистохастических квадратичных операторов // УзМЖ, 1998, № 6. – С. 29–35.
4. Ганиходжаев Р.Н., Эшниязов А.И. Бистохастические квадратичные операторы // УзМЖ, 2004, № 3. – С. 29–34.
5. Каримов А.З. Решение проблемы Г. Биркгофа для бистохастических квадратичных операторов. // ДАН Р Уз, № 10, 1994. – С. 8–11.
6. Каримов А.З. О выпуклом многограннике бистохастических квадратичных операторов и описание множества его вершин. // УзМЖ, № 4, 1995.– С. 45–52.
7. Шахиди Ф.А. О крайних точках множества бистохастических операторов. Матем. заметки, 2008, том 84, выпуск 3, 475-480.
8. Шахиди Ф.А. О бистохастических операторах, определенных в конечномерном симплексе. Сиб. мат. жур. Новосибирск, 2009,–2.(50). С. 463–469.
9. Birkhoff G. Tres observaciones sobre el algebra liheal // Univ.Nac. Tucuman. Rev. Ser.A 5, 1946. p. 147–151.
10. Ю. И. Любич, Математические структуры в популяционной генетике, Наукова Думка, Киев, 1983.
11. А. Маршалл, И. Олкин, Неравенства: Теория мажоризации и ее приложения, Мир, М., 1983.
12. Харди Г.Г., Литтлвуд Дж.Е., Полиа Г. Неравенства.–М.: ИЛ, 1948.–456 С.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ГРАНИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОДНОРОДНОГО ПУАССОНОВСКОГО ТОЧЕЧНОГО ПРОЦЕССА

Юлдошева Наргиза

НУУЗ

Настоящая работа, следуя [1,2], посвящена изучению свойств граничных функционалов выпуклых оболочек, порожденных независимыми наблюдениями над случайным вектором, имеющем пуассоновское распределение в конусе K .

Пусть K – конус, образованный двумя лучами $\ell_i = \{z : z = te_i, t > 0\}$, $i = 1, 2$, где e_1 и e_2 – единичные векторы. Обозначим через α угол между e_1 и e_2 и положим $e_0 = e_1 + e_2$.

Пусть далее $\Pi(\cdot)$ – о.п.т.п. с интенсивностью $\lambda(\cdot)$ ($\lambda(\cdot)$ – Лебегово мера). Обозначим через $\Pi(K)$ сужение этого процесса на K . Рассмотрим выпуклую оболочку C , порожденную $\Pi(K)$, и множество ее вершин Z .

Обозначим через $z_0 \in Z$ ту из вершин, для которой $(e_0, z - z_0) \geq 0$ для всех $z \in Z$. Очевидно, что z_0 определена однозначно почти наверное. При этом прямая

$$(e_0, z - z_0) = 0 \quad (1)$$

является опорной для C .

Пронумеруем теперь вершины C , обходя границу против часовой стрелки. Поскольку z_0 уже определена, то каждая из вершин, тем самым, получает свой номер j , $-\infty < j < \infty$. Выберем на луче ℓ_1 последовательность точек $\gamma_j = x_j e_1$, $j \geq 1$, лежащих на пересечении ℓ_1 и прямых, проходящих соответственно через вершины z_{j-1} и z_j . Аналогичным образом точки $\gamma_j = y_j e_2$, $j \leq -1$, получаются в результате пересечения ℓ_2 и прямых, проходящих соответственно через z_j и z_{j+1} .

Пусть δ_j , $j \neq 0$, – множество внутренних точек треугольника с вершинами $z_{j-1}, \gamma_{j-1}, \gamma_j$, если $j \geq 1$, и вершинами $z_{j+1}, \gamma_{j+1}, \gamma_j$, если $j \leq -1$. Обозначим через $\gamma_0 = x_0 e_1$, $\gamma'_0 = y_0 e_2$ вершины треугольника, множество внутренних точек которого мы обозначили через δ_0 .

Положим

$$\xi_j = \lambda(\delta_j).$$

Определим граничные функционалы

$$\theta_T = \inf \{j : x_j \geq T\}, \quad (2)$$

где $T > 0$.

Справедлива следующая

Теорема. Если θ_T определено по формуле (2) для реализации о.п.т.п. $\Pi(K)$, то при некотором $c > 0$

$$P(|\theta(T) - \alpha(T)| > y) \leq \exp\{-c \min(y, y^2 / \beta^2(T))\},$$

где $\alpha(T) = (2 \log T)/3$, $\beta^2(T) = (10 \log T)/27$.

Доказательство теоремы существенно опирается на результаты вероятностного неравенства А.Н.Колмогорова – аналога неравенства Чебышева для максимума последовательных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин, – и вероятностные неравенства В.В.Петрова для сумм случайных величин (см. например, теорему 16 в [3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Groeneboom P., Limit theorems for convex hulls//Probab. Th. Rel. Fields, 1988, v.79, N3, pp.327-368.
2. Formanov Sh.K., Khamdamov I.M., On some properties of vertex processes of random convex hulls, Cite as: AIP Conference Proceedings 2365, 060012 (2021); <https://doi.org/10.1063/5.0057259>, Published Online: 16 July 2021. 7P.
3. Петров В.В., Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука. 1987. 320с.

ДИНАМИКА КВАДРАТИЧНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ В ШЕСТИМЕРНОМ СИМПЛЕКСЕ

Юсупов Фаррух

Ташкентский Государственный Транспортный Университет

Ахмедова Дилафруз

Андижанский государственный университет

Пусть $S^m = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_{m+1}) \in R^{m+1} : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m+1} x_i = 1 \right\}$ стандартный m мерный

симплекс. Отображение V симплекса S^m в себя называется квадратичным стохастическим оператором (к.с.о), если для любого $x \in S^m$ и для всех $k = 1, \dots, m+1$

$$(Vx)_k = \sum_{i,j=1}^{m+1} P_{ij,k} x_i x_j, \text{ где } P_{ij,k} \geq 0, P_{ij,k} = P_{ji,k}, \sum_{i,j=1}^{m+1} P_{ij,k} = 1, i, j, k = 1, \dots, m+1.$$

В симплексе $S^6 = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_7) \in R^7 : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^7 x_i = 1 \right\}$ рассмотрим

квадратичный стохастический оператор вольтерровского типа (к.с.о.в.т)

$$V: \begin{cases} x'_1 = x_1[1 - a_{12}x_2 + a_{13}x_3 - a_{14}x_4 + a_{15}x_5 - a_{16}x_6 + a_{17}x_7] \\ x'_2 = x_2[1 + a_{12}x_1 - a_{23}x_3 + a_{24}x_4 - a_{25}x_5 + a_{26}x_6 - a_{17}x_7] \\ x'_3 = x_3[1 - a_{13}x_1 + a_{23}x_2 - a_{34}x_4 + a_{35}x_5 - a_{36}x_6 + a_{37}x_7] \\ x'_4 = x_4[1 + a_{14}x_1 - a_{24}x_2 + a_{34}x_3 - a_{45}x_5 + a_{46}x_6 - a_{47}x_7], \\ x'_5 = x_5[1 - a_{15}x_1 + a_{25}x_2 - a_{35}x_3 + a_{45}x_4 - a_{56}x_6 + a_{57}x_7] \\ x'_6 = x_6[1 + a_{16}x_1 - a_{26}x_2 + a_{36}x_3 - a_{46}x_4 + a_{56}x_5 - a_{67}x_7] \\ x'_7 = x_7[1 - a_{17}x_1 + a_{27}x_2 - a_{37}x_3 + a_{47}x_4 - a_{57}x_5 + a_{67}x_6] \end{cases}$$

где $a_{ki} \in [0,1]$ или $a_{ki} \in [-1,0]$ одновременно.

Кроме вершин $M_i (i = \overline{1,7})$ имеются неподвижные точки

$$C_{123} \left(\frac{a_{23}}{a_{12} + a_{13} + a_{23}}, \frac{a_{13}}{a_{12} + a_{13} + a_{23}}, \frac{a_{12}}{a_{12} + a_{13} + a_{23}}, 0, 0, 0, 0 \right),$$

$$C_{125}, C_{127}, C_{145}, C_{147}, C_{167}, C_{234}, C_{236}, C_{256}, C_{347}, C_{367}, C_{456}, C_{567}.$$

Введем обозначением:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (-a_{46}a_{23}a_{57} + a_{45}a_{67}a_{23} + a_{27}a_{56}a_{34} + a_{25}a_{67}a_{34} - a_{34}a_{26}a_{57} - a_{46}a_{35}a_{27} + a_{26}a_{47}a_{35} \\ &\quad - a_{67}a_{24}a_{35} - a_{25}a_{47}a_{36} + a_{36}a_{24}a_{57} + a_{45}a_{27}a_{36} + a_{56}a_{47}a_{23} + a_{46}a_{37}a_{25} - a_{24}a_{56}a_{37} - a_{45}a_{26}a_{37})^2 \\ \Delta_2 &= (a_{45}a_{67}a_{13} + a_{45}a_{36}a_{17} - a_{45}a_{16}a_{37} + a_{56}a_{47}a_{13} - a_{46}a_{57}a_{13} + a_{15}a_{67}a_{34} - a_{16}a_{57}a_{34} \\ &\quad + a_{56}a_{17}a_{34} - a_{14}a_{67}a_{35} + a_{47}a_{16}a_{35} - a_{46}a_{17}a_{35} + a_{14}a_{57}a_{36} - a_{15}a_{47}a_{36} - a_{14}a_{56}a_{37} + a_{15}a_{46}a_{37})^2 \\ \Delta_3 &= (-a_{46}a_{12}a_{57} + a_{45}a_{67}a_{12} + a_{56}a_{47}a_{12} + a_{56}a_{17}a_{24} - a_{24}a_{16}a_{57} + a_{15}a_{67}a_{24} + a_{16}a_{47}a_{25} \\ &\quad - a_{14}a_{67}a_{25} - a_{46}a_{25}a_{17} + a_{45}a_{17}a_{26} - a_{15}a_{47}a_{26} + a_{26}a_{14}a_{57} - a_{45}a_{16}a_{27} - a_{14}a_{56}a_{27} + a_{46}a_{27}a_{15})^2 \\ \Delta_4 &= (-a_{35}a_{16}a_{27} - a_{13}a_{56}a_{27} + a_{36}a_{27}a_{15} - a_{23}a_{16}a_{57} + a_{56}a_{17}a_{23} + a_{15}a_{67}a_{23} - a_{36}a_{25}a_{17} - \\ &\quad - a_{67}a_{13}a_{25} + a_{16}a_{37}a_{25} - a_{15}a_{37}a_{26} + a_{26}a_{13}a_{57} + a_{35}a_{17}a_{26} - a_{36}a_{12}a_{57} + a_{56}a_{37}a_{12} + a_{35}a_{67}a_{12})^2 \\ \Delta_5 &= (a_{36}a_{27}a_{14} - a_{34}a_{16}a_{27} - a_{13}a_{46}a_{27} + a_{34}a_{67}a_{12} + a_{46}a_{37}a_{12} - a_{36}a_{12}a_{47} + a_{14}a_{67}a_{23} \\ &\quad + a_{46}a_{17}a_{23} - a_{23}a_{16}a_{47} - a_{36}a_{27}a_{17} + a_{16}a_{37}a_{24} - a_{67}a_{13}a_{24} + a_{34}a_{17}a_{26} + a_{26}a_{13}a_{47} - a_{14}a_{37}a_{26})^2 \\ \Delta_6 &= (-a_{13}a_{45}a_{27} - a_{34}a_{15}a_{27} + a_{35}a_{27}a_{14} + a_{45}a_{37}a_{12} + a_{34}a_{57}a_{12} - a_{35}a_{12}a_{47} + a_{45}a_{17}a_{23} \\ &\quad - a_{23}a_{15}a_{47} + a_{14}a_{57}a_{23} - a_{35}a_{24}a_{17} + a_{15}a_{37}a_{24} - a_{57}a_{13}a_{24} + a_{34}a_{17}a_{25} + a_{25}a_{13}a_{47} - a_{14}a_{37}a_{25})^2 \\ \Delta_7 &= (a_{36}a_{15}a_{24} - a_{35}a_{16}a_{24} - a_{56}a_{13}a_{24} - a_{46}a_{15}a_{23} + a_{45}a_{16}a_{23} + a_{56}a_{14}a_{23} - a_{45}a_{13}a_{26} \\ &\quad - a_{34}a_{15}a_{26} + a_{35}a_{14}a_{26} - a_{46}a_{35}a_{12} + a_{34}a_{56}a_{12} + a_{45}a_{36}a_{12} - a_{36}a_{14}a_{25} + a_{34}a_{16}a_{25} + a_{46}a_{13}a_{25})^2 \\ \Delta &= \sum_{i=1}^7 \Delta_i. \end{aligned}$$

Сначала строим функционалы φ_{ijk} относительно неподвижных точек C_{ijk} и оценим их:

$$\begin{aligned}
\phi_{145}(x') &\leq \frac{\phi_{145}(x)}{\Delta_{145}} [\Delta_{145} - (a_{12}a_{45} + a_{14}a_{25} - a_{15}a_{24})x_2 + (a_{13}a_{45} + a_{15}a_{34} - a_{14}a_{35})x_3 - \\
&\quad - (a_{15}a_{46} + a_{14}a_{56} - a_{16}a_{45})x_6 + (a_{17}a_{45} + a_{14}a_{57} - a_{15}a_{47})x_7] \\
\phi_{146}(x') &\leq \frac{\phi_{146}(x)}{\Delta_{146}} [\Delta_{146} - (a_{12}a_{46} + a_{26}a_{14} - a_{16}a_{24})x_2 + (a_{13}a_{46} + a_{16}a_{34} - a_{14}a_{36})x_3 + \\
&\quad + (a_{46}a_{15} + a_{56}a_{14} - a_{16}a_{45})x_5 - (a_{47}a_{16} + a_{67}a_{14} - a_{17}a_{46})x_7] \\
\phi_{147}(x') &\leq \frac{\phi_{147}(x)}{\Delta_{147}} [\Delta_{147} - (a_{12}a_{47} + a_{27}a_{14} - a_{24}a_{17})x_2 + (a_{13}a_{47} + a_{34}a_{17} - a_{37}a_{14})x_3 - \\
&\quad - (a_{45}a_{17} + a_{57}a_{14} - a_{15}a_{47})x_5 + (a_{16}a_{47} + a_{67}a_{14} - a_{46}a_{17})x_6] \\
\phi_{245}(x') &\leq \frac{\phi_{245}(x)}{\Delta_{245}} [\Delta_{245} + (a_{12}a_{45} + a_{14}a_{25} - a_{15}a_{24})x_1 - (a_{23}a_{45} + a_{35}a_{24} - a_{34}a_{25})x_3 - \\
&\quad - (a_{46}a_{25} + a_{56}a_{24} - a_{26}a_{45})x_6 + (a_{27}a_{45} + a_{57}a_{24} - a_{47}a_{25})x_7] \\
\phi_{246}(x') &\leq \frac{\phi_{246}(x)}{\Delta_{246}} [\Delta_{246} + (a_{12}a_{46} + a_{14}a_{26} - a_{16}a_{24})x_2 - (a_{23}a_{46} + a_{36}a_{24} - a_{34}a_{26})x_3 + \\
&\quad + (a_{25}a_{46} + a_{56}a_{24} - a_{45}a_{26})x_5 - (a_{47}a_{26} + a_{67}a_{24} - a_{27}a_{46})x_7] \\
\phi_{247}(x') &\leq \frac{\phi_{247}(x)}{\Delta_{247}} [\Delta_{247} + (a_{12}a_{47} + a_{14}a_{27} - a_{17}a_{24})x_1 - (a_{23}a_{47} + a_{37}a_{24} - a_{34}a_{27})x_3 - \\
&\quad - (a_{45}a_{27} + a_{57}a_{24} - a_{25}a_{47})x_5 + (a_{26}a_{47} + a_{24}a_{67} - a_{46}a_{27})x_6] \\
\phi_{345}(x') &\leq \frac{\phi_{345}(x)}{\Delta_{345}} [\Delta_{345} - (a_{13}a_{45} + a_{15}a_{34} - a_{14}a_{35})x_1 + (a_{23}a_{45} + a_{24}a_{35} - a_{25}a_{34})x_2 - \\
&\quad - (a_{46}a_{35} + a_{56}a_{34} - a_{36}a_{45})x_6 + (a_{37}a_{45} + a_{57}a_{34} - a_{47}a_{35})x_7] \\
\phi_{346}(x') &\leq \frac{\phi_{346}(x)}{\Delta_{346}} [\Delta_{346} - (a_{13}a_{46} + a_{16}a_{34} - a_{14}a_{36})x_1 + (a_{23}a_{46} + a_{24}a_{36} - a_{26}a_{34})x_2 + \\
&\quad + (a_{46}a_{35} + a_{56}a_{34} - a_{35}a_{46})x_5 - (a_{47}a_{36} + a_{67}a_{34} - a_{37}a_{46})x_7] \\
\phi_{347}(x') &\leq \frac{\phi_{347}(x)}{\Delta_{347}} [\Delta_{347} - (a_{13}a_{47} + a_{17}a_{34} - a_{14}a_{57})x_1 + (a_{23}a_{47} + a_{24}a_{37} - a_{27}a_{34})x_2 - \\
&\quad - (a_{45}a_{37} + a_{57}a_{34} - a_{35}a_{47})x_5 + (a_{36}a_{47} + a_{67}a_{34} - a_{46}a_{37})x_6] \\
\phi_{123}(x') &\leq \frac{\phi_{123}(x)}{\Delta_{123}} [\Delta_{123} - (a_{14}a_{23} + a_{24}a_{13} + a_{34}a_{12})x_4 + (a_{15}a_{23} + a_{25}a_{13} - a_{35}a_{12})x_5 + \\
&\quad + (a_{16}a_{25} + a_{26}a_{13} + a_{36}a_{12})x_6 + (a_{17}a_{23} + a_{27}a_{13} + a_{37}a_{12})x_7] \\
\phi_{567}(x') &\leq \frac{\phi_{567}(x)}{\Delta_{567}} [\Delta_{567} - (a_{15}a_{67} + a_{16}a_{57} + a_{17}a_{56})x_1 - (a_{25}a_{67} + a_{26}a_{57} + a_{27}a_{56})x_2 - \\
&\quad - (a_{35}a_{67} + a_{36}a_{57} + a_{37}a_{56})x_3 + (a_{45}a_{67} + a_{46}a_{57} + a_{47}a_{56})x_4]
\end{aligned}$$

Обозначая внутренние скобки, имеем

$$\begin{aligned}
\phi_{145}(x') &\leq \frac{\phi_{145}(x)}{\Delta_{145}} [\Delta_{145} - K_1 x_2 + K_2 x_3 - K_3 x_6 + K_4 x_7] \\
\phi_{146}(x') &\leq \frac{\phi_{146}(x)}{\Delta_{146}} [\Delta_{146} - K_5 x_2 + K_6 x_3 + K_3 x_5 - K_7 x_7] \\
\phi_{147}(x') &\leq \frac{\phi_{147}(x)}{\Delta_{147}} [\Delta_{147} - K_8 x_2 + K_9 x_3 - K_4 x_5 + K_7 x_6] \\
\phi_{245}(x') &\leq \frac{\phi_{245}(x)}{\Delta_{245}} [\Delta_{245} + K_1 x_1 - K_{10} x_3 - K_4 x_6 + K_{12} x_7] \\
\phi_{246}(x') &\leq \frac{\phi_{246}(x)}{\Delta_{246}} [\Delta_{246} - K_5 x_1 - K_{13} x_3 + K_{11} x_5 - K_{14} x_7] \\
\phi_{247}(x') &\leq \frac{\phi_{247}(x)}{\Delta_{247}} [\Delta_{247} - K_8 x_1 - K_{15} x_3 - K_{12} x_5 + K_{14} x_6] \\
\phi_{345}(x') &\leq \frac{\phi_{345}(x)}{\Delta_{345}} [\Delta_{345} - K_2 x_1 + K_{10} x_2 - K_{16} x_6 + K_{17} x_7] \\
\phi_{346}(x') &\leq \frac{\phi_{346}(x)}{\Delta_{346}} [\Delta_{346} - K_6 x_1 + K_{13} x_2 + K_{16} x_5 - K_{18} x_7] \\
\phi_{347}(x') &\leq \frac{\phi_{347}(x)}{\Delta_{347}} [\Delta_{347} - K_9 x_1 + K_{15} x_2 - K_{17} x_5 + K_{18} x_6] \\
\phi_{123}(x') &\leq \frac{\phi_{123}(x)}{\Delta_{123}} [\Delta_{123} - K_{19} x_4 + K_{20} x_5 + K_{21} x_6 + K_{22} x_7] \\
\phi_{567}(x') &\leq \frac{\phi_{567}(x)}{\Delta_{567}} [\Delta_{567} - K_{23} x_1 - K_{24} x_2 - K_{25} x_3 + K_{26} x_4]
\end{aligned}$$

Если среди функционалов $\phi_{ijk}(x)$ не существует функция Ляпунова, то существует внутренняя неподвижная точка C . Мы будем исследовать только такие случаи.

Лемма 1. Пусть $x \in \text{int} S^6$, $x \neq C$, то предельное множество траектории бесконечно и лежит на границе симплекса S^6 , т.е. $\omega(x) \subset \partial S^6$.

Если Δ_i имеют одинаковые знаки, то существует внутренний неподвижная точка

$$C\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, \frac{\Delta_7}{\Delta}\right).$$

Теорема 1. Если выполняется только один из этих условий

- I.** $a_{12} < 0, a_{14} < 0, a_{16} < 0, a_{13} > 0, a_{15} > 0, a_{17} > 0$;
- II.** $a_{23} < 0, a_{25} < 0, a_{27} < 0, a_{12} > 0, a_{24} > 0, a_{26} > 0$;
- III.** $a_{13} < 0, a_{34} < 0, a_{36} < 0, a_{23} > 0, a_{25} > 0, a_{27} > 0$;
- IV.** $a_{24} < 0, a_{45} < 0, a_{47} < 0, a_{14} > 0, a_{34} > 0, a_{46} > 0$;

V. $a_{15} < 0, a_{35} < 0, a_{56} < 0, a_{25} > 0, a_{45} > 0, a_{57} > 0$;

VI. $a_{26} < 0, a_{46} < 0, a_{67} < 0, a_{16} > 0, a_{36} > 0, a_{56} > 0$;

VII. $a_{17} < 0, a_{37} < 0, a_{57} < 0, a_{27} > 0, a_{47} > 0, a_{67} > 0$.

То к.с.о.в.т. V эргодичен в $\text{int } S^6$.

Теорема 2. Если Δ_i ($i = \overline{1, 7}$) имеют разные знаки, множество предельных точек бесконечно и $\omega(x) \subset \partial S^6$.

Теорема 3. Если Δ_i ($i = \overline{1, 7}$) имеют одинаковые знаки, то к.с.о.в.т. V неэргодичен, т.е. не существует $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} V^k x$.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. I. Zakharevich, Uspekhi Mat. Nauk 33:6 (1978), 207–208; English transl., Russian Math. Surveys 33:6 (1978), 265–266.

2. К.А.Курганов. Асимптотическое поведение траекторий дискретных динамических систем, порожденных квадратичными стохастическими операторами вольтерровского типа. Канд. Дисс. АН. Р. Узбекистан. Институт математики имени В.И. Ромоновского .1994 г.

3. N.Ganikhodjaev, R.Ganikhodjaev, U.Jamilov, Quadratic stochastic operators and zero-sum game dynamics, Ergod. Th. and Dynam. Sys. 35(5) (2015) 1443–1473.

ДИНАМИКА КВАДРАТИЧНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА, ДЕЙСТВУЮЩИХ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ СИМПЛЕКСЕ

Юсупов Фаррух

Ташкентский Государственный Транспортный Университет

Известно [1], что множество

$$S^{m-1} = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i, i = \overline{1, m} \right\},$$

называется $(m-1)$ - мерным симплексом, определенным в пространстве R^m . А также известно [1], что отображение $V : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ называется стохастическим и может быть представлено в следующем виде:

$$V : x'_k = \sum_{i=1, j}^m P_{ij, k} x_i x_j, \quad k = \overline{1, m}. \quad (1)$$

Здесь коэффициенты $\{P_{ij, k}\}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$P_{ij, k} \geq 0, P_{ij, k} = P_{ji, k}, \sum_{k=1}^m P_{ij, k} = 1; i, j, k = \overline{1, m}; \quad (2)$$

Условия (2) обеспечивают стохастичность оператора V .

Определение 1[1]. Если для квадратичного стохастического оператора $V: S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ выполняется условие $P_{ij,k} = 0$ при $k \notin \{i, j\}$, тогда оператор V называется квадратичным стохастическим оператором вольтерровского типа.

Утверждение [1]. Квадратичные стохастические операторы вольтерровского типа могут быть представлены следующим образом:

$$x'_k = x_k \left(1 + \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i \right). \quad (3)$$

Здесь $a_{ki} = 2P_{ik,k} - 1$, если $i \neq k$ и $a_{kk} = 0$, а также

$$|a_{ki}| \leq 1, a_{ki} = -a_{ik}, k = \overline{1, m}. \quad (4)$$

Пусть квадратичный стохастический оператор вольтерровского типа, действующего в четырехмерном симплексе

$$S^4 = \left\{ x \in R^5 : x \geq 0, x = (x_1, x_2, \dots, x_5) \in R^5, \sum_{i=1}^5 x_i = 1 \right\}$$

имеет вид

$$V: \begin{cases} x'_1 = x_1 [1 - a_{12}x_2 + a_{13}x_3 - a_{14}x_4 + a_{15}x_5] \\ x'_2 = x_2 [1 + a_{12}x_1 - a_{23}x_3 + a_{24}x_4 - a_{25}x_5] \\ x'_3 = x_3 [1 - a_{13}x_1 + a_{23}x_2 - a_{34}x_4 + a_{35}x_5] \\ x'_4 = x_4 [1 + a_{14}x_1 - a_{24}x_2 + a_{34}x_3 - a_{45}x_5] \\ x'_5 = x_5 [1 - a_{15}x_1 + a_{25}x_2 - a_{35}x_3 + a_{45}x_4] \end{cases} \quad (5)$$

Наряду с этим отображением возьмем некий турнир [2], определенный коэффициентами кососимметрической матрицы, удовлетворяющими условиям (4).

Если турнир сильный ([1], [2]), то он может иметь внутреннюю неподвижную точку соответствующего квадратичного стохастического оператора вольтерровского типа. Отображение (5) является квадратичным стохастическим оператором вольтерровского типа, которому соответствует турнир с наибольшим количеством циклических троек.

Этот оператор имеет внутреннюю неподвижную точку, которая имеет вид

$$C \left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \frac{\Delta_3}{\Delta}, \frac{\Delta_4}{\Delta}, \frac{\Delta_5}{\Delta} \right),$$

где координаты определяются в виде

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_{25}a_{34} - a_{24}a_{35} + a_{23}a_{45}, \\ \Delta_2 &= a_{13}a_{45} - a_{14}a_{35} + a_{15}a_{34}, \\ \Delta_3 &= a_{12}a_{45} - a_{25}a_{14} + a_{24}a_{15}, \\ \Delta_4 &= a_{15}a_{25} - a_{25}a_{13} + a_{12}a_{35}, \\ \Delta_5 &= a_{14}a_{23} - a_{13}a_{24} + a_{12}a_{34}, \\ \Delta &= \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5. \end{aligned}$$

Теорема. Пусть $x \in \text{Int}S^4$, $x \neq C$. Тогда множество предельных точек бесконечно и лежит на границе симплекса S^4 .

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Ganikhodzhaev R.N. Quadratic stochastic operators, Lyapunov function and tournaments, Acad. Sci. Sb. Math., 76(2), (1993) pp.489-506.
2. Ganikhodzhaev R.N., Tadzieva M.A., Eshmamatova D.B. Dynamical Properties of Quadratic Homeomorphisms of a Finite-Dimensional Simplex. Journal of Mathematical Sciences 245 (3). P. 398-402.
3. N. Ganikhodjaev, R.Ganikhodjaev, U. Jamilov, Quadratic stochastic operators and zero-sum game dynamics, Ergod. Th. and Dynam. Sys. 35 (5) (2015) 1443-1473.

4-SHO "BA. MATEMATIK MODELLASHTIRISH VA ZAMONAVIY HISOBLASH USULLARI

A STUDY OF THE KAPLAN-MEIER ESTIMATOR AND ITS DEPENDENCE ON THE DEGREE OF CENSORSHIP

Abdushukurov Abdurakhim

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Moscow State University Tashkent branch

Mansurov Dilshod

Navoi State Pedagogical Institute

Censored data occur in survival analysis, bio-medical trials and industrial experiments. There are several schemas of censoring (from the right, left, both sides, mixed with competing risks and others). However, in statistical literature right random censoring is wide spread, in so far as it was easily described from the methodological point of view. Here we consider also this kind of censorship in order to comparing our results with others.

Let $X_1, X_2, \dots$ and $Y_1, Y_2, \dots$ be two independent sequences of independent and identically distributed (i.i.d.) random variables (r.v.-s) with common unknown continuous distribution functions (d.f.-s) F and G , respectively. Let the X_j be censored on the right by Y_j , so that the observations available for us at the n -th stage consist of the sample $C^{(n)} = \{(Z_j, \delta_j), 1 \leq j \leq n\}$, where $Z_j = \min(X_j, Y_j)$ and $\delta_j = I(X_j \leq Y_j)$ with $I(A)$ meaning the indicator of the event A .

The main problem consists a nonparametrical estimating of d.f. F with nuisance d.f. G based on censored sample $C^{(n)}$, where the number of observed $X_j - s$, $\nu_n = \delta_1 + \dots + \delta_n$ is a random.

Kaplan and Meier [1] were the first to suggest the product-limit (PL) estimator F_n^{PL} of F defined as

$$F_n^{PL}(t) = \begin{cases} 1 - \prod_{\{j: Z_{(j)} \leq t\}} \left(1 - \frac{\delta_{(j)}}{n - j + 1}\right), & t \leq Z_{(n)}, \\ 1, & t > Z_{(n)}, \quad \delta_{(n)} = 1, \\ \text{undefined}, & t > Z_{(n)}, \quad \delta_{(n)} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

where $Z_{(1)} \leq \dots \leq Z_{(n)}$ are the order statistics of Z -sample $\{Z_j, 1 \leq j \leq n\}$ and $\{\delta_{(j)}, 1 \leq j \leq n\}$ the sequence of indicators adjunct to the ordered Z -sample. There are a different versions of PL-estimators.

Now let's find the average values of the $D_n = \sup_{t \geq 0} |F(t) - F_n^{PL}(t)|$ values in 1000 experiments and build the following tables (table 1, table 2).

Table 1: Deviations of Kaplan-Meier estimates from the theoretical distribution function (Exponential distribution)

Exponential distribution ($\lambda = 1$)					
Average degree of censorship	$n = 100$	$n = 200$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$
%	0,05812	0,04126	0,02597	0,01863	0,01302
10 %	0,06161	0,04225	0,02740	0,01959	0,01347
20 %	0,06429	0,04448	0,02803	0,02007	0,01406
30 %	0,06983	0,04821	0,03063	0,02111	0,01491
40 %	0,07465	0,05443	0,03420	0,02381	0,01680
50 %	0,08564	0,06007	0,03695	0,02715	0,01934
60 %	0,08805	0,07125	0,04619	0,03309	0,02295
70 %	0,09344	0,07514	0,06948	0,04823	0,03496
80 %	0,11543	0,08082	0,07368	0,05451	0,04654

Table 2: Deviations of Kaplan-Meier estimates from the theoretical distribution function (Weibull Distribution)

Weibull Distribution ($c = 2$)					
Average degree of censorship	$n = 100$	$n = 200$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$
%	0,05344	0,03775	0,02410	0,01693	0,01205
10 %	0,05355	0,03747	0,02419	0,01688	0,01232
20 %	0,05559	0,03903	0,02423	0,01716	0,01254
30 %	0,05574	0,03929	0,02479	0,01771	0,01263
40 %	0,05913	0,04029	0,02610	0,01806	0,01314
50 %	0,06066	0,04235	0,02684	0,01850	0,01330
60 %	0,06374	0,04499	0,02826	0,01976	0,01411
70 %	0,06725	0,04756	0,03001	0,02078	0,01517
80 %	0,08284	0,05887	0,03832	0,02651	0,01840

Based on the tables above, we can draw these histograms (figure 1, figure 2).

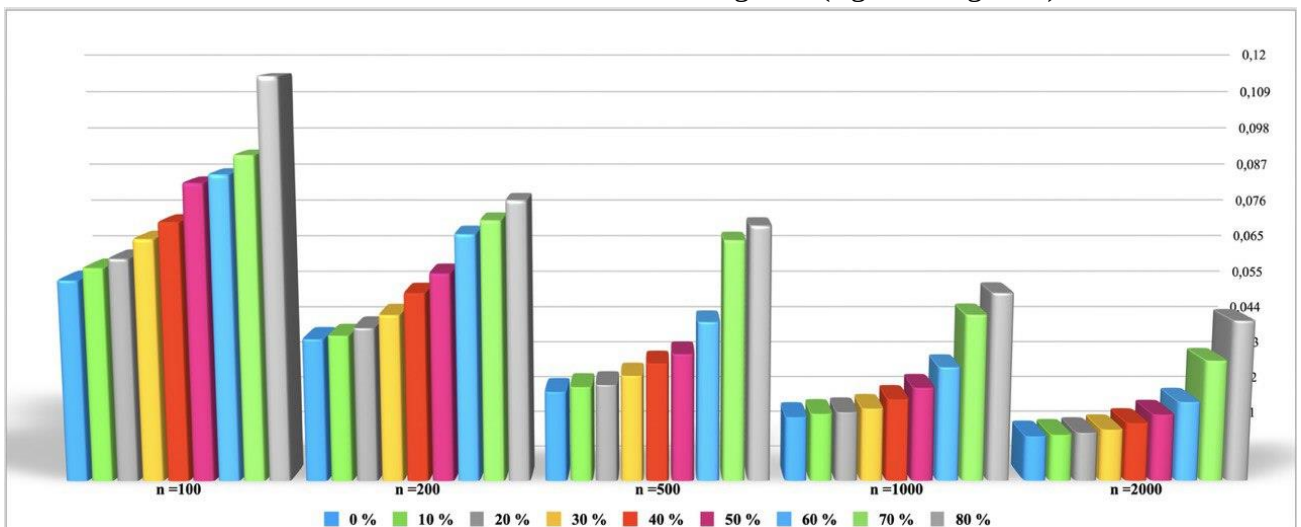


Figure 1: Deviations of Kaplan-Meier estimates from the theoretical distribution function

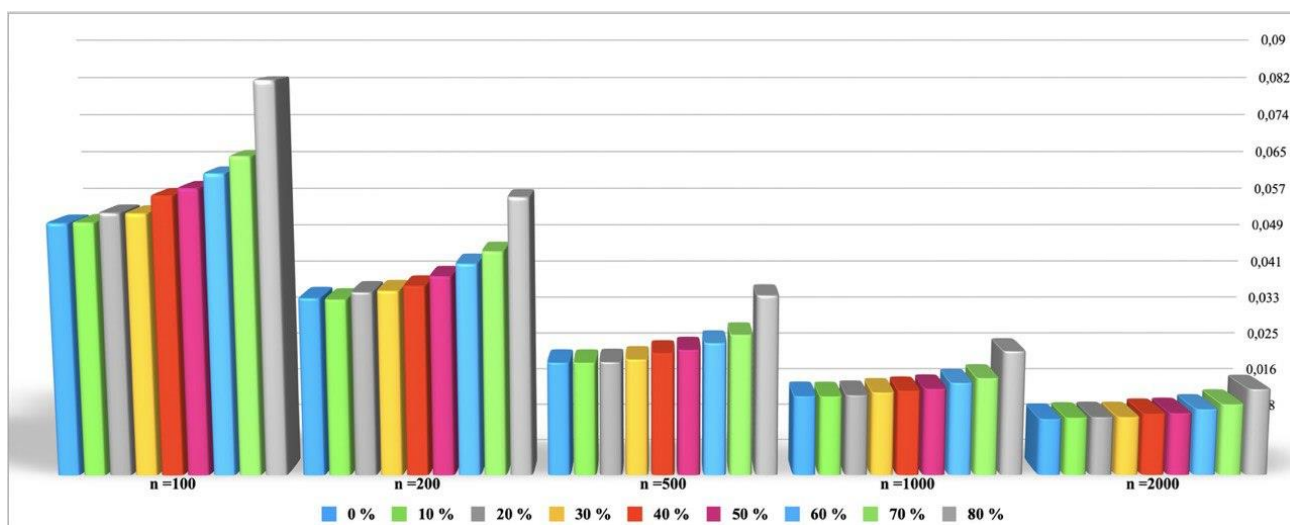


Figure 2: Deviations of Kaplan-Meier estimates from the theoretical distribution function (Weibull Distribution)

The graph below shows how close the estimate is to the distribution function ($n = 500$, 47% censor.).

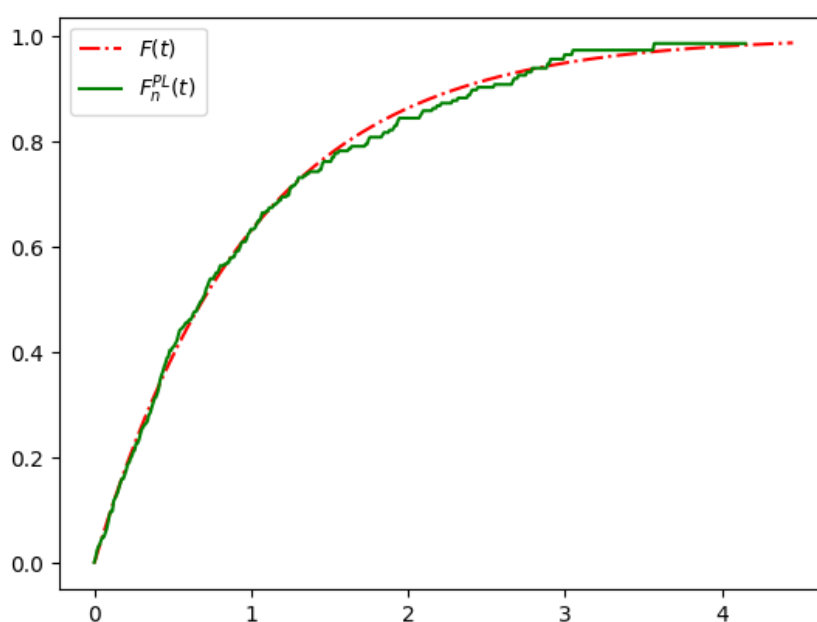


Figure 3: Kaplan-Meier estimate (Exponential distribution ($\lambda = 1$))

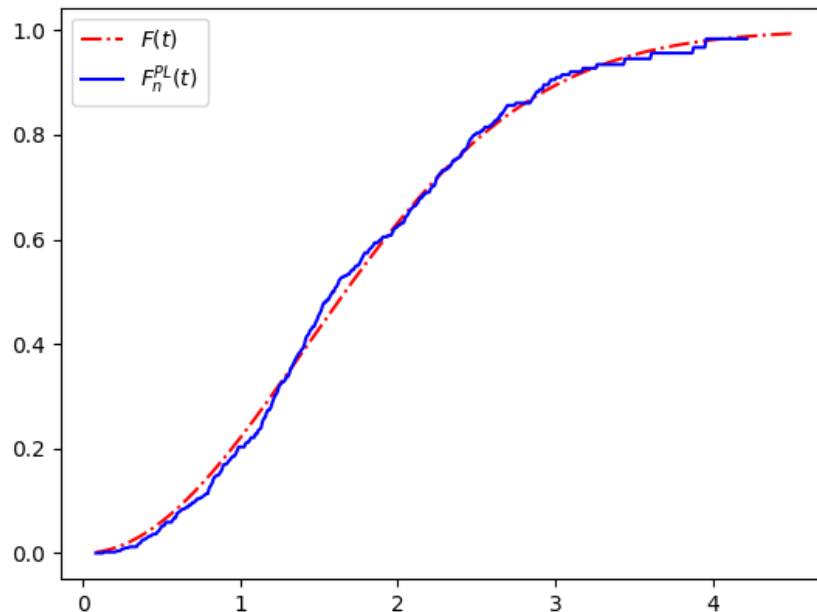


Figure 4: Kaplan-Meier estimate (Weibull distribution ($c = 2$))

However, those do not coincide, if the largest Z_j is a censoring time. There is an enormous set of the works on investigating of several properties of PL-estimators and their application on statistical problems, specially in case of right random censorship.

REFERENCES

1. Kaplan, E. L. and Meier, P. (1958) Nonparametric estimation from incomplete observation. J. Am. Stat. Assoc. 53, 457-481.

CALCULATION OF CONVERGENCE ISSUES USING MATLAB SOFTWARE FOR CONVERGENCES BUILT ON THE BASIS OF THE CENTRAL LIMIT THEOREM

Aliyeva Jamila

PhD, Andijan State University

Qo'chqarova Arofat

Andijan State University

As you know, the function is the main object, which is studied in the course of mathematical analysis. And many issues are related to the calculation of the function. The complexity of the function makes it a big challenge in such calculations. As a result, the question of approximate expression arises - to approach the function with a function that is simpler and more convenient to calculate than it.

It is widely used when calculating the function from the spread of a level row to its approximate. In this case, the function is replaced by the partial sum of the number of degrees, and the finding of the value of the function at a given point is brought to the question of calculating the value of the polynomial at that point. The degree array can be simple according to its structure, and the fact that its partial sum is a simple polynomial leads to the fact that it can effectively calculate the value of a function at a given point.

It should also be noted that such an option will be available only for "good" functions, that is, for those functions that have derivatives in the desired order and have satisfied a

certain condition. If an optional continuous function is given, it becomes a question of whether it can be calculated approximately with the help of a polynomial. That is, the question arises of generalizing the possibility of replacing a function with a polynomial from a class of analytical functions to a class of continuous functions. The fact that continuous function can be approached with a polynomial is known in 1885 year by the famous German mathematician shown by K.Weyersstrass.

In addition, many mathematicians around this issue (S.N. Bernshteyn, P.P. Koravkin, M.A. Lavrentev, S.N.Margelyan, M.V.Geldish, S.M. Nikolsky and others) who conducted research.

In this article, the question of how to approach the function with a polynomial $f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$ for the function was carried out using Bernshteyn polynomials. $f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$ for function $n=1, 2, \dots, 10$ Bernshteyn can account for multiples when there is. It is possible to use the MATLAB software package to make these calculations even easier.

MATLAB is one of the time-tested mathematical calculus automation systems. It is based on the application of matrix operations. The thing is that the name of the system — MATrix LABoratory - is reflected in the Matrix laboratory. Matrices are widely used in complex mathematical calculations, including solving linear algebra problems and modeling of dynamic systems and objects. They are the basis for automatically compiling and solving the case equations of dynamic systems and objects. Matlab's extension to this can be Simulink example. At present, MATLAB has evolved into a computer modeling system with universal integration beyond the boundaries of a specialized matrix system. In general, MATLAB embodied the experience of mathematical calculations accumulated during the development of mathematics, and it was adapted to it by means of graphic visualization and animation. The MATLAB system can perform the function of a multi-track reference on mathematical provision of exm together with the documents in a large volume to which it is attached. Currently, the newest versions of the system are MATLAB-6 and MATLAB-7. The function of the MATLAB system is to provide users with a wide range of modeling tools that have advantages over traditional programming languages and are capable of solving various types of issues. The possibilities of MATLAB are very wide. It can be used in any field of Science and technology for the performance and modeling of calculations.

The Simulink program, which is part of MATLAB, gives the opportunity to simulate real systems and devices by entering them in the form of models made from functional blocks. Solving complex mathematical problems with the help of several systems gives you the opportunity to choose the best and suitable tools and increase the reliability of the results obtained. In summary, MATLAB has a high level of flexibility to address users' issues. MATLAB system is designed as a powerful math-oriented high-level programming language. Such a direction is one of the advantages of the system and is an indication that it can be used to solve new, more complex mathematical problems. The language of the MATLAB system is richer than any existing high-level universal programming languages in the field of programming mathematical calculations. It implements almost all the programming tools currently available, including object-oriented and visual programming (using Simulink tools). In general, the use of the MATLAB system provides unlimited opportunities for experienced programmers to realize their ideas and ideas.

We calculate the above function using the MATLAB system, and we can also see the graph of these results.

```

step= zeros(1,10);
step(1)=1;
for i=2:10
    step(i)=step(i-1)/2;
end
for i=1:10
    % This is our function
    f=@(x) abs(x-1/2);
    % Samples
    sample_t=0:step(i):1;
    sample_y=f(sample_t);
    % Polynomial Degree (Sample-1)
    degreepoly = length(sample_t)-1;
    % Make our Basis functions:  $(n!/[(n-k)!k!]) x^{\{k\}} (1-x)^{\{n-k\}}$ 
    a=zeros(1,degreepoly+1);
    for i = 1:degreepoly+1
        a(i)=nchoosek(degreepoly,i-1);
    end
    polynomialbasis = @(x) a.*(x.^[0:degreepoly]).*(1-x).^[degreepoly:-1:0];
    pa = @(x) polynomialbasis(x)*sample_y';

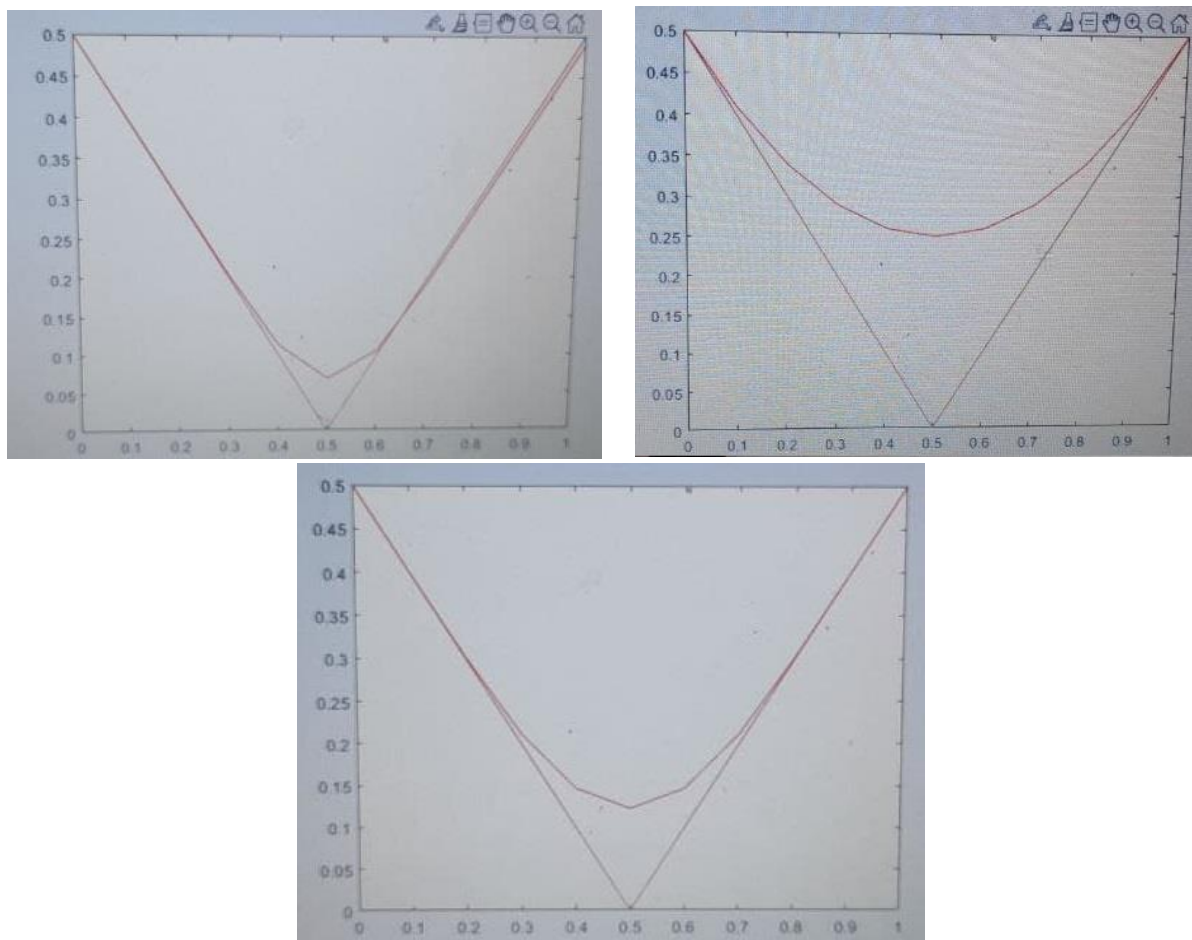
    %Plotting code
    t=0:0.01:1;
    y=f(t);

    % PLOT Polynomial

    s = zeros(1,length(t));
    for i = 1:length(t)
        s(i)= pa(t(i));
    end

    figure
    plot(t,y);
    hold on
    plot(sample_t,sample_y);
    hold on
    plot(t,s,'r');
    hold off
end

```

In conclusion, it is much more convenient and time-saving to use the MATLAB program when calculating functions. In addition, virtual viewing the function graph can increase the student's interest in science.

LIST OF USED LITERATURE

1. Гнеденко Б.В. "Введение в специальность математика" М.Наука. 1991 стр 56-60.
2. Азларов Т.А. Мансуров. Х. "Математик анализ". Ўзбекистон 1995 й.
3. Stephen J.Chapman. MATLAB Programming for Engineers. Cengage 1999 y.
4. Peter I.Kattan. MATLAB for Beginners: A Gentle Approach. 2008 y.

MODEL VA MODELLASHTIRISH HAQIDA TUSHUNCHA. MATEMATIK MASALALARNI MODELLASHTIRISH

Asimov Alijon

F.-m.f.n., Farg'ona davlat universiteti

Abduvaliyeva Muslimaxon

Farg'ona davlat universiteti

Tabiat va jamiytdagi ob'ektlar xamda ularning xossalari kuzatilayotganda ular to'g'risida dastlabki tushunchalar xosil bo'ladi. Bu tushunchalar oddiy so'zlashuv tilida, turli rasmlar, sxemalar, belgilar, formulalar orqali ifodalanilishi mumkin. Xuddi ana shunday ifodalash model, modellar yordamida kuzatilayotgan ob'ektni bilish esa, modellashtirish deyiladi.

Model tushunchasi lotincha “**moduls**” soʻzidan olingan boʻlib oʻlchov, meʼyor degan maʼnoni bildiradi. Model biror obʼekt yoki obʼektlar tizimining aksidir. Model juda keng qamrovli tushuncha boʻlib, unga alohida taʼrif berilmagan, lekin biz oʻrganayotgan holda uni quyidagicha taʼriflash mumkin.

Model – bu obʼektiv borliq yoki jarayonlarning subʼektiv aksidir. U shunday moddiy yoki fikran koʻz oldimizga keltiriladigan obʼekt, uni bevosita oʻrganish va natijada ular haqida yangi bilimlar hosil qilish mumkin.

Modellashtirish jarayoni deganda model tuzish, uni oʻrganish va maʼlum obʼektga qoʻllash tushuniladi. Modellashtirish usullaridan foydalanishning zarurligi shundan iboratki, turli xil obʼektlarni (muamolarni) bevosita oʻrganish, baʼzi xollar uchun umuman mumkin emas (masalan, iqtisodiyotning kelajakdagi holati, jamiyatini isteʼmol qilish quvvatlari va h.k.) yoki bu izlanish ortiqcha vaqt va xarajat talab qilish mumkin. Modellashtirish usullarini va modellarini quyidagi belgilari boʻyicha guruhlariga ajratish mumkin: tatbiq qilish doirasi boʻyicha, modellashtirishuvchi obʼekt xarakteri boʻyicha, modellarni tavsiflash darajasi boʻyicha, modellashtirish vositasi boʻyicha va h.k.

Modellashtirish vositasi boʻyicha moddiy modellashtirish usuli va ideal modellashtirish usuliga boʻlinadi. Moddiy modelashtirish usuli esa shartli ravishda uch guruhga ajraladi: fazoviy, fizik va anologli modellashtirish. Ideal modellashtirish ham ikki guruhga ajraladi: formallashtirilgan va formallashtirilmagan modellashtirish.

Formallashtirilgan modellashtirish oʻz navbatdagi belgisi va obrazli modellarga ajraladi. Belgisi modellashtirish chizmalar, grafiklar, sxemalar, formulalar va h.k. orqali amalga oshiriladi, matematik modellar ham shu guruhga taaluqlidir. Demak, matematik modellashtirish esa iqtisodiy jarayonlarni aks ettirish mumkin. Lekin yagona modelda oʻrganilayotgan obʼektning xamma tomonini aks ettirish mumkin emas. Shuning uchun unda jarayonning eng xarakterli tomonlari aks ettiriladi. Modelning haqiqiyliigi toʻplangan maʼlumotlar xajmiga, aniqlik darajasiga, tadqiqotchining malakasiga va modellashtirish jarayonida aniqlangan masalaning xarakteriga bogʻliq boʻladi.

Matematik model (modellashtirish) deganda tabiatda, jamiyatda boʻlayotgan turli hodisa, jarayonlarning matematik tushunchalar, formulalar tenglama va tengsizliklar orqali ifoda etilishini tushunamiz. Oʻrganilayotgan biror hodisaning kechishi “matematika tili”ga koʻchirildi, deganidir. “Tabiat va jamiyatdagi turli hodisa va jarayonlar” degan jumlaning juda keng maʼnoda tushunish kerak. Bularga: yerning oʻz oʻqi atrofida aylanishi; quyosh atrofida aylanishi; sayyoralarning oʻzaro tortishishi: ularning fazoda(osmonda) maʼlum bir chiziqli - orbita boʻylab harakati; oy, quyosh tutilishi, shamolning esishi; yomgʻir, qor yogʻishi; yer qimirlashi; koʻchkilar va hokazo. Shuningdek, bozor iqtisodiyoti masalalari: mahsulotlarni taqsimlash; aholi sonini oʻsishi; aholining oziq - ovqat, kiyim-kechak talabi, ehtiyoji va uning qondirish va hokazolar ham kiradi. Bularning hamasi – matematika yordamida, uning usullari bilan oʻrganilgan va oʻrganilmoqda.

Matematik modellashtirishning juda oddiy, soda hollari bilan tanishib chiqsak. Masalaning matematik modeli – masalada bayon etilgan muammoli holatni (vaziyatni)“matematika tiliga koʻchirish bu holatni formulalar, tenglama va tengsizliklar orqali ifodalashdir. Boshlangʻich sinfda masalaning turli xil usulda modellashtirish mumkin. Masalani modeli asosda yechish oʻquvchilarning masala mohiyatini toʻgʻri tushunishga

yordam beradi. Masalani matematik modellashtirish esa o'qituvchilarni bir xil tipdagi masalalarni yechishga e'tibor qaratish imkonini beradi.

Masalaning matematik modeli tuzish bosqichlarini o'z ichiga oladi:

1. Masalada topilishi kerak bo'lgan noma'lumni belgilash.
2. Noma'lum kattalik bilan berilgan kattaliklar orasidagi bog'lanishni o'rnatish, topish. Bu bog'lanish tenglama, tengsizliklar yordamida ifodalanadi.
3. Masaladagi kattaliklar, izlanayotgan noma'lum qanday shartlarni qanoatlantirish zarurligini aniqlash.
4. 2-bosqichda tuzilgan tenglamani yechib, yechim berilgan masala mazmunini to'la aks ettirish yoki aks ettirmasligini, mos kelish yoki kelmasligini aniqlashdan iborat.

Yuqoridagi bosqichlarda eng qiyini 2 - bosqich bo'lib, masalaning matematik modelini tuzishdagi eng qiyin murakkabidir.

Xulosa qilib aytilganda boshlang'ich sinflarda masalalarning sharti va masala turiga qarab ularni bosqichlar yordamida modellashtirishimiz mumkin. Masalani yechganda uning turli xil modellardan foydalanib yechish dars samaradorligini oshiradi. Bunda o'qituvchi ham masalaga mos modelni tanlay olishiga e'tibor berishi kerak. O'qituvchi bir xil model asosida yechiladigan masalalarni sinflarga ajratib, dars davomida foydalansa o'quvchilar masala yechish qobiliyatlari tezligini oshiradi va o'z samarasini beradi. Masalani matematik modellashtirish masala mohiyatini tez anglashga va uni mustaqil yechishga o'rgatadi. O'quvchilar kelgusida masalani yaxshi o'zlashtirishiga asos bo'lib xizmat qiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Bikbaeva N.U. R.I. Sidelnikova, G.A. Adambekova. Boshlang'ich sinflarda matematika o'qitish metodikasi. (O'rta maktab boshlang'ich ta'lim o'qituvchilari uchun qo'llanma. Toshkent-O'qituvchi)
2. Tadjiyeva Z., Jumayev M.E. Matematika o'qitish metodikasi. T-2005.
3. D. F. To'xtasinov – Central Asian Journal of Education, 2018

GUDVIN MODELI YECHIMLARI

Boboniyozova Dildora

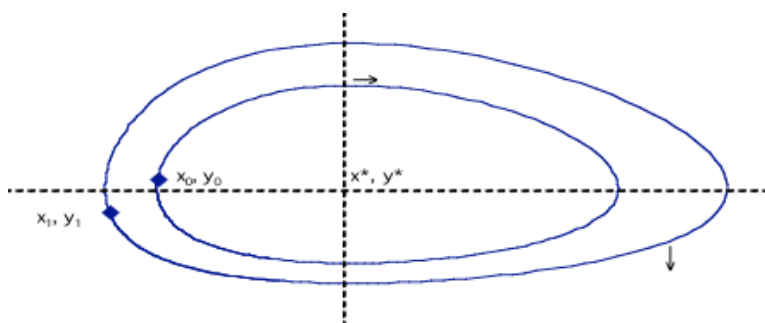
Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti

Matematik biologiya masalalarida qo'llaniladigan raqobatdosh turlarning Lotka-Volterra modeli quyidagi sodda differensial tenglamalar sistemasi orqali ifodalanadi:

$$\dot{x} = [n_1 - \theta_1 y]x, \quad (1)$$

$$\dot{y} = [-n_2 + \theta_2 x]y, \quad (2)$$

bu yerda x o'ljalari soni, y yirtqichlari soni, $\dot{x}$ va $\dot{y}$ lar esa mos ravishda ularning vaqtga nisbatan o'zgarish tezliklaridir. Yirtqich va o'ljani bir-biridan quyidagicha farqlash mumkin: yirtqichlari soni qanchalik kichik bo'lsa, o'lja populyatsiyasi tezroq o'sadi, natijada o'lja populyatsiyasi qanchalik ko'p bo'lsa, yirtqichlari populyatsiyasi tezroq o'sadi.



$x = 0$ va $y = 0$ (ya'ni, yirtqich yoki o'lja yo'q) bo'lgan holdan tashqari, yirtqich-o'lja modelining yechimi yopiq sikllar oilasi bo'ladi, ya'ni har bir sikl umumiy markazga ega (1-rasm):

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{n_2}{\theta_2}, \frac{n_1}{\theta_1} \right).$$

1-rasm. x-o'ljalari, y-yirtqichlar.

Bu yerda har bir siklning uzunligi o'lchovi quyidagicha:

$$T^* = \frac{2\pi}{\sqrt{n_1 n_2}}$$

Endi Lotka-Volterra yechimlaridan foydalanib iqtisodiyotda keng qo'llaniladigan Gudvin modeli yechimlarini hosil qilamiz. Gudvin 1967-yilda real bandlik va real ish haqi o'rtasidagi dinamik munosabatlarni tavsiflovchi oddiy modelni taqdim etadi:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \left[\left(\frac{1}{\sigma} - (\alpha + \beta) \right) - \frac{u}{\sigma} \right] v, \\ \dot{u} &= [-(\alpha + \gamma) + \rho v] u, \end{aligned}$$

bu yerda, $1/\sigma$ - kapital unumdorligi, α - mehnat unumdorligi yillik foiz ortishi, β - ishchi kuchi taklifining yillik foizga o'sishi, γ kesish va ρ Fillips egri chizig'i egriligi.

Gudvin modelining yechimlarini hosil qilish uchun yirtqich-o'lja modelining yechimlaridan foydalanishimiz mumkin. Iqtisodiy modelning markazi quyidagicha:

$$\begin{aligned} u^* &= 1 - (\alpha + \beta)\sigma, \\ v^* &= \frac{(\alpha + \gamma)}{\rho}, \end{aligned}$$

va model quyidagicha sikl uzunligiga ega:

$$T^* = \frac{2\pi}{[(\alpha + \gamma)(1/\sigma - (\alpha + \beta))]}^{1/2}.$$

ADABIYOTLAR

1. Rachel Von Arb, "Predator-prey models in competitive corporations" Olivet Nazarene University 2013.
2. Q. Safayeva, F. Mansurov, "Iqtisodiyotda matematika", Toshkent-2010.
3. G'. Nasriddinov, "Iqtisodiy matematik modellar va usullar", Toshkent-2011.
4. www.ziyouet.com

IQTISODIY PALOMBA MODEL

Boboniyozova Dildora

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti

Biologiyadagi ozuqa zanjiri (ya'ni yirtqich hayvonlar o'txo'r hayvonlar bilan oziqlanadi, o'txo'r esa dalalardagi o'simliklar bilan oziqlanadi) modellari uchun Lotka-Volterra tenglamalari matematik biologiyada yaxshi ma'lum. Mazkur model ikki olimning sharafiga Lotka-Volterra tenglamalari yoki Lotka-Volterranning "Yirtqich o'lja" modeli deb ataladi. Volterra modeli quyidagicha tavsiflanadi, faraz qilamiz: ma'lum bir hududda faqat ikki tur yirtqich va o'txo'r hayvonlar yashaydi deb olamiz. O'simliklar shu hududda cheksiz ko'p miqdorda o'sadi deb faraz qilinadi. $Y_1(t)$ bilan t vaqtdagi o'txo'r hayvonlar sonini belgilaymiz. $Y_2(t)$ bilan t vaqtdagi yirtqich hayvonlarning sonini belgilaymiz.

Agar o'txo'r hayvonlar shu hududda yolg'iz yashaganda ularning soni eksponensial ravishda ortib boradi va uni quyidagi tenglik bilan ifodalash mumkin:

$$\frac{dy_1}{dt} = a_1 y_1, \quad a_1 > 0 \quad (1)$$

Agar yirtqich hayvonlar shu hududda yolg'iz yashasa, u holda ozuqa yetmasligi tufayli ularning soni asta-sekin kamayib, yo'qolib boradi. Bu esa quyidagi tenglama bilan ifodalanadi:

$$\frac{dy_2}{dt} = -a_2 y_2, \quad a_2 > 0 \quad (2)$$

Faraz qilamiz, qaralayotgan hududda o'txo'r va yirtqich hayvonlar birgalikda yashaydi. Bu ikki tur hayvonlar uchrashish natijasida o'txo'rlarning soni kamayishiga olib keladi, shuning uchun o'txo'rlarning ko'payishi doimiy bo'lmaydi. Yirtqichlarning soniga bog'liq ravishda kamayib turadi. Bu holatni quyidagi differensial tenglama bilan ifodalash mumkin:

$$\frac{dy_1}{dt} = (a_1 - b_1 y_2) y_1, \quad b_1 > 0 \quad (3)$$

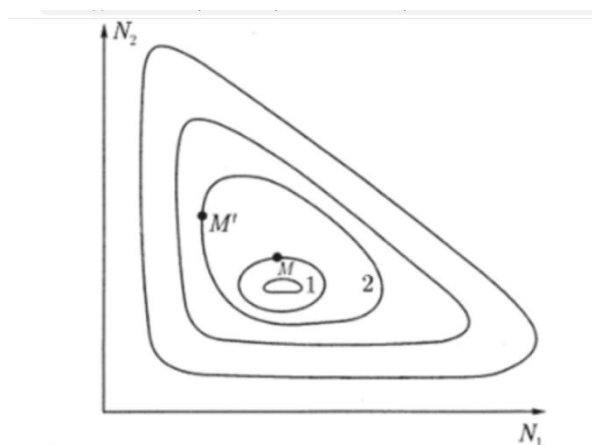
Yirtqichlarning soni esa ular oziqlanadigan o'txo'rlar soninig (oziq-ovqatning) kam yoki ko'pligiga qarab turib o'zgarib turadi. Bu o'zgarishlarni quyidagi differensial tenglama bilan ifodalash mumkin:

$$\frac{dy_2}{dt} = (-a_2 + b_2 y_1) y_2, \quad b_2 > 0 \quad (4)$$

(3) va (4) tenglamalar ikkita no-chiziqli differensial tenglamalar sistemasini tashkil qiladi va ularni standart usullar bilan tahlil qilish mumkin. Mazkur sistemaning matematik xossalari yaxshi o'rganilgan va uning natijalari quyidagicha keltirib o'tiladi. Shuni ta'kidlash kerakki ushbu sistemaning ikkita qo'zg'almas nuqtalari mavjud (muvozanat holati). Ular koordinata boshi (0;0) va $y_1 = \frac{a_2}{b_2}$; $y_2 = \frac{a_1}{b_1}$ nuqtalardir.

Ikkinchi qo'zg'almas nuqta yopiq orbitalar bilan o'ralgan sohaning markazi bo'lgani uchun uning atrofida dinamikani o'rganish qiziqish paydo qiladi.

Sistemaning yechimi ikkinchi qo'zg'almas nuqta atrofidagi yopiq orbita bo'yicha tebranadi. Agar biror hodisa tufayli bir orbitadan ikkinchi orbitaga sakrasa shu orbita bo'yicha uzluksiz ravishda tebranishda davom etadi.



Tizim cheksiz tebranadi va har qanday zarba tizimni boshqa yaqin orbitga siljitadi va u tebranishda davom etadi. Iqtisodchilar odatda tsiklik muammolarni o'rganish uchun Lotka-Volterra tenglamalarini iqtisodga kiritganligi bilan ajralib turadi Richard M. Gudvin- Bu

Ekonometrik jamiyatning birinchi Jahon Kongressida (1965) taqdim etilgan va ikki yildan keyin nashr etilgan. Italiyalik iqtisodchi Giuseppe Palomba Lotka-Volterra tenglamalaridan foydalanilgan quyidagicha modelni taklif qiladi. Palomba tovarlarni ikki turga ajratadi, birinchisi iste'mol tovarlari, ikkinchisi esa, kapital tovarlar va quyidagilar o'rinli deb faraz qilamiz:

1) ikki tipdagi tovarlar a) Iste'mol qilish uchun tayyor tovarlar va to'g'ridan-to'g'ri mahsulotga aylanadigan tovarlar. b) mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun to'g'ridan to'g'ri kiritiladigan kapital tovarlar, yani yakuniy mahsuloti tovarga aylanadigan kapital tovarlar

2) Iqtisod doim o'zining asosiy quroli bo'lgan kapitalni o'stirishga moyil bo'lgan dinamik jarayonda turibdi deb faraz qilinadi, yani a) turdagi mahsulotlarning bir qismi b) turda deb olinadi.

3) Har qanday qaralayotga holatda, a) turdai tovarlar ε_1 ga teng bo'lgan koeffitsient bilan o'sishi, shu bilan birga b) turdagi tovarlar $-\varepsilon_2$ ga teng bolgan koeffisient bilan o'sadi deb olinadi va bu koeffisiyentlar doim musbat sonlar bo'ladi.

4) a) turdagi tovarlar hajmi tovarning yo'nalishning o'zgarishi natijasida koeffitsienti γ_1 ga teng bo'lgan tezlik bilan kamayadi, shu bilan birga, b) turdagi tovarlar hajmi koeffitsienti γ_2 ga teng bo'lgan tezlik bilan o'sadi deb olinadi va bu yerda ham koeffisiyentlar musbat bo'ladi.

Agar C_1 va C_2 bilan mos ravishda a) va b) turdagi tovarlar hajmlarini belgilasak, u holda quyidagi differensial tenglamalarga ega bo'lamiz

$$\begin{aligned}\frac{d C_1}{dt} &= C_1 \varepsilon_1 - \gamma_1 C_1 C_2 \\ \frac{d C_2}{dt} &= -C_2 \varepsilon_2 + \gamma_2 C_1 C_2\end{aligned}$$

Palomba modeli iqtisodiy sistemalar uchun tabiiy bo'lgan siklik holatlar faqatgina sistemada ishtirok etayotgan o'zgaruvchilarga bo'g'liqligi ta'kidlaydi.

ADABIYOTLAR

1. Rachel Von Arb, "Predator-prey models in competitive corporations" Olivet Nazarene University 2013.
2. Q. Safayeva, F. Mansurov, "Iqtisodiyotda matematika", Toshkent-2010.
3. G'. Nasriddinov, "Iqtisodiy matematik modellar va usullar", Toshkent-2011

ON AN EXTREMAL FUNCTION OF INTERPOLATION FORMULA

Boltaev Aziz

PhD, V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics,
Uzbekistan Academy of Science

Atamuradova Baxshand

Tashkent Vocational School No. 1 for people with disabilities,
Tashkent, Uzbekistan

Consider the following interpolation formula:

$$\varphi(x) \cong P_{\varphi}(x) = \sum_{\beta=0}^N C_{\beta}(x) \varphi(x_{\beta}) \quad (1)$$

where $P_\varphi(z) = \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) \varphi(x_\beta)$ is an interpolation formula $C_\beta(z)$ are the coefficients, and x_β are the nodes of the interpolation formula $P_\varphi(z)$, $x_\beta \in [0,1]$, δ is Dirac's delta-function, function φ belongs to the Hilbert space $W_2^{(m,0)}(0,1)$. The norm of functions in this space is defined as follows

$$\|\varphi\|_{W_2^{(m,0)}} = \left[\int_0^1 (\varphi^{(m)}(x) + \varphi(x))^2 dx \right]^{1/2}. \quad (2)$$

The difference

$$\begin{aligned} (\ell, \varphi) &= \varphi(z) - P_\varphi(z) = \varphi(z) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) \varphi(x_\beta) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta(x-z) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) \delta(x-x_\beta) \right) \varphi(x) dx, \end{aligned} \quad (3)$$

of the interpolation formula (1) and

$$\ell(x, z) = \delta(x-z) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) \delta(x-x_\beta). \quad (4)$$

is called *the error functional* of this interpolation formula.

By the Cauchy-Schwarz inequality, the absolute value of the error (3) is estimated as follows

$$|(\ell, \varphi)| \leq \|\varphi\|_{W_2^{(m,0)}} \cdot \|\ell\|_{W_2^{(m,0)*}},$$

where

$$\|\ell\|_{W_2^{(m,0)*}} = \sup_{\varphi, \|\varphi\| \neq 0} \frac{|(\ell, \varphi)|}{\|\varphi\|_{W_2^{(m,0)}}}.$$

Therefore, to estimate the error of the interpolation formula (1) over the functions of the space $W_2^{(m,0)}$, we need to find the norm of the error functional ℓ in the conjugate space $W_2^{(m,0)*}$.

From here we get

Problem 1. Find the norm of the error functional ℓ of the interpolation formula (1) in the space $W_2^{(m,0)}$.

It is clear that the norm of the error functional ℓ depends on the coefficients $C_\beta(z)$ and the nodes x_β . The problem of minimizing the quantity $\|\ell\|$ by coefficients $C_\beta(z)$ is a linear problem and by nodes x_β is, in general, a nonlinear and complicated problem. Here we consider the problem of minimizing the quantity $\|\ell\|$ by coefficients $C_\beta(z)$ when nodes x_β are fixed.

The coefficients $\overset{\circ}{C}_\beta(z)$ (if there exist) satisfying the following equality

$$\left\| \overset{\circ}{\ell} \right\|_{W_2^{(m,0)*}} = \inf_{C_\beta(z)} \|\ell\|_{W_2^{(m,0)*}} \quad (5)$$

are called *the optimal coefficients* and corresponding interpolation formula

$$\overset{\circ}{P}_\varphi(z) = \sum_{\beta=0}^N \overset{\circ}{C}_\beta(z) \varphi(x_\beta)$$

is called the optimal interpolation formula in the space $W_2^{(m,0)*}(0,1)$.

Thus, in order to construct the optimal interpolation formula in the space $W_2^{(m,0)}(0,1)$ we need to solve the next problem.

Problem 2. Find the coefficients $\overset{\circ}{C}_\beta(z)$ which satisfy equality (5) when the nodes x_β are fixed.

The main aim of this work is to solve Problem 2, i.e. to find an explicit expression for square of the norm of the error functional of the optimal interpolation formula in the space $W_2^{(m,0)}$.

Now we solve the first part of this problem, i.e. calculate the norm $\|\ell\|_{W_2^{(m,0)*}}$ of the error functional ℓ for odd m . Here we use the extremal function of this functional.

The function ψ_ℓ which satisfies the equality

$$(\ell, \psi_\ell) = \|\ell\|_{W_2^{(m,0)*}} \cdot \|\psi_\ell\|_{W_2^{(m,0)}} \quad (6)$$

is called the extremal function of the error functional ℓ [1-4]. The following holds.

Theorem 1. The extremal function ψ_ℓ of the error functional ℓ of interpolation formula (1) has the form:

$$\psi_\ell(x) = (-1)^m (\ell * G_m)(x) + Y_m(x),$$

where

$$G_m(x) = \frac{\operatorname{sgn} x}{2m} \left(\sinh(x) + \sum_{n=1}^{m-1} e^{x \cos\left(\frac{\pi n}{m}\right)} \cos\left(x \sin\left(\frac{\pi n}{m}\right) + \frac{\pi n}{m}\right) \right) \quad (7)$$

and

$$\begin{aligned} Y_m(x) = & d_0 e^{-x} + \sum_{k=1}^{\frac{m-1}{2}} e^{x \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)} \left(d_{1,k} \cos\left(x \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right) \right. \\ & \left. + d_{2,k} \sin\left(x \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right) \right), \end{aligned} \quad (8)$$

m is an odd natural number, d_0 , $d_{1,k}$, and $d_{2,k}$ are constants.

Since the error functional (4) is defined on the space $W_2^{(m,0)}$ as shown in [5], it is necessary to impose the following conditions

$$(\ell, e^{-x}) = 0, \quad (9)$$

$$\left(\ell, e^{-x \cos\frac{2\pi k}{m}} \cos\left(x \sin\frac{2\pi k}{m}\right) \right) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{m-1}{2}, \quad (10)$$

$$\left(\ell, e^{-x \cos\frac{2\pi k}{m}} \sin\left(x \sin\frac{2\pi k}{m}\right) \right) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{m-1}{2}, \quad (11)$$

which mean that the interpolation formula (1) is exact for linear combinations of functions e^{-x} , $e^{-x \cos \frac{2\pi k}{m}} \cos\left(x \sin \frac{2\pi k}{m}\right)$ and $e^{-x \cos \frac{2\pi k}{m}} \sin\left(x \sin \frac{2\pi k}{m}\right)$ for $k = 1, 2, \dots, \frac{m-1}{2}$.

As it is said above, in order to calculate the square of the norm of the error functional (4) it is sufficient to calculate the value (ℓ, ψ_ℓ) of the error functional ℓ at the function ψ_ℓ .

Thus, we have

$$\|\ell\|_{W_2^{(m,0)*}}^2 = (-1)^m \left[\sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_\beta(z) C_\gamma(z) G(x_\beta - x_\gamma) - 2 \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) G(z - x_\beta) \right]. \quad (12)$$

REFERENCES

1. S.L. Sobolev, Introduction to the Theory of Cubature Formulas, Nauka, Moscow, 1974. (in Russian).
2. S.L. Sobolev, The coefficients of optimal quadrature formulas, Selected Works of S.L. Sobolev, Springer, (2006) 561-566.
3. S.L. Sobolev, V.L. Vaskevich, The Theory of Cubature Formulas, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997.
4. Kh.M. Shadimetov, Optimal lattice quadrature and cubature formulas in Sobolev spaces, Fan va texnologiya, Tashkent, 2019. (in Russian).
5. A.K. Boltaev, On the extremal function of an optimal quadrature formula, Uzbek Mathematical Journal, 2011, no.2, pp.57-65.

OPTIMAL KVADRATUR FORMULANING EKSTREMAL FUNKSIYASI

Davronov Javlon

UzRFA Matematika instituti

Ko'plab masalalar kvadratur formulalar va ularning qurish nazaryasiga bag'ishlangan. Funktsional analiz metodlariga asoslanib kvadratur formulalar qurish va ularning xatoliklarini baholash dastlab A.Sard [1], S.M.Nikolskiy [2] va S.Sobolevlarning [3] – [5] izlanishlarida qaralgan.

Biz quyidagi ko'rinishdagi kvadratur formulani qaraymiz

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N C[\beta] \varphi[\beta], \quad (1)$$

bunda $[\beta] = h\beta$ – tugun nuqtalar, $\beta = 0, 1, \dots, N$, $h = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, $C[\beta]$ – (1) formulaning koeffitsiyentlari. φ funksiyalar Sobolev fazosiga tegishli bo'lib, u fazo quyidagicha aniqlanadi

$$L_2^{(m,0)}(0,1) = \{\varphi: [0,1] \rightarrow R | \varphi^{(m-1)} - \text{abs. uzluksiz}, \varphi^{(m)} \in L_2(0,1)\}.$$

$L_2^{(m,0)}(0,1)$ fazoning φ va ψ funksiyalari uchun skalyar ko'paytma quyidagicha kiritilgan

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{L_2^{(m,0)}} = \int_0^1 [\varphi^{(m)}(x) \psi^{(m)}(x) + \varphi(x) \psi(x)] dx. \quad (2)$$

Shuningdek, $L_2^{(m,0)}(0,1)$ fazoda (2) skalyar ko'paytmaga mos norma quyidagicha aniqlanadi

$$\|\varphi\|_{L_2^{(m,0)}} = \left\{ \int_0^1 \left[(\varphi^{(m)}(x))^2 + (\varphi(x))^2 \right] dx \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (3)$$

Integral va kvadratur yig'indi orasidagi quyidagi ayirma

$$(\ell, \varphi) = \int_0^1 \varphi(x) dx - \sum_{\beta=0}^N C[\beta] \varphi[\beta]$$

(1) kvadratur formulaning xatoligi deyiladi, hamda bu ayirmaga

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N C[\beta] \delta(x - h\beta) \quad (4)$$

ko'rinishdagi xatolik funksionali mos keladi. Bu yerda $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ – $[0,1]$ kesmaning xarakteristik funksiyasi, hamda $\delta(x)$ – Dirakning delta-funksiyasi.

Koshi-Shvars tengsizligiga asosan, quyidagi bahoga ega bo'lamiz

$$|\ell, \varphi| \leq \|\varphi\|_{L_2^{(m,0)}} \cdot \|\ell\|_{L_2^{(m,0)*}}.$$

Demak, $L_2^{(m,0)}(0,1)$ fazoda (1) kvadratur formulaning absolyut xatoligi $L_2^{(m,0)*}(0,1)$ qo'shma fazodagi ℓ xatolik funksionali normasi yordamida yuqoridan baholanadi.

Xatolik funksionali (4) normasini hisoblash uchun quyidagi tenglikni qanoatlantiruvchi ψ_ℓ ekstremal funksiyasidan foydalanamiz

$$(\ell, \psi_\ell) = \|\ell\|_{L_2^{(m,0)*}} \cdot \|\psi_\ell\|_{L_2^{(m,0)}}. \quad (5)$$

$L_2^{(m,0)}(0,1)$ fazo gilbert fazosi bo'lganligi uchun, chiziqli uzluksiz funksionalning umumiy ko'rinishi haqidagi Riss teoremasidan $L_2^{(m,0)}(0,1)$ fazosida quyidagi tenglikni qanoatlantiruvchi yagona ψ_ℓ funksiya mavjud

$$(\ell, \varphi) = \langle \varphi, \psi_\ell \rangle_{L_2^{(m,0)}}$$

va

$$\|\ell\|_{L_2^{(m,0)*}} = \|\psi_\ell\|_{L_2^{(m,0)}}.$$

Ushbu ishdagi asosiy natijani quyidagi teorema ko'rinishida kiritdik.

1-Teorema. Quyidagi

$$\psi_\ell(x) = (-1)^m \ell(x) * G_m(x), \quad (6)$$

(1) kvadratur formulaning ekstremal funksiyasi. Bu yerda $G_m(x)$ – Grin funksiyasi, va m – juft uchun quyidagi ko'rinishda

$$G_m(x) = -\frac{\text{sign}(x)}{2m} \cdot \sum_{k=1}^m e^{x \cdot \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2m}\right)} \cdot \cos\left(x \cdot \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2m}\right) + \frac{(2k-1)\pi}{2m}\right).$$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Sard.A. Best approximate integration formulas, best approximates formulas//American J. of Math. 1949.-LXXI. -pp. 80-91.
2. Никольский С.М. Квадратурные формулы.-Москва: Наука, 1988. -256 с.
3. Соболев С.Л.Введение в теорию кубатурных формул.-Москва: Наука, 1974. - 808 с.
4. Соболев С.Л. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул.//Докл. АН СССР.-Москва, 1977. -Т. 235. -№1. -С.34-37.

5. Соболев С.Л., Васкевич В.Л. Кубатурные формулы.-Новосибирск: Издво ИМ СО РАН, 1996. -484 с.

TRANSPORT MASALASINING OPTIMAL YECHIMINI TOPISHNING POTENSIALLAR USULI

Eshniyozov Abdumalik

Guliston davlat universiteti

Usmanov Navruz

Guliston davlat universiteti

Transport masalasi – chiziqli programmashtirishning alohida xususiyatli masalasi bo'lib, bir jinsli yuk tashishning eng tejimli rejasini tuzish masalasidir. Bu masalaning qo'llanish sohasi juda kengdir.

Zahirasida b_i birlik mahsuloti bo'lgan i -ta'minotchidan mavjud bo'lgan istemolchilarga zahirasidagi mahsulotni to'la realizatsiya qilish shatri

$$\sum_j x_{i,j} = b_i$$

bu yerda $x_{i,j}$ – i -ta'minotchidan j -iste'molchiga tashilgan mahsulot hajmi.

Masalaning qo'yilishi va uning matematik modeli. m ta A_i ta'minotchilarda a_i miqdordagi bir xil mahsulotni n ta B_j iste'molchilarga mos ravishda b_j miqdordan yetkazib berish talab qilinsin. Har bir i -ta'minotchidan har bir j -iste'molchiga bir birlik mahsulotni tashishga sarf qilinadigan yo'l harajati c_{ij} pul birligini tashkil qilsin.

Mahsulot tashishning shunday rejasini tuzish kerakki, ta'minotchilardagi barcha mahsulotlar olib chiqib ketilsin, iste'molchilarning barcha talablari qondirilsin va shu bilan birga yo'l harajatlarning umumiy qiymati eng kichik bo'lsin.

Masalaning matematik modelini tuzish uchun i -ta'minotchidan j -iste'molchiga etkazib berish uchun rejalashtirilgan mahsulot miqdorini x_{ij} orqali belgilaymiz. U holda masalaning shartlarini quyidagi jadval ko'rinishda yozish mumkin:

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahiralar miqdori
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Talablar miqdori	b_1	b_2	...	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

Bunda harajatlarning umumiy qiymati

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

ifoda bilan aniqlanadi.

Masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, & i = \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, & j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (1)$$

chiziqli tenglamalar sistemasining

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}) \quad (2)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi shunday echimini topish kerakki, bu echim

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (3)$$

chiziqli funksiyaga eng kichik qiymat bersin.

Jadvaldan va masalaning modelidan $0 \leq x_{ij} \leq \min(a_i, b_j)$ tengsizlikning bajarilishi ko'rinib turibdi.

Transport masalalarini ikki turga ajratib o'rganiladi:

1. Agar mahsulotga bo'lgan talab taklifga teng, ya'ni

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (4)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda bunday masala **yopiq modeli transport masalasi** deyiladi.

2. Agar mahsulotga bo'lgan talab taklifga teng bo'lmasa, ya'ni

$$\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j \quad (5)$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda bunday masalalar **ochiq modeli transport masalasi** deyiladi.

(1)-(3) masala uchun quyidagi teorema o'rinli.

1-teorema. Talablar hajmi takliflar hajmiga teng bo'lgan istalgan transport masalasining optimal echimi mavjud bo'ladi.

Potentsiallar usuli – transport masalasini echish uchun qo'llangan birinchi aniq usul bo'lib, u 1949 yilda rus olimlari **L.V.Kantorovich** va **M.K.Gavurin** tomonidan yaratilgan. Bu usulning asosiy g'oyasi transport masalasiga moslashtirilgan simpleks usuldan iborat bo'lib, birinchi marta chiziqli programmashtirish masalalarini echish usullariga bog'liq bo'lmagan holda tasvirlangan. Keyinroq, xuddi shunga o'xshash usul Amerikalik olim **Dantsig** tomonidan yaratildi. Dantsig usuli chiziqli programmashtirishning asosiy g'oyalariga asoslangan bo'lib, Amerika adabiyotida bu usul **modifitsirlangan taqsimot usuli** deb yuritiladi.

Transport masalasining optimal echimini topishda foydalaniladigan potentsiallar usuli simpleks usulining soddalashtirilgan varianti hisoblanadi.

Bu usul bilan tanishishdan oldin **aynigan** va **aynimagan** transport masalasi tushunchalarini kiritishimiz kerak.

Ma'lumki, agar ChPM hech bo'lmaganda bitta aynigan tayanch echimga ega bo'lsa, u holda bu masala **aynigan ChPMsi** deb ataladi.

1-ta'rif. Agar $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ tayanch rejadagi (echimdagi) musbat komponentalar soni $\text{rang} A = m$ ga teng bo'lsa, u holda bu reja **aynimagan tayanch reja**, aks holda esa u **aynigan tayanch reja** deyiladi.

Quyidagi transport masalasi berilgan bo'lsin: b_j – talablar miqdori; a_i – takliflar miqdori.

b_j	b_1	b_2	...	b_n
a_i				
a_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}
...	...	...	...	...
a_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}

1-teorema. Agar talablarning qisman yig'indisi takliflarning qisman yig'indisiga teng, ya'ni $\sum_{i \in G} a_i = \sum_{j \in H} b_j$, $G \subset M = \{1, 2, \dots, m\}$, $H \subset N = \{1, 2, \dots, n\}$ bo'lsa, u holda bu transport masalasi **aynigan transport masalasi** deyiladi.

Aynimagan transport masalasini qaraymiz. Ma'lumki, bu masalaning matematik modeli kanonik ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, & i = \overline{1, m}, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, & j = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (6)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (7)$$

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min. \quad (8)$$

Bu masalaga ikkilangan masala tuzamiz.

$$U_i + V_j \leq c_{ij}, \quad (9)$$

$$\tilde{Z} = \sum_{i=1}^m U_i a_i + \sum_{j=1}^n V_j b_j \rightarrow \max. \quad (10)$$

Ikkilanish nazariyasiga asosan agar (U_i, V_j) ikkilangan baholar mavjud bo'lsa, u holda $\{x_{ij}\}$ tayanch reja optimal bo'ladi. Bu erda U_i va V_j ikkilangan baholar mos ravishda "**ta'minotchi va iste'molchilarning potentsiallari**" deyiladi.

Bu nazariyaga asosan transport masalasi uchun quyidagi teoremani keltirish mumkin.

2-teorema. Agar transport masalasining $X^* = (x_{ij}^*)$ tayanch echimi uchun

$$x_{ij}^* > 0 \Rightarrow U_i + V_j = c_{ij}, \quad (11)$$

$$x_{ij}^* = 0 \Rightarrow U_i + V_j \leq c_{ij}. \quad (12)$$

shartlar o'rinli bo'lsa, u holda $X^* = (x_{ij}^*)$ tayanch echim optimal echim bo'ladi.

(11) va (12) shartlar transport masalasi uchun **optimallik shartlari** deb ataladi.

Shunday qilib, navbatdagi tayanch echimni optimallikka tekshirish uchun, avval, (11) shart yordamida potentsiallar sistemasi quriladi va so'ngra (12) shartning bajarilishi tekshiriladi.

Masalaning optimal echimini topish uchun quyidagi belgilashlar kiritamiz: S_i – ta'minotchilar joylashgan nuqta; Q_j – iste'molchilar joylashgan nuqta. $P = S \cup Q$. $x_{ij} > 0 \Rightarrow (S_i, Q_j) \in \Omega$. (P, Ω) juftlik transport tarmog'i.

3-teorema. Har qanday yopiq modeli transport masalasining optimal echimi mavjud.

4-teorema. Agar barcha a_i , b_j sonlar butun bo'lsa, u holda transport masalasining ixtiyoriy tayanch echimi butun sonlardan iborat bo'ladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. M.Hoy, J.Livernois et.al. Mathematics for Economics. The MIT Press. London&Cambridge. 2011.
2. Robert M. Leekley. Applied Statistics for Business and Economics. USA. 2010.
3. Alpha C. Chiang, Kevin Wainwright. Fundamental Methods of Mathematical Economics. N.-Y. 2005.
4. Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. 766 p.
5. Xashimov A.R., Xujaniyazova G.S. Iqtisodchilar uchun matematika. O'quv qo'llanma. "Iqtisod-moliya". 2017. 386 b.
6. Babadjanov Sh.Sh. Matematika dlya ekonomistov. Uchebnoe posobie. "Iqtisod-moliya". 2017. 746 s.
7. David G. Luenberger, Yinyu Ye. Linear and Nonlinear Programming. Springer. 2008.

$W_{2,\omega}^{(2,0)}(0,1)$ FAZODA TRIGONOMETRIK OPTIMAL INTERPOLYASTION FORMULA

Hayotov Abdullo

F.-m.f.d, V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika Istituti

Abdullayev Abdulla

O'zMU

Faraz qilaylik, bizga φ funksiyaning $x_\beta \in [0,1]$ $\beta = 1, 2, \dots, N$ nuqtalardagi qiymatlari $\varphi(x_\beta)$ lsrning jadvali berilgan bo'lsin. Bizga φ funksiyaning shu berilgan nuqtalardagi qiymatlar yordamida biror ma'noda optimal yaqinlashtiradigan va

$$\varphi(x_\beta) = P_\varphi(x_\beta) \quad \beta = 1, 2, \dots, N$$

interpolyatsiyalash shartlarini qanoatlantiradigan $P_\varphi(x) = \sum_{\beta=0}^N C_\beta(x) \cdot \varphi(x_\beta)$ formula qurish talab qilinsin, ya'ni quyidagi yaqinlashish masalasi qaralsin

$$\varphi(x) \cong P_\varphi(x) = \sum_{\beta=0}^N C_\beta(x) \cdot \varphi(x_\beta). \quad (1.1)$$

Bu yerda $C_\beta(x)$ va $x_\beta \in [0,1]$ lar mos ravishda interpolyatsion formulaning koefitsientlari va tugun nuqtalari deyiladi. Biz bilamizki $W_{2,\omega}^{(2,0)}(0,1)$ da barcha aniqlangan φ funksiyalar sinifi $[0,1]$ da birinchi tartibli hosilasi absolyut uzluksiz va ikkinchi tartibli hosilasi $L_2(0,1)$ fazoga tegishli. $W_{2,\omega}^{(2,0)}(0,1)$ bu quyidagi skalyar ko'paytma aniqlangan Gilbert fazosidir,

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 (\varphi''(x) + \omega^2 \varphi(x))(\psi''(x) + \omega^2 \psi(x)) dx$$

Ushbu Gilbert fazosida, $\omega \neq 0$ da (1.1) interpolyatsion formula $\sin \omega x$ va $\cos \omega x$ ga trigonometric funksiyalarga aniq bo'ladi. Ushbu fazo yuqoridagi skalyar ko'paytmaga mos norma bilan ta'minlangan

$$\|\varphi\|_{W_{2,\omega}^{(2,0)}(0,1)} = \left\{ \int_0^1 (\varphi''(x) + \omega^2 \varphi(x))^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Har bir fiksirlangan $z \in [0,1]$ uchun (1.1) interpolyatsion formulaning xatoligi

$$l(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} l(x) \varphi(x) dx = \varphi(z) - P_\varphi(z) = \varphi(z) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) \cdot \varphi(x_\beta) \quad (1.2)$$

ko'rinishda bo'lib bu ayirma $W_{2,\omega}^{(2,0)}$ da aniqlangan chiziqli funksional bo'ladi. Bu yerda $z \in [0,1]$ nuqta uchun mos xatolik funksionalning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi

$$l(x, z) = \delta(x - z) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) \delta(x - x_\beta).$$

Bu yerda δ Dirakning delta-funksiyasi.

Demak Koshi – Shvars tengsizligidan (1.2) xatolikning absolyut qiymati quyidagicha baholanadi

$$|l, \varphi| \leq \|l\|_{W_{2,\omega}^{(2,0)*}} \cdot \|\varphi\|_{W_{2,\omega}^{(2,0)}}.$$

Bu yerdan $W_{2,\omega}^{(2,0)}(0,1)$ fazosida (1.1) ko'rinishdagi optimal interpolyatsion formula qurish masalasiga ega bo'lamiz

Ya'ni $W_{2,\omega}^{(2,0)}(0,1)$ fazoda (1.1) interpolyatsion formulalardan quyidagi munosabat o'rinli bo'ladigan $C_\beta(z)$ koefitsiyentlisini topish talab qilinadi:

$$\left\| {}^o_\ell |W_{2,\omega}^{(2,0)*}| \right\| = \inf_{C_\beta(z)} \| \ell |W_{2,\omega}^{(2,0)*}| \| \quad (1.3)$$

(1.2) munosabatni qanoatlantiruvchi koefitsiyentlar optimal koefitsiyentlar deyiladi. Bu koefitsientlarga ega interpolyatsion formula

$${}^o_P_\varphi(z) = \sum_{\beta=0}^N {}^o_C_\beta(z) \varphi(x_\beta) \quad \boxtimes$$

optimal interpolyatsion deyiladi.

Ushbu ishda $W_{2,\omega}^{(2,0)}(0,1)$ fazosida (1.1) ko'rinishdagi optimal interpolatsion formula qurilgan, uning koeffitsiyentlari uchun oshkor ko'rinishlar olingan. Qurilgan optimal formula $\sin(\omega x)$ va $\cos(\omega x)$ trigonometric funksiyalarga aniqdir. Olingan formula yangi bo'lib, uning yetarlicha silliq funksiyalar uchun yaqinlashish tartibi $O(h^3)$ bo'ladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Babaev.S.S, Hayotov.A.R, Optimal interpolation formulas in $W^{(m,m-1)}$ space. arxiv:1802.00562.
2. Hayotov.A.R, The discrete analogue of a differential operator and its applications. Lithuanian Mathematical Journal. 2014.-vol54. No2, pp.290-307.

MAGNIT MAYDONIDA TO'K O'TKAZUVCHI JISMNING MAGNITOELASTIK DEFORMATSIYALANISHI MODELI

Indiaminov Ravshan

DSc, Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti
Samarqand filiali

Abdullaev Abdubakir

Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti

Ismailova Nilufar

Jizzax davlat pedagogika instituti

Jaxonda hozirgi kunda axborot-kommunikatsiya texnologiyalari insonlarning intellektual faoliyatiga kirib kelib, ilmiy texnik taraqqiyotning o'sishiga asosiy sababchilardan biri bo'lib kelmoqda.

Magnit maydonida elektr o'tkazuvchi jism deformasiyalanish jaryonini matematik modellashirish va jismda paydo bo'ladigan elektromagnit effektlarni tadqiq qilish amaliy jixatdan muhim ahamiyatga ega.

O'zaro ta'sir muammolari magnitoelastiklik muammolariga, hamda magnit maydonida elastik deformasiyalanuvchi, elektr o'tkazuvchi jism harakati masalalariga asos bo'lib hizmat qiladi. Bog'likli maydonlar nazariyasida tutash muxit xarakatini elektromagnit effektlarni xisobga olgan xolda urganish juda muxim urinni egallaydi.

Deformasiya jarayonida toktashuvchi jism sirti shakli uzgaradi, bu esa tok yunalishining uzgarishiga olib keladi, ya'ni jismdagi elektromagnit maydoni uzgaradi va uyurmaviy tok paydo bo'ladi. Bu uyurmaviy tokning tashki elektromagnit maydoni bilan uzaro ta'siri natijasida elektromagnit kuchlar vujudga keladi. Bu elektromagnit kuchlar jism xolatini va uning elektromagnit maydonini uzgartiradi.

Shu sababli o'zgaruvchan elektromagnit maydoni ta'siri ostida bo'lgan egiluvchan toktashuvchi plastinka va qobiqlarning kuchlanganlik-deformasiyalanganlik xolatini tekshirish juda dolzarb masaladir.

Bu o'z navbatida toktashuvchi plastinka va qobiqlarning kuchlanganlik-deformasiyalanganlik xolatini tekshirishda elektrodinamik kuchlarning, xususan Lorens kuchining ta'sirini hisobga olishni talab etadi va bunday masalalar nazariy va amaliy jixatdan muxim ahamiyatga ega. Shu sababli bunday masalalarni chuqur o'rganish talab etiladi.

Oxirgi yillarda yangi elektromagnit xossalari materiallar va nanomateriallar yaratildi. Bunday materiallar zamonaviy yangi texnikaning xar xil soxalarida effektiv qo'llanilmoqda.

Magnit maydonida to'k o'tkazuvchi jismning magnitoelastik deformatsiyalanishi modelini quyidagicha yozamiz [1]:

$$\operatorname{div} \vec{T} + \rho_0 (F_i + F_i^\wedge) = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{D} = R_c \quad (1)$$

$$\vec{J} = \sigma \Gamma F^T F^{-1} [(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B})] + R_c \vec{V} \quad (2)$$

$$\rho \vec{F}^\wedge = \sigma \Gamma F^T F^{-1} [(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) \times \vec{B}] + \Gamma^{-1} R_c \vec{V} \quad (3)$$

Magnit maydonida elastik deformatsiyalanuvchi elektr o'tkazuvchi plastinkaning chegaraviy masalalarini yechish metodikasiga asosan birinchi bosqichda hal qiluvchi differensial tenglamalar sistemasi Koshi shaklida hosil qilinadi.

Nostasionar magnit va mexanik yuklanishlar ta'sirida bo'lgan xalqaviy plastinkaning kuchlanganlik-deformatsiyalanganlik holatini aniqlash masalasini fiksirlangan vaqt momentlari uchun yechiladi.

Buning uchun toktashuvchi xalqaviy plastinkaning butun harakati jarayonini vaqt bo'yicha kichik bosqichlarga bo'linadi va har bir vaqt bosqichida masalani ketma-ket yechgan holda deformatsiyalanish jarayonini kuzatiladi.

Vaqt bo'yicha o'zgaruvchilarni ajratish uchun turg'un bo'lgan chekli ayirmali Nyumark sxemasini qo'llaniladi [1].

Plastinka va qobiqlarning chiziqlimas chegaraviy masalalarini yechishda har bir qadamda chiziqli chegaraviy masala yechiladigan iterasion jarayonlarni qo'llash effektiv hisoblanadi. Chiziqlimas chegaraviy masalalarni yechishning bunday usullaridan biri chiziqlilashtirish usulidir.

Chiziqlilashtirish usuli oldingi ma'lumotlardan foydalangan holda, navbatdagi yaqinlashish uchun, har bir qadamda chiziqli chegaraviy masalani yechish uchun iterasion jarayon qo'llanilishiga asoslangan. Ammo lekin, bunday iterasion jarayonni sonli yechish bilan bog'liq bo'lgan masala paydo bo'ladi.

Plastinka va qobiqlar nazariyasi masalalarini yechishning eng effektiv sonli usullaridan biri diskret ortogonallashtirish usulidir. Shuning uchun, k - yaqinlashishda chiziqli chegaraviy masalani yechish diskret ortogonallashtirish usuli yordamida amalga oshiriladi [1].

Tashqi elektr tokining toktashuvchi xalqaviy plastinkaga keltirilishi, plastinka magnit induktsiyasining ta'siri yo'nalishining o'zgarishiga olib keladi.

Tashqi magnit maydoni ta'siri yo'nalishining o'zgarishi toktashuvchi plastinkaning magnit induktsiyasining holatini uncha o'zgartirmaydi, ammo lekin, uning ekstremal qiymatini yetarli darajada oshiradi.

Olingan natijalarga asoslangan holda, tashqi magnit maydoni va tashqi elektr maydonining o'zaro ta'siri haqida fikr yuritishimiz mumkin.

Shunday qilib tashqi elektr tokining miqdori va yo'nalishini tanlab toktashuvchi xalqaviy plastinkaning egilishini minimallashtirish mumkin.

Maqolada elektron avtomatik stansiyalarning elektron boshkarish mashinalarida ishlatiladigan elektromagnit maydoni ta'sirida bulgan yupqa plastinka shaklidagi to'k o'tkazuvchi jismning magnitoelastik deformatsiyalanishi jarayonini matematik modellashtirish algoritmi va dasturiy vositalarini ishlab chiqishgan. Dasturiy vositalar texnologik jarayonlarni boshqarishda qo'llanilishi mumkin. Elektron boshqaruv mashinalari (EBM)

raqamli hisoblash mashinalarining alohida sinfi bo'lib, obyektlarni yoki texnik jarayonlarni boshqarish uchun mo'ljallangan.

ADABIYOTLAR

1. Indiaminov, R., Narkulov, A., Butaev, R. Magnetoelastic strain of flexible shells in nonlinear statement // Journal AIP Conference Proceedings, 2021, 2365, 02 0002.

ELEKTROMAGNIT KUCHLAR TA'SIRIDA YUPQA MIKROELEMENTNING MAGNITOELASTIK TEBRANISHI MATEMATIK MODEL

Indiaminov Ravshan

DSc, Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti
Samarqand filiali

Shodmonov Javohir

Samarqand davlat universiteti Kattaqo'rg'on filiali

Qarshiboyev Normuhammad

Jizzax davlat pedagogika instituti

Bog'liqlik maydonlar mehanikasida tutash muhit harakatini elektromagnit effektlarni hisobga olgan holda o'rganish muhim o'rinni egallaydi. Zamonaviy yangi texnika va texnologiyalarning rivojlanishi bu effektlarni hisobga olish kerakligi zaruriyatini keltirib chiqardi. Magnitoelastiklik hozirgi davrga kelib juda muhim amaliy samara bermoqda va zamonaviy texnikaning turli sohalariga tadbiq qilinmoqda. Jumladan: real konstruktiv elementlarni hisoblashlarda, zamonaviy o'lchagich tizimlarini yaratishda, shuningdek elektron avtomatik stansiyalarning elektron boshqaruv mashinalarida va mikroelektronika, radioelektronika, elektrotexnikaning har xil sohalarida uchraydigan elektromagnit maydoni ta'siri ostida ishlaydigan yupqa plastinka shaklidagi konstruktiv elementlar tebranishi, mustahkamlik kuchlanganlik holatlarini tadqiq qilishda.

EHMning qo'llanish sohalaridan biri tabiatdagi turli jarayonlarni va ob'ektlarni matematik modellashtirishdir. Jarayonlarni kompyuter yordamida modellashtirish va tadqiq etish usuli turli fan sohalarida keng qo'llanilib kelmoqda. Magnit maydonida elektr o'tkazuvchi jism deformasiyalanish jaryonini matematik modellashtirish va jismda paydo bo'ladigan elektromagnit effektlarni tadqiq qilish amaliy jixatdan muhim ahamiyatga ega.

Obyekt va jarayonlarni kompyuter yordamida tadqiq etish quyidagicha zanjirni namoyish qiladi: Obyekt –model–hisoblash algoritmi–EHM uchun dastur–hisoblash natijalari–hisoblash natijalarining taxlili– obyektning boshqarish.

Magnit maydonida yupqa tok o'tkazuvchi qobiqning elektrodinamik kuchlar ta'siridagi magnitoelastik deformasiyalanish jarayonini matematik modellashtiramiz. Elektromagnit maydoni tavsiflaydigan tenglamalarni yozamiz va miqdorlarni aniqlaymiz. U holda tok o'tkazuvchi qobiqning magnitoelastiklik modelini quyidagicha yozamiz:

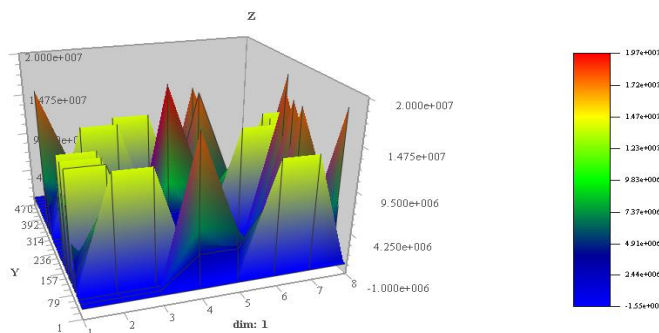
$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1 - \nu_s \nu_\theta}{e_s h} N_s - \frac{\nu_\theta \cos \varphi}{r} u - \frac{\nu_\theta \sin \varphi}{r} w - \frac{1}{2} \theta_s^2; \quad \frac{\partial w}{\partial s} = -\theta_s;$$

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial s} = \frac{12(1 - \nu_s \nu_\theta)}{e_s h^3} M_s - \frac{\nu_\theta \cos \varphi}{r} \theta_s;$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_s}{\partial s} &= \frac{\cos \varphi}{r} \left[\left(\nu_s \frac{e_\theta}{e_s} - 1 \right) N_s + e_\theta h \left(\frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w \right) \right] - \\
&- P_s + h J_{\theta CT} B_\zeta - \sigma_1 h \left[E_\theta B_\zeta + 0.5 \frac{\partial w}{\partial t} B_\zeta (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\zeta^2 \right] + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\
\frac{\partial Q_s}{\partial s} &= -\frac{\cos \varphi}{r} Q_s + \nu_s \frac{e_\theta}{e_s} \frac{\sin \varphi}{r} N_s + e_\theta h \frac{\sin \varphi}{r} \left(\frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w \right) - P_\zeta - \\
&- 0.5 h J_{\theta CT} (B_s^+ + B_s^-) - \sigma_3 h \left[-0.5 E_\theta (B_s^+ + B_s^-) - 0.25 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-)^2 - \right. \\
&- \left. \frac{1}{12} \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ - B_s^-)^2 + 0.5 \frac{\partial u}{\partial t} B_\zeta (B_s^+ + B_s^-) + \frac{h}{12} \frac{\partial \theta_s}{\partial t} B_\zeta (B_s^+ + B_s^-) \right] + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\
\frac{\partial M_s}{\partial s} &= \frac{\cos \varphi}{r} \left[\left(\nu_s \frac{e_\theta}{e_s} - 1 \right) M_s + \frac{e_\theta h^3}{12} \frac{\cos \varphi}{r} \theta_s \right] + Q_s + N_s \theta_s - \\
&- \frac{\sin \varphi}{r} \left(\nu_s \frac{e_\theta}{e_s} M_s + \frac{e_\theta h^3}{12} \frac{\cos \varphi}{r} \theta_s \right) \theta_s + \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial t^2}; \\
\frac{\partial B_\zeta}{\partial s} &= -\sigma_2 \mu \left[E_\theta + 0.5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\zeta \right] + \frac{B_s^+ - B_s^-}{h}; \quad \frac{\partial E_\theta}{\partial s} = -\frac{\partial B_\zeta}{\partial t} - \frac{\cos \varphi}{r} E_\theta.
\end{aligned}$$

Nostasionar magnit va mexanik ta'sirlar ostida bo'lgan qobiqning kuchlanganlik – deformatsiyalanganlik holatini aniqlash masalasini fiksirlangan vaqt momentlari uchun yechamiz. Buning uchun tok tashuvchi qobiqning butun harakati jarayonini vaqt bo'yicha kichik bosqichlariga bo'lamiz va deformatsiyalanish tarixini kuzatamiz, ya'ni har bir vaqt qatlamida masalani ketma – ket yechgan holda. Vaqt bo'yicha o'zgaruvchilarni ajratish uchun turg'un bo'lgan chekli ayirmali Nyumark sxemasini qo'llaymiz. Qobiqlarning chiziqlimas chegaraviy masalalarni yechishda xar bir qadamda chiziqli chegaraviy masala yechiladigan interasion jarayonlarni qo'llash effektiv hisoblanadi. Chiziqlimas chegaraviy masalalarni yechishning bunday usullariga chiziqlilashtirish usuli ta'luqlidir [1].

Toktashuvchi jism magnit maydonida harakatlanganda elektromagnit maydoni tomonidan shu jismga tasir qiluvchi hajmiy elektrodinamik kuch, yani Lorens kuchi paydo bo'ladi. Bu elektrodinamik kuchlarning yupqa toktashuvchi egiluvchan qobiq shaklidagi ellementlarga tasiri juda sezilarlidir. Lorents kuchining toktashuvchi qobiqning kuchlanganlik holatiga tasirini o'rganish maqsadida boroallyuminiylardan yasalgan ortotrop plastinkani magnit maydonida qaraymiz. Olingan natijalar Lorens kuchining toktashuvchi qobiqning kuchlanganlik holatiga tasiri juda sezilarli ekanligini kursatadi (1-rasm).



1-rasm. Elektrodinamik kuchlar ta'sirida yupqa mikroelementning deformatsiyalanishi

ADABIYOTLAR

1. Indiaminov, R., Butaev, R., Narkulov, A. Nonlinear deformation of a current shell in a magnetic field // Journal AIP Conference Proceedings, 2021, 2365, 02 0001.

TASVIRLARNI BURUSH UCHUN PROYEKTIV AKSLANTIRISHLAR**Jumonozorov Dostonbek**

O'zMU

Anora Qurbanova

JDPI

Nuqtalarning bir jinsli tasviri affin va proyektiv akslantirishlar uchun izchil belgilashni ta'minlaydi. Bir jinsli belgilashlar proyektiv geometriyada [3], [1] kompyuter grafikasiga kiritilishidan ancha oldin ishlatilgan [4]. Bir jinsli belgilash ko'pincha noto'g'ri tushuniladi, shuning uchun biz uning qo'llanilishi va xususiyatlarini aniqlashtirishga e'tibor qaratamiz.

Bir jinsli belgilashda 2D nuqtalar 3 ta koordinatali vektorlar bilan, 3D nuqtalar esa 4 ta koordinatali vektorlar bilan ifodalanadi. Affin va proyektiv akslantirishda manba fazosidagi nuqtalarni $p_s = (u', v', q)^T$ orqali va maqsad fazosidagi nuqtalarni $p_d = (x', y', w)^T$ orqali belgilaymiz.

Perspektiv yoki bir jinsli transformatsiya deb ham ataladigan proyektiv akslantirish bir tekislikdan nuqta orqali boshqa tekislikka proyeksiyalashdir [3]. Bir jinsli transformatsiyalar 3D affin modellashdirish transformatsiyalari va perspektiv kamera transformatsiyalari uchun keng ko'lamda qo'llanilgan [2]. O'rganilgan 2D o'lchovli proyektiv akslantirish bir xil 3D o'lchovli akslantirishlarning kichik qismidir.

Proyektiv akslantirishning umumiy shakli ratsional chiziqli akslantirishdir:

$$x = \frac{au + bu + c}{gu + hu + i}, \quad y = \frac{du + eu + f}{gu + hu + i}$$

Bir jinsli matritsada foydalanish proyektiv akslantirishlarni manipulyatsiya qilish ancha oson:

$$p_d = M_{sd} p_s = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ q \end{pmatrix}$$

$$\text{bu yerda } (x, y)^T = \left(\frac{x'}{w}, \frac{y'}{w} \right)^T, \quad w \neq 0 \quad \text{va} \quad (u, v)^T = \left(\frac{u'}{q}, \frac{v'}{q} \right)^T, \quad q \neq 0.$$

Yuqoridagi matritsada 9 ta koeffitsient mavjud bo'lsada, bu akslantirishlar bir jinsli, shuning uchun bu matritsalarining har qanday nolga teng bo'lmagan skalyar ko'paytmasi ekvivalent akslantirishni beradi. Demak, 2D o'lchamli proyektiv akslantirishda faqat 8 ta darajali erkinlik mavjud. Umumiylikni yo'qotmasdan, $i=1$ deb taxmin qilishimiz mumkin, $(0, 0)^T$ manba nuqtasi cheksizlikdagi nuqtaga mos keladi va maxsus holat bundan mustasnodir. $g = h = 0$ bo'lganda proyektiv akslantirish affin akslantirish hisoblanadi.

Proyektiv akslantirishlar affin akslantirishning ko'plab kerakli xususiyatlariga ega. Muayyan chiziqlar bo'ylab tenglashtirilgan nuqtalarni saqlaydigan ikki chiziqli akslantirishdan farqli o'laroq, proyektiv akslantirish odatda tenglashtirilgan nuqtalarni

saqlamaydi. Buning oʻrniga ular nuqtalarning “oʻzaro nisbati” deb nomlangan miqdorni saqlaydilar [1]. Affin akslantirishlar singari, proyektiv akslantirish ham barcha yoʻnalishlardagi chiziqlarni saqlaydi.

Yana bir diqqatga sazovor xususiyat shundaki, proyektiv akslantirishning teskarisi proyektiv akslantirishdir. Teskari akslantirish uchun matritsa toʻgʻridan-toʻgʻri akslantirishning teskarisi yoki qoʻshimasidir. (Matritsaning qoʻsxilishi kofaktorlar matritsasining koʻchirilishidir [5]; $M^{-1} = \text{adj}(M) / \det(M)$).

Teskari bir jinsli algebrada teskari konvertatsiya zarur boʻlganda matritsa oʻrniga qoʻshma matritsadan foydalanish mumkin, birlik matritsaning teskarisi mavjud boʻlmaganda. Teskari konvertatsiya quyidagicha boʻladi:

$$p_s = M_{ds} p_d = \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w \end{pmatrix}$$

Nuqtani teskari konvertatsiya qilish orqali akslantirishda $(x, y)^T$ dan $(u, v)^T$ ni hisoblaymiz. Agar $w \neq 0$ va $q \neq 0$ boʻlsa, $w = 1$ ni tanlab, hisoblashimiz mumkin:

$$u = \frac{Ax + By + C}{Gx + Hy + I}, \quad v = \frac{Dx + Ey + F}{Gx + Hy + I}$$

Interfaol tasvir oʻzgartirgichida belgilangan toʻrtburchaklar va manbaning toʻrtta uchini planshet yoki sichqoncha yordamida belgilashingiz mumkin va bir maydonni boshqasiga oʻzgartirishingiz mumkin. Ushbu turdagi vazifa proyektiv akslantirishning ideal dasturidir, ammo akslantirish matritsasini qanday topamiz?

Proyektiv akslantirish toʻrtburchakning toʻrtta burchagining belgilangan koordinatalari va manbadan aniqlanadigan 8 erkinlik darajasiga ega. $k = 0, 1, 2, 3$ sikl boʻyicha raqamlangan uchlar uchun $(u_k, v_k)^T$ akslantirish $(x_k, y_k)^T$ ga bogʻliq boʻlsin. Barcha koordinatalar haqiqiy (cheklangan) deb faraz qilinadi. Toʻgʻridan-toʻgʻri M_{sd} akslantirish matritsasini hisoblash uchun $i = 1$ deb faraz qilsak biz $a - h$ gacha boʻlgan sakkiz nomaʼlumli tenglamalarga ega boʻlamiz:

$$x_k = \frac{au_k + bv_k + c}{gu_k + hv_k + 1} \Rightarrow u_k a + v_k b + c - u_k x_k g - v_k x_k h = x_k$$

$$y_k = \frac{du_k + ev_k + f}{gu_k + hv_k + 1} \Rightarrow u_k d + v_k e + f - u_k y_k g - v_k y_k h = y_k \quad k = 0, 1, 2, 3$$

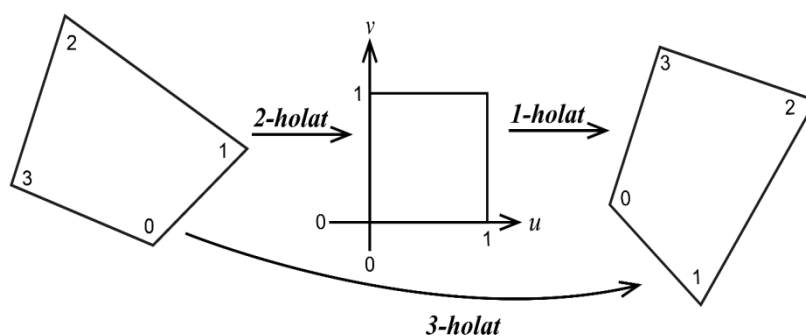
Buni 8×8 sistema koʻrinishida yozilishimiz mumkin:

$$\begin{pmatrix} u_0 & v_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_0x_0 & -v_0x_0 \\ u_1 & v_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_1x_1 & -v_1x_1 \\ u_2 & v_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_2x_2 & -v_2x_2 \\ u_3 & v_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_3x_3 & -v_3x_3 \\ 0 & 0 & 0 & u_0 & v_0 & 1 & -u_0y_0 & -v_0y_0 \\ 0 & 0 & 0 & u_1 & v_1 & 1 & -u_1y_1 & -v_1y_1 \\ 0 & 0 & 0 & u_2 & v_2 & 1 & -u_2y_2 & -v_2y_2 \\ 0 & 0 & 0 & u_3 & v_3 & 1 & -u_3y_3 & -v_3y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$a-h$ akslantirish koeffitsientlari uchun Gauss yo‘qotish usuli yoki boshqa usullar yordamida bu chiziqli sistemani yechishimiz mumkin. Agar teskari akslantirish kerak bo‘lsa, biz M_{sd} ning qo‘shmasini hisoblaymiz yoki xudi shu jarayonni (1) o‘rniga (2) tenglamadan boshlaymiz va $A-H$ koeffitsientlari uchun 8×8 sistemani yechamiz. Tezlikning muhim maxsus holatlarida, akslantirish matritsasini hisoblash uchun yanada samarali formulalar mavjud. Formula yuqoridagi holda ko‘pburchak ikkala manba va belgilangan fazolarda umumiy to‘rtburchak bo‘lganda ko‘rib chiqadi. Biz uchta qo‘shimcha holatni ko‘rib chiqamiz: kvadratdan to‘rtburchakka, to‘rtburchakdan kvadratga va (yana) umumiy to‘rtburchakdan to‘rtburchakka akslantirishlarni ko‘rib chiqamiz.

1-holat. uv to‘rtburchak birlik kvadrat bo‘lgan maxsus holatda sistema osonlik bilanyecxiladi. Agar uchlar quyidagicha bog‘langan bo‘lsa:

$$\begin{array}{cccc} x & y & u & v \\ x_0 & y_0 & 0 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 0 & 1 \end{array}$$



1-rasm: To‘rtburchakdan to‘rtburchakgacha akslantirish oddiyroq akslantirishlar tarkibi sifatida

Tenglamalar quyidagi holga keltiriladi

$$\begin{array}{ll}
c = x_0 & f = y_0 \\
a + c - gx_1 = x_1 & d + f - gy_1 = y_1 \\
a + b + c - gx_2 - hx_2 = x_2 & d + e + f - gy_2 - hy_2 = y_2 \\
b + c - hx_3 = x_3 & e + f - hy_3 = y_3
\end{array}$$

Agar

$$\begin{array}{lll}
\Delta x_1 = x_1 - x_2 & \Delta x_2 = x_3 - x_2 & \sum x = x_0 - x_1 + x_2 - x_3 \\
\Delta y_1 = y_1 - y_2 & \Delta y_2 = y_3 - y_2 & \sum y = y_0 - y_1 + y_2 - y_3
\end{array}$$

aniqlasak, yechim ikkita holatga bo'linadi:

(a) $\sum x = 0$ va $\sum y = 0$. Bu xy ko'pburchakning parallelogram ekanligini bildiradi, shuning uchun akslantirish affindir va $a = x_1 - x_0$, $b = x_2 - x_1$, $c = x_0$, $d = y_1 - y_0$, $e = y_2 - y_1$, $f = y_0$, $g = 0$, $h = 0$.

(b) $\sum x \neq 0$ yoki $\sum y \neq 0$ proyektiv akslantirishni beradi:

$$g = \frac{\begin{vmatrix} \sum x & \Delta x_2 \\ \sum y & \Delta y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_1 & \Delta x_2 \\ \Delta y_1 & \Delta y_2 \end{vmatrix}} \quad h = \frac{\begin{vmatrix} \Delta x_1 & \sum x \\ \Delta y_1 & \sum y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_1 & \Delta x_2 \\ \Delta y_1 & \Delta y_2 \end{vmatrix}} \quad \begin{array}{ll} d = y_1 - y_0 + gy_1 & a = x_1 - x_0 + gx_1 \\ e = y_3 - y_0 + hy_3 & b = x_3 - x_0 + hx_3 \\ f = y_0 & c = x_0 \end{array}$$

Bu hisob-kitob murakkab bo'lmagan 8×8 sistemani yechishga qaraganda ancha tezdir. Yuqoridagi akslantirish to'rtburchakni to'rtburchakka almashtirish matritsasi va hajim bilan oldindan ko'paytirish akslantirishiga osongina umumlashtiriladi.

2-holat. Teskari akslantirish, kvadratga to'rtburchakni ham optimallashtirish mumkin. Ma'lum bo'lishicha, buni hisoblashning eng samarali algoritmi oldingi holatda bo'lgani kabi sof ramziy emas, balki raqamlidir. Kerakli akslantirishning teskarisini topish uchun biz yuqorida tavsiflangan kvadratdan to'rtburchakga formulalardan foydalanamiz va keyin to'rtburchakdan kvadratga akslantirishni hisoblash uchun uning qo'shimchasini olamiz.

3-holat. Biz to'rtburchakdan kvadratga va kvadratdan to'rtburchakka o'xshash akslantirishlarni tezda hisoblashimiz mumkin bo'lganligi sababli, ikkita akslantirish osongina to'rtburchakdan to'rtburchakka umumiy akslantirishni olish uchun tuzilishi mumkin (1-rasm). Ushbu yechim usuli umumiy 8×8 sistemani hal qiluvchiga qaraganda tezroq.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. H. S. M. Coxeter, Non-Euclidean Geometry, U. of Toronto Press, 1978.
2. James D. Foley, Andries van Dam, Fundamentals of Interactive Computer Graphics, Addison-Wesley, Reading, MA, 1982.
3. E. A. Maxwell, The Methods of Plane Projective Geometry, Based on the Use of General Homogeneous Coordinates, Cambridge U. Press, London, 1946.
4. Lawrence G. Roberts, Homogeneous Matrix Representation and Manipulation of N-Dimensional Constructs, MS-1405, Lincoln Lab, Lexington, MA, July 1966.
5. Gilbert Strang, Linear Algebra and Its Applications, 2nd ed., Academic Press, New York, 1980.
6. Paul Heckbert, Projective Mappings for Image Warping, 1999.

$W_2^{(3,2)}(0,1)$ GILBERT FAZOSIDA AYIRMALI FORMULA EKSTREMAL FUNKSIYASI

Karimov Roziq

O'zRFA Matematika instituti

Ashurova Gulshoda

Buxoro viloyati Buxoro tumani 25-maktab

Ravshanova Nasiba

Buxoro viloyati Buxoro tumani 25-maktab

Bilamizki ko'plab amaliy masalalarni hal qilish differensial tenglamalarni yoki ularning sistemalarini yechish masalasiga olib kelinadi. Differensial tenglamalar shunday ko'p tadbiqqa ega bo'lsa ham ulardan kam sonlisigina elementar funksiyalar va ularning kombinatsiyasi yordamida aniq yechilishi mumkin. Differensial tenglamalar analitik yechilganda ham olingan yechim murakkabligi hisobiga qo'llash uchun noqulay bo'lishi mumkin. Agar differensial tenglamaning analitik yechimini olishning imkoni bo'lmasa yoki uni olish juda qiyin bo'lsa biz uning taqribiy yechimini topishga harakat qilib ko'rishimiz mumkin. Taqribiy yechimni topishning ikkita an'anaviy yondashuvlari mavjud:

1.Yarim-analitik metodlar. Ba'zida differensial tenglamani yechimini soddaroq funksiyalar yordamida ifodalash uchun qatorlarni, integral tenglamalarni yoki asimptotik metodlarni ishlatishimiz mumkin.

2.Sonli yechimlar. Diskret sonli qiymatlar differensial tenglama yechimini ma'lum bir aniqlikda ifodalashi mumkin. Hozirgi kunda bunday sonli matritsalar hamda ular bilan bog'liq jadvallar yoki grafiklar kompyuterlar yordamida olinmoqda. Bu bilan oldin olishning imkoni bo'lmagan effektiv taqribiy yechimlar olinmoqda.

Quyidagi $[0,1]$ kesmada $y(x_0) = y_0$ boshlang'ich shart bilan berilgan differensial tenglamaning taqribiy yechimini topish talab qilinsin

$$y' = f(x, y). \quad (1)$$

Ushbu $[0,1]$ kesmani uzunligi $h = \frac{1}{N}$ ga teng bo'lgan N ta bo'lakka bo'lamiz va qidirilayotgan $y(x)$ funksiyaning y_n taqribiy qiymatlarini $x_n = nh$, $n = 0, 1, \dots, N$ tugun nuqtalarda hisoblaymiz. Bunday usullarning klassik namunasi sifatida Eyler usulini olishimiz mumkin. Bu usul yordamida differensial tenglamaning taqribiy yechimi quyidagicha hisoblanadi: Funksiyaning x_{n+1} tugun nuqtadagi y_{n+1} taqribiy qiymatini topish uchun, x_n tugun nuqtadagi y_n taqribiy qiymatidan foydalanamiz

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n \quad (2)$$

bu yerda $y'_n = f(x_n, y_n)$, shunday qilib y_{n+1} berilgan funksiya va uning birinchi tartibli hosilasining x_n tugun nuqtadagi qiymatlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat.

Biz (1)-tenglamani taqribiy yechish uchun quyidagi ko'rinishdagi ayirmali formulani qaraymiz [1-2]

$$\sum_{\beta=1}^k C_{\beta} \varphi(h\beta) \cong h \sum_{\beta=1}^k C_{\beta,1} \varphi'(h\beta) \quad (3)$$

bu yerda C_β va $C_{\beta,1}$ – ayirmali formulaning koeffitsiyentlari, $h = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, $\varphi(x) \in W_2^{(3,2)}(0,1)$.

$W_2^{(3,2)}(0,1)$ fazoda ixtiyoriy ikkita $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalarning skalyar ko'paytmasi

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{W_2^{(3,2)}} = \int_0^1 (\varphi'''(x) + \varphi''(x))(\psi'''(x) + \psi''(x)) dx$$

ko'rinishda kiritilgan.

$W_2^{(3,2)}(0,1)$ fazoda funksiyaning normasi shu skalyar ko'paytma yordamida

$$\|\varphi\|_{W_2^{(3,2)}(0,1)} = \langle \varphi, \varphi \rangle_{W_2^{(3,2)}(0,1)}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \int_0^1 (\varphi'''(x) + \varphi''(x))^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

ko'rinishda aniqlanadi.

(3) formulaning xatoligi deb, quyidagi ayirmaga aytiladi:

$$(\ell, \varphi) = \sum_{\beta=1}^k C_\beta \varphi(h\beta) - h \sum_{\beta=1}^k C_{\beta,1} \varphi'(h\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{\beta=1}^k C_\beta \delta(x-h\beta) + h \sum_{\beta=1}^k C_{\beta,1} \delta'(x-h\beta) \right] \varphi(x) dx \quad (4)$$

(4) xatolikka mos

$$\ell(x) = \sum_{\beta=1}^k C_\beta \delta(x-h\beta) + h \sum_{\beta=1}^k C_{\beta,1} \delta'(x-h\beta) \quad (5)$$

ifodaga xatolik funksionali deyiladi, bu yerda $\delta(x)$ – Dirakning delta-funksiyasi.

(3) kvadratur formulaning (5) xatolik funksionali $W_2^{(3,2)*}$ fazodagi chiziqli uzluksiz funksionaldir, bu yerda $W_2^{(3,2)*}$, Gilbert fazosi $W_2^{(3,2)}$ ga qo'shma fazodir.

(5) xatolik funksionalining normasi quyidagicha aniqlanadi [3]

$$\|\ell\|_{W_2^{(3,2)*}} = \sup_{\|\varphi\|_{W_2^{(3,2)}} \neq 0} \frac{|(\ell, \varphi)|}{\|\varphi\|}.$$

Bu yerdan (4) formula xatoligining absolyut qiymati quyidagicha baholanadi

$$|(\ell, \varphi)| \leq \|\ell\|_{W_2^{(3,2)*}(0,1)} \cdot \|\varphi\|_{W_2^{(3,2)}(0,1)} \quad (6)$$

Yuqoridagi tengsizlikdan ko'rinadiki, (4) xatolikning absolyut qiymatini yuqoridan baholash uchun, (5) xatolik funksionalining normasini topish talab etiladi. Buning uchun esa mos ekstremal funksiyani topish kerak.

Masala. ψ_ℓ ekstremal funksiyani topish.

Buning uchun “Gilbert fazosida funksionalning umumiy ko'rinishi” haqidagi Riss teoremasidan foydalanib ekstremal funksiya (ya'ni Riss elementi) ni topamiz.

$$(\ell, \varphi) = \langle \psi_\ell, \varphi \rangle_{W_2^{(3,2)}}$$

bunda $\|\ell\|_{W_2^{(3,2)*}} = \|\psi_\ell\|_{W_2^{(3,2)}}$ tenglik o'rinli va ψ_ℓ – Riss elementidir.

(6) tengsizlikni tenglikka aylantiruvchi ψ_ℓ funksiyaga *ekstremal funksiya* deyiladi [3], ya'ni

$$(\ell, \psi_\ell) = \|\ell\|_{W_2^{(3,2)*}} \cdot \|\psi_\ell\|_{W_2^{(3,2)}}$$

tenglik o'rinli. Endi $\langle \psi_\ell, \varphi \rangle_{W_2^{(3,2)}}$ ni bo'laklab integrallab

$$\langle \psi_\ell, \varphi \rangle = - \int_0^1 (\psi_\ell^{(VI)}(x) - \psi_\ell^{(IV)}(x)) \varphi(x) dx = (\ell, \varphi)$$

ga ega bo'lamiz, bu yerdan quyidagi chiziqli oddiy differensial tenglamaga kelimiz

$$\psi_\ell^{(VI)}(x) - \psi_\ell^{(IV)}(x) = -\ell(x). \quad (7)$$

Yuqoridagi (7) tenglamaning umumiy yechimini izlaymiz va quyidagi natijani olamiz.

Teorema. (7) tenglamaning umumiy yechimi

$$\psi_\ell(x) = -\ell(x) * G_3(x) + de^{-x} + P_1(x) \quad (8)$$

(3) ayirmali formulaning ekstremal funksiyasidir, bu yerda d – ixtiyoriy o'zgarmas

haqiqiy son, $P_1(x)$ – birinchi darajali ko'phad va $G_3(x) = \frac{\operatorname{sign} x}{2} \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} - x - \frac{x^3}{6} \right]$.

Shuni ham ta'kidlash kerakki, kvadratur, interpolatsion, ayirmali formulalar va ularga mos ekstremal funksiyalarni topish masalasi ko'plab avtorlar tomonidan oldin qaralgan. To'laroq ma'lumot olish uchun [4-7] adabiyotlarga qarang.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Babuska I., Vitasek E., Prager M. Numerical processes for solution of differential equations. - Mir, Moscow, 1969, 369 p.
2. Babuska I., Sobolev S.L. Optimization of numerical methods. - Apl. Mat., 10, 9-170, 1965
3. Sobolev S.L. Introduction to the theory of cubature formulas. - Nauka, Moscow, 1974, 808 p.
4. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R. Optimal quadrature formulas in the sense of Sard in $W_2^{(m,m-1)}$ space. Calcolo, Springer, 2014, V.51, pp. 211-243.
5. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R. Construction of interpolation splines minimizing semi-norm in $W_2^{(m,m-1)}$ space. BIT Numer Math, Springer, 2013, V.53, pp. 545-563.
6. Shadimetov Kh.M., Mirzakabilov R.N. On a construction method of optimal difference formulas. AIP Conference Proceedings, 2365, 020032, 2021.
7. Hayotov A.R., Karimov R.S. Optimal difference formula in the Hilbert space $W_2^{(2,1)}(0,1)$ Problems of Computational and Applied Mathematics, 5(35), 129-136, (2021).

NUMERICAL MODELING OF STRESS AND STRAIN SPACE VISCOPLASTIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS

Khaldjigitov Abduvali

DSc f.-m., National University of Uzbekistan

Adambaev Uchkunbek

PhD f.-m., National University of Uzbekistan

Pardabaeva Nodira

National University of Uzbekistan

Mathematical modeling the deformation process of solid materials, taking into account the deformation rate, is relevant in determination of the safety margins and reliability of technical objects and their elements in various fields of mechanical engineering, aircraft construction, automobile construction, etc.

In this paper formulates two types of one-dimensional viscoplastic boundary value problems, based on the classical flow theory of plasticity (stress space- TT^σ) and new strain space (TT^ε) plasticity theories. In case of strain space theory of viscoplasticity, unlike the strain space theory, the loading surface is considered in the deformation space[2].

The boundary value problem (BVP) based on the Perzyna's theory[1] of viscoplasticity in the one-dimensional case consists of the following equations:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t}, \text{ where } v = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial x} - 4\mu\gamma \left(\frac{\sigma}{K_0} - \sqrt{3} \right), \text{ where } \frac{\sigma}{K_0} - \sqrt{3} \geq 0 \quad (2)$$

$$v|_{t=0} = v^0, \quad \sigma|_{t=0} = \sigma^0 \quad (3)$$

$$v|_{x=0} = 0, \quad \sigma|_{x=e} = S^0 \quad (4)$$

where σ – is the stress, v – is the speed, γ – is the strain rate, K_0 – is the elastic limit.

In the case of a strain space viscoplastic theory, in the boundary value problem (1-4), instead of relation (2), it is necessary to consider the following relation:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - 2\gamma \left(\frac{\varepsilon}{\chi_0} - \sqrt{3} \right), \text{ at } \frac{\varepsilon}{\chi_0} - \sqrt{3} \geq 0, \quad (5)$$

The BVP (1-4) with respect to stress and strains are of the form:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} - \frac{4\mu\gamma}{K_0} \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \text{ at } \frac{\sigma}{K_0} - \sqrt{3} \geq 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{\varepsilon}}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \dot{\varepsilon}}{\partial x^2} - \frac{2\gamma}{\rho K_0} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}, \text{ at } \frac{\varepsilon}{R_0} - \sqrt{3} \geq 0 \quad (7)$$

For the formulated BVP explicit and implicit difference schemes are constructed and solved, respectively, by recurrence relations and the elimination method. Comparison of the numerical results is carried out and the validity of the strain space viscoplasticity theory is shown.

REFERENCES

1. Perzyna, P. (1966), "Fundamental problems in viscoplasticity", *Advances in Applied Mechanics*, **9** (2): 244–368.

2. Khaldjigitov A.A., Khudazarov R.S. and Sagdullaeva D.A. Plasticity and thermoplasticity theory for anisotropic materials. FTP press, Tashkent, 2015, 315 p. (in Russian).

AN OPTIMAL QUADRATURE FORMULA IN THE SPACE $W_2^{(1,0)}$ OF PERIODIC FUNCTIONS

Khayriev Umedjon

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences

1 Introduction and statement of the problem

In this work using the Sobolev method [4] for the approximate calculation of the integral $\int_0^1 \varphi(x) dx$ the optimal quadrature formula is constructed and the square of the norm of the error functional for the constructed optimal quadrature formula in the space $W_2^{(1,0)}(0,1]$ is calculated.

Let $W_2^{(1,0)}(0,1]$ be the Hilbert space of periodic, real-valued functions $\varphi(x)$, $0 < x \leq 1$. The space $W_2^{(1,0)}(0,1]$ is the class of functions which are absolute continuous and 1st order derivative (in the generalized sense) is square integrable, and equipped with the inner product

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{W_2^{(1,0)}} = \int_0^1 (\varphi'(x) + \varphi(x))(\psi'(x) + \psi(x)) dx. \quad (1)$$

We consider a quadrature formula of the following form

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \cong \sum_{k=1}^N C_k \varphi(hk), \quad (2)$$

where $\varphi \in W_2^{(1,0)}$, C_k are the coefficients of the quadrature formula and $N \in \mathbb{N}$.

The error of the quadrature formula is given as follows

$$\int_0^1 \varphi(x) dx - \sum_{k=1}^N C_k \varphi(hk) = \int_0^1 \left[\varepsilon_{(0,1]}(x) - \sum_{k=1}^N C_k \delta(x - hk) \right] * \phi_0(x) \varphi(x) dx = (\ell, \varphi), \quad (3)$$

where $h = \frac{1}{N}$, $\varepsilon_{(0,1]}(x)$ is the indicator of the interval $(0,1]$, δ is Dirac's delta-function,

$\phi_0(x) = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \delta(x - \beta)$, $*$ is the convolution operation and

$$\ell(x) = \left(\varepsilon_{(0,1]}(x) - \sum_{k=1}^N C_k \delta(x - hk) \right) * \phi_0(x) \quad (4)$$

is the periodic error functional of the quadrature formula (2).

The error (3) of the quadrature formula (2) is a linear functional in $W_2^{(1,0)*}$. The absolute value of the error (3) is estimated by the Cauchy-Schwarz inequality as follows

$$|(\ell, \varphi)| \leq \|\ell\|_{W_2^{(1,0)*}} \cdot \|\varphi\|_{W_2^{(1,0)}},$$

where

$$\|\ell | W_2^{(1,0)*}\| = \sup_{\|\varphi | W_2^{(1,0)}\|=1} |(\ell, \varphi)| \quad (5)$$

is the norm of the error functional (4).

The problem of constructing an optimal quadrature formula for the approximate calculation of the integral is as follows.

Problem 1. Find the coefficients C_k that give the minimum value to the norm $\|\ell | W_2^{(1,0)*}\|$, and calculate the following

$$\|\ell | W_2^{(1,0)*}\| = \inf_{C_k} \|\ell | W_2^{(1,0)*}\|.$$

We note that the coefficients C_k which are the solution for Problem 1 are called *the optimal coefficients* and the quadrature formula (2) with these coefficients is said to be *the optimal quadrature formula in the sense of Sard* [3].

2 Main Results

To calculate the norm (5), we use *the extremal function* ψ_ℓ for the error functional ℓ (see [18]) that satisfies the following equality:

$$(\ell, \psi_\ell) = \|\ell | W_2^{(1,0)*}\| \cdot \|\psi_\ell | W_2^{(1,0)}\|. \quad (6)$$

Since $W_2^{(1,0)}$ is the Hilbert space by the Riesz theorem for the error functional ℓ and for any φ from $W_2^{(1,0)}$ there exists an element $\psi_\ell \in W_2^{(1,0)}$ that satisfies the equality

$$(\ell, \varphi) = \langle \psi_\ell, \varphi \rangle_{W_2^{(1,0)}}, \quad (7)$$

where $\langle \varphi, \psi_\ell \rangle_{W_2^{(1,0)}}$ is the inner product of the functions ψ_ℓ and φ defined by the formula (1). In addition, the equality $\|\ell | W_2^{(1,0)*}\| = \|\psi_\ell | W_2^{(1,0)}\|$ is fulfilled. So, taking into account the equality (6), we derive

$$(\ell, \psi_\ell) = \|\ell | W_2^{(1,0)*}\|^2.$$

Integrating by parts the right-hand side of (7), keeping in mind periodicity of functions, for ψ_ℓ we have

$$\psi_\ell''(x) - \psi_\ell(x) = -\ell(x). \quad (8)$$

Further, we give the main results of this work.

Theorem 2.1 *The solution of equation (8) is the extremal function ψ_ℓ of the error functional ℓ and it expressed as*

$$\psi_\ell(x) = 1 + \sum_{k=1}^N C_k G_1(x - hk),$$

where

$$G_1(x) = - \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \beta x}}{(2\pi \beta)^2 + 1}.$$

Theorem 2.2 If $\varphi \in W_2^{(1,0)}$, then the following formulas are valid for the optimal coefficients of the quadrature formula (2) with the error functional (4)

$$C_k = \frac{2(e^h - 1)}{e^h + 1}, \text{ for } k = 1, 2, \dots, N.$$

Theorem 2.3 In the space $W_2^{(1,0)}$ for the norm of the error functional (4) of the optimal quadrature formula, the following holds

$$\|\ell | W_2^{(1,0)*}\|^2 = 1 - \frac{2(e^h - 1)}{h(e^h + 1)}.$$

Remark 2.1 It should be noted that from (11) we obtain

$$\|\ell\|^2 = \frac{1}{12}h^2 - \frac{1}{120}h^4 + O(h^5),$$

i.e., the order of convergence of the optimal quadrature formula of the form (2) is $O(h)$. In conclusion, the order of convergence of the optimal quadrature formula we constructed the same with the order of convergence of the Rectangular formula (see [2]).

REFERENCES

1. Babaev S.S., Hayotov A.R., Khayriev U.N. On an optimal quadrature formula for approximation of Fourier integrals in the space $W_2^{(1,0)}$. *Uzbek Math. Journal.* **3** (2020) no. 2, 23-36. DOI: 10.29229/uzmj.2020-2-3.
2. Samarskiy A.A., Gulin A.B. Numerical methods. *Nauka, Moscow* (1989), 164 pp.
3. Sard A. Best approximate integration formulas; best approximation formulas. *Amer. J. Math.* **71** (1949), 80-91.
4. Sobolev S.L., Vaskevich he Theory of Cubature Formulas., *Kluwer Academic Publishers Group*. (1997), Dordrecht.
5. Shadimetov M.Kh. Weight optimal cubature formulas in Sobolev's periodic space. *Sib. J. Numer. Math.* **2** (1999) Novosibirsk, 185–196, (in Russian).
6. Zhensykbayev A.A. The best quadrature formula for some classes of periodic differentiable functions. *Izv. Academy of Sciences of the USSR. Math series.* (1977) (Russian).

IQTISODIYOTDA YIRTQICH O'LJA MODEL

Kurbonov Xasan

O'zbekiston Milliy Universiteti

Tabiatda keng tarqalgan ko'plab jarayonlarni "yirtqich-o'lja" munosabatlari misolida matematik modellashirish mumkin. Biz mazkur ishda iqtisodiy tizimlarning biologik tizimlar bilan o'xshashligini aniq ko'rish maqsadida sodda tabiiy ekotizimlarni qaraymiz. o'rtasidagi, Tabiatdagi turlar orasidagi ozuqaviy munosabatlar nafaqat organizmlarning energiya ehtiyojlarini ta'minlashga xizmat qilish bilan birga, bu munosabatlar turlarni saqlab qoluvchi, ularning sonini tartibga soladigan va evolyutsiya jarayoniga ta'sir qiluvchi yana bir muhim rol o'ynaydi. [1] maqolada bank tizimi va uch darajadan: o'simliklar bilan oziqlanadigan o'txo'r hayvonlardan, ular o'z navbatida yirtqich hayvonlardan tashkil topgan tabiiy ekotizim o'rtasidagi o'xshashliklar ko'rib chiqilgan. Ushbu uchta daraja mos ravishda bank tizimining

uchta darajasiga to'g'ri keladi: jismoniy shaxslar va firmalar, tijorat banklari va asosiy bank. Agar tabiiy ekotizimda biomassa almashinuv energiyasi bo'lib xizmat qilsa, bank tizimida u kapital hisoblanadi. [1] da ushbu ekotizimni modellashtirish Lotka-Volterra differensial tenglamalarining uch bosqichli tizimi yordamida taklif qilingan.

Biologik tizimlarda:

- Yirtqichlar o'ljani kuzatish, quvib yetish va tutib olish uchun ko'p kuch sarflaydi. Ularda maxsus ovchilik xulq-atvori shakllangan bo'ladi. Ularning hayotlari davomida ko'p o'ljalar zarur bo'ladi. Odatda yirtqichlar kuchli va faol hayvonlar bo'lib sanaladi [2].

- Parazit bakteriyalar butun umri davomida hayotini bir yoki ikkita, kamdan kam holda uchta "xo'jayin"lar tanasida o'tkazadilar. Parazitlar odatda faol qidirish zarur bo'lmagan oziq-ovqat mo'l-ko'l bo'lgan muhitda yashashadi va xo'jayinlarni yashash joyi sifatida foydalanishadi. Ularning tuzilishi soda bo'lib tashqi dunyo bilan bog'liklari kuchsiz bo'ladi [2].

- Mayda o'ljalar bo'lib hisoblanuvchi urug'larni yoki hasharotlarni yig'uvchi hayvonlar o'ljalarini qidirib toppish uchun ko'p energiyalarini sarflaydilar. Ular uchun topilgan ovqatni egallab olish qiyinchilik tug'dirmaydi. Ularda asosan qidiruv faoliyati rivojlangan bo'ladi, ammo ovchilik xususiyatlari yaxshi rivojlanmagan bo'ladi [3].

Iqtisodiy tizimlarda:

- Yangi innovatsion g'oyalar, iqtidorli jamoa va boshqalar bilan ta'minlashi mumkin bo'lgan kuchsiz kompaniyalar yirik va boy (yirtqichlar) korporatsiyalarning o'ljalariga aylanishadi.

- Davlat buyurtmalari bo'yicha ishlaydigan yoki yirikroq kompaniyaning doimiy pudratchilari bo'lgan kompaniyalar. Bunga misol qilib bitta notariusga biriktirilgan va ular bilan yozma tarjimalarni notarial tasdiqlash sohasida uzoq vaqt ishlaydigan tarjima agentliklari keltirish mumkin.

- Eng tipik misol ko'proq mustaqil ommaviy bozor kompaniyalari, masalan, chakana savdo bilan shig'ullanuvchi kompaniyalar.

Yuqoridagilar biologik va iqtisodiy tizimlar o'rtasidagi o'xshashliklarni ifodalaydi. Biz uchun yirtqich hayvonlarning o'lja va umuman ekotizim bilan munosabatlari katta qiziqish uyg'otadi. Agar yirtqichlar qochadigan, qarshilik ko'rsatadigan va bekinishi mumkin bo'lgan o'ljalar bilan oziqlanishsa, u holda o'tkir ko'zli, eshitishi sezgir, nerv tizimi va muskul tizimi juda rivojlangan o'ljalar yashab qoladi. Shunday qilib, yirtqich o'ljani ovlash uchun tanlash orqali ularning kasallari va zaiflarini yo'q qiladi. O'z navbatida esa yirtqichlar orasida ham kuchlilik, chaqqonlik va chidamlilik bo'yicha tanlov boradi. Ushbu munosabatlarning evolyutsion natijasi o'zaro ta'sir qiluvchi turlar, yirtqichlarning ham, o'ljalarning ham progressiv rivojlanishi natijasida bo'ladi [2]. Iqtisodiy tizimlarda bunday evolyutsiya shunga o'xshash prinsiplarga muvofiq sodir bo'ladi. Bozorga kirib kelgan yangi texnologiya o'zi uchun dushman muhitga duch keladi va bozorda o'z o'rnini egallash uchun kurashadi. Buning sababi shundaki, bozorda ko'pincha eski va kuchliroq texnologiyalar mavjud bo'ladi, shuning uchun yangi texnologiyalar eskilari tomonidan o'zlashtiriladi yoki to'la rivojlanishga ulgurmasdan to'xtatiladi. Biroq yangi texnologiya raqobatbardoshroq bo'lsa, u eskisini bozordan siqib chiqaradi. Shunday qilib, iqtisodiy dunyoda ham tabiiy tanlanish qonuni namoyon bo'ladi. Agar yirtqichlar ularga qarshilik ko'rsata olmaydigan faol bo'lmagan yoki

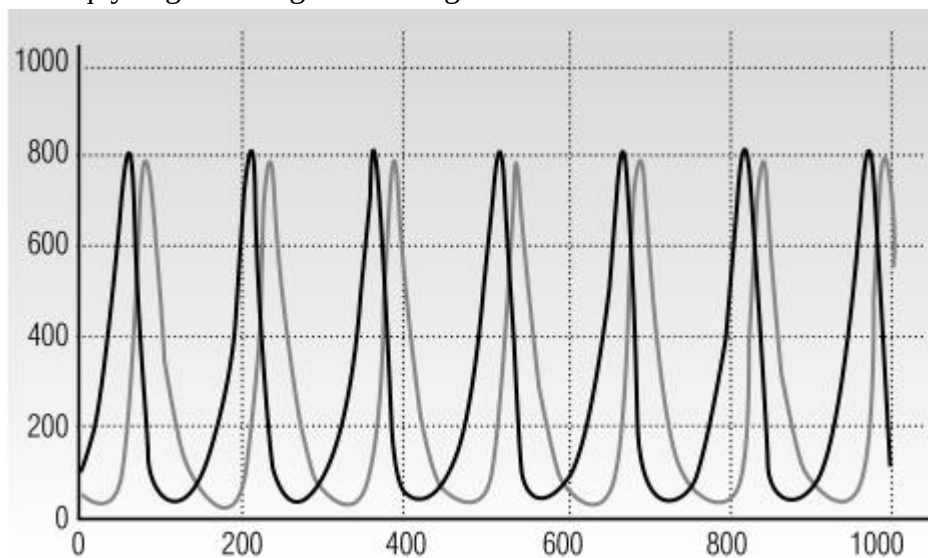
kichik turlar bilan oziqlansa, bu boshqa evolyutsion natijaga olib keladi. Yirtqich sezishga muvaffaq bo'lgan o'ljalari yo'qolishadi. Kamroq seziladigan yoki qo'lga olish uchun biroz noqulay bo'lgan o'ljalari g'alaba qozonadi. Himoya uchun rang berish, qattiq qobiqlar, himoya tikanlar va ignalar va dushmanlardan boshqa qutqaruv vositalari uchun tabiiy tanlanish shunday amalga oshiriladi. Iqtisodiy dunyoda bunday himoya funksiyalari ushbu kompaniyalar hududida joylashgan davlatning nazorat qiluvchi organlari tomonidan sun'iy ravishda yaratilishi mumkin. Bularga, xususan quyidagilar kiradi:

- Innovatsion kichik korxonalarni huquqiy himoya qilish;
- bozorda innovatsiyalarni amalga oshirishni to'liq himoya qila oladigan yangi g'oyalarni patentlash mexanizmlari;
- to'g'ri tashkil etilgan innovatsion ekotizim;
- rivojlanayotgan texnologiyalarni namoyish qilish va rivojlantirish tizimi.

Bir-biridan mustaqil ravishda model tenglamalarini taklif qilgan mualliflari nomi bilan atalgan Lotka-Volterra modeli ikki turdagi "yirtqich-o'lja" turlarining o'zaro ta'sir sxemasini aks ettiradi.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (\alpha - \beta y)x, \\ \frac{dy}{dt} &= (-\gamma + \delta x)y,\end{aligned}$$

bu yerda x – o'ljalari soni; y – yirtqichlari soni; t – vaqt; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ turlar orasidagi o'zaro ta'sirni aks ettiruvchi koeffitsientlar. Ushbu differensial tenglamalar sistemasini grafigini chizishda quyidagi 1-rasmga o'xshash grafik hosil bo'ladi.



1-rasm

Ko'rinib turibdiki, yirtqichlar va o'ljalari populyatsiyasining rivojlanish dinamikasi, tebranishi sababi, ma'lum shartlar asosida populyatsiyalarning tebranishini keltirib chiqaradigan teskari aloqa zanjirlari mavjudligidadir. Lotka-Volterra tenglamalar tizimi nafaqat tabiatda, balki iqtisodiy tizimlarda juda tez-tez qo'llaniladi. Masalan, shahar aholisining mamlakat aholisiga nisbati va shahar aholisining o'rtacha daromadining mamlakat aholisining o'rtacha daromadiga nisbati aholining rivojlanish dinamikasi modeli [3] da ko'rib chiqilgan. Model quyidagicha ko'rinadi:

$$\dot{x}_i = x_i(-\alpha_i - \alpha + \alpha y_i), \quad \dot{y}_i = y_i(\beta_i - \beta_i x_i)$$

Bu yerda i – ko'rib chiqish maydoni, x – aholi; y – o'rtacha daromad; α va β dinamik parametrlardir. Yana bir misol, birjadagi raqobatni o'rganuvchi ish [4] bo'lib, unda raqobatning ikki turi mavjud: birjada o'z bahosi orqali sotiladigan kompaniyalar o'rtasida va kompaniyalar uchun ovchi investorlar o'rtasida. Ushbu jarayonlarni matematik modellash uchun tadqiqotda Lotka-Volterra tenglamalari tizimi asos qilib olinadi.

ADABIYOTLAR

1. Comes C.-A. (2012). Banking system: Three level Lotka-Volterra model. *Procedia Economics and Finance*, no. 3, pp. 251–255.
2. Chernova N.M., ed. (2007) *Jekologiya. Uchebnik dlja 10 (11) klassov* [Ecology. Textbook for 10 (11) years]. Moscow: Drofa. (in Russian).
3. Kamann D.J., Nijkamp P. (1988). *Technogenesis: incubation and diffusion*. Serie Research Memoranda. Amsterdam: University Amsterdam.
4. Modis T. (1999). Technological forecasting at the stock market. *Technological Forecasting and Social Change*, no. 62, pp. 173–202.

AHOLI EHTIYOJLARINI O'RGANISHDA YIRTQICH O'LJA MODELI

Kurbonov Xasan

O'zbekiston Milliy Universiteti

Biz biologik va iqtisodiy jarayonlardagi ko'plab holatlarda “yirtqich-o'lja” modellarini xususan, Lotka-Volterra modelini qo'llab matematik modellashitirishimiz mumkin. Lotka-Volterra modelini bitta yirtqich bitta o'lja modeli va ikki yirtqich bir o'lja modeli iqtisodiyotga tatbiqi tariqasida biror mamlakat aholisi va mamlakatdagi turli telefon a'loqa kompaniyalarini olamiz. Bunda faqatgina yirtqich va o'ljalarni, ularga ta'sir qiluvchi omillarni belgilab olsak bo'lgani. Biz Lotka-Volterraning bitta yirtqich, bitta o'lja modeliga: mamlakatdagi Beeline telefon a'loqa kompaniyasiga ehtiyoji bor aholi qatlami va Beeline telefon a'loqa kompaniyasini qaraymiz. Lotka-Volterra modeli quyidagicha ko'rinishga ega:

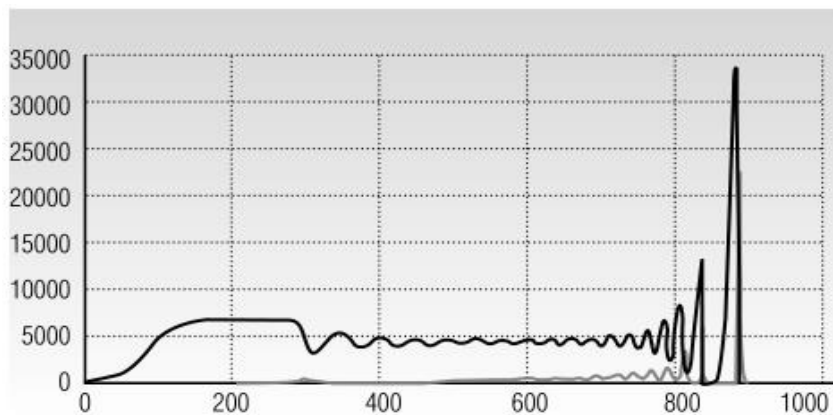
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = bx - pxy \\ \frac{dy}{dt} = dxy - ry \end{cases} \quad (1)$$

Ushbu differensial tenglamalar sistemasida x – mamlakatning Beeline a'loqa kompaniyasiga ehtiyoji bor aholi soni va y – mamlakatdagi Beeline telefon a'loqa kompaniyasi abonentlari soni; p va d ikki parametr yirtqich va o'ljaning o'zaro ta'sirlashish shartlaridir. b parametr mamlakat aholisini Beeline telefon aloqa kompaniyasiga ehtyojini o'sish tezligi; p parametr Beeline telefon a'loqa kompaniyasiga ehtiyoji bor aholining ehtiyojini qondirishi; d parametr Beeline kompaniyasi abonentlari soni o'sish tezligini anglatadi, bu jarayon Beeline kompaniyasiga bo'lgan ehtiyojlarning ko'pligi va jamiyatdagi turli negativ ta'sirlar bo'lmagan holat deb qaraladi. Va nihoyat, r parametr esa Beeline kompaniyasini ma'lum sabablarga (a'loqa sifati pastligi, ta'rif rejalar qimmatligi, internet sifati yaxshi emasligi kabi bir qancha omillar) ko'ra abonentlarini yo'qotishini ifodalaydi.

Biz bu yerda yana bir jarayonga e'tibor qaratishimiz zarur, p va d parametrlarning tengligi Beeline telefon a'loqa kompaniyasidan barcha abonentlari bir vaqtda telefon muloqot va internet xizmatlari (yoki faqat internet, yoki faqat telefon muloqoti) uchun foydalanishini tushunamiz, $p \neq d$ holatda esa ma'lum sondagi abonentlar faqat internet a'loqa uchun

foydalansa boshqalari esa bir vaqtda telefon muloqot va internet xizmatlaridan foydalanadi deb tushunishimiz mumkin.

Agar (1) differensial tenglamalar sistemasini grafigini chizishda parametrlarni $b := 0.8, p := 0.6, d := 0.3, r := 0.1$ deb tanlab olib chizsak quyidagi 1-rasmni hosil qilamiz:



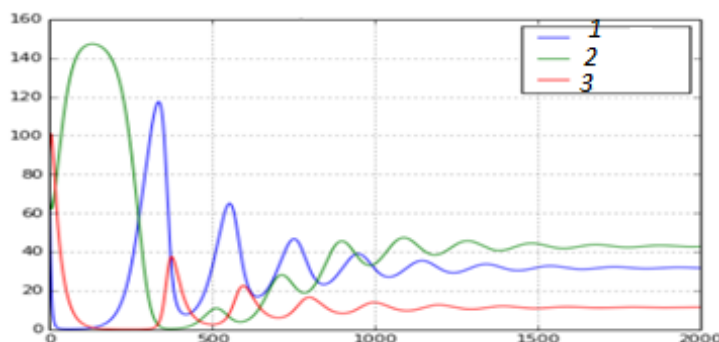
1-rasm.

Yuqoridagi (1) differensial tenglamalar sistemasini ikkita yirtqich - bitta o'lja modeliga kengaytirib qaraymiz bu Lotka-Volterra modelini boshqacha ko'rinishi hisoblanadi. (1) modeldagi jarayon yanada umumlashitirib telefon a'loqa kompaniyalar sonini yana bittaga oshirsak ikki yirtqich va bir o'lja modeli hosil bo'ladi va u quyidagi uchta differensial tenglamalar sistemasidan iborat:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy - cxz \\ \frac{dy}{dt} = dxy - ey \\ \frac{dz}{dt} = fxz - gz \end{cases} \quad (2)$$

Ushbu modelda x – mamlakatdagi telefon a'loqa kompaniyasiga ehtiyoji bor aholi soni, y – Beeline a'loqa kompaniyasining abonentlari soni, z – Uzmobil a'loqa kompaniyasining abonentlari soni. (2) modeldagi a parametr mamlakatdagi a'loqa kompaniyalariga ehtiyoji bor aholining ehtiyojini o'sish tezligi anglatadi, aholi ehtiyoji ikkala a'loqa kompaniya xizmati sababli (sistemaning birinchi tenglamasida o'zaro ta'sir $-bxy$ va $-cxy$ kabi olinadi). b parametr Beeline kompaniyasiga ehtiyoji bor aholining ehtiyoji qondirishi; c parametr Uzmobil kompaniyasiga ehtiyoji bor aholining ehtiyoji qondirishi; d parametr Beeline kompaniyasi abonentlari soni o'sish tezligi; f parametr esa Uzmobil kompaniyasi abonentlari soni o'sish tezligini anglatadi. Keyingi ikkita e va g koeffitsientlari a'loqa kompaniyalarini abonentlari sonini ma'lum sabablarga ko'ra (a'loqa sifati pastligi, internet sifati pastligi, internet megabaytlari qimmatligi, ta'rif rejalarni qimmatligi kabi ko'plab omillar sabab bo'lishi mumkin) kamayishini anglatadi. Sistemaning muvozanat holati parametrlarning qiymatlari (a, b, c, d, e, f, g) va boshlang'ich shartlarga bog'liq, ya'ni $x(0)$ – a'loqa kompaniyalarga ehtiyoji bor aholi soni va $y(0), z(0)$ – Beeline va Uzmobil aloqa kompaniyalari boshlang'ich abonentlari soni.

Agar (2) differensial tenglamalar sistemasini grafigini chizishda parametrlarni $a := 0.2, b := 0.8, c := 0.6, d := 0.3, e := 0.1, f := 0.5, g := 0.4$ deb tanlab oladigan bo'lsak 2-rasmni hosil qilamiz:



2-rasm. 1 Uzmobil komp. abonentlari; 2 Beeline komp. abonentlari; 3 telefon a'loqaga ehtiyoji bor aholi.

2-rasmning e'tiborli tomoni shundan iboratki, agar Beeline telefon a'loqa kompaniyasi barcha xizmatlarini (ta'rif xizmatlari, internet sifati va xarajatlari) yuqori sifat darajada yo'lga qo'ysa Uzmobil kompaniyasi abonentlari sonini kamayishiga olib keladi va raqobatdosh muhida Uzmobil kompaniyasi ham o'zing abonentlariga qulayliklar yaratish, turli aksiyalar, tanlovlar e'lon qilish orqali abonentlari sonini oshirish mumkin va natijada a'loqa xizmati uchun aholining ehtiyoji yanada o'sadi, ikki telefon a'loqa kompaniyalari o'rtasida kuchli raqobat muhiti vujudga keladi. Grafikda vaqting ma'lum qismidan so'ng Beeline kompaniyasi Uzmobil kompaniyasiga nisbatan ustunlik qilishini va ularning ma'lum bir davriy holatda bo'lishini ko'rishimiz mumkin.

Xulosa qiladigan bo'lsak, biz yirtqich-o'lja modeli orqali ko'plab iqtisodiy masalalarni hal etishimiz mumkin. Ya'ni raqobatbardosh muhitda Beeline va Uzmobil kompaniyalari o'rtasidagi raqobatni ifodaladik. Chunki, olinga natijalarga ko'ra Beeline va Uzmobil kabi kompaniyalarning kelajakdagi istiqbollarni pragnoz qilishimiz mumkin bo'ladi.

ADABIYOTLAR

1. Rachel Von Arb "Predator- prey models in competitive corporations" Olivet Nazarene University 2013.
2. Oscar Dejuan and Daniel Dejuan Bitria "A predator – prey model to explain cycles in financial-led economies" Universidad de Castilla- La mancha, London school of economies.
3. Q. Safaeva, F. Mansurov "Iqtisodiyotda matematika", Toshkent – 2010.
4. G'. Nasriddinov "Iqtisodiy – matematikmodellar va usullar", Toshkent-2011.
5. www.ziynet.com

FLASHDA GEOMETRIYA FANI BO'YICHA TRENAJYOR DASTURLAR YARATISH

Majidov Shodi

Jizzax davlat pedagogika instituti

Flashda trenajyor dasturlarni yaratish uchun avvalambor trigonometriyaga oid adabiyotlarni o'rganib chiqib, mutaxass o'qituvchilar bilan maslahatlashib olgach, akademik litseyda dars mashg'ulotlarini kuzatamiz. Trenajyor dasturlarni yaratish uchun ssenariylarni yaratamiz, ularni tizimlashgan holga keltirdik. Kerakli adabiyotni tanlab oldik.[1]

Avvalambor Flash dasturida yaratilgan barcha dasturlarni birlashtiruvchi forma oynasini tuzib olamiz. Bunday formani yaratishda Flash imkoniyatlaridan foydalandik. Buning uchun Flashning Window menusi imkoniyatidan foydalanamiz.

Bu oynada quyidagi tugmalarni o'rnatdik:

1. Ma'ruzalar matni
2. Trenajor dasturlar
3. Mualliflar
4. Orqaga

Ko'rinib turibdiki, menu tugmalari ichida asosiylari "ma'ruzalar matni" va "trenajor dasturlar" hisoblanadi. Agar biz "Ma'ruza matni" bo'limiga kirsak, "geometriya" fani bo'yicha asosiy mavzular bo'yicha nazariy ma'lumotlarni o'qib olish imkoniga ega bo'lamiz.

Bundan tashqari trenajorning har bir bo'limida yordam tugmasi mavjud bo'lib, unda shu bo'lim uchun kerakli eng asosiy tushunchalar keltirilgan.

Trenajyor dasturlarni yaratish uchun ssenariylarni yaratdik, ularni "Axborot texnologiyalari" kafedra seminarida tahlildan o'tkazdik, kerakli maslahatlarni oldik. Kerakli



adabiyotni tanlab oldik.[2]

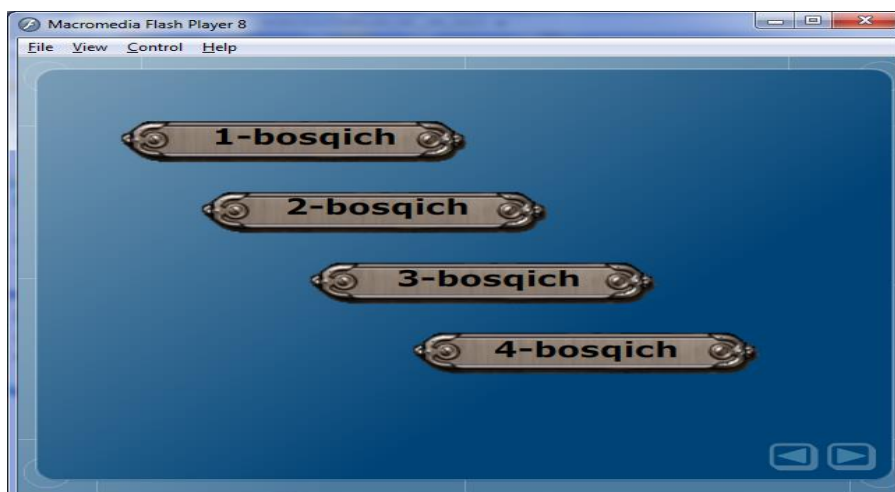
1.1.1-chizma. Dasturning asosiy menui.

Agar biz Trenajor dasturlar bo'limiga kirsak, bu bo'lim asosiy bo'limlardan biri ekanini ko'ramiz. Bu yerda akademik litseylar uchun asosiy adabiyot[3] da keltirilgan deyarli barcha bo'limlar bo'yicha trenajor dasturlar keltirilgan.



1.1.2-chizma. Trenajor dasturlar oynasi.

Birinchi bo'lim "o'qda kesmalar" deb nomlanadi va agar biz bu bo'limga kirsak, quyidagi bo'limlarni ko'ramiz:

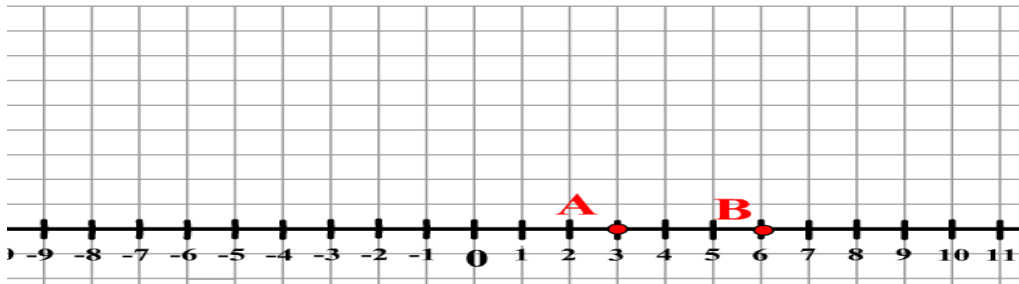


1.1.3-chizma. "O'qda kesmalar" bo'limi bosqichlari.

Ana shunday bosqichlar trenajor dasturlarning barcha bo'limlarda bor va ular ushbu metodik tizimning asosini tashkil qiladi. Gap shundaki, o'quvchi birinchi dasturga kirganda shu bo'limdagi eng oddiy vazifani bajaradi. Agar u vazifani to'g'ri bajarsa, ikkinchi bosqichga o'tadi, agar noto'g'ri bajarsa, keying dasturga o'tishga ruxsat berilmaydi.

Birinchi dastur ekrani esa quyidagi ko'rinishga ega:

A va B nuqtalar orasidagi masofani toping va uni kiritib tekshirib ko'ring



1.1.4-chizma. “O’qda kesmalar” bo’limidagi birinchi dastur.

Bunda flashda ekran hosil qilib unda masshtab chiziqlarini va unda yo’naltirilgan chiziq ko’rinishini hosil qilamiz.

Chiziqda ikkita nuqtani joylashtiramiz. Bu nuqtalarni joylashtirishda ularni ob’yekt sifatida olib, movie clip sifatida tavsiflaymiz, chunki ular chiziqdagi nuqtalarda tasodifan joylashtiriladi, bunda A nuqta doim B nuqtadan chapda joylashtirilishini ta’minlanadi. Bu harakatni namoyish qiluvchi dastur qismini quyidagicha yozish mumkin:

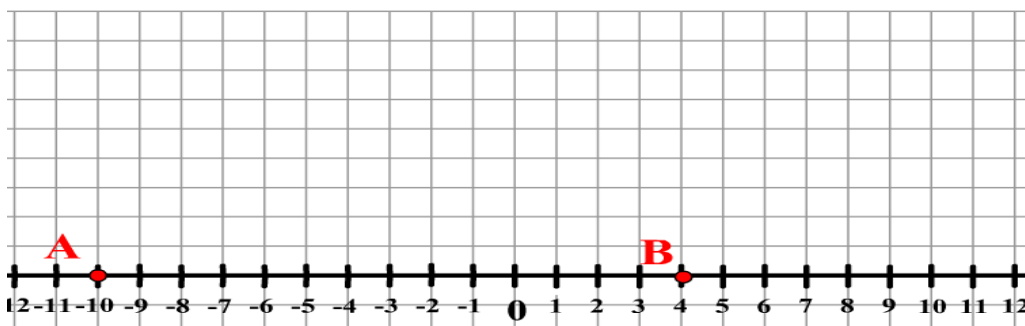
```
x1.text=14-random(28); x2.text=14-random(28);
x11=parseFloat(x1.text); x21=parseFloat(x2.text);
if ((x11>x21) and (x11<0) and (x21<0)) { with (nuq1) {
bottom = _y+600;    right = _x+600;    _x=310+20*x21;    _y=300; };
```

Bu dastur qismida x1.text A nuqtaning koordinatasi va x2.text B nuqtaning koordinatasi. A va B nuqtalar to’g’ri chiziqda joylashtirilgandan so’ng ular orasidagi masofani topishga vazifa berish uchun “tekshirish” tugmasida quyidagicha dastur qismini yozamiz:

```
on (release) { if (kirit.text== Math.abs(x21-x11))
{javob.text="to'g'ri"} else {javob.text="noto'g'ri"}}}
```

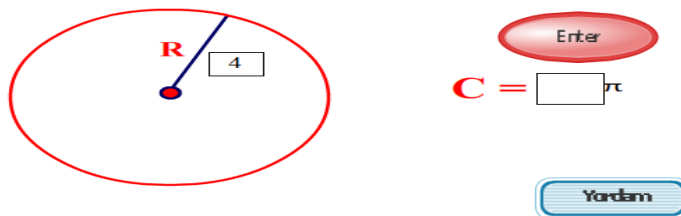
Ushbu dasturda kiritilgan son A va B koordinatalari ayirmasiga teng bo’lsa, “To’g’ri”, aks holda “Noto’g’ri” degan javob jav.text ob’yektida chiqariladi. Jav.text ob’yekti dynamic.text kabi tavsiflangan bo’ladi, chunki undagi qiymat o’zgarib turadi.

A va B nuqtalar orasidagi masofani toping va uni kiritib tekshirib ko'ring



Dasturda tekislikdagi figuralar – aylana, to'rtburchaklar bo'yicha trenajor dasturlar ham tuzilgan. Masalan, aylana bo'limida uchta bosqich bor, birinchi bosqichda quyidagi interfeys paydo bo'ladi(1.1.5-chizma).

Aylana uzunligini toping? C ga qiymat kiritib tekshiring



1.1.5-chizma. Aylana uzunligini topish bo'yicha trenajor.

Chizmada keltirilgan bo'limlar bo'yicha 40 dan ortiq dasturlar ushbu trenajorda joylashtirilgan. Bundan tashqari har bir bo'lim uchun yordam fayllari, ovozli effectlar ham joylashtirilgan.[3]

Xulosa qilib shuni aytish mumkinki, geometriya fani talabalar va o'quvchilar tomonidan yaxshi tushunib olish kelajakda fizika, mexanika kabi fanlarni o'zlashtirishda katta yordam beradi.

Shuningdek, interfeys yaratilgan dasturlarga mos bir qancha mavzularni alohida-alohida bo'limlarga ajratgan holda, tarixiy ma'lumotlar, nazariy kabi bo'limlar ham kiritildi, bu bo'limlar o'rganilayotgan mavzular tushunchasini o'quvchilar tomonidan yaxshiroq o'zlashtirishga imkon beradi degan umiddamiz.

Umumta'lim maktablari, kasb-hunar kolejlari, akademik litseylar geometriya darslarini yangi pedagogik texnologiyalar asosida o'tishda elektron o'quv qo'llanmadan foydalanib, multimedia asosida dars o'tish noan'anviy dars turlaridan biri hisoblanadi. [1]

Geometriya darslarida axborot texnologiyalaridan foydalanish o'quvchilarda fazoviy tasavvurni rivojlantirish, mantiqiy fikrlash, geometrik o'lchash va yasashning amaliy usullarini o'rganish imkoniyatlarini beradi. Asosiysi, axborot texnologiyalari - chizma, diagramma, jadval ko'rinishidagi ma'lumotlarni o'qish qobiliyatini rivojlantiradi, mustaqil o'qish va o'rganishga imkoniyat yaratadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Soy M.N. «Новые информационные технологии в непрерывном образовании»/Uzluksiz ta'lim, 2006, № 1, 74-80 betlar
2. Mo'minov B. B. Pedagogik dasturiy ta'minot yaratish texnologiyasi. Monografiya. "Buxoro" nashriyoti, 2010 yil. 169 betlik.
3. Mirzaev CH.E., Samatov S.S. Ta'limda yangi pedagogik texnologiyalar. O'quv qo'llanma. Guliston, 2003. 48 bet.

DIGITAL IMAGE BRIGHTNESS NORMALIZATION BY DISCRETE GAME PURSUIT

Mamatov Mashrabjon

National University of Uzbekistan

Esanov Egamberdi

Tashkent State Technical University

The advent of television directly linked image processing tasks with electrical signal processing tasks, and the revolutionary development in recent decades of digital electronics has led to the ubiquitous transition from analog to digital forms of representation of signals to become a characteristic feature of modern electronic systems. Significant advances have been made in the development of quantitative assessments of image quality. However, the introduced criteria are not perfect enough. The main difficulty is various kinds of distortions: geometric, background, noise. In this regard, the issues of digital image processing are of particular relevance today [1,2].

A model example of the studied class of discrete games described by the process of normalizing the brightness of a digital image is the following process of pursuit described by the equations

$$\begin{aligned} -4z_{i,j} + z_{i-1,j} + z_{i+1,j} + z_{i,j-1} + z_{i,j+1} &= -u_{i,j} + v_{i,j}, |u_{i,j}| \leq \rho, |v_{i,j}| \leq \sigma, \sigma < \rho, \\ z_{0,j} &= 0, z_{m+1,j} = 0, z_{i,0} = 0, z_{i,\theta} = 0, \\ i &= 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, \theta - 1, \end{aligned} \quad (*)$$

where the left-hand side of the equation is a discrete analogue of the Laplacian $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ digital image brightness functions $z = z(x, y)$, and $z_{i,j}$ – image brightness at a point (x_i, y_j) , which is measured in pixels, $u_{i,j}$ – pursuing player control parameter, $v_{i,j}$ – the controlling parameter of the escaping player. Without loss of generality, it is convenient to assume that if $i = 0$, either $i = m + 1$, or $j = 0$, or $j = \theta$, then $z_{i,j} = 0$, i.e. the image is bordered by pixels with zero values of the brightness level. The pursuit problem is posed as follows. Chasing player using his controls, $u_{i,j}$ within the limits of the change $z_{i,j}$, the value of the brightness levels of the image can be changed, in the same way the escaping player, disposing of his controls, $v_{i,j}$ may change the brightness of the image. We will study the problem from the side of the pursuing player - the pursuit problem. The pursuit is considered complete, if $z_{i,j}$ satisfy the condition: $\delta \leq z_{i,j} \leq \delta + \varepsilon, i_0 \leq i \leq i_1, j_0 \leq j \leq j_1$ where $1 \leq i_0, i_1 \leq m, 1 \leq j_0, j_1 \leq \theta - 1$ for some predefined $\delta > 0, \varepsilon > 0$. This means that $z_{i,j}$ the value of the image brightness levels in predetermined pixels was in a certain segment that the pursuer wants. That is, in this case, the process of normalizing the brightness of the digital image is completed. The chasing player wants to finish the game faster, and the fleeing player, generally speaking, will interfere with this. Using the boundary conditions, at $i = 1, 2, \dots, m$ from (*) we get the system

$$\begin{aligned} -4z_{1,j} + z_{0,j} + z_{2,j} + z_{1,j-1} + z_{1,j+1} &= -u_{1,j} + v_{1,j}, \\ -4z_{m,j} + z_{m-1,j} + z_{m+1,j} + z_{m,j-1} + z_{m,j+1} &= -u_{m,j} + v_{m,j}. \end{aligned}$$

Denoting, $z_j = (z_{1,j}, z_{2,j}, \dots, z_{m,j})^T$, $u_j = (u_{1,j}, u_{2,j}, \dots, u_{m,j})^T$, $v_j = (v_{1,j}, v_{2,j}, \dots, v_{m,j})^T$ we have

$$-z_{j-1} + Cz_j - z_{j+1} = u_j - v_j, 1 \leq j \leq \theta - 1,$$

$$z_0 = 0, \quad z_\theta = 0, \quad (**)$$

where, $z_j \in R^m$ and u_j - the control parameter of the pursuer; v_j the control parameter of the escaping player: $u_j \in R^m, v_j \in R^m$ components that satisfy the condition, $|u_{i,j}| \leq \rho, |v_{i,j}| \leq \sigma, \sigma < \rho$, and C - square matrix of the form

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$M \subset R^m$ the terminal set that the game ends with.

Instead of a game (**), we will consider a more general discrete game, which is the motion of a point z , m dimensional Euclidean space R^m is described by the equations

$$-z_{j-1} + Cz_j - z_{j+1} = u_j - v_j, 1 \leq j \leq \theta - 1, \quad (1)$$

$$z_0 = \varphi_0, \quad z_\theta = \varphi_\theta. \quad (2)$$

Where, j - step number, $C - m \times m$ - constant square matrix, u, v - control parameters, u - pursuit parameter, v - runaway parameter, $u_j \in P \subset R^m, v_j \in Q \subset R^m$, P and Q - non-empty sets, the parameter u is selected as a sequence $u = u(\cdot) = (u_1, u_2, \dots, u_{\theta-1}), u_j \in P, j = 1, 2, \dots, \theta - 1$, parameter v - as a sequence $v = v(\cdot) = (v_1, v_2, \dots, v_{\theta-1}), v_j \in Q, j = 1, 2, \dots, \theta - 1$. In addition, in R^m the terminal set is highlighted M . The goal of the pursuing player is to withdraw z_j on the set M , the escaping player tends to put it.

We will say that in the game (1), (2) from the "boundary" position $(\bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_\theta)$ you can complete the pursuit for $N \leq \theta$ steps, if for any sequence of evasion control $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_{N-1}$ it is possible to construct such a sequence of pursuit control $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_{N-1}$, that the solution $z = z(\cdot) = (z_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_{N-1}, z_N)$ equation

$$-z_{j-1} + Cz_j - z_{j+1} = \bar{u}_j - \bar{v}_j, 1 \leq j \leq N - 1, \quad z_0 = \bar{\varphi}_0, \quad z_\theta = \bar{\varphi}_\theta,$$

with some $d \leq N$ falls on $M: \bar{z}_d \in M$.

The purpose of this work is to study the process of normalizing the brightness of a digital image using game problems with discrete second-order equations (1), (2) which is more general than (**). It should be noted that many digital image problems can be approximated using the discrete game under study.

In this paper, it is this class of discrete games that sufficient conditions are obtained for the possibility of completing the pursuit when the value of the brightness of the digital image at the boundary moments is given. Let a discrete game be described by equations (1), (2). By $U_n(x)$ we denote the Chebyshev polynomial of the second kind of degree n , and through $U_n(X)$ the matrix Chebyshev polynomial of the matrix X [3-6].

Assumption 1. $M = M_0 + M_1$ where, M_0 - linear subspace R^m ; $M_1 = M_{1,1} + M_{1,2}$ - subset of subspace; L - orthogonal complement M_0 in R^m . Through Π denote the operation of

orthogonal projection from R^m to L , and through $A+B$ and A^*-B - are the algebraic sum and geometric difference of sets A, B , respectively [4]. Let now

$$\alpha_n(\cdot) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} : \alpha_k \geq 0, \sum_{k=1}^{n-1} \alpha(k) = 1\}, \quad \beta_n(\cdot) = \{\beta_n, \beta_{n+1}, \dots, \beta_{\theta-1} : \beta_k \geq 0, \sum_{k=n}^{\theta-1} \beta(k) = 1\} \quad \text{и}$$

$$w_1(\alpha_n(\cdot)) = \sum_{k=1}^{n-1} \left[\left(\alpha_k M_{1,1} + \Pi U_{\theta-1}^{-1} \left(\frac{1}{2} C \right) U_{\theta-n-1} \left(\frac{1}{2} C \right) U_{k-1} \left(\frac{1}{2} C \right) P \right)^* - \Pi U_{\theta-1} \left(\frac{1}{2} C \right) U_{\theta-n-1} \left(\frac{1}{2} C \right) U_{k-1} \left(\frac{1}{2} C \right) Q \right],$$

$$w_2(\beta_n(\cdot)) = \sum_{k=n}^{\theta-1} \left[\left(\beta_k M_{1,2} + \Pi U_{\theta-1}^{-1} \left(\frac{1}{2} C \right) U_{n-1} \left(\frac{1}{2} C \right) U_{\theta-k-1} \left(\frac{1}{2} C \right) P \right)^* - \Pi U_{\theta-1} \left(\frac{1}{2} C \right) U_{n-1} \left(\frac{1}{2} C \right) U_{\theta-k-1} \left(\frac{1}{2} C \right) Q \right].$$

We put

$$w_{3,1}(0) = M_{1,1}, \quad w_{3,1}(n) = \bigcup_{\alpha_k(\cdot)} w_1(\alpha_k(\cdot)), \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

$$w_{3,2}(0) = M_{1,2}, \quad w_{3,2}(n) = \bigcup_{\beta_k(\cdot)} w_2(\beta_k(\cdot)), \quad 1 \leq k \leq \theta-1. \quad (3)$$

Assumption 2. Let there be some $n = n_0 \leq \theta-1$, that

$$-\Pi \left[U_{\theta-1}^{-1} \left(\frac{1}{2} C \right) U_{\theta-n_0-1} \left(\frac{1}{2} C \right) z_0 \right] \in w_{3,1}(n_0), \quad -\Pi \left[U_{\theta-1}^{-1} \left(\frac{1}{2} C \right) U_{n_0-1} \left(\frac{1}{2} C \right) z_0 \right] \in w_{3,1}(n_0). \quad (4)$$

Theorem. If Assumptions 1, 2 are fulfilled, then in the game (1), (2) from the “boundary” position (z_0, z_θ) , it is possible to complete the pursuit in $N(z_0, z_\theta) \leq n_0$ steps.

Thus, summarizing the results obtained, we come to the conclusion that the discrete pursuit game (1), starting from the “boundary” position (2), $z_0 = \varphi_0$, $z_\theta = \varphi_\theta$, can be finished in $N(z_0, z_\theta) \leq n_0$ steps. It is clear that this also ends the process of normalizing the brightness of the digital image. Set (3) is like a discrete analogue of the so-called first integral of L.S. Pontryagin [4], inclusion (4) provide sufficient conditions for the possibility of completing the pursuit of the set task of normalizing the brightness of a digital image. Thus, the discrete pursuit game (1), (2) describes a generalized controlled digital image processing process. Partially applying the proven theorem, with the help of a regulator in the indicated area, you can set or normalize a certain level of brightness of a digital image in the presence of noise that prevents this transition. The results obtained in this work can be applied in a pattern recognition system that analyzes digital images received from video cameras during processing.

REFERENCE

1. Gonzalez R., Woods R., Technosphere, (2005).
2. Yane B. *Digital image processing: trans. from English. Technosphere, P.584, (2007).*
3. Starovoitov V.V. *Digital images: from acquisition to processing. OIPI NAS Belarus, P. 202, (2014).*
4. L. S. Pontryagin, **40**:3, 285-303 (1981).
5. Mamatov, M.S. Automation and Remote Control, **70(8)**, 1376–1384 (2009).
6. Mamatov, M.S., Sobirov, K.K. Journal of Mathematical Sciences (US), **245(3)**, 332–340, (2020).

NODIVERGENT REAKSIYA DIFFUZIYA TENGLAMASINING AVTOMODEL YECHIMI ASIMPTOTIKASI

Muhammadiev Jabbor

F-m. f. n., O'zMU

O'rinboyeva Shahnoza

O'zMU

Ushbu ko'rilayotgan tadqiqot ishi manba yoki yutilish bo'lgan holda issiqlik tarqalish jarayonlarini bir jinsli bo'lmagan, chiziqsiz muhitda, nohiziqli matematik modellarini, parametrning kritik qiymatlarda asimptotika va chiziqsiz jarayonning sonli modellashtirishga bag'ishlanadi.

Quyidagi tenglamani ko'rib o'tamiz:

$$Lu \equiv -u_t + P(u) \nabla(|x|^m K(\nabla u) \nabla u) + \varepsilon \gamma(t, x) F(u) = 0, \quad x \in R^N \quad (1)$$

bu yerda $\nabla(\cdot) - \text{grad}(\cdot)$, $P(u) \geq 0$, $K(\nabla u) \geq 0$, $F(u) \geq 0$ $u \geq 0$ yetarlicha silliq funksiya, $m > 0$, $N \geq 1$, $0 < \gamma(t, x) \in C(0, \infty)$, $\varepsilon = \pm 1$, $P(0) = 0$, $K(0) = 0$, $F(0) = 0$ $Q = \{(t, x) : t > 0, x \in R^N\}$ sohada boshlang'ich shart berilgan

$$u|_{t=0} = u_0(x) \geq 0, \quad x \in R^N. \quad (2)$$

(1) tenglama juda ko'p fizik jarayonlarni ifodalaydi, $u(t, x)$ funksiyani X nuqtaning har bir $t > 0$ vaqt momentidagi temperaturasini ifodalovchi funksiya deb qabul qilamiz.

Faraz qilamiz

$$u_0(x) \geq 0, \quad |x|^m K(\nabla u_0) \nabla u_0 \in C(R^N), \quad x \in R^N, \quad (3)$$

$$\text{messupp } u_0(x) < +\infty, \quad \sup u_0(x) < +\infty, \quad x \in R^N.$$

$P(u)$ - muhitning singdiruvchanlik koeffitsienti. $K(\nabla u) = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^n$ - darajaga bog'liq

bo'lgan issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsienti. $n > 1$ - chiziqsizlik parametri bo'lib, turli jarayonlar uchun turlicha qiymat qabul qiladi va muxitning nohiziqliligini ifodalaydi. n konkret qiymatlarini tatqiq qilish uchun tajriba o'tkazishni talab etadi.

$F(u)$ funksiya temperaturaga bog'liq holda o'zgaruvchi manba ($\varepsilon = +1$) yoki yutilishning ($\varepsilon = -1$) quvvatidir.

Bu masalaning muhim jihatlaridan biri bu (1) tenglamaning buziluvchanligidadir. Shuning uchun asosan (1), (2) masalaning $u(t, x) \geq 0$ funksiyalar sinfidagi $u(t, x) \in C(Q)$, $|x|^m K(\nabla u) \nabla u \in C(Q)$ xususiyatga ega umumlashgan yechimlarini o'rganamiz [3].

(1) tenglamani ifodalovchi chiziqsiz parabolik turdagi modellarni o'rganish qiyin hisoblanadi. Chiziqli tenglamalarning xossalari o'rganishda foydalanadigan ananaviy usullardan foydalanish imkoni yo'qligi uchun bu turdagi masalalarda yangi usullardan foydalanish talab etiladi. Chiziqsiz tenglamalarni yechimlari xossalari o'rganishda

avtomodel tenglamalar usulidan foydalanish mumkin. Avtomodel tenglama qurish uchun chiziqsiz ajratish usuli taklif qilinadi [1].

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Aripov M. M. Метод эталонных уравнений для решений нелинейных краевых задач. – Ташкент: ФАН, 1988. 89б.
2. Арипов М. М., Хайдаров А. Т., Кабилжанова Ф. А. Численное моделирование нелинейных диффузионных процессов с поглощением. //Вычислительные технологии 8 (совместный выпуск, часть 4.), 2003. Региональный вестник Востока 3(19), 79-83 б.
3. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. – М.: Наука, 1987, 480с.75.

AYLANMA HARAkatDAGI MURAKKAB JISMLARNING HARAkatI TURG'UNLIGINING YETARLI SHARTINI HOSIL QILISHDA LYAPUNOV FUNKSIYASI USULINING QULAYLIGI

Mullajonov Rustamjon

F.-m.f.n, Andijon davlat universiteti

Abdugapparova Shahodat

Andijon davlat universiteti

Mirzaahmedova Jumagul

Andijon davlat universiteti

Barchaga ma'lumki hayot harakatdan iborat. Harakat bor joyda ish bajariladi, kuch sarflanadi, energiya paydo bo'ladi. Bu esa o'z navbatida insoniyat ehtiyojini qondiradigan jarayonni yuzaga keltiradi. Har qanday jism yoki tizim harakatini uzluksiz, turg'un bo'lishi muhim hisoblanadi. Bu masala hozirda taraqqiy etayotgan jamiyatimizda dolzarb masalalardan biri hisoblanadi. Inson ongi taraqqiy etgani sayin, u tomonidan harakatga keltirilayotgan jarayonlar ham murakkablashib boradi. Bunday murakkab jarayonlar turg'unligini o'rganishda olimlar tomonidan bir nechta usullar taklif etilgan. Mana shunday usullardan biri bu A.M.Lyapunov tomonidan taklif etilgan usullardan biridir. Bu usul boshqa usullardan ancha qulayligi va aniqligi bilan ustun hisoblanadi.

Mazkur ishda murakkab jism harakatida Lyapunov usulining samarali ekanligi ko'rsatilgan.

Misol tariqasida murakkab aylanma harakat qiluvchi jismni olaylik. Bunda jism o'zining vertikal holatini saqlashi uchun uni qattiq aylantirib yuborish zarur, ya'ni unga yetarlicha katta aylanish tezligini berish kerak.

Aylanishining burchak tezligi φ ga teng bo'lgan jismga ikkita tashqi kuchlar ta'sir qiladi: P og'irlik kuchi – jismning C massa markaziga qo'yilgan va O tayanchning R_0 reaksiyasi. z simmetriya o'qining $\xi\eta\zeta$ o'qlarga nisbatan qo'yilishi (ζ o'q vertikal) α va β burchaklar orqali aniqlanadi [1-3]. Jism qo'zg'almagan harakati sifatida $\varphi_0 = n$ burchak tezligi bilan z simmetriya o'qi atrofida tekis aylanishini olamiz va u ζ vertikal o'q bilan ustma-ust tushadi.

Qo'zg'almagan harakatda quyidagi o'rinli:

$$\alpha = 0, \quad \dot{\alpha} = 0, \quad \beta = 0, \quad \dot{\beta} = 0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = n = const.$$

Qo'zg'algan harakatda barcha bu kattaliklar o'zgaradi. x, y, z o'qlarni kiritamiz va p_1, q_1 va r_1 orqali xyz ning $\xi\eta\zeta$ qo'zg'almas o'qlar atrofida aylanishidan hosil bo'lgan ω_1 burchak tezligining proyeksiyalarini belgilaymiz.

$$p_1 = \dot{\alpha}, \quad q_1 = \dot{\beta} \cos \alpha, \quad r_1 = -\dot{\beta} \sin \alpha.$$

ni topamiz.

ω burchak tezlikning p, q, r proyeksiyalari

$$p = \dot{\alpha}, \quad q = \dot{\beta} \cos \alpha, \quad r = \dot{\psi} - \dot{\beta} \sin \alpha.$$

kabi aniqlanadi.

Endi jismning kinetik energiyasini topamiz:

$$T = \frac{1}{2} I_x (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 \cos^2 \alpha) + \frac{1}{2} I_z (\dot{\psi} - \dot{\beta} \sin \alpha)^2.$$

bu yerda $I_x = I_y$ – ekvator, I_z – oksial inersiya momentlari.

Jismning Π potensial energiyasi

$$\Pi = Pl \cos \alpha \cos \beta,$$

bu yerda, P – jism og'irligi, l – C massa markazidan O tayanchgacha masofa.

Qaralayotgan holda oldingi ikki misoldagi kabi qo'zg'algan harakat differensial tenglamalarini tuzmasdan, uchta integral tuzish mumkin. Ikkita integral darrov topiladi – bu energiya integrali va φ siklik koordinataga mos integral (ikkinchi integral – z o'qiga nisbatan pildiroq harakati miqdori onlari integrali):

$$T + \Pi = \frac{1}{2} I_x (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 \cos^2 \alpha) + \frac{1}{2} I_z (\dot{\psi} - \dot{\beta} \sin \alpha)^2 + Pl \cos \alpha \cos \beta = h,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = I_z (\dot{\psi} - \dot{\beta} \sin \alpha) = I_z n_1.$$

uchinchi integral – ζ harakatsiz o'qqa nisbatan pildiroq harakat miqdori onlari integrali:

$$K_\zeta = k = \text{const.}$$

Bu integralni ochiq holda yozish uchun, quyidagi tengliklardan foydalanamiz:

$$K_x = I_x p = I_x \dot{\alpha}, \quad K_y = I_y q = I_x \dot{\beta} \cos \alpha, \quad K_z = I_z r = I_z (\dot{\psi} - \dot{\beta} \sin \alpha),$$

$$K_\zeta = K_x \cos(\zeta x) + K_y \cos(\zeta y) + K_z \cos(\zeta z).$$

$$\cos(\zeta x) = -\sin \beta, \quad \cos(\zeta y) = \sin \alpha \cos \beta, \quad \cos(\zeta z) = \cos \alpha \cos \beta.$$

Demak, uchinchi integral quyidagi ko'rinishga ega:

$$I_x (-\dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\beta} \cos \alpha \sin \alpha \cos \beta) + I_z (\dot{\psi} - \dot{\beta} \sin \alpha) \cos \alpha \cos \beta = k.$$

Jism harakati turgunligini $\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}$ va φ ga nisbatan o'rganamiz. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\alpha = x_1, \quad \dot{\alpha} = x_2, \quad \beta = x_3, \quad \dot{\beta} = x_4, \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0 + x_5.$$

Bu belgilashlarda qo'zg'algan harakat differensial tenglamasi integrallari quyidagi ko'rinishga ega:

$$F_1 = \frac{1}{2} I_x (x_2^2 + x_4^2 \cos^2 x_1) + \frac{1}{2} I_z (\dot{\psi}_0 + x_5 - x_4 \sin x_1)^2 + Pl \cos x_1 \cos x_3 = h,$$

$$F_2 = \dot{\psi}_0 + x_5 - x_4 \sin x_1 = n_1, \tag{1}$$

$$F_3 = I_x (-x_2 \sin x_3 + x_4 \sin x_1 \cos x_1 \cos x_3) + I_z (\dot{\psi}_0 + x_5 - x_4 \sin x_1) \cos x_1 \cos x_3 = k.$$

Bu integrallarning hech biri ishorasi aniqlangan funksiya emasligidan quyidagi integrallar chiziqli bog'lamini tuzib olamiz:

$$V = F_1 - F_1(0) + \mu[F_2 - F_2(0)] + \lambda[F_3 - F_3(0)],$$

bu yerda μ va λ – aniqlanmagan doimiy koeffitsientlar.

Bu yerda F_1, F_2 va F_3 belgilashlarni kiritamiz, $x_1, \dots, x_5$ darajalar bo'yicha qatorga yoyamiz va $\varphi_0 = n$ ekanini hisobga olamiz. Xadlarni guruhlashdan so'ng:

$$V = (I_z n + \mu + \lambda I_z)x_5 - \frac{1}{2}(Pl + \lambda I_z n)x_1^2 + \frac{1}{2}I_x x_2^2 - \frac{1}{2}(Pl + \lambda I_z n)x_3^2 + \frac{1}{2}I_x x_4^2 + \frac{1}{2}I_z x_5^2 - (I_z n + \mu + \lambda I_z - \lambda I_x)x_1 x_4 - \lambda I_x x_2 x_3 + \dots$$

kelib chiqadi, bu yerda nuqtalar orqali yuqori darajali xadlar olingan.

V funksiya ishorasi aniqlangan bo'lishi uchun, x_5 ning birinchi darajali xadi koeffitsientini nolga tenglash yetarli.

Quyidagiga ega bo'lamiz:

$$I_z n + \mu + \lambda I_z = 0.$$

Endi V funksiya quyidagi ko'rinishga keladi:

$$V = \frac{1}{2}ax_1^2 + \frac{1}{2}I_x x_2^2 + \frac{1}{2}ax_3^2 + \frac{1}{2}I_x x_4^2 + \frac{1}{2}I_x x_5^2 + \lambda I_x x_1 x_4 - \lambda I_x x_2 x_3 + \dots$$

bu yerda

$$a = -(Pl + \lambda I_z n). \quad (2)$$

V funksiya kvadratik qismini uchta funksiyaga bo'lamiz:

$$V_1 = \frac{1}{2}ax_1^2 + \lambda I_x x_1 x_4 + \frac{1}{2}I_x x_4^2,$$

$$V_2 = \frac{1}{2}ax_3^2 - \lambda I_x x_2 x_3 + \frac{1}{2}I_x x_2^2,$$

$$V_3 = \frac{1}{2}I_x x_5^2.$$

V_3 funksiya x_5 ga nisbatan musbat aniqlangan, V_1 va V_2 funksiyalar bir xil strukturaga ega. Shuning uchun pildiroq qo'zg'almas harakatini $\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}$ va $\dot{\varphi}$ ga nisbatan turg'unligi shartini aniqlash uchun V_1 funksiya x_1 va x_4 ga nisbatan musbat aniqlangan bo'lishini aniqlash yetarli.

V_1 funksiya uchun Silvester shartini yozamiz:

$$\Delta_1 = a > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & \lambda I_x \\ \lambda I_x & I_x \end{vmatrix} = I_x(a - \lambda^2 I_x) > 0.$$

(2) ifodalardan foydalanib, bu tengsizliklarni quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$\lambda < -\frac{Pl}{I_z n}, \quad f(\lambda) = \lambda^2 I_x + \lambda n I_z + Pl < 0. \quad (3)$$

(3) munosabatlarni qanoatlantiruvchi λ sonni tanlash mumkin bo'lgan shartlarni aniqlash qoldi. Agar $f(\lambda)$ uchxad diskriminanti

$$D = I_z^2 n^2 - 4I_x Pl$$

musbat bo'lsa, $f(\lambda) = 0$ tenglamaning λ_1 va λ_2 ildizlari haqiqiy va turli bo'ladi. Bu holda barcha λ uchun $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $f(\lambda) < 0$ bo'ladi, ya'ni (3) shartni ikkinchisi bajariladi. Ta'kidlab o'tish joizki, $n > 0$ da ikkala ildiz ham manfiy, $n < 0$ da ikkala ildiz ham musbat.

Endi bu λ uchun (3) tengsizliklarning birinchisi ham bajarilishini ko'rsatamiz. Buning uchun $n > 0$ bo'lganda bu shartni λ_2 katta idiz qanoatlantirishini ko'rsatish yetarli. Bizga ma'lumki:

$$\lambda_2 = \frac{1}{2I_x} \left(-I_z n + \sqrt{I_z^2 n^2 - 4I_x Pl} \right) = \frac{I_z n}{2I_x} \left(-1 + \sqrt{1 - \frac{4I_x Pl}{I_z^2 n^2}} \right).$$

Endi quyidagi tengsizlikdan foydalanamiz:

$$\sqrt{1-x} < 1 - \frac{1}{2}x,$$

va

$$\lambda_2 < -\frac{Pl}{I_z n},$$

ga ega bo'lamiz va bu $n > 0$ uchun qilingan tasdiqni ifodalaydi ($n < 0$ uchun λ_1 kichik ildizni ko'rish kerak).

Shunday qilib agar jism qo'zg'almagan harakati n burchak tezligi $D > 0$ shartni qanoatlantirsa, ya'ni:

$$I_z^2 n^2 > 4I_x Pl, \quad (4)$$

U holda barcha λ uchun λ_1 va λ_2 orasidagi V funksiya musbat aniqlangan. Uning vaqt bo'yicha to'la hosilasi (1) integrallarga asosan qo'zg'algan harakat tenglamalariga asosan nolga teng. Haqiqatdan ham, (4) tensizlik jism vertikal holatini $\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}, \phi$ kattaliklarga nisbatan turg'unligining yetarli sharti hisoblanadi.

Xulosa qilib aytadigan bo'lsak Lyapunov funsiyasi usuli jismlarning murakkab harakati, murakkab tizimlar harakatlarining turg'unligini o'rganishda o'zining qulayligi ko'rinib turibdi. O'ta murakkab tizimlar harakatini o'rganishda Lyapunov matritsa funksiyasi usulidan foydalanish taklif qilinadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Д.Р.Меркин. Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука 1987.
2. Барбашин Е.А. функция Ляпунова. – М.: Наука, 1970.
3. Беллман Р. Теория устойчивости решения дифференциальных уравнений: Пер. с англ. – М.:ИЛ, 1954.

HARAKATLANUVCHI MUHIT TEZLIGINING ISSIQLIK TARQALISH JARAYONIGA TA'SIRINI KOMPYUTERDA TADQIQ QILISH

Muxammadiyev Jabbor

F.m.f.n. O'zbekiston Milliy Universiteti

Islamov Erkinjon

O'zbekiston Milliy Universiteti

$Q = \{(t, x): 0 < t < \infty, a < x < b\}$ sohada quyidagi issiqlik tarqalish masalani ko'raylik

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (v(t, x, u)u) + \varepsilon F(t, x, u) \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, a \leq x \leq b, \quad (2)$$

$$\begin{cases} u(t, a) = \psi_1(t) \\ u(t, b) = \psi_2(t) \end{cases}, t > 0, \quad (3)$$

bu yerda $D\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$ – diffuziya koeffitsienti, $\sup_{t,x} u(t, x) < \infty, u = u(t, x) \geq 0$ qidirilayotgan yechim, $u_0(x)$ – finit funksiya, $\psi_i(t), i = 1, 2$ – manfiy bo'lmagan funksiyalar, $v(t, x, u)$ – muhit tezligi.

(1) tenglama qator fizik jarayonlarni ifodalaydi: chiziqli bo'lmagan muhitda reaksiya diffuziya jarayonini, bir jinsli bo'lmagan chiziqsiz muhitdagi issiqlik tarqalish jarayonini, chiziqli bo'lmagan suyuqlik va gazning filtratsiyasini ifodalab ular politrapiya qonuni va boshqa chiziqli bo'lmagan ko'chishlarning mavjudligini ifodalaydi [1-4]. $\varepsilon F(t, x, u)$ had ($\varepsilon = +1$) manbaning yoki ($\varepsilon = -1$) yutilishning mavjudligiga mos kelib, uning quvvati $F(t, x, u)$ ga teng, $v(t, x, u) \frac{\partial u}{\partial x}$ esa $v(t, x, u)$ tezlikka ega muhitning harakatiga mos keladi.

(1) tenglama uchun Koshi masalasi va chegaraviy masalalar bir o'lchamli va ko'p o'lchamli holatlarda ko'plab avtorlar tomonidan kuzatilgan [1-4]. $\varepsilon = \pm 1$ da $D\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$ parametrning ayrim xususiy qiymatlari [2-3] da o'rganilgan.

(1) tenglama bilan ifodalangan jarayonlarda temperaturaning chekli tezlikli tarqalish hodisasi ro'y beradi [4]. Yutilish koeffitsienti mavjud bo'lganda lokalizatsiya xodisasi sodir bo'lishi mumkin. Konvektiv ko'chish mavjud bo'lganda esa "orqa" front hodisasi ro'y berishi mumkin, ya'ni chap front ma'lum vaqtdan keyin to'xtashi va muhit harakati bo'ylab harakat qilishi mumkin.

(1)-(3) masala uchun parametrlarning turli qiymatlarida, $D\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), F(t, x, u)$ funksiyalarga va $v(t, x, u)$ ga bog'liq bo'lgan holda turli xil yechimlar paydo bo'lishi mumkin (chekli tezlikli, lokalizatsiyalangan, globallashtirish va boshqalar).

(1)-(3) masala uchun quyidagi natijalar olindi:

- chiziqsiz issiqlik tarqalish tenglamasi uchun ko'rilgan birinchi chegaraviy masala uchun turg'un sxemalar qurildi va 3 xil (oddiy iteratsiya, Nyuton va maxsus usullar) chiziqlashtirish usuli qo'llanildi [5];
- masalani yechish algoritmi yaratildi, C++ muhitida dastur tuzildi;
- test masala uchun dasturlarning ishlashi sozlandi va parametrlarning ba'zi qiymatlarida hisoblash eksperimentlari o'tkazildi;
- fizik jarayonning vaqt bo'yicha kachishi vizuallashtirildi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Ivanov V. T., Lubyshev F.V., Derkesh A.S., Merkushev V.G. Metody sovmetstnyx raschetov elektricheskix I teplovyx polei v elektroximicheskix sistemax. V sb.: Elektricheskie I teplovyx v elektrolitax. Voprosy teorii I metody rascheta. –M.: Nauka, 1978, s.3-31.
2. Aripov M. Metody etalonnyx uravneniy dlya resheniya nelineynyx kraevyx zadach. Tashkent, Fan, 1978.
3. Aripov M. Asympptotics of the non-Newton Polytropic Filtration Equations. ZAMM 2000, vol.80, supl.3, 767-768.
4. Zeldovich YA.B., Kompaneets A.S. K teorii rasprostraneniya tepla pri teploprovodnosti, zavisyashey ot temperatury. //Sbornik, posvyashenniy 70-letiyu akad. A.F. Ioffe. M. 1950, s.61-71.
5. Samarskiy A.A. Teoriya raznostnyx sxem. –M.: Nauka, 1989, 656s.

SUN'IY INEOTELEKT TIZIMLARI YORDAMIDA TIBBIY TASVIRLARNI QAYTA ISHLASH

Nazirova Elmira

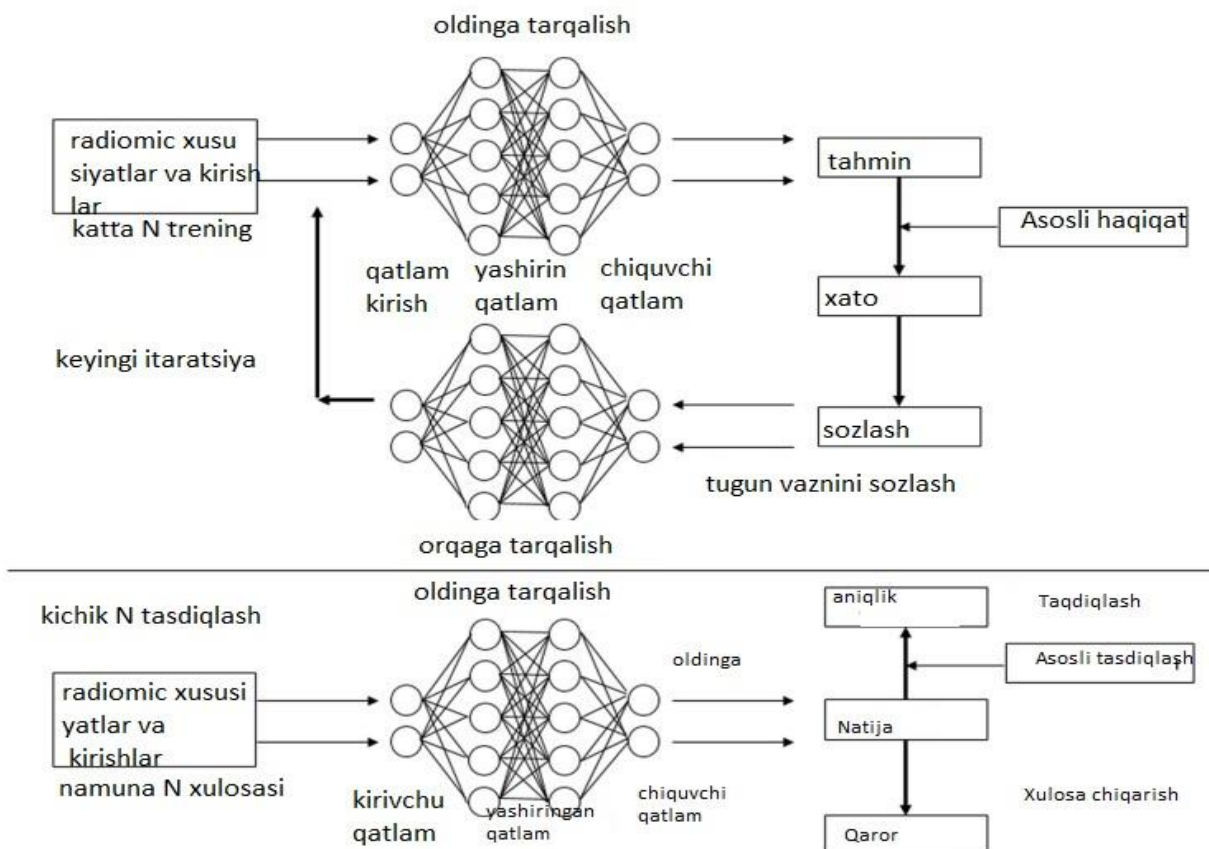
T.f.d., TATU

Madolimov Fahriddin

ADU

Tibbiy tasvirlarni qayta ishlashda rengen, tamagrafiya, biopsiy tasvirlaridan foydalanib sun'iy intellekt tizimlari yordamida bemorlarga tashxis qo'yiladi. Tibbiy tasvirlarni sun'iy intellekt orqali tashhis qo'yish kompyuter texnologiyasida katta burilish bo'ldi. Sun'iy intellekt tizimi orqali ulangan tugunlar qatlamlardan tashkil topgan tahlil qilish algoritimidir. Tibbiy tasvirdagi (input) konvolyutsiyadan foydalanilganda radiomik xususiyatlar bo'lishi mumkin. Tibbiy tasvirlarni qayta ishlash sun'iy intellekt tizimi yordamida qilingan klinik va tadqiqot imkoniyatlari bilan yangi davrni boshlab beradi. Sun'iy intellekt tizimini paydo bo'lishi radiologiya sohasida odamlarga qaraganda kamroq xatoliklarni keltirib chiqardi.

Sun'iy nerv tarmoqlari bir necha qatlamlarda (chuqurlik) sozlangan yuzlab millionlar oralig'ida bo'lishi mumkin bo'lgan tugunlarni o'z ichiga oladi. Sun'iy intellekt ko'p qatlamlarni o'z ichiga olgan Sun'iy nerv foydalanadi (masalan, >6) yanada murakkab tatbiq etilishi sifatida qabul qilinadi.



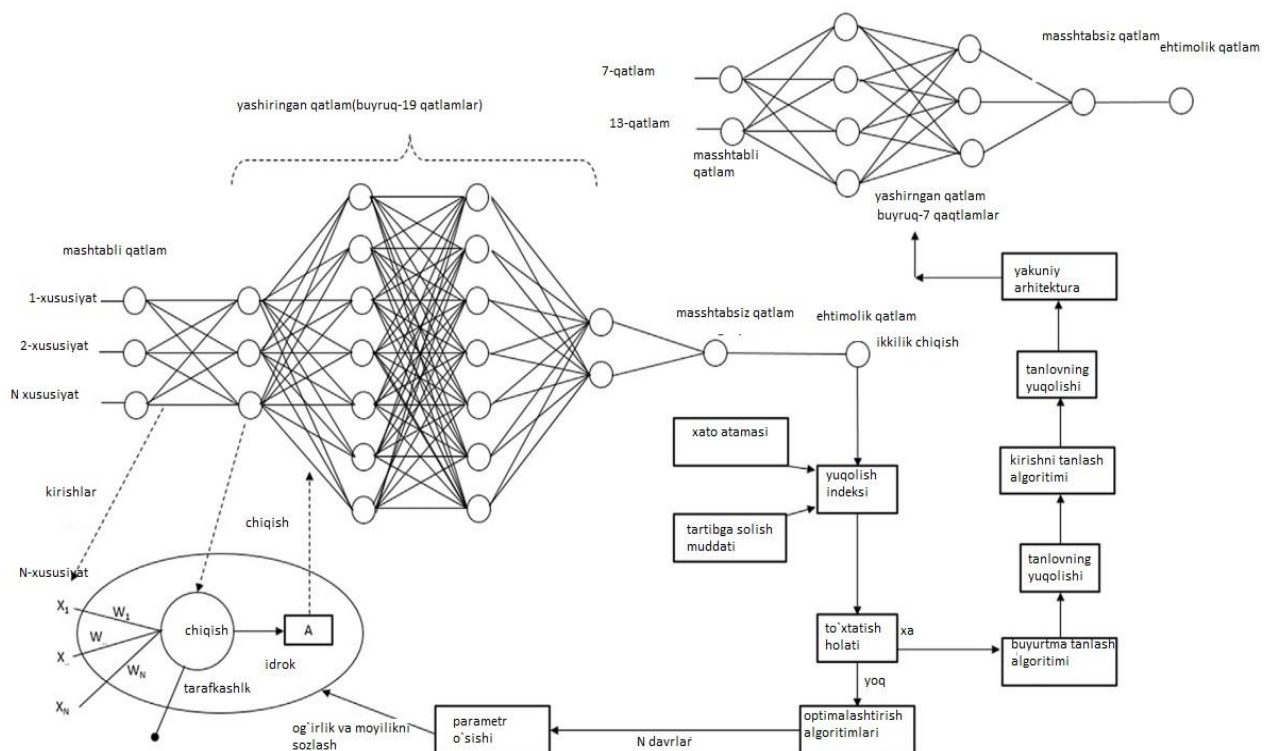
1-rasm radiomika xususiyatlarini kiritish chiqarish modeli

Sun'iy intellekt ko'proq narsani birlashtirib, batafsilroq tahlil qilish imkoniyatiga ega ma'lumotlar va/yoki yuqori darajadagi mavhumlikni ifodalay oladi [1-4]. Har bir tugun boshqa tugunlardan va chiqishlardan ma'lumot oladi o'sha tugunlardan tortiladi (1-rasm). Sun'iy intellekt maqsadi ma'lumotnoma bilan solishtirganda to'g'ri javoblarni maksimal

darajada oshirish (asoslangan haqiqat) har bir oldinga tarqalish uchun hisoblangan xatoga asoslangan har bir tugundagi og'irliklarni sozlash orqali. Har biri orqali iteratsiya (davr), matematik yechim aniqroq yechimga yaqinlashadi. Bu iterativ jarayondan farq qilmaydi iterativ rekonstruksiya uchun tasvirlangan jarayon. Treyning bosqichi katta ma'lumotlar bilan eng yaxshi natijalarga ega o'rnatish. Har bir iteratsiya bilan natijalarning tegishli yaxshilanishi birmuncha kichrayadi. Ikkinchi, odatda kichikroq ma'lumotlar to'plam xulosalarni tasdiqlash uchun ishlatilishi mumkin va bu ifodalaydi nashr etilgan asarlarning aksariyati shu vaqtda. Katta ma'lumotlar tibbiy tasvirlashda katta hajmni ta'minlashda muhim rol o'ynaydi Sun'iy inetelekt qatlamdagi chuqurlik yoki qatlamlar sonini tavsiflaydi Sun'iy nerv tarmoqlari odatda aniqlash uchun konvolutsiyon bilan bog'langan va xususiyatlarni bevosita tasvirlardan ajratib olingan.

2-rasm sun'iy nerv tarmog'ini kiritish chiqarish modeli

Bir qator kirishlarga ega oddiy Sun'iy nerv tarmoqlarini (2-rasm) ko'rib chiqing



xususiyatlar (1. N) va bitta ikkilik chiqish (kasallik yoki yo'q kasallik). Sun'iy nerv tarmoqlari arxitekturasi N masshtabli qatlamni o'z ichiga oladi kirishlar, bir qator yashirin (idrok) qatlamlar (yaratish chuqurligi) har bir yashirin qatlamdagi bir nechta tugunlar, masshtabni ochish, va ehtimollik qatlami; bu holda, 3, 7, 7 dan iborat 4 ta yashirin qatlam, va mos ravishda 2 tugun (2-rasm). Masshtablash qatlami kirish statistikasini o'z ichiga oladi va kirishni oldindan belgilangan darajaga o'lchaydi diapazon. Yashirin qatlamlardagi har bir tugun (tarqalish) qabul qiladi vaznli ($w_1, w_2, \dots, w_N$) raqamli kirishlar ($x_1, x_2, \dots, x_N$) yig'iladi va bitta aniq kirishni ishlab chiqarish uchun bir tarfaga qo'shiladi qiymat. Faollashtirish funktsiyasi (A), odatda chiziqli yoki logistik (sigmoid) faollashtirish funktsiyasi, keyin shakllantiradi tugunning chiqishi [9-13]. Har bir tugun faqat 1 ta chiqishga ega lekin bu bitta chiqish bir nechta tugunlar uchun kirishga aylanadi keyingi idrok qatlamida. Sun'iy nerv tarmoqlari ehtimollikka ega masshtabsiz qatlamdan keyingi chiqish funktsiyasi (Sun'iy nerv

tarmoqlarini) o'rgatish va optimallashtirish uchun yo'qotish indeksi ishlatiladi xato atamasini (algoritmni baholash bilan bog'liq xato) va tartibga solish muddatini (kirishlar o'zgarishiga javoban chiqishlarning o'zgarishi hajmi) o'lchash xato va tartibga solish shartlari yig'iladi (yo'qotish indeksi), va agar yo'qotish oldindan belgilangan qiymatdan oshib ketgan bo'lsa, optimallashtirish algoritmi og'irlik va moyillikni sozlash uchun ishlatiladi. Xatolarni chiqish qatlamlaridan orqaga yoyish kirish qatlamlari, jarayon yo'qotish indeksini minimallashtirib, oldindan belgilangan qiymatga qadar davom etadi yetdi (2-rasm). Davr butun ma'lumotlar to'plamini anglatadi oldinga tarqalish (va orqaga tarqalish sun'iy nerv tarmoqlari orqali) bir marta. Kichik ma'lumotlar to'plamlarida bu a ga teng iteratsiya. Katta ma'lumotlar to'plamida butun ma'lumotlar to'plami bo'lmasligi mumkin bir partiyada sun'iy nerv tarmoqlari orqali o'tishi mumkin. Bu holatda, kattaroq ma'lumotlar to'plami kichikroq bo'linadi partiyalar. Har bir to'plam oldinga va orqaga tarqalishdan o'tadi, u iteratsiya deb ataladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

[1] McBee, M. P., Awan, O. A., & Colucci, A. T., et al. (2018). Deep learning in radiology. *Acad Radiol* 25(11), 1472–1480.

[2] Langlotz, C., Allen, B., & Erickson, B., et al. (2019). A roadmap for foundational research on artificial intelligence in medical imaging: from the 2018 NIH/RSNA/ACR/The academy workshop. *Radiology* 190613.

[3] Liew, C. (2018). The future of radiology augmented with artificial intelligence a strategy for success. *Eur J Radiol* 102, 152–156.

[4] Tajmir, S. H., & Alkasab, T. K. (2018). Toward augmented radiologists: changes in radiology education in the era of machine learning and artificial intelligence. *Acad Radiol* 25(6), 747–750.

ABOUT MATHEMATICAL MODELING OF THE DEFORMATION PROCESS OF COMPOSITE SHELL STRUCTURES

Salimov Shoolim

University of Public Safety of the Republic of Uzbekistan

Numerical modeling of structurally inhomogeneous deformable media makes it possible to assess the qualitative picture of the influence of the entire complex of parameters on deformation processes, taking into account the structural interaction of various forms of motion. It is fundamentally important that modeling allows you to develop sound recommendations not only at the stage of product design, but also for laboratory and field experiments in real operating conditions of the latter.

On the basis of the mathematical theory of viscoelasticity, variational principles of dynamics, modern computational and asymptotic methods, the problems of research and calculation of dynamic characteristics, multiply connected structurally inhomogeneous shell structures, determined by various functions of heredity, are reduced to an effectively solvable mathematical problem for complex eigenvalues.

The use of a discrete-continuum design scheme for the considered structurally inhomogeneous shell structures determines the main method for solving problems of dynamics and strength.

In the general scheme of solving problems, the dominant position is occupied by the method of orthogonal running of S. K. Godunov.

The general scheme of the algorithms used in this subsystem is considered by the example of the linear problem of determining the stress-strain state and vibrations of an axisymmetric structurally inhomogeneous structure under the action of axisymmetric loading [2].

The differential equations of equilibrium describing the behavior of each shell element can be reduced to a system of six first-order differential equations:

$$\bar{q}^1 = [A(x)]\bar{q} + \bar{B}(x); \quad q = \begin{Bmatrix} \bar{q}^+ \\ \bar{q}^- \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{N} \\ \bar{W} \end{Bmatrix},$$

where $\bar{q}^+$ is the vector of internal generalized force factors reduced to the surface of rotation of the shell element; $\bar{q}^-$ is the vector of generalized displacements of this surface.

Let $\bar{N}_0, \bar{N}_e$ be vectors of generalized forces, $\bar{W}_0, \bar{W}_e$ vectors of generalized displacements at the ends $x=0$ and $x=l$, respectively, connected by a one-to-one relationship

$$\begin{Bmatrix} \bar{N}_0 \\ \bar{N}_e \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} \bar{W}_0 \\ \bar{W}_e \end{Bmatrix} + \bar{Q}^*$$

here $[K]$ is the stiffness matrix; $\bar{Q}^*$ is the stiffness vector of the shell element.

To determine the stiffness matrix $[K]$, it is necessary to solve a boundary value problem for a system of ordinary linear differential equations of the first order

$$[Y]^1 = [A(x)][Y]$$

with boundary conditions

$$\begin{aligned} [Y(0)] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ [Y(l)] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

where

$$[Y] = [\bar{q}_1 \ \bar{q}_2 \ \bar{q}_3 \ \bar{q}_4 \ \bar{q}_5 \ \bar{q}_6]$$

To determine the stiffness vector $\bar{Q}^*$, it is necessary to solve a boundary value problem for a system of differential equations of the first row (4.3) with boundary conditions

$$\bar{q}^-(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \bar{q}^-(l) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

To determine the displacements of nodal elements, the method of displacement in the form proposed by A.V. Alexandrov is used. This method, unlike the standard finite element method, uses the concepts of a nodal line and a nodal element. The introduction of a small number of nodal lines instead of a large number of nodal points in the standard finite element method leads to a significant reduction in the order of the resolving system of linear algebraic equations for determining nodal displacements:

$$[P]\bar{\Delta} = \bar{F}$$

As a result, all components of the stress - strain state of each shell element of the structure are determined [3].

When solving a geometrically or physically nonlinear problem, the differential equations describing the behavior of each shell element are presented in the form:

$$\bar{q}^1 = f(x, \bar{q}) + \bar{b}(x)$$

The linearization of these equations is carried out using the Newton-Kantorovich method. At the $(J + I)th$ step of the iterative process, we obtain a system of first-order ordinary differential equations

$$\frac{d\vec{y}^{s+1}}{dx} = [A(x, \vec{q}^s)]\vec{q}^{(s+1)} + \vec{B}(x, \vec{q}^s)$$

When solving the problem of determining the stress-strain state of structures under the influence of asymmetric external loads, the latter are decomposed in the Fourier series along the circumferential coordinate. For the n th harmonic of the expansion, the differential equations with complex coefficients describing the behavior of each shell element have the form

$$\vec{q}_n^1 = [A(x, n)]\vec{q}_n + \vec{b}(x, n)$$

REFERENCES:

1. Mavlanov T. Development of methods and algorithms for calculating shell structures taking into account structural heterogeneity and interaction with various media. T. 2020, 200 p.
2. Sh Salimov 2020 IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 883 012191
3. Sh Salimov and T Mavlanov 2020 IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci. 614 012057

MATHCAD DASTURIDA UCH O'LCHAMLI GRAFIKLAR QURISH

Tursinboyeva Zebo

Navoiy davlat konchilik instituti

Ismoilova Zamira

Navoiy davlat konchilik instituti

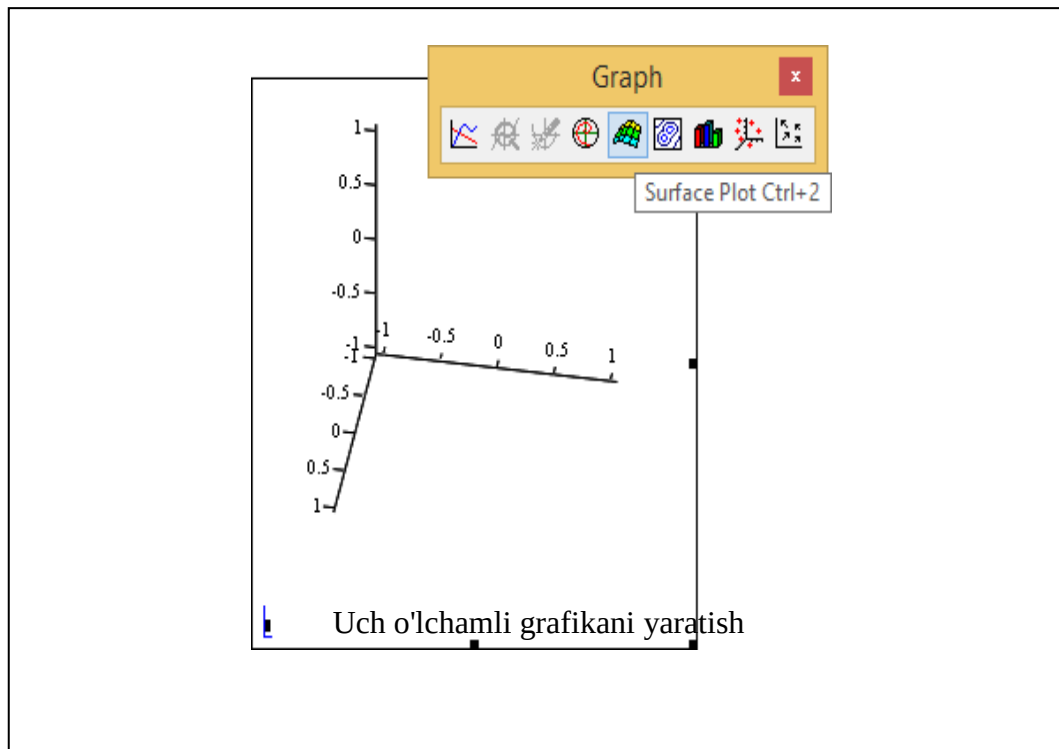
Abdullayeva Dildora

Navoiy davlat konchilik instituti

Mathcad dasturida uch o'chovli grafiklarni ham tasvirlash mumkin. Uch o'lchamli grafikani yaratish uchun grafik asboblar panelidagi (grafik) uch o'lchamli grafikalarining har qanday turini ko'rsatadigan tugmani bosish kerak. Natijada, uch o'qi bilan grafik bo'sh maydoni va pastki chap burchakdagi yagona joy egasi. Ushbu manzilda uch o'lchamli grafikani tezkor qurish uchun ikkita o'zgaruvchining $z(x,y)$ funktsiyasi yoki z , y , xy tekisligida zx , y ma'lumotlarini taqsimlashni belgilaydigan matritsali o'zgaruvchining nomi kiritilishi kerak.

Uch o'lchovli grafik sohani hosil qilish uchun

1. Menyu satridan Insert – Graph-Surface plot ni tanlang.
2. Klaviaturadan Ctrl+2 ni tanglang [1].



Uch o'lchamli grafik qurish uchun quyidagi protseduralarni bajarish kerak.

1. Ikki o'zgaruvchili funktsiya nomini keyin ($:=$) yuborish operatori va funktsiya ifodasini kiritish.

2. Grafik qurish kerak bo'lgan joyga kursor qo'yiladi.

3. Matematik panelining Graph (Grafik) panelidan Surface Plot (uch o'lchamli grafik) tugmasi bosiladi. Shu joyda uch o'lchamli grafik shabloni paydo bo'ladi.

4. Shablon maydonidan tashqarisida sichqoncha bosiladi va grafik quriladi.

Ikki o'zgaruvchili funktsiya bo'yicha grafik sirtini qurishni tez qilish maqsadida boshqa usul ham mavjud va u ayrim hollarda funktsiya sirtini tuzishda funktsiya massiv sonli qiymatlarini ishlatadi. Bunday grafikni qurish uchun quyidagi protseduralarni bajarish kerak.

1. Diskret o'zgaruvchilar yordamida ikki funktsiyaning o'zgaruvchisi uchun ham qiymatlarini kiritish.

2. Massiv kiritish. Uning elementlari funktsiya qiymatlari bo'lib, ular berilgan funktsiya argumentlari qiymatlaridan tashkil etiladi.

3. Kursor qaysi joyga grafik qurish kerak bo'lsa shu joyga qo'yiladi.

4. Grafik shabloniga funktsiya nomi kiritiladi.

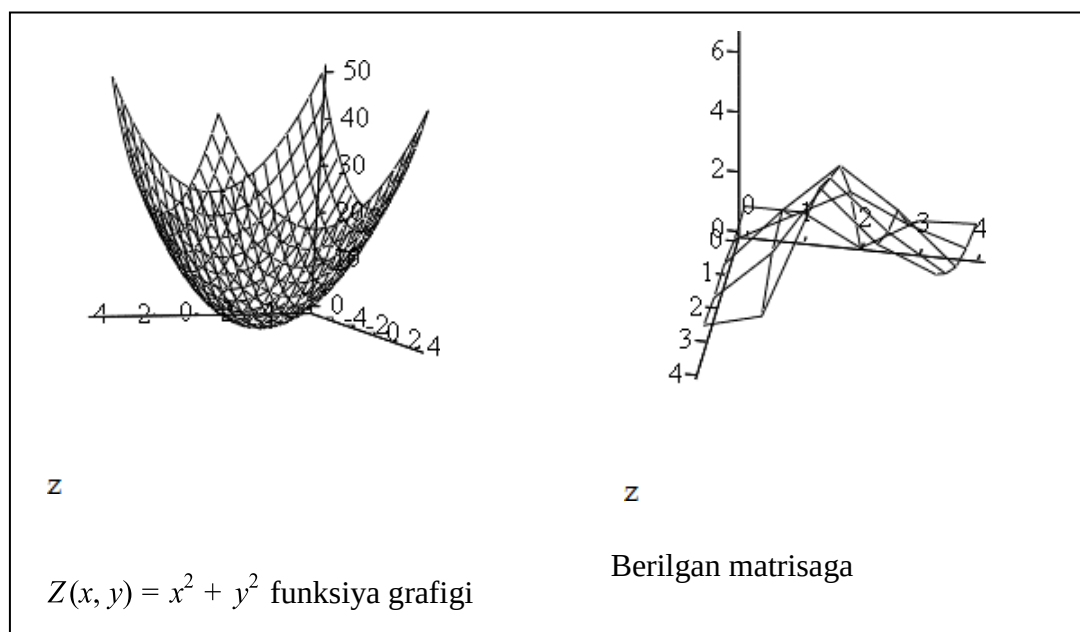
5. Shablon maydonidan tashqarisida sichqoncha bosiladi va grafik quriladi, masalan Grafik formatini qayta o'zgartirish va unga ranglar berish uchun grafik maydonini ikki marta tez-tez sichqonchani ko'rsatib bosish va ochilgan muloqot oynasidan kerakli o'zgarishlarni qilish kerak. Bu o'zgartirishlar muloqot oynasida berilgan [2].

Bunda:

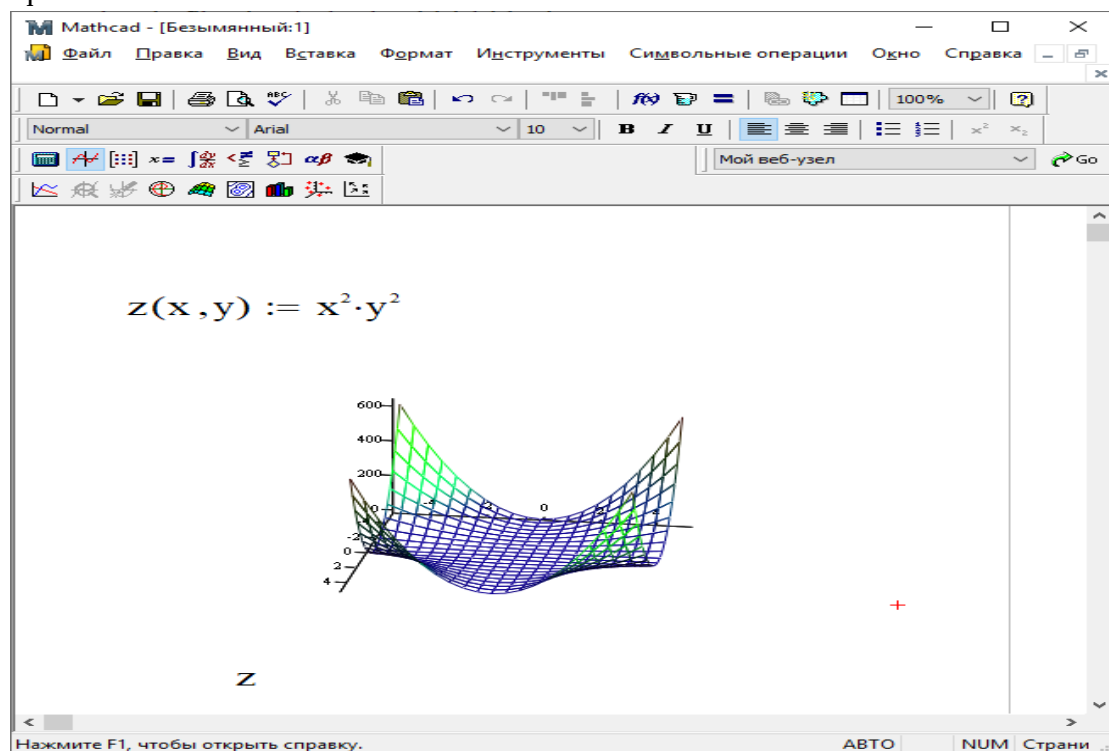
- Surface Plot – grafik sirti;
- Contour Plot – grafik chizig'i darajasi;
- Data Points – grafikda faqat hisob nuqtalarini tasvirlash;
- Vector Field Plot – vektor maydoni grafigi;
- Bar Plot – uch o'lchovli grafik gistogrammasi;

- Patch plot –hisob qiymatlari maydoni.

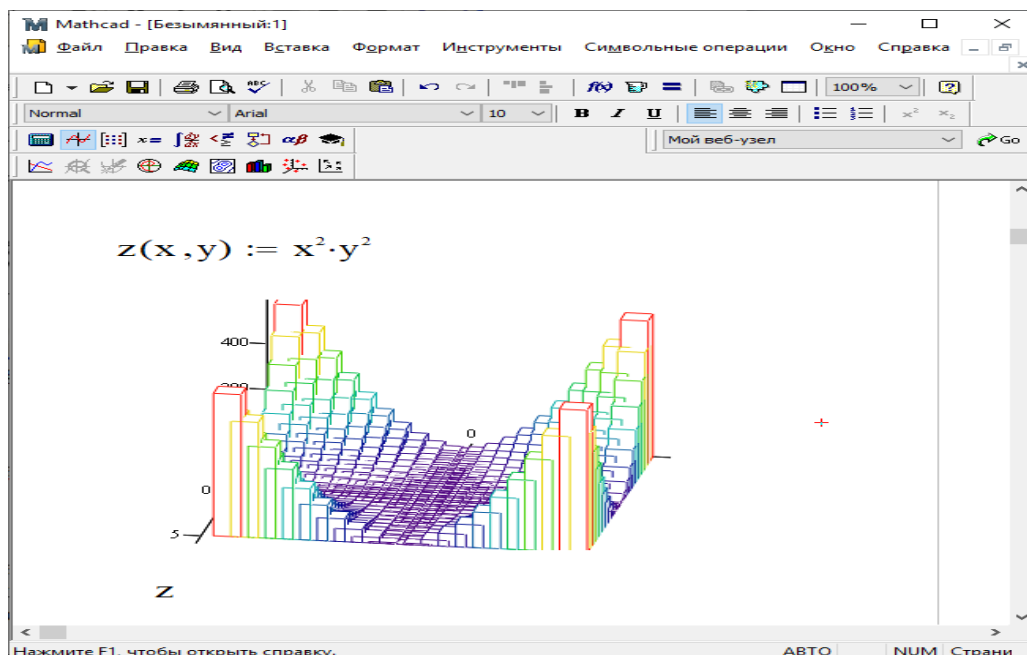
Grafik sirti (Surface Plot)



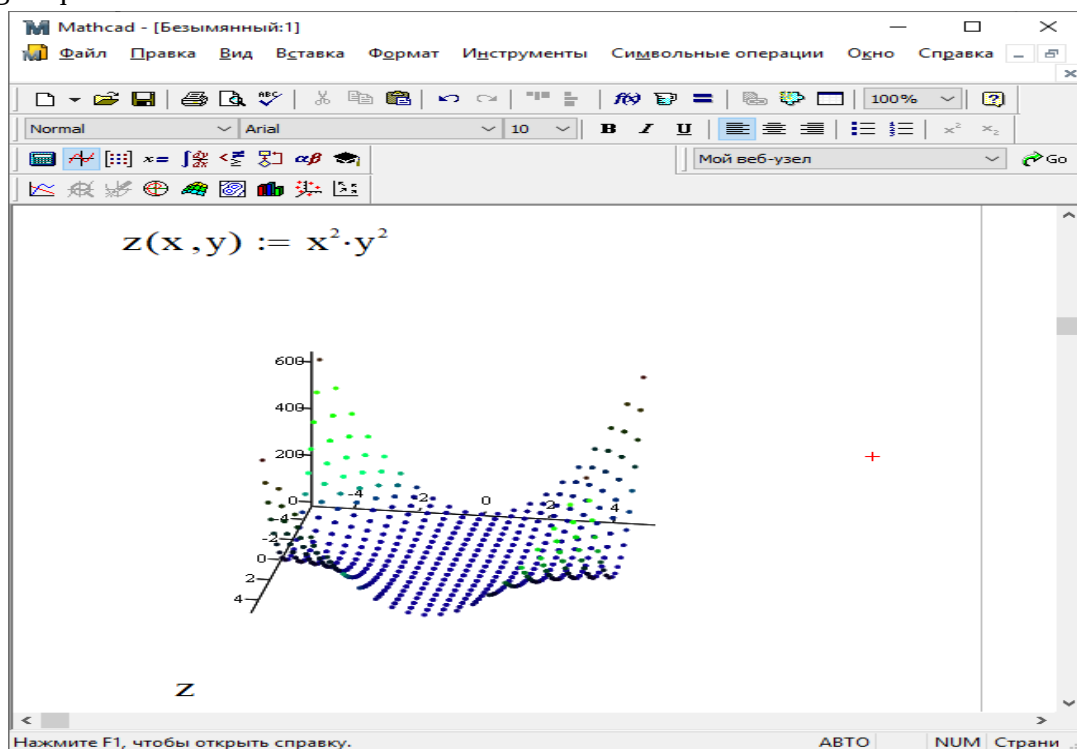
Masalan, quyidagi $z(x,y)=x^2*y^2$ funksiyaning grafigini **Grafik sirti (Surface Plot)** orqali quramiz:



Xuddi shu funksiya grafigini **Bar Plot** –uch o'lchovli grafik histogrammasi orqali ham qurish mumkin.



Data Points – grafikda faqat hisob nuqtalarini tasvirlash orqali ham berilgan funksiya grafigini qurish mumkin:



Bulardan tashqari yana bir qancha boshqarish elementlari mavjud. Ular grafikni formatlashda keng imkoniyatni beradi. Masalan, grafik masshtabini o'zgartirish, grafikni aylantirish, grafikga animatsiya berish va boshqa rasmda uch o'lchamli grafikni formatlash oynasi berilgan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. O.I.Jalolov, H.B. Rajabova, X.U. Xayatov MathCAD dasturi va uning imkoniyatlari (uslubiy qo'llanma) Buxoro 2012 y.
2. Ronald W.Larsen Introduction to MathCad. Westem Sydney University.- Australia: 2014.

IKKINCHI TARTIBLI HOSILASI KVADRATI BILAN INTEGRALLANUVCHI FUNKSIYALAR FAZOSIDA KVADRATUR FORMULANING EKSTREMAL FUNKSIYASI

Ulikov Shukurillo

O'zRFA Romanovskiy nomidagi Matematika instituti

Qaralayotgan funksiyalar sinfida kvadratur formulaning maksimal xatoligi kvadratur formulalar nazaryasining muhim masalasi hisoblanadi.

Biz quyidagi ko'rinishda kvadratur formulani qaraymiz [1-2]

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N k[\beta] \varphi(h\beta) \quad (1)$$

bu yerda $k[\beta]$ - (1) kvadratur formulaning hozircha noma'lum koeffitsiyentlari, $h = 1/N$, N – natural son, integral ostidagi $\varphi(x)$ funksiya $W_2^{(2)}(0,1)$ fazoga tegishli. Bunda $W_2^{(2)}(0,1)$ fazo bu birinchi tartibli hosilasi absolyut uzluksiz va ikkinchi tartibli hosilasi $L_2(0,1)$ ga tegishli barcha funksiyalar sinfi. Ushbu $W_2^{(2)}(0,1)$ fazo

$$\langle \varphi, \psi \rangle_w = \int_0^1 \left(\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \cdot \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{d\varphi(x)}{dx} \cdot \frac{d\psi(x)}{dx} \right) dx. \quad (2)$$

skalyar ko'paytmaga nisbatan Gilbert fazosi bo'ladi. Bu yerda (2)- skalyar ko'paytma yordamida

$$\|\varphi\| = \left\{ \int_0^1 \left(\left(\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi(x)}{dx} \right)^2 \right) dx \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

aniqlanadi.

(1)-kvadratur formulaning xatoligi deb

$$\int_0^1 \varphi(x) dx - \sum_{\beta=0}^N k[\beta] \varphi(h\beta) \quad (4)$$

ayirmaga aytiladi va bu ayirmaga $W_2^{(2)}(0,1)$ fazosida aniqlangan quydagi xatolik funksionali mos keladi

$$\ell(x) = i_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N k[\beta] \delta(x - h\beta), \quad (5)$$

bu yerda $i_{[0,1]}(x)$ -[0,1] kesmaning xarakteristik funksiyasi, $\delta(x)$ -Dirakning delta-funksiyasi.

Odatda, $\ell(x)$ funksionalning $\varphi(x)$ funksiyadagi qiymati quyidagicha aniqlanadi

$$(\ell, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) \varphi(x) dx. \quad (6)$$

(6) tenglikka asosan, (5) formulani etiborga olib, (4) ayirma haqiqatdan ham, $\ell(x)$ xatolik funksionalining $\varphi(x)$ dagi qiymati ekanligiga ishonch hosil qilamiz, ya'ni

$$\begin{aligned}
(\ell, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(i_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N k[\beta] \delta(x - h\beta) \right) \cdot \varphi(x) dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} i_{[0,1]}(x) \varphi(x) dx - \sum_{\beta=0}^N k[\beta] \delta(x - h\beta) \cdot \varphi(x) dx = \int_0^1 \varphi(x) dx - \sum_{\beta=0}^N k[\beta] \varphi(h\beta).
\end{aligned}$$

Demak,

$$(\ell, \varphi) = \int_0^1 \varphi(x) dx - \sum_{\beta=0}^N k[\beta] \varphi(h\beta) \quad (7)$$

(1) kvadratur formulaning (7) xatoligi $W_2^{(2)*}(0,1)$ fazosida chiziqli funksionalni aniqlaydi,

bu yerda $W_2^{(2)*}$ fazo $W_2^{(2)}$ fazoga qo'shma fazo. U holda, Koshi-Shvars tengsizligidan xatolikning absolyut qiymati yuqoridan quyidagicha baholanadi:

$$|(\ell, \varphi)| \leq \|\varphi\|_{W_2^{(2)}(0,1)} \cdot \|\ell\|_{W_2^{(2)*}(0,1)}$$

Bu tengsizlikdan biz (1) kvadratur formulaning (7) xatoligi $\ell(x)$ xatolik funksionalining

$$\|\ell\|_{W_2^{(2)*}(0,1)} = \sup_{\|\varphi\|_{W_2^{(2)}(0,1)}=1} |(\ell, \varphi)| = \sup_{\varphi, \|\varphi\| \neq 0} \frac{|(\ell, \varphi)|}{\|\varphi\|_{W_2^{(2)}(0,1)}}$$

normasi orqali baholanishini xulosa qilamiz.

Yuqoridagi tengsizlikdan ko'rinadiki, (4) xatolikning absolyut qiymatini yuqoridan baholash uchun, (5) xatolik funksionalining normasini topish talab etiladi. Buning uchun esa mos ekstremal funksiyani aniqlash kerak. Quyida aynan shu *ekstremal funksiyani aniqlash masalasini* qaraymiz.

Ushbu masalani yechish uchun, ekstremal funksiya ta'rifidan foydalanamiz. Ma'lumki, Koshi-Shvarts tengsizligini tenglikka aylantiruvchi $U_\ell(x)$ funksiyaga *ekstremal funksiya* deyiladi, ya'ni

$$(\ell, U_\ell) = \|\ell\|_{W_2^{(2)*}(0,1)} \cdot \|U_\ell\|_{W_2^{(2)}(0,1)}. \quad (8)$$

$W_2^{(m)}(0,1)$ Gilbert fazosida chiziqli uzluksiz funksionalning umumiy ko'rinishi haqidagi Riss teoremasidan foydalanib quyidagini yozamiz.

$$\|\ell\|_{W_2^{(2)*}(0,1)} = \|U_\ell\|_{W_2^{(2)}(0,1)}. \quad (9)$$

Shuningdek, (8) va (9) dan quyidagi xulosaga ega bo'lamiz:

$$(\ell, U_\ell) = \|\ell\|_{W_2^{(2)*}(0,1)}^2. \quad (10)$$

Boshqa tomondan, xuddi shu teorema bo'yicha, $W_2^{(2)}(0,1)$ fazoning har qanday $\varphi(x)$ elementi uchun ushbu tenglikni olamiz

$$(\ell, \varphi) = \langle U_\ell, \varphi \rangle,$$

bu yerda

$$\langle U_\ell, \varphi \rangle = \int_0^1 \left(\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \cdot \frac{d^2 U_\ell(x)}{dx^2} + \frac{d\varphi(x)}{dx} \cdot \frac{dU_\ell(x)}{dx} \right) dx. \quad (11)$$

Aytaylik, $\varphi(x)$ funksiya $W_2^{(2)}(0,1)$ fazoga tegishli cheksiz differensiallanuvchi funksiya bo'lsin, ya'ni.

$$\varphi(x) \in \overset{\circ}{C}^{(\infty)}(0,1).$$

(11) tenglikning o'ng tomonini bo'laklab integallab quyidagini hosil qilamiz

$$U_\ell^{(4)}(x) - U_\ell^{(2)}(x) = \ell(x). \quad (12)$$

$$(U_\ell^{(3)}(x) - U_\ell^{(1)}(x)) \Big|_{x=0}^{x=1} = 0, \quad (13)$$

$$U_\ell^{(2)}(x) \Big|_{x=0}^{x=1} = 0. \quad (14)$$

Teorema 1. (12)-(14) chegaraviy masalaning yechimi (1) kvadratur formulaning (5) xatolik funksionali ekstremal funksiyasi bo'lib, quyidagi ko'rinishga ega.

$$U_\ell(x) = \ell(x) * \mu_2(x) + P_0,$$

bu yerda

$$\mu_2(x) = \frac{\text{sign}x}{2} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} - x \right) \quad (15)$$

ushbu $\frac{d^4}{dx^4} - \frac{d^2}{dx^2}$ differensial operatorning fundamental yechimi,

$$\text{sign}x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases} \quad P_0 \text{ - ixtiyoriy o'zgarmas son.}$$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. – М.: Наука. 1974. 808 с.
2. Соболев С.Л., Васкевич В.Л. Кубатурные формулы. - Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996. - 484 с.
3. Рамазанов М.Д. Теория решетчатых кубатурных формул с ограниченным пограничным слоем. – Уфа, 2009. - 178 с.
4. Шадиметов Х.М., Нуралиев Ф.А., Уликов Ш.Ш., Абдукайимова Г.А., Квадратнормы функционала погрешности квадратурных формул в факторизованном пространстве Соболева – Проблемы вычислительной и прикладной математики, Ташкент N-4(34) 2021.

OPSION NARXLARINI BAHOLASHDA HOSIL BO'LGAN KO'P KARRALI INTEGRALLARNI MONTE-KARLO USULIDA HISOBLASH

Xasanova Dilfuzahon

Jahon iqtisodiyoti va Diplomatiya universiteti

Bekova Vazirahon

O'zbekiston Milliy universiteti

Monte-Karlo usuli – bu tasodifiy miqdorlarni modellashtirish yordamida matematik masalalarni sonli yechish usulidir.

Monte-Karlo usuli tarixi. Monte-Karlo metodi birinchi bo'lib 1949-yil “The Monte Carlo method” maqolasida keltirilgan. Bu usulni amerikalik olimlar J. Neyman va S.Ulama yaratishgan. Monte-Karlo haqida dastlabki rus tilidagi maqolalar 1955-1956-yillarda chiqqan boshlagan.

Qizig'i shundaki, bu metodning nazariy asosi avvaldan ma'lum bo'lgan. Hattoki, ba'zi statistika masalalari tasodifiy tanlanmalar yordamida yechilgan, ya'ni Monte-Karlo metodi bilan. Biroq elektron hisoblash mashinalari (EHM) yaratilgunga qadar, bu metod qo'llanilmagan, chunki tasodifiy miqdorlarni qo'lda yaratish juda mehnat talab ish edi. Shu tariqa, Monte-Karlo usulining universal sonli metod bo'lishida EHM-larning yaratilishi asosiy sabab bo'lgan. Monte-Karlo usuli statistik tajribalar metodi deb ham atashadi.

Usulning birinchi xususiyati – hisoblash algoritmi strukturasining soddaligidir. Usulning ikkinchi xususiyati: hisoblash hatoligi odatda $\sqrt{D/N}$ ga proporsional bo'ladi, bu yerda D – qandaydir o'zgarmas, N – tajribalar soni. Bu formuladan ko'rinadiki, hatolikni 10 marta kamaytirish uchun (boshqacha aytganda javobda yana bir aniq o'nlik belgi hosil bo'lishi uchun) N ni 100 martaga oshirish kerak.

Monte-Karlo usuli yordamida yechiladigan masalalar. Birinchidan, Monte-Karlo usuli tasodifiy faktorlarga asoslangan ixtiyoriy jarayonni modellashtira oladi. Ikkinchidan, tasodiflarga asoslanmagan ko'pchilik matematik masalalarga ham, sun'iy tarzda bu masalani yechuvchi ehtimollik modelini tuzsak bo'ladi. Shu tariqa, Monte-Karlo usulini matematik masalalarni yechuvchi universal usul deb qarash bo'ladi.

Moliyaviy matematikada opsiyonlarni baholash uchun qo'llaniladigan usullar analitik va raqamli usullarga bo'linadi. Biz analitik usuldan foydalanib Yevropa usulidagi opsiyonlarning malum bir cheklangan sonini hisoblab baholashimiz mumkin. Agar biz opsiyonning sonini ixtiyoriy katta raqamlarda baholamoqchi bo'lsak albatta raqamli usuldan foydalanishimiz maqsadga muvofiq bo'ladi. Opsiyonning bahosini raqamli usuldan foydalanadigan bo'lsak bizga albatta Monte-Karlo usuli o'zining qulayligi va soddaligi bilan eng maqul usul hisoblanadi. Chunki raqamlar soni ortib borishi bilan hisoblash jarayoni murakkablashib boradi. Biz tanlagan Monte-Karlo usulida esa opsiyon bahosining matematik kutilmasini olishingiz mumkin va biz opsiyon bahosini Monte-Karlo usuli bilan kompyuterda hisoblab topa olamiz. Biz tasodifiy tajribalar sonini ortib borish natijasida aniq qiymatga yaqin qilib yaxlitlab olishimiz mumkin. Biz opsiyonning narxini hisoblab topish uchun yigirma karrali integralni Monte-Karlo usulidan foydalanib baholaymiz.

Misol:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{20}) = e^{x_1, x_2, \dots, x_{20}}$$

$$\int \int_{[0,1]^{20}} \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_{20}) dx_1 dx_2 \dots dx_{20} \approx \int \int_{[0,1]^{20}} \dots \int e^{x_1 x_2 \dots x_{20}} dx_1 dx_2 \dots dx_{20} = 1$$

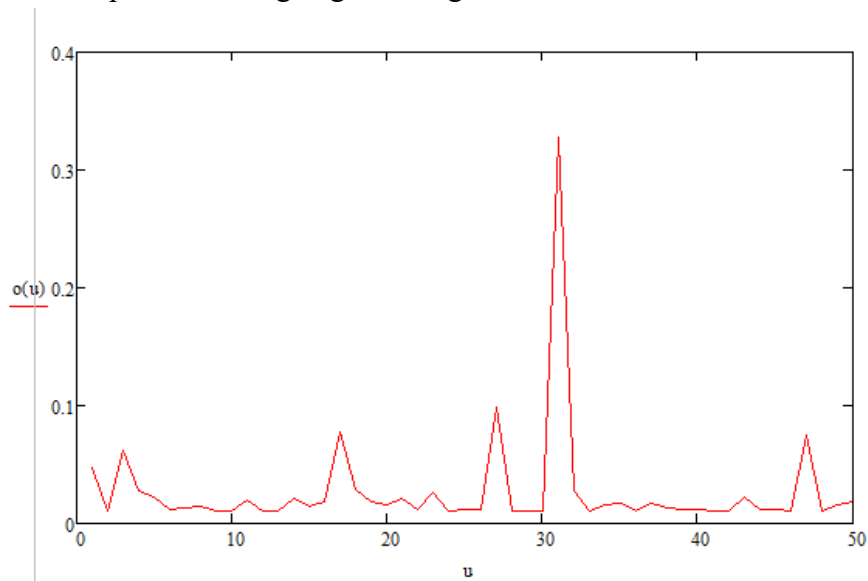
Bu funksiyani Python3 dasturi va Mathcad matematik paketda hisoblab olingan natijalarni biz keltirishimiz va ular orasidagi tafovutni taqqoslashimiz mumkin. Quyidagi formula baholayotgan integrlni taqribiy (Monte-Karlo) bahosini ifodalaydi.

$$\tilde{S} \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_{i1} x_{i2} \dots x_{i20})$$

Xatolik dispersiya ko'rinishida bo'ladi va quyidagicha topiladi.

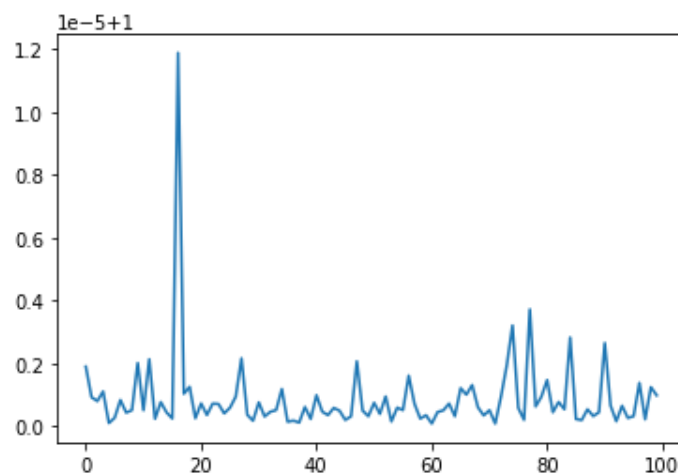
$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Quyida Mathcad paketida olingan grafikning ko'rinishi keltirildi.



Quyidagi rasmlarda Python3 paketida olingan grafikning ko'rinishi keltirildi.

N=100
Mx= 1.0000008809330068



disperce= 1.6842451497242823e-12
xatolik= 1.2977852801721192e-08

Xulosa qilib aytganda, biz 20 karrali integralli aniq yechimini analitik ko'rinishda topa olmaymiz, lekin aniq yechim - I bilan biz topgan takribiy yechimni - A farqi ma'lum bir sondan oshmasligi kursatib berishimiz mumkin

$$|I - A| \leq \sqrt{D/N}.$$

N – kattalashgan sari $\sqrt{D/N}$ qiymati kamajib boradi, ya'ni aniqligi oshib boradi.

Opsionning narxini baholashda biz Mathcad matematik paketidan va Python3 dasturidan foydalandik. Yuqorida keltirib o'tilgan natijalardan ko'rinib turibdiki Mathcad matematik paketga qaraganda Python3 dasturi orqali olingan natija yuqori aniqlikka ega yani python3 opsionning narxni baholashda aniqlik darajasi yuqori. Monte-Karlo usulidan hisoblashda Python3 dasturidan foydalanishni tavsiya etamiz.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. П.Н. Брусков, Т.В. Филатова. Финансовая математика. Москва ИИФРА-М, 2021 г.
2. Evaluation the Price of Multi-Asset Rainbow Options Using Monte Carlo Method A. Rasulov, R. Rakhmatov, A. Nafasov. 2016. DOI: 10.4236/jamp.2016.41021

BUBNOV-GALERKIN USULI

Xaydarova Sevara

Farg'ona davlat universiteti

Rits usulining asosiy kamchiligi shundaki, u faqat simmetrik musbat aniqlangan operatorli tenglamalar uchun qo'llaniladi. Bubnov-Galerkin usuli proyeksiyalash usulining yana bir algoritmi bo'lib, bu kamchilikdan holi (ba'zan uni Galerkin usuli deb ham atashadi). Uni tavsiflashdan oldin biz quyidagi izohlarni keltiramiz. $\{\varphi_i\}$ bazis funksiyalari N ga bog'liq bo'lmagan holati va bu bog'liqlik o'rinli bo'lishini farqlash kerak. Birinchi holda, u_i chiziqli qobiqdan iborat H_N , $N=1,2,\dots$ qism fazosi uchun $H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset \dots$ joylashish o'rinli. Ikkinchisida, qoida ko'ra, $N_1 \neq N_2$ da $\varphi_i^{(N_1)} \neq \varphi_i^{(N_2)}$ bo'lishidan bu joylashish bo'lmasligi mumkin.

1. Asosiy qismi o'z-o'ziga qo'shma bo'lgan operator holi

Aytaylik, asosiy sxemamizda quyidagilar bajarilsin: $K=I$, $\varphi_i = \psi_i$

$L=A+B$ - chiziqli operator bo'lib, nosimmetrik, chegaralanmagan va musbat aniqlanmagan. Bunday holda, tenglama quyidagi shaklga ega bo'ladi:

$$Lu = Au + Bu = f, f \in H. \quad (1)$$

A (L operatorning asosiy qismi) o'z-o'ziga qo'shma musbat aniqlangan operator bo'lgan holatni ko'rib chiqamiz. H_A energiya fazosiga $[u,v]$ skalyar ko'paytma va $[u]=[u,u]^{1/2}$ norma bilan A operatorini kiritaylik. (1) ni H da ixtiyoriy $v \in D(A)$ funktsiyaga skalyar ravishda ko'paytiramiz. U holda tenglamaning yechimini qanoatlantiradigan tengliklarni hosil qilamiz:

$$(Au, v) + (Bu, v) = (f, v), \quad (2)$$

$$[u, v] + (Bu, v) = (f, v). \quad (3)$$

(3) tenglik umumiy masalaning ifodalashga olib keladi.

Ta'rif. (1) tenglamaning umumiy yechimi deb, istalgan $v \in D(A)$ uchun (3) munosabatni qanoatlantiradigan $u \in H_A$ funktsiyaga aytiladi.

Faraz qilaylik, bunday umumiy yechim mavjud. Agar $u \in D(A)$ o'rinli bo'lsa, u holda $[u, v] = (Au, v)$ munosabatga ko'ra $(Au + Bu - f, v) = 0$ tenglikni olamiz.

Farazga ko'ra H da $D(A)$ zich bo'lganligi sababli, H_A ham H da zich bo'ladi. Demak, oxirgi munosabatdan u ham (1) ni qanoatlantiradi degan xulosaga kelamiz.

Bu yerda ko'rib chiqilgan muammoni hal qilish uchun Bubnov-Galerkin usulini shakllantiramiz [1]

1. $\{\varphi_i\}$ bazis funksiyalar H_A da tanlangan, bu yerda φ_i ni $D(A)$ ga emas, H_A ga tegishli bo'lishi yetarli.

2. Taqribiy yechim u_N quyidagi ko'rinishda izlanadi:

$$u_N = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i \quad (4)$$

3. a_i koeffitsientlar quyidagi tenglamalar sistemasidan aniqlanadi:

$$[u_N, \varphi_i] + (Bu_N, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (5)$$

yoki matrisali ko'rinishda

$$La = f, \quad (6)$$

bu yerda

$$L = (L_{ij}), L_{ij} = [\varphi_i, \varphi_j] + (B\varphi_i, \varphi_j), \quad a = (a_1, \dots, a_N)^T, \quad f = (f_1, \dots, f_N)^T, \quad f_i = (f, \varphi_i).$$

(6) dan a_i aniqlagandan so'ng (4) formuladan foydalanib, taqribiy yechim quramiz.

1-teorema. Aytaylik (1) yagona umumlashgan yechimga ega va $T = A^{-1}B$ operator H_A da to'liq uzluksiz bo'lsin. Shuningdek, $\{\varphi_i\}$ ning chiziqli qobiqlari bo'lgan H_N qism fazolar ketma-ketligi H_A yetarlicha zich deb faraz qilaylik. U holda N ning yetarlicha katta qiymatida Bubnov-Galerkin usuli yagona u_N yechimni beradi. u_N ketma-ketlik H_A normada u umumiy yechimga yaqinlashadi.

Isbot. Aytaylik (3) quyidagi ko'rinishga ega bo'lsin:

$$[u, v] + (AA^{-1}Bu, v) = (f, v),$$

$$[u, v] + (A^{-1}Bu, v) = (f, v).$$

A operatorning musbat aniqlanganligi tufayli $[u]^2 \geq \gamma^2 \|u\|^2, u \in H_A, \gamma > 0$ o'rinli bo'ladi; demak, har qanday $v \in H_A$ uchun

$$|(f, v)| \leq \|f\| \|v\| \leq \frac{\|f\|}{\gamma} [v] = c[v], c = \frac{\|f\|}{\gamma}.$$

Binobarin, bunday $f' \in H_A$ yagona elementning mavjudligi chiziqli chegaralangan funksionalni Gilbert fazosida tasvirlash haqidagi Rits teoremasidan $(f, v) = [f', v]$ kelib chiqadi ($f' = A^{-1}f$ ekanligini ko'rish oson). Shuning uchun

$$[u, v] + [Tu, v] = [f', v], \quad (7)$$

bu yerda $T = A^{-1}B$, H_A da ko'rib chiqilayotgan masalaning umumiy yechimi T uzluksiz operatorga ega bo'lgan $u + uT = f'$ tenglamaning yechimidir. Shuningdek (5) tenglikni

$$[u_N, \varphi_i] + [Tu_N, \varphi_i] = [f', \varphi_i], i = 1, \dots, N. \quad (8)$$

ko'rinishda ifodalanish mumkin.

Agar H_A metrikada $\{\varphi_i\}$ ni normallashtirish bilan $[\varphi_i] = 1$ ortogonallashtirish orqali olingan sistemani $\{\varphi_i\}$ bilan belgilasak, u holda uni $u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i, c_i = [u, \varphi_i]$, ko'rinishida ifodalash mumkin, bundan tashqari qatorlar H_A da yaqinlashadi va c_i koeffitsientlar tenglamalarni qanoatlantiradi

$$0 = [u + Tu, \varphi_i] - [f', \varphi_i] = c_i + \sum_{j=1}^{\infty} c_j [T\varphi_j, \varphi_i] - [f', \varphi_i], \quad i = 1, 2, \dots$$

bu sistema

$$c_i + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{ij} c_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (9)$$

bu yerda

$$\gamma_{ij} = [T\varphi_j, \varphi_i], b_i = [f', \varphi_i] = (f, \varphi_i)$$

(9) bilan bir vaqtda kesilgan sistemani ko'rib chiqamiz

$$c_i^{(N)} + \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} c_j^{(N)} = b_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (10)$$

(1) masalaning yechimi H_A da T uzluksiz va $c^{(N)} = (c_1^{(N)}, \dots, c_N^{(N)})^T$ yagona yechimga ega, $c^{(N)} = (c_1^{(N)}, \dots, c_N^{(N)}, 0, \dots, 0)^T$ vector esa $\|c\|_{L_2} = (\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2)^{1/2}$ metrikasidagi (9) sistemaning yechimiga yaqinlashadi. Bu o'z navbatida, $c^{(N)} = \sum_{i=1}^N c_i^{(N)} \varphi_i$ funksiyasi $[\cdot]$ metrikasidagi masala yechimiga yaqinlashishini bildiradi. $u^{(N)} = u_N$ ekanligini ko'rsataylik. Buning uchun ortogonallashtirish jarayonidan $\{\varphi_i\}$ ni quyidagicha ifodalaymiz:

$$\varphi_j = \sum_{i=1}^j \beta_{ji} \varphi_i, \beta_{ji} \neq 0, j = 1, \dots, N,$$

bu yerda β_{ji} koeffitsientlar pastki uchburchak $B = (\beta_{ji})$ matritsani hosil qiladi, bunda $\beta_{ji} = 0, i > j, i, j = 1, \dots, N$. (6) ni har ikki tomoniga B matritsani qo'llab, sistemani

$$(BLB)(B^T)^{-1}a = Bf. \quad (11)$$

ko'rinishda yozib olamiz. Munosabatlar tufayli

$$\begin{aligned} (BLB)_{ij} &= \sum_{l=1}^N \beta_{il} \sum_{k=1}^N \beta_{jk} [\varphi_l, \varphi_k] + \sum_{l=1}^N \beta_{il} \sum_{k=1}^N \beta_{jk} [T\varphi_l, \varphi_k] = \\ &= \left[\sum_{l=1}^N \beta_{il} \varphi_l, \sum_{k=1}^N \beta_{jk} \varphi_k \right] + \left[T \sum_{l=1}^N \beta_{il} \varphi_l, \sum_{k=1}^N \beta_{jk} \varphi_k \right] = \\ &= [\varphi_i, \varphi_j] + [T\varphi_i, \varphi_j] = \delta_{ij} + [T\varphi_i, \varphi_j], \\ (Bf)_i &= \sum_{j=1}^N \beta_{ij} (f, \varphi_j) = (f, \varphi_j) = b_i \end{aligned}$$

(10), (11) sistemalar bir xil (ya'ni o'ng tomonlarining matritsalar va vektorlari bir xil). Demak, (6) (10) bilan birga yagona yechimga ega, bundan tashqari, $(B^T)^{-1}a = c^{(N)}$ va $a = B^T c^{(N)}$ degan xulosaga kelamiz.

U holda

$$u_N = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N \beta_{ji} c_j \right) \varphi_i = \sum_{j=1}^N c_j \sum_{i=1}^N \beta_{ji} \varphi_i = \sum_{j=1}^N c_j \sum_{i=1}^j \beta_{ji} \varphi_i = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j = u^{(N)}$$

Bu masalaning $u^{(N)} = c_N$ aniq yechimiga $[\cdot]$ metrikada yaqinlashish teoremasining tasdiqlanishini darhol isbotlaydi.

Izohlar. 1) Agar 1-teorema shartlari bajarilsa, yanada nozik tahlil quyidagi baholashlarni ham isbotlashga imkon beradi:

$$\min_{c_i} \left[u - \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i \right] \leq [c_N - u] \leq (1 + \varepsilon_N) \min_{c_i} \left[u - \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i \right], \quad (12)$$

bu yerda $N \rightarrow \infty$ da $\varepsilon_N \rightarrow 0$.

2) Bubnov-Galerkin usulining ko'rib chiqilayotgan konfiguratsiyasida bazis funktsiyalari (shuningdek, Rits usulida) aniq bo'lsa, chegara shartlarini qanoatlantirmasdan tanlanishi mumkin.

2. $A=D^{(\alpha)}$ holi,

Ushbu

$$D^{(\alpha)}u + Tu = f, \quad u, f \in L_2[0, 2\pi] \quad (13)$$

tenglamani ko'rib chiqaylik, bu yerda $D^{(\alpha)} = \frac{D_+^{(\alpha)} D_-^{(\alpha)}}{2 \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}$. $D_{\pm}^{(\alpha)}$ -kasr tartibli Veyl

hosilalari [2], u - noma'lum, f - berilgan funksiya va T -ba'zi operator. $(D^{(\alpha)} + T)$ operator chiziqli va umuman olganda, umuman chegaralanmagan va musbat aniqlanmagan.

$D^{(\alpha)}$ operator quyidagi qoidaga asosan aniqlanadi [2]

$$D^{(\alpha)}u \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^{\alpha} u_k e^{ikx}. \quad (14)$$

Bu yerda shtrix $k=0$ chi hadni chiqarib tashlash lozimligini bildiradi.

1-lemma. $D^{(\alpha)}$ musbat aniqlangan operator.

Isbot. Agar

$$(D^{(\alpha)}u, u) > 0$$

bo'lsa, $D^{(\alpha)}$ musbat aniqlangan bo'ladi,

Chunki, e^{ikx} sistema $L_2[0, 2\pi]$ da to'la, u holda

$$(D^{(\alpha)}u, u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (D^{(\alpha)}u, e^{ikx}) (u, e^{ikx}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^{\alpha} u_k^2 > 0.$$

2-lemma. $D^{(\alpha)}$ -simmetrik operator.

Isbot. Har qanday $u, v \in L_2[0, 2\pi]$ uchun $D_+^{(\alpha)}u$ va v skalyar ko'paytmani ko'rib chiqaylik

$$\begin{aligned} (D_+^{(\alpha)}u, v) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x-t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^\alpha e^{ikt} dt v(x) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{x-2\pi} u(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^\alpha e^{ik(x-t)} dt v(x) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^\alpha e^{ikx} dx u(t) dt = (u, D_-^{(\alpha)}v). \end{aligned}$$

Xuddi shunday $D_-^{(\alpha)}$ uchun

$$(D_-^{(\alpha)}u, v) = (u, D_+^{(\alpha)}v)$$

Demak, $D^{(\alpha)}$ -simmetrik operator bo'ladi, chunki u $D_+^{(\alpha)}$ va $D_-^{(\alpha)}$ ning yig'indisidir. Buni hisobga olib, skalyar ko'paytma va normani kiritamiz

$$[u, v] = (D^{(\alpha)}u, v), \quad [u] = [u, u]^{1/2}.$$

Kiritilgan $D(D^{(\alpha)})$ normani to'ldirish orqali, H_D energiya fazosini olamiz. Dastlabki tenglamani ixtiyoriy $v \in D(D^{(\alpha)})$ funktsiyaga ko'paytirsak, olingan tenglik dastlabki tenglamani yechimini qanoatlantiradi:

$$[u, v] + (Tu, v) = (f, v). \quad (15)$$

(15) tenglik umumlashtirilgan masalaning qo'yilishiga olib keladi.

(13) umumlashtirilgan tenglamaning yechimini qanoatlantiruvchi funksiya deyiladi.

Ixtiyoriy $v \in H_D$ uchun (15) munosabatni qanoatlantiruvchi $u \in H_D$ funktsiyani (13) tenglamaning umumlashgan yechimi deb ataymiz.

3. $A = D^{(a)}$ hol uchun Bubnov-Galerkin usuli

$A = D^{(a)}$ masalani yechish uchun Bubnov-Galerkin usulini shakllantiramiz.

1) H_D da $\{\varphi_i\}$ bazis funksiyalari tanlanadi.

2) Quyidagi ko'rinishda taqribiy yechim izlanadi:

$$u_N = \sum_{j=1}^N a_j \varphi_j.$$

3) a_j koeffitsientlar quyidagi tenglamalar sistemasidan aniqlanadi

$$[u_N, \varphi_j] + (Tu_N, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \quad j = 1, \dots, N. \quad (16)$$

2- teorema. 1) (13) tenglama berilgan o'ng tomon uchun yagona yechimga ega bo'lsin.

2) $L(u, v) = [u, v] + (Tu, v)$ shakli H_D da aniqlangan va chegaralangan, ya'ni

$$L(u, u) \geq \gamma_0^2 [u]^2, \quad L(u, v) \leq \gamma_1^2 [u][v], \quad \gamma_0, \gamma_1 = \text{const}.$$

3) $\varphi_j, j=1, \dots, N$ funktsiyaning chiziqli oraliqlari H_N quyi fazolar ketma-ketligi H_D -da zich chegaralangan.

U holda, har qanday chekli N sistema uchun (16) yagona yechimi mavjud, u_N taqribiy yechim $N \rightarrow \infty$ da $[\cdot]$ metrikaga va xato bahosi $\|u - u_N\| \leq c\varepsilon(u, N)$ ga nisbatan yaqinlashadi, bu yerda $\varepsilon(u, N)$ -berilgan funksiya (yaqinlashish xatosini baholash) quyidagi tengsizlikni qanoatlantiradi:

$$\min_{c_j} \left\| D^{(a)} \left(u - \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j \right) \right\|.$$

FOYDLANIGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Березин И.С. Методы вычислений. Т.2: учебное пособие для высших уч.зав./ И.С. Березин, Н.П. Жидков.-Изд.2-е, перераб.-Москва:Физматлит,1962.-640с.
2. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. // Минск: Наука и техника, 1987.

ГРАФИК AXBOROTLAR BILAN ISHLASH TEXNOLOGIYASI

Yuldashev Xushnudbek

ADU

Grafik muharrirlar - tasvirlarni tahrirlashni ta'minlaydigan amaliy dastur. Grafik muharrir odatda vektorli tasvirlar dasturlari, ishchan grafika, rastrli tasvirlar, rastrli tasvirlarni vektorli shaklga aylantirish, uch o'lchamli tasvirlar va fayllarni boshqarish dasturlarini o'z ichiga oladi. Grafik tahrirlash jarayoni tasvirning bo'laklari ustidan (ixtiyoriy yo'nalishda o'lchamlarni o'zgartirish, ekran bo'ylab surish va burish, ravshanligini, yaqqolligini, rangini va boshqalarni o'zgartirish) kabi amallar bajarishdan iborat.



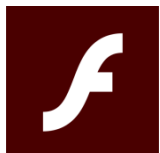
Microsoft Paint. Minimum imkoniyatga ega sodda grafik muharrir bo'lib, Windows operatsion tizimi bilan o'rnatiladi, jiddiy masalalarni yechishda qo'llanilmasa ham har holda eslab o'tishimizga loyiqdir. Unda web-sahifa uchun rasm tayyorlanadi va GIF ga o'tkazilganda ajoyib rasm hosil bo'ladi.

Microsoft Photo Editor - bu muharrir asosan fotografiyalar bilan ishlash uchun mo'ljallangan. Ko'pincha Microsoft Office paketi bilan joylashtiriladi, shuning uchun ham keng tarqalgan.

Microsoft Gif Animator - animatsiya grafika muharriri va web-sahifa yaratish uchun mo'ljallangan dastur Microsoft Front Page bilan birgalikda qo'yiladi. Bu dasturlarning o'ziga xos jihati, agar oldin web-saytning sahifalarida soatlab o'tirilgan bo'lsa, hozir esa ular sanoqli daqiqalarda qilinadi.



Adobe Photoshop - eng mashhur va rastr grafikada eng zamonaviy professional muharriridir. Uning sohasi - bu skaner qilingan fotosuratlarining tayyor tasvirlarini qayta ishlashdir. So'nggi versiyalarida Web-grafika bilan ishlovchi komponentlar qo'shilgan. U Adobe firmasining boshqa dasturlari bilan birgalikda eng talabchan dizaynerlik dasturlarining integrallasngan paketini tashkil qila oladi.



Macromedia, Adobe Flash - vektor animatsion grafik muharriri. Adobe Flash (ilgari - Macromedia Flash yoki shunchaki Flash) - Adobe Systems kompaniyasining multimedia platformasi, web -ilovalar yoki multimedia

taqdimotlar yaratadi. Reklama bannerlari, animatsiyalar, o'yinlar yaratish, shuningdek, video va audio yozuvlarning web-sahifalarida ijro etish uchun ishlatiladi.

CorelDRAW - professional grafik muharrirlari ichida e'tirof etilgan yetakchidir. Agar siz vektor muharrirlari bilan jiddiy shug'ullanmoqchi bo'lsangiz CorelDRAWni tanlashni tavsiya etamiz. Muharrir rastr va vektor grafikani yaratish va qayta ishlash, Web-dizayn, verstka, rangni taqsimlash, yangi shriftlarni ishlab chiqish, shtrix-kodlarni kiritish masalalarini a'lo darajada bajaradi. Poligrafiya uchun eng yaxshi dastur hisoblanadi. Qo'shimcha dasturlar, u bilan birga tarqatiladigan, animatsion vektor grafikasi bilan ishlashni ta'minlaydi. Bu muharrir ko'p sahifali hujjatlarni qo'llab quvvatlaydi. Ammo, yuqori quvvatlilik natijasi kompyuterning resurslariga talabchanlik hisoblanadi.

Rastrli (nuqtali) grafikada tasvirlar nuqtalardan hosil qilinadi. Shuning uchun uning asosiy tushunchasi - «ruxsat» (bir birlik uzunlikka to'g'ri keladigan nuqtalar soni) bo'lib, uning quyidagi shakllari mavjud:

- Originalga ruxsat;
- Ektranda tasvirga ruxsat;
- Qog'ozga chiqarishga ruxsat.

Original (asli)ga ruxsat 1 duyumdagi nuqtalar bilan o'lchanib, kompyuterga kiritilayotgan tasvir sifati fayl kattaligiga, kodlashtirish usuli (tayanch shaklni hosil qilish usuli) va boshqa parametrlarga bog'liq bo'ladi. Tasvir sifatiga qo'yilgan talab qancha katta bo'lsa original (asli)ga ruxsat shuncha katta bo'ladi.

Ektranda tasvirga ruxsat deganda biz monitor (ekran)da hosil bo'ladigan tasvirning parametrlarini tushunamiz. Tasvir nusxasini ektranda hosil qiluvchi oddiy nuqta *piksel* deyiladi.

Piksel kattaligi ektranda tasvirga joizlik bilan original (asli)ga joizlik orasidagi masshtabga bog'liq. Diagonali 20-21duyumli ekranlarning rastrlari 640x480, 800x600, 1024x768, 1280x1024, 1600x1200, 1600x1280, 1920x1200, 1920x1600 standart nuqtali bo'lgandagina tasvir chiqarishga ruxsat berilgan [1].

Ektrandan nusxa olish uchun (ekran tasvirini printerda oddiy qog'ozga chiqarish uchun) 72 dpi, rangli yoki lazerli printerda tasvir hosil qilish uchun 150-200 dpi, foto eksponentlovchi qurilma uchun 200-300 dpi joizlik kifoya.

Vektorli grafika matematik tenglamalar yordamida jismning chiziqli konturlarini qurish demakdir. Bu konturlarni oddiy chiziqlar yordamida shakllantirishga asoslangan tasvirda (konturlarni elementar chiziqlar yordamida shakllantirganda) ularning sinishlari va uzulishlari paydo bo'lmasligini boshqaruvchi chiziqlar maxsus joylashtiriladi va shu usul bilan chiziqlarning uzluksizligi ta'minlanadi.

Aniq formula asosida jism konturlarini chiziqlar yordamida qurish bo'laklashni (diskretizatsiya) ifodalaydi. Bundan quyidagi asosiy masala, yani chiziqli konturlarning barcha jabhalarini qamrab oluvchi formula qurish masalasi kelib chiqadi. Bolaklarga bo'lish chiziqli amal bo'lgani uchun umumiy shakl juda ko'p sondagi kichik fragmentlarga – *splaynlarga* ajraladi. Bunda har bir bo'lakni ifodalash uchun eng oddiy formula (funksiya)ni ajratib olish lozim. Vektorli grafikada shu maqsadlar uchun *Bezье* va *NURBS* chiziqlari ishlatiladi. Bu chiziqlarning shakli ko'plab tekshiriluvchi nuqtalarning joylashishi va tayanch nuqtalarini interaktiv ko'chirish bilan aniqlanadi.

Rastrli grafikada tasvirning asosiy tashkil etuvchisi nuqta bo'lsa, vektorli grafikada – chiziq hisoblanadi. Chiziq matematik nuqtayi nazaridan bir butun obyekt sifatida qaralgani uchun uni ifodalashda ishlatiladigan qiymatlar hajmi rastrli grafikadagiga qaraganda ancha kichik.

Chiziq - vektorli grafikaning elementar obyektidir. Har qanday obyekt kabi chiziq quyidagi xossalarga ega: shaklga (to'g'ri chiziq, egri), qalinlik, rang, chizilish (uzluksiz, punktir). Yopiq chiziqlar ranglanish xususiyatiga ham ega bo'ladi, ya'ni ular bilan chegaralangan soha boshqa obyektlar yoki biror rang bilan to'ldirilishi mumkin. Oddiy yopiq bo'lmagan chiziq *tugunlar* deb ataluvchi ikkita nuqta bilan chegaralanadi. Tugunlarning parametrlari chiziqning shakli va boshqa obyektlar bilan o'zaro munosabatiga ta'sir etadi. Vektorli grafikaning boshqa barcha obyektlari chiziqlar yordamida ifodalaniladi. Masalan, kub o'zaro bir-biriga bog'langan 6 ta kvadratdan tashkil topgan, ularning har biri esa o'z navbatiga 4 ta bir biriga bog'langan chiziqdan iborat. Demak kubni 12 ta bir-biri bilan bog'liq bo'lgan chiziqlardan tashkil topgan deb tasavvur qilish mumkin [2].

Fraktal grafika asosan matematik amallar asosida grafik kompozitsiya tuzishda qo'llaniladi. Bugungi kunda videoroliklar, kliplar, video o'yinlar yaratishda fraktal grafikasining o'rni beqiyosdir. Fantastik janrdagi kinofilmlarda yoki kompyuter o'yinlarida atrof muhitning murakkab kompozitsiyalarni (o'rmonlar, tog'lar, shahar qiyofasi va h.) yaratishda fraktal grafikasidan keng foydalaniladi.

Fraktal grafikaning qo'llanish tamoyili proyektiv geometriyaning qonuniyat-lariga asoslangan bo'lib, oddiy geometrik elementni o'ziga o'xshash akslan-tirishdan iborat. Aytaylik qish sovug'ida deraza oynasidagi naqshlar yoki kristal panjaralarning hosil bo'lishi insonni ajablantiradi. Bunday hodisa va jarayonlarni kompyuterda modellashtirish, ularning formula asosida qonuniyatlarini topish bir qarashda matematik yechimga ega emasday ko'rinadi, lekin yechimi oddiydan murakkablikka tamoyili asosida yaratiladi. Yuqorida keltirilgan misollarda agar diqqat bilan e'tibor qaratsangiz oddiy bir element, aytaylik bir dona qor parchasi xuddi shunga o'xshash (katta yoki kichik, holati, rangi o'zgargan) boshqa bir element bilan takrorlanadi. Bunday o'xshash to'plamlar fraktal to'plamlar deb nomlanadi.

Fraktallar bizga oddiy geometriyadan ma'lum bo'lgan figuralarga o'xshamaydi va ma'lum bir algoritmlar asosida quriladi. Fraktal grafikada asosiy obyekt bu geometrik figura emas, balki matematik formuladir. Formuladagi koeffitsientlarni o'zgartirish asosida mutlaqo boshqa bir kompozitsiyalarni yaratish mumkin bo'ladi. Umuman oddiy qilib aytganda fraktallar – bu dastlabki figuraga nisbatan ko'p marta qo'llanilgan ma'lum bir almashtirish va o'zgartirishlar demakdir. Dastlabki fraktal geometriyasi g'oyalari XIX asrlarda vujudga kelgan.

Kantor oddiy rekursiv (qaytariladigan) funksiya orqali chiziqni chiziqlar to'plamiga olib keldi, keyinchalik esa Benua Mandelbort fraktal geometriyasiga asos soldi va fraktal iborasini kiritdi.

Fraktal - lot. *fractal* bo'lingan (qismlarga ajratilgan) ma'nosini bildiradi. Fraktalning yana bir izoh tushunchalaridan biri bu – qismlardan iborat va har bir qismi yana bo'linadigan geometrik figuradir. Har bir bo'linadigan figura yaxlit figuraning kichraygan yoki o'xshash nusxasidir. Fraktallarning asosiy xususiyati bu o'ziga o'xshashlikdir. Oddiy figurani doimo kichraytirish va unga o'xshatish asosida fraktallar tuzish mumkin. Fraktal grafikasi fayllari asosan *.fif kengaytmasiga ega bo'lib, kompyuter xotirasida juda kam joy egallaydi. Ya'ni

ular xotirada faqat formula yozuvlari ko‘rinishida saqlanadi. Fraktal grafikasining keng tarqalgan formatlari: *.frp; *.frs; *.fri; *.fro; *.fr3, *.fr4 va boshqalar [3].

Matematik masalarni yechishda fraktal grafikaga oid dasturlardan foydalanilib grafiklarni chizish mumkin.

FOYDALANILADIGAN ADABIYOTLAR:

1. X.D.Yuldashev. Kompyuter grafikasi. O‘quv qo‘llanma. T: “Tafakkur”, 2020. 310 b.
2. Sh.I. Razzoqov, Sh.S. Yo‘ldoshev, U.M. Ibragimov. Kompyuter grafikasi. O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi, O‘rta maxsus, kasb-hunar ta’limi markazi. - T.: Noshir, 2013. – 272 b
3. F.F.Meliyev, U.J.Asqarov, J.M.Maxmudov. Kompyuter grafikasi. CorelDRAW dasturi. O‘zbekiston Respublikasi Mudofaa Vazirligi Samarqand oliy harbiy avtomobil qo‘mondonlik muhandislik bilim yurti. Samarqand. 2017–104 b.
4. Sh.A.Nazirov, F.M.Nuraliyev, B.Z.To‘rayev. Kompyuter grafikasi va dizayn. O‘quv qollanma. -T.: «Fan va texnologiya», 2015 - 256 b.
5. Ахборот-Коммуникация Технологиялари изохли луғати. Расмлар билан. Қайта тўлдирилган иккинчи нашр. Тошкент - 2010
6. Sh.A. Nazirov, F.M. Nuraliev, B.Sh. Aytmuratov. Rastr va vektor grafika. O‘zR oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi, O‘rta maxsus, kasb-hunar ta’limi markazi. - T.: G‘afur G‘ulom nashriyoti ijodiy uyi, 2007 – 192 b.

ЖАДВАЛ КЎРИНИШДА БЕРИЛГАН ФУНКЦИЯЛАРНИ ТИКЛАШ МАСАЛАЛАРИДА КУБИК В-СПЛАЙН МОДЕЛИДАН ФОЙДАЛАНИШ

Абдуғаниев Мухриддин

Андижон давлат университети

Биламизки, жаҳонда жадвал кўринишда берилган функцияларни тиклаш масаласида қулай бўлган бошқа бир функция билан алмаштиришга бағишланган бир қатор илмий-тадқиқот ишлари олиб борилган. Бу борада кўп фойдаланиладиган интерполяция полином усуллар мавжуд. Қуйида бўлак-полиномлардан аниқлиги юқори бўлган кубик базис В-сплайн функциясини қуришни кўриб чиқамиз.

Қаралаётган функция етарлича силлиқ бўлмаса, у ҳолда бу функцияни сплайн функциялар билан яқинлаштириш мақсадга мувофиқ бўлади. Яқинлаштириш аниқлиги юқори бўлган сплайн функцияни учунчи даражали базис В-сплайнидан фойдаланиш яхши самара беради [1,2,3]. Қуйида n – даражали ихтиёрий $S_n(x)$ интерполяцияланадиган $f(x)$ функция қуйидаги кўринишга эга бўлган В-сплайннинг $[a:b]$ оралиқдаги формуласи келтирилган (1):

$$f(x) \cong S_n(x) = \sum_{i=-1}^{n-1} b_i B_{i,n}(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (1)$$

Бу ерда n – сплайн даражаси, b_i – коэффициентлар, $B_{i,n}(x)$ асосий функцияни ифодалайди. Юқоридаги формула асосида $n=3$ ҳолатида кубик базис В-сплайн функциясини қуриб чиқамиз (2).

$$S_3(x) = b_{-1}B_{-1}(x) + b_0B_0(x) + b_1B_1(x) + b_2B_2(x), \quad (2),$$

(2) формуладаги $B_{i,n}(x)$ асосий функциянинг қийматларини қуйидагича ҳисоблаймиз (3), (4):

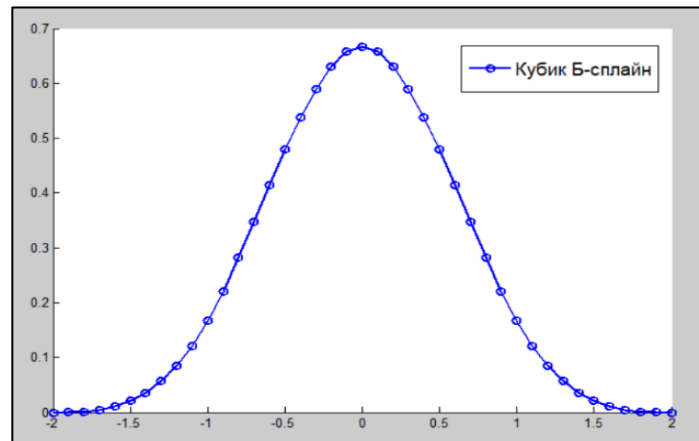
$$B_{i,0}(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x_i \leq x < x_{i+1}, \\ 0, & \text{бошқа ҳолатда.} \end{cases} \quad (3)$$

$$B_{i,n}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+n} - x_i} B_{i,n-1}(x) + \frac{x_{i+n} - x}{x_{i+n} - x_{i+1}} B_{i+1,n-1}(x), \quad (4)$$

$B_{i,3}(x)$ асосий функцияни $x \in [0:2]$ ораликда ҳисоблаймиз. Бир қанча ҳисоблашлар ва соддалаштиришлардан сўнг кубик базис В-сплайннинг асосий функцияси қуйидаги кўринишга эга бўлади (5).

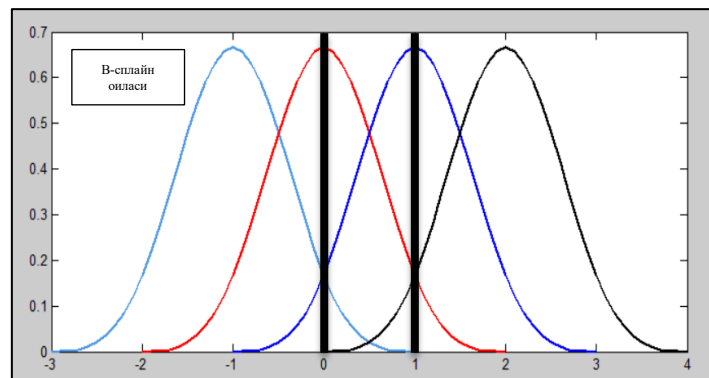
$$B_3(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 2, \\ \frac{(2-x)^3}{6}, & 1 \leq x < 2, \\ \frac{1+3(1-x)+3(1-x)^2-3x^3}{6}, & 0 \leq x < 1, \\ B(-x), & 0 < x \end{cases} \quad (5)$$

Кубик базис В-сплайннинг асосий функциясини $[-2:2]$ оралиғидаги графиги Матлаб ишчи муҳитида қуйидаги кўринишда бўлади (1-расм).



1-расм. Кубик базис В-сплайн.

Қуйида $h=1$ қадам билан ҳаракатланувчи кубик базис В-сплайнлар оиласи келтирилган. В-сплайнлар оиласини барча қисмлари $[-3:4]$ ораликда ажратиб кўрсатилган. $B_{-1}(x)$ – оч кўк рангда, $B_0(x)$ – қизил, $B_1(x)$ – тўқ кўк, $B_2(x)$ – қора рангда чизилган. (2-расм).



2-расм. Кубик базис В-сплайнлар оиласи.

$S_3(x)$ ни ҳисоблаш жараёнида В-сплайннинг $[0:1]$ ораликдаги барча қийматларидан фойдаланиб, сигналларни юқори аниқликда тиклашга эришилади.

(1) формуладаги b_i коэффицентларни ҳисоблаш жараёнида берилган қийматларнинг қанчадан олинисига кўра турлича ҳисобланади [5,6]. Биз берилган

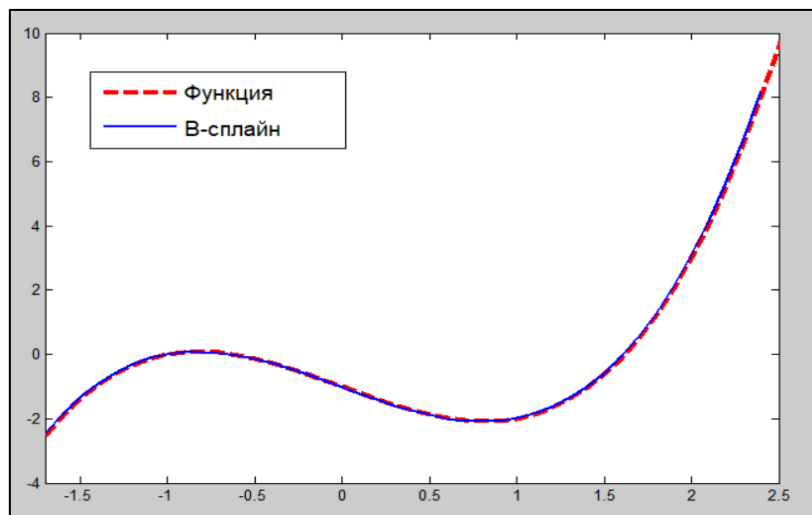
кийматлар ёрдамида b_i коэффициентларни уч нуктали формула ёрдамида аниқлаймиз (6), (7), (8).

3 – нуктали b_i коэффициентлар:

$$b_i = \left(\frac{1}{6}\right)(-f_{i-1} + 8f_i - f_{i+1}), \quad (6),$$

бу ерда, f_i – дастлабки берилган нукталар қиймати.

b_i коэффициентлар ҳар бир ораликлар учун алоҳидадан ҳисобланади. Мисол сифатида $f(x) = x^3 - 2x - 1$ функцияни (5) ва (6) лардан фойдаланиб аппроксимация қиламиз. Аппроксимациялаш жараёни графиги 3-расмда келтирилган.



3-расм. В-сплайн ёрдамида $f(x) = x^3 - 2x - 1$ функцияни аппроксимациялаш натижаси.

Расмдан кўришимиз мумкинки, В-сплайн $f(x) = x^3 - 2x - 1$ функция графигига яхши яқинлашганини кўришимиз мумкин.

Расмдан кўришимиз мумкинки, В-сплайн формуласи $f(x) = x^3 - 2x - 1$ функция графигига яхши яқинлашганини кўришимиз мумкин. 1-жадвалда аппроксимациялаш натижалари батафсил келтирилган.

1-жадвал.

Кубик базис В-сплайн формуласи ёрдамида $f(x) = x^3 - 2x - 1$ ни аппроксимациялаш натижалари.

x	$f(x)$	$S(x)$	$ S(x) - f(x) $	x	$f(x)$	$S(x)$	$ S(x) - f(x) $
-1	-1.349	-1.289	0.06	0	0.981	0.977	0.004
-0.9	-0.792	-0.741	0.051	0.1	0.928	0.921	0.007
-0.8	-0.323	-0.281	0.042	0.2	0.847	0.838	0.009
-0.7	0.064	0.098	0.034	0.3	0.744	0.733	0.011
-0.6	0.375	0.402	0.027	0.4	0.625	0.612	0.013
-0.5	0.616	0.636	0.02	0.5	0.496	0.483	0.013
-0.4	0.793	0.807	0.014	0.6	0.363	0.35	0.013
-0.3	0.912	0.921	0.009	0.7	0.232	0.219	0.013

-0.2	0.979	0.983	0.004	0.8	0.109	0.097	0.012
-0.1	1	1	0	0.9	0	-0.01	0.01
Абсолют хатолик							0.06

1-жадвалда кўриниб турибдики, абсолют хатолик 0.06 га тенг бўлганлигидан кўришимиз мумкин. Демак, кубик базис В-сплайн моделидан фойдаланиш, жадвал кўринишда берилган функцияларни тиклашда юқори даражада аниқликка эришиш мумкинлигини кўрсатади.

АДАБИЁТЛАР:

1. Исроилов М.И., Ҳисоблаш методлари. №1, 1988. Тошкент. – Б. 45-52.
2. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошников В.Л. Методы сплайн-функций. Москва: Наука, 1980. - 352 с.
3. Касимов С.С., Зайнидинов Х.Н. Базисные сплайны в задачах восстановления одномерных и многомерных зависимостей // Известия международной академии наук высшей школы. № 1, 2002, Москва. - С. 162- 167.

ИЗОТРОП ЖИСМЛАР УЧУН ТЕРМОЭЛАСИК БОҒЛИҚ МАСАЛАНИ ЧЕКЛИ АЙИРМАЛИ УСУЛИНИНГ МАТЕМАТИК МОДЕЛИ

Абдураимов Достонбек

ГулДУ

Сафоева Дилноза

Гулистон давлат университети

Мақолада изотроп жисмлар учун термоэластик боғлиқ масалаларни математик моделларини ўрганиш қаралган. Ўрганилган модел орқали уни сонли ечиш алгоритмларини ўрганиш, уларни масалани ечишга тадбиқ қилиш ва ўрганилган алгоритмлар асосида дастурий таъминот яратишга замин яратилган. Бизнинг асосий мақсадимиз масалани сонли ечиш математик моделини куришдан иборат. Бунинг учун биз юқорида ҳосил қилинган хусусий ҳосилаларни дифференциал тенгламаларни айирмалар билан алмаштирамиз.

Бир ўлчовли ҳолда x ўзгарувчи бўйича соҳани қуйидагича аниқлаймиз:

$$\varepsilon_{i,j}^0 = \alpha_t \theta \delta_{i,j}, \quad e^0 = 3\alpha_t \theta \quad (1)$$

$0 \leq x \leq l_1$, $x_i = ih$ ($i=0, n$) ва (1) тенгламадаги ҳосилаларни қуйидаги айирмалар билан алмаштираемиз

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{T_{i+1} - T_i}{h} \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \approx \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4h\tau} \quad (4)$$

куйидаги айирмали тенгламага эга бўламиз:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \alpha_T (3\lambda + 2\mu) \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{h} = \rho \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\tau^2} \quad (5)$$

$$\lambda_0 \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{h^2} - c_\varepsilon \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\tau} -$$

$$-T_0 \cdot \alpha_T (3\lambda + 2\mu) \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4h\tau} = 0 \quad (6)$$

Икки ўлчовли ҳолда x ва y ўзгарувчилар бўйича тўрни куйидагича аниқлаймиз:
 $0 \leq x \leq l_1$, $0 \leq y \leq l_2$ иккита параллел тўғри чизиклар оиласини курамиз
 $x_i = ih_1$ ($i = \overline{0, n}$), $y_j = jh_2$ ($j = \overline{0, n}$) ва тенгламадаги ҳосилаларни
куйидаги айирмалар билан алмаштираем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \approx \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{h_2^2} \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \approx \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4h_1 h_2} \quad (9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{h_1} \quad (10)$$

куйидаги айирмали тенгламага эга бўламиз:

$$(\lambda + 2\mu) \left(\frac{u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}}{h_1^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{v_{i+1,j+1,k} - v_{i-1,j+1,k} - v_{i+1,j-1,k} + v_{i-1,j-1,k}}{4h_1 h_2} \right) +$$

$$\mu \left(\frac{u_{i,j+1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j-1,k}}{h_2^2} \right) - \alpha_T (3\lambda + 2\mu) \left(\frac{T_{i+1,j,k} - T_{i,j,k}}{h_1} \right) = \rho \frac{u_{i,j,k+1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k-1}}{\tau^2} \quad (11)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{v_{i,j+1,k} - 2v_{i,j,k} + v_{i,j-1,k}}{h_2^2} + (\lambda + \mu) \frac{u_{i+1,j+1,k} - u_{i-1,j+1,k} - u_{i+1,j-1,k} + u_{i-1,j-1,k}}{4h_1 h_2} +$$

$$+ \mu \frac{v_{i+1,j,k} - 2v_{i,j,k} + v_{i-1,j,k}}{h_1^2} - \alpha_T (3\lambda + 2\mu) \frac{T_{i,j+1,k} - T_{i,j,k}}{h_2} = \rho \frac{v_{i,j,k+1} - 2v_{i,j,k} + v_{i,j,k-1}}{\tau^2} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
& \lambda_0 \left(\frac{T_{i+1,j,k} - 2T_{i,j,k} + T_{i-1,j,k}}{h_1^2} + \frac{T_{i,j+1,k} - 2T_{i,j,k} + T_{i,j-1,k}}{h_2^2} \right) - c_\varepsilon \frac{T_{i,j,k+1} - T_{i,j,k}}{\tau} - \\
& - \alpha_T (3\lambda + 2\mu) T \left(\frac{u_{i+1,j,k+1} - u_{i-1,j,k+1} - u_{i+1,j,k-1} + u_{i-1,j,k-1}}{4h_1\tau} + \right. \\
& \left. + \frac{v_{i,j+1,k+1} - v_{i,j-1,k+1} - v_{i,j+1,k-1} + v_{i,j-1,k-1}}{4h_2\tau} \right) = 0
\end{aligned} \tag{13}$$

Уч ўлчовли ҳолда x , y ва z ўзгарувчилар бўйича тўрни қуйидагича аниқлаймиз: $0 \leq x \leq l_1$, $0 \leq y \leq l_2$, $0 \leq z \leq l_3$ да учта параллел тўғри чизиқлар оиласини қураимиз. $x_i = ih_1$ ($i = \overline{0, n}$), $y_j = jh_2$ ($j = \overline{0, n}$), $z_k = kh_3$ ($k = \overline{0, n}$)

Параллелопипеднинг ёқларига тегишли бўлган тугун нукталар тўрнинг чегаравий тугун нукталари деб, қолган нукталар эса ички тугун нукталар деб аталади. Бунда ҳосилаларни қуйидаги айирмалар билан алмаштирамиз.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}}{h_1^2} \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \approx \frac{v_{i,j+1,k} - 2v_{i,j,k} + v_{i,j-1,k}}{h_2^2} \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \approx \frac{w_{i,j,k+1} - 2w_{i,j,k} + w_{i,j,k-1}}{h_3^2} \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \approx \frac{u_{i+1,j+1,k} - u_{i-1,j+1,k} - u_{i+1,j-1,k} + u_{i-1,j-1,k}}{4h_1h_2} \tag{17}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{T_{i+1,j,k} - T_{i,j,k}}{h_1} \tag{18}$$

ва қуйидаги айирмали тенгламаларга эга бўламиз:

$$\begin{aligned}
& (\lambda + 2\mu) \frac{u_{i+1,j,k,l} - 2u_{i,j,k,l} + u_{i-1,j,k,l}}{h_1^2} + (\lambda + \mu) \left(\frac{v_{i+1,j+1,k,l} - v_{i-1,j+1,k,l} - v_{i+1,j-1,k,l} + v_{i-1,j-1,k,l}}{4h_1h_2} + \right. \\
& \left. + \frac{w_{i+1,j,k+1,l} - w_{i-1,j,k+1,l} - w_{i+1,j,k-1,l} + w_{i-1,j,k-1,l}}{4h_1h_3} \right) + \mu \left(\frac{u_{i,j+1,k,l} - 2u_{i,j,k,l} + u_{i,j-1,k,l}}{h_2^2} + \right. \\
& \left. + \frac{u_{i,j,k+1,l} - 2u_{i,j,k,l} + u_{i,j,k-1,l}}{h_3^2} \right) - \alpha_T (3\lambda + 2\mu) \frac{T_{i+1,j,k,l} - T_{i,j,k,l}}{h_1} = \rho \frac{u_{i,j,k,l+1} - 2u_{i,j,k,l} + u_{i,j,k,l-1}}{\tau^2}
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
& (\lambda + 2\mu) \frac{v_{i,j+1,k,l} - 2v_{i,j,k,l} + v_{i,j-1,k,l}}{h_2^2} + (\lambda + \mu) \left(\frac{u_{i+1,j+1,k,l} - u_{i-1,j+1,k,l} - u_{i+1,j-1,k,l} + u_{i-1,j-1,k,l}}{4h_1h_2} + \right. \\
& \left. + \frac{w_{i,j+1,k+1,l} - w_{i,j-1,k+1,l} - w_{i,j+1,k-1,l} + w_{i,j-1,k-1,l}}{4h_1h_2} \right) + \mu \left(\frac{v_{i+1,j,k,l} - 2v_{i,j,k,l} + v_{i-1,j,k,l}}{h_1^2} + \right. \\
& \left. + \frac{v_{i,j,k+1,l} - 2v_{i,j,k,l} + v_{i,j,k-1,l}}{h_3^2} \right) - \alpha_T (3\lambda + 2\mu) \frac{T_{i,j+1,k,l} - T_{i,j,k,l}}{h_2} = \rho \frac{v_{i,j,k,l+1} - 2v_{i,j,k,l} + v_{i,j,k,l-1}}{\tau^2}
\end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
& (\lambda + 2\mu) \frac{w_{i,j,k+1,l} - 2w_{i,j,k,l} + w_{i,j,k-1,l}}{h_3^2} + (\lambda + \mu) \left(\frac{u_{i+1,j,k+1,l} - u_{i-1,j,k+1,l} - u_{i+1,j,k-1,l} + u_{i-1,j,k-1,l}}{4h_1h_3} + \right. \\
& \left. + \frac{v_{i,j+1,k+1,l} - v_{i,j-1,k+1,l} - v_{i,j+1,k-1,l} + v_{i,j-1,k-1,l}}{4h_2h_3} \right) + \mu \left(\frac{w_{i+1,j,k,l} - 2w_{i,j,k,l} + w_{i-1,j,k,l}}{h_1^2} + \right. \\
& \left. + \frac{w_{i,j+1,k,l} - 2w_{i,j,k,l} + w_{i,j-1,k,l}}{h_2^2} \right) - \alpha_T (3\lambda + 2\mu) \frac{T_{i,j,k+1,l} - T_{i,j,k,l}}{h_3} = \rho \frac{w_{i,j,k,l+1} - 2w_{i,j,k,l} + w_{i,j,k,l-1}}{\tau^2}
\end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
& \lambda_0 \left(\frac{T_{i+1,j,k,l} - 2T_{i,j,k,l} + T_{i-1,j,k,l}}{h_1^2} + \frac{T_{i,j+1,k,l} - 2T_{i,j,k,l} + T_{i,j-1,k,l}}{h_2^2} + \right. \\
& \left. + \frac{T_{i,j,k+1,l} - 2T_{i,j,k,l} + T_{i,j,k-1,l}}{h_3^2} \right) - c_\varepsilon \frac{T_{i,j,k+1,l} - T_{i,j,k,l}}{\tau} - \alpha_T (3\lambda + 2\mu) T \cdot \\
& \cdot \left(\frac{u_{i+1,j,k,l+1} - u_{i-1,j,k,l+1} - u_{i+1,j,k,l-1} + u_{i-1,j,k,l-1}}{4h_1\tau} + \right. \\
& \left. + \frac{v_{i,j+1,k,l+1} - v_{i,j-1,k,l+1} - v_{i,j+1,k,l-1} + v_{i,j-1,k,l-1}}{4h_2\tau} + \right. \\
& \left. + \frac{w_{i,j,k+1,l+1} - w_{i,j,k-1,l+1} - w_{i,j,k+1,l-1} + w_{i,j,k-1,l-1}}{4h_3\tau} \right) = 0
\end{aligned} \quad (22)$$

Чекли айирмали схема деганда, асосий дифференциал тенгламани тўрнинг барча ички тугун нуқталарида ва қўшимча яъни бошланғич ва чегаравий шартларни эса чегаравий тугун нуқталарда апроксимация қилувчи тенгламалар мажмуаси тушунилади.

Қўйилган масаламизни бир ўлчовли ҳолда (11) икки ўлчовли ҳолда (12) ва уч ўлчовли ҳолда (13) кўринишлардаги чекли айирмали схемага келтирдик. Энди шу тенгламаларга мос рекурент формула ёки математик моделни ҳосил қиламиз ва шу рекурент формула асосида масалани ечиш алгоритмини қурамиз. Хулоса қилиб айтганда мақолада изотроп жисмлар учун термоэластик боғлиқ масалаларни математик моделларини амалиётда учрайдиган қўплаб масалаларни математик моделларига тадбиқ қилиш қаралган. Келгуси мақолаларимни боғлиқ масалаларга қўшимча ташқи таъсирлар орқали унинг ҳолатини ўзгаришини, уларни сонли ечиш усулларини ўрганиш ва бу масалаларнинг математик моделлари балки, дастурий таъминотини яратиш билан давом эттирамиз.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

1. Каландаров А.А., Адамбаев У.Э, Худазаров Р.С. Связанные и несвязанные задачи термо-упруго-пластичности // Вестник НУУз, мех-мат серия.-2010.-№3.-С.92-95.
2. Береснев А.Н. Термоупругое напряжение в ортотропном параллелепипеде. Ученые записки Кемеровского гос. пед. инс. Вып. 23.-Кемерово, 1970.-С. 95- 112.
3. Нахди П.М. Соотношение между напряжениями и деформациями в пластичности и термопластичности. Сб. пер. Механика, 1962. 1, 71, -С.87-133.
4. Халджигитов А.А., Адамбаев У.Э. Математические модели пластичности и термопластичности в пространствах деформаций и напряжений // Вестник НУУз, мех-мат серия.-2006. -№ 2. – С. 75-78.

ИККИ ЎЛЧОВЛИ КОМПОЗИЦИОН ЖИСМЛАРНИНГ КУЧЛАНГАНЛИК ХОЛАТИНИНГ МАТЕМАТИК МОДЕЛИНИ ЯРАТИШ

Абдураимов Достонбек

ГулДУ

Сафоева Дилноза

Гулистон давлат университети

Толалик композицион жисмларнинг кучланганлик ҳолатини аниқлаш учун биз бу жараённинг математик модели орқали масаланинг ечимини аниқлаймиз. Ортотроп жисмларга дарахт танаси, аливроит ва полистерол ойналари киради, полистерол эса, тўлдирувчи сифатида ишлатилади. Агар жисм иккита ўзаро перпендикуляр йўналишлар бўйича ҳар қил физик хусусиятларга эга бўлса у жисм ортотроп дейилади.

Бунинг учун фараз қилайлик икки ўлчовли декарт координаталар тизимида ортотроп эластик жисм ташқи кучлар таъсирида турғун ҳолатда бўлсин. Мувозанат тенгламарини ва юзага берилган чегаравий шартларни қаноатлантирувчи силжишларни аниқлаш керак бўлсин. Бу масалани ечиш учун унга тенг кучли бўлган вариацион масаланинг қўйилишини кўрамиз. У жисмнинг тўлиқ потенциал энергиясини минимизациялаш (Лагранж принципи)га асосланади ва масалани ечиш учун тақрибий усулларни қўллаш имконини беради.

Масаланинг вариацион кўриниши қуйидагича тасвирланиши мумкин

$$\int_S \delta\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dS - \int_L \delta\{U\}^T \{P\} dL = 0 \quad (1)$$

бу ерда : S - жисмнинг юзаси; L - чегараси;

$\{U\} = \{u, v\}$ - силжиш векторининг компонентлари;

$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}\}$ - деформация векторининг компонентлари;

$\{\sigma\} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}\}$ - кўчиш векторининг компонентлари;

Гук қонунига асосан кучланиш ва деформация векторлар компонентлари қуйидаги муносабат билан боғланган.

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (2)$$

бу ерда: [D]-анизотроп жисмнинг эластиклик матрицаси.

Ортотроп жисмларга дарахт танаси, аливроит ва полистерол ойналари киради, полистерол эса, тўлдирувчи сифатида ишлатилади. Агар жисм иккита ўзаро

перпендикуляр йўналишлар бўйича ҳар ҳил физик хусусиятларга эга бўлса у жисм ортотроп дейилади. Улар 5-та боғлиқ бўлмаган параметрларга эга.

Анизотроп жисмнинг умумлашган (эффektiv) механик параметрларини ҳисоблаш қоришма қондасига асосланган бўлиб, қуйидаги муносабатлар ишлатилади :

- тола ОХ ўқи йўналиши бўйича жисмнинг эластик модули :

$$E_1 = E_b * V_b + E_M (1 - V_b) \quad (3)$$

- тола йўналишига перпендикуляр ОУ ўқи йўналиши бўйича эластик модули :

$$E_2 = E_b E_M / (E_b * V_b + E_M (1 - V_b)) \quad (4)$$

- толалик жисмнинг Пуассон коэффиценти

$$\mu' = \mu_M (1 - V_b) + \mu_b + V_b \quad (5)$$

- толалик жисмнинг силжиш модули

$$G' = \frac{G_b G_M}{G_M V_b + G_b (1 - V_b)} \quad (6)$$

Буларда : E_b – толанинг эластик модули ; E_M – матрицанинг эластик модули ; V_b – толанинг композицион материалдаги нисбий ҳажми.

Икки ўлчовли ортотроп жисмлар учун $[D]$ – каттиклик матрицанинг кўриниши қуйидагича [1]:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{nE_2}{1 - n\mu_2^2} & \frac{n\mu_2 E_2}{1 - n\mu_2^2} & 0 \\ \frac{n\mu_2 E_2}{1 - n\mu_2^2} & \frac{E_2}{1 - n\mu_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & mE_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

бу ерда E_1 - ОХ ўқи йўналиши бўйича жисмнинг эластикликл модули ; E_2 - ОУ ўқи йўналиши бўйича жисмнинг эластикликл модул; μ_1, μ_2 – мос равишдаги Пуассон коэффицентлари; $G = \frac{E_1}{2(1 + \mu_1)}$ – силжиш модулининг қиймати;

$$n = \frac{E_1}{E_2}; m = \frac{G}{E_2}. \quad (9)$$

Бу келтирилган муносабатлар толалик композицион материалларнинг уни бир жинсли ҳолига келтириб ҳисобланганда, кучланганлик ҳолатини тўлиқ тасвирлайди. Деформация вектори $\{\varepsilon\}$ ўз навбатида силжиш вектори билан қуйидаги муносабат билан боғланган:

$$\{\varepsilon\} = [B] \{U\} \quad (11)$$

Бу ерда $[B]$ - градиентлар матрицаси бўлиб, қуйидаги кўринишга эга:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Кўйилган масала чекли элементлар усули билан ечилади. Бу усулда жисм эгаллаб турган соҳа кичик хажмга эга бўлган чекли элементларга бўлакланади. U , V - силжишларнинг аппроксимацион функциялари ҳар бир чекли элементлар учун келтирилади. Асосий нўмалумлар сифатида тугун нукталар силжиши олинади, чунки кичик соҳа ичидаги силжишларнинг аппроксимацияси учун содда функцияларни ишлатиш имкони бор [2].

Кўрилатган жисмнинг хусусиятларини ўрганиш чекли ўлчовларга эга бўлган элементларнинг хусусиятларини ўрганишдан бошланади.

e-инчи чекли элементи силжиш векторининг компоненталари қуйидаги кўринишда тасвирланади:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = [I \ N_1, \ I \ N_2, \dots, \ I \ N_n] \{g\}^e \quad (13)$$

бу ерда N_i - чекли элементнинг форма (кўриниш) функцияси;

n – чекли элементдаги тугун нукталар сони;

I –ўлчами 2×2 бўлган бирлик матрица;

$\{g\}^e = \{U_1, V_1, U_2, V_2, \dots, U_n, V_n\}$ – чекли элемент тугун нукталарининг силжиш вектори.

Ҳар бир чекли элемент учун деформация вектори ва кучланиш вектори ўзаро қуйидагича боғланади:

$$\{\varepsilon\}^e = [B] \{g\}^e \quad \text{ва} \quad \{\sigma\}^e = [D] \{\varepsilon\}^e \quad (14)$$

бу ерда $[B]$ - градиентлар матрицаси бўлиб, у қуйидаги кўринишга эга:

$$[B] = [B_1, B_2, \dots, B_n] \quad \text{ва} \quad B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Ҳар бир чекли элемент учун Лагранж вариацион тенгламасини қуйидаги кўринишда тасвирлаш мумкин:

$$\left(\int_{S^e} [B]^T [D] [B] dV \right) \{g\}^e - \int_{L^e} [N]^T \{P\} dS = 0 \quad (16)$$

Қуйидаги ифодалашларни киритамиз:

$$[K]^e = \int_{S^e} [B]^T [D] [B] dS \quad \text{ва} \quad \{F\}^e = \int_{L^e} [N]^T \{P\} dL \quad (17)$$

У ҳолда юқоридаги тенгламанинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$[K]^e \{g\} - \{F\}^e = 0 \quad (18)$$

бу ерда $[K]^e$ - e -чи чекли элементнинг қаттиқлик матрицаси; $\{F\}^e$ - тугун нукталарга келтирилган кучлар вектори.

Ҳал қилувчи чизиқли алгебраик тенгламалар системасини қуриш жараёнини кўриб чиқамиз. Жисмнинг дискрет моделидаги ҳар бир тугун нукта бир неча чекли элементнинг таркибида иштирок этганлиги сабабли, шу тугун нуктанинг мувозанат ҳолатини тасвирловчи тенгламанинг сатри шу чекли элементларнинг мос коэффициентларининг йиғиндисини ўз ичига олади. Мисол учун i -чи тугун нуктага мос келувчи қаттиқлик матрицаси ва унга мос келувчи тугун нукталаридаги ташқи кучлар вектори қуйидаги муносабат билан аниқланади:

$$\left(\sum_e [K_{i1}] \right)^e \{g_1\} + \left(\sum_e [K_{i2}] \right)^e \{g_2\} + \dots + \left(\sum_e [K_{im}] \right)^e \{g_m\} - \sum_e \{F_i\}^e = 0 \quad (19)$$

бу ерда $\sum_e \{F_i\}^e$ - i -чи тугун нуктага келтирилган ташқи кучлар компоненталарининг йиғиндисини.

Табиий-ки бу йиғиндига фақат i -чи тугун нуктани ўз таркибига олган чекли элементлар ҳисса қўшади. Барча кўринишдаги тенгламаларни бирлаштирганда бошланғич жисм дискрет моделининг умумий тенгламалар системаси қуйидаги кўринишга эга:

$$[K]\{G\} - \{F\} = 0 \quad (20)$$

бу ерда $[K]$ - қаттиқлик матрицасининг глобал системаси системаси.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

1. Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. - М.: Наука, 1988. - 176 с.
2. Кабулов В.К. Алгоритмизация в механике сплошных сред. - Ташкент: Фан, 1979. - 314 с.
3. Курманбаев Б, Полатов А.М. Халджигитов А.А. Моделирование прикладных задач на основе МКЭ. Учебное пособие. Ташкент, НУУЗ. 2004 г., - 70 с.
4. Р.И.Фурунжиев., Н.Н.Гурский., Р.И.Фурунжиев. Применение математических методов и ЭВМ. Программное моделирование систем. Учебное пособие. Минск, Выш. Шк., 1991 г. - 250 с.
5. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. - М.: Высшая школа, 1990. - 399 с.
6. Образцов Н.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. - М.: Высш. школа, 1985. - 390 с.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА 2-ГО РОДА С ПОМОЩЬЮ РАВНОМЕРНЫХ СЕТОК.

Абираев Имомали

К.ф.-м.н., Институт предпринимательства и педагогики Денау

Определение 1: Выберем целое n из условия

$$(n-1)^s \leq N \leq n^s$$

и разобьем каждое из ребер единичного s -мерного куба на n равных частей. Проводя через точки деления плоскости, параллельные координатным плоскостям, разобьем куб на n^s малых кубиков. Совокупность точек

$$M_k = \left[\frac{l_1}{k}, \dots, \frac{l_s}{k} \right] \quad (1 \leq l_v \leq n, \quad v=1, 2, \dots, s)$$

называется равномерными сетками.

Определение 2: Пусть $\alpha \geq 1$ -целое. Будем говорить, что функция $f(x_1, \dots, x_s)$ принадлежит классу H_s^α , если в единичном кубе G_s она имеет непрерывные производные вида

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{n_1} \dots \partial x_s^{n_s}} \quad (0 \leq n \leq \alpha s, \quad 0 \leq n_s \leq \alpha).$$

Если эти производные непрерывны во всем s -мерном пространстве и функция $f(x_1, \dots, x_s)$ имеет период, равный единице по каждой из переменных, то будем говорить, что $f(x_1, \dots, x_s)$ периодическая функция из класса H_s^α .

В работах [1], [2], [4], [5], на классе E_s^α дано приближенное решение интегральных уравнений Фредгольма и системы интегральных уравнений Фредгольма с помощью оптимальных коэффициентов. Квадратурные формулы на классе E_s^α строились для случая, когда интегрирование велось по единичному кубу. В уравнениях Вольтерра имеются переменное в пределе интегрирования и при сведении уравнения Вольтерра к уравнению Фредгольма приводить к снижению гладкости ядра. Поэтому рассмотрим случай, когда ядро $K_{\tau j} \in H_2^1$ и свободный член $f \in H_1^1$.

Рассмотрим системы интегральных уравнений

$$\varphi_j(x) = \int_0^x \sum_{\tau=1}^q K_{\tau j}(x, y) \varphi_\tau(y) dy + f_j(x), \quad j = 1, 2, \dots, g; \quad q < g. \quad (1)$$

Пусть свободные члены и ядро удовлетворяют условиям

$$f_j(x) \in H_1^1(C_1), \quad K_{\tau j}(x, y) \in H_2^1(C_2), \quad j = g; \quad \tau = 1, \dots, q. \quad (2)$$

Пусть

$$\psi_{jn}(x, y_1, \dots, y_n) = \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^q K_{jj_1}(x, y_1) \prod_{m=2}^n K_{j_{m-1}j_m}(y_{m-1}, y_m) f_{j_m}(y_m).$$

Легко видеть, что если $f_1(x_1, \dots, x_s)$ и $f_2(x_1, \dots, x_s)$ принадлежит соответственно классам $H_s^\alpha(C_1)$ и $H_s^\alpha(C_2)$, то при любых

$$B_1 f_1 + f_2 B_2 \in H_s^\alpha(|B_1|C_1 + |B_2|C_2); \quad f_1 \cdot f_2 \in H_s^\alpha(C_1 C_2 2^{\alpha s})$$

Тогда, так как $\alpha = 1$, функция $K(x, y_1)K(y_1, y_2) \dots K(y_{n-1}, y_n)f(y_n)$, рассматриваемая как функция переменных $y_1 \dots y_n$, принадлежит классу $H_s^1(2^n C_1 C_2)$ и следовательно

$$\psi_{jn}(x, y_1, \dots, y_n) \in H_s^1((2q)^n C_1^n C_2).$$

Пусть N -растущее натуральное число и $|\lambda| < \frac{1}{(C_1+1)C_2\alpha q}$. Натуральные числа N_1 и

M определяем следующим образом

$$M = \frac{\log \log N_1 + \sqrt{(\log \log N_1)^2 - (\alpha - 1) \log |\lambda| q \llbracket 2^{\alpha+1} A \rrbracket C_2 B}}{\log |\lambda| q \llbracket 2^{\alpha+1} \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1} \right) \rrbracket C_2 B - \log \log N_1},$$

$$N_1 = \left\lceil N^{\frac{1}{2}} \right\rceil, \quad A = 3 + \frac{2}{\alpha-1} D, \quad B = 2^{\alpha+1} A.$$

Тогда для решение системы (1) имеет место следующая теорема.

Теорема. Пусть $N \geq 2^\alpha$, $\alpha > 1$, выполняются условия (2). Тогда для решение ситемы (1) справедливы равенства

$$\varphi_j(x) = f_j(x) + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^M \lambda^n \sum_{\substack{0 < l_j < k \\ 1 \leq j \leq n}} \psi_{in}(x, M_k) + R_N, \quad i = 1, 2, \dots, q,$$

где

$$M_k = \left[\frac{l_1}{k}, \dots, \frac{l_s}{k} \right], \quad R_N = \theta B N^{-\frac{\alpha-1}{2M}} \log^{M-1} N^{\frac{1}{2M}}, \quad |\theta| < 1,$$

$D = D(\alpha, \lambda, q, A, C_1 C_2)$ – постоянная, не зависящая от N .

ЛИТЕРАТУРА

1. Коробов Н.М. Приближенное вычисление кратких интегралов с помощью методов теории чисел // ДАН СССР, -М.. 1957, 115, № 6, С. 1062-1065.
2. Коробов Н.М. Применение теоретико-числових сеток в интегральных уравнениях и интерполяционных формулах // Тр. Матем. Ин-та АН СССР, -М.: 1961, 60, С.195-210.
3. Шахов Ю.Н. О приближенном решении Вольтерра II рода методом итераций //ДАН СССР, -М.: 1959, 128, № 6, С.1136-1139.
4. Исраилов М.И. , Абираев И.М. Приближенное решение системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода с помощью теоретикочисловых сеток //Узбекский математический журнал, Ташкент, 1993, №2, С. 43-51.
5. Исраилов М.И. , Абираев И.М. Приближенное решение системы сингулярных интегральных уравнений с ядром Гильберта // Узбекский математический журнал, Ташкент, 1994, №, С. 40-47.

СПЛАЙН-ФУНКЦИЯ УСУЛЛАРИ ХАТОЛИКЛАРИНИ БАҲОЛАШ

Азимов Рахимжон

ф.-м.ф.н. АДУ

Азимов Бунёд

PhD, ТАТУ

Азимова Шахноза

Қўрғонтепа тумани, 39-мактаб

Қуйида (1) – сплайн-функциянинг хатолигини баҳолаймиз:

$$S_3(f; x) = \sum_{j=0}^3 \varphi_{j+1}(t) f(x_{i+j-1}). \quad (1)$$

Бунда $S_3(f, x)$ сплайн функция $f(x)$ функция орасидаги хатолик:

$$R_N(f; x) = \sum_{j=0}^3 \varphi_{j+1}(t) f(x_{i+j-1}) - f(x), \quad (2)$$

каби ёзилиб,

$$\varphi_1(t) = -0,5t(1-t)^2,$$

$$\varphi_2(t) = 0,5(1-t)(2+2t-3t^2),$$

$$\varphi_3(t) = 0,5t(1+4t-3t^2),$$

$$\varphi_4(t) = -0,5t(1-t)t^2$$

(1) – сплайн-функциянинг хатолигини $C[a, b]$ - узлуксиз функциялар синфида ҳамда $C'[a, b]$ - биринчи тартибли ҳосиласигача узлуксиз функциялар синфида баҳолаймиз. Хатоликни баҳолашни қуйидаги теорема орқали ифода этамиз:

Теорема. (2) - тенглик билан аниқланган $S_3(f, x)$ кубик сплайн-функциянинг хатолиги $R_N(f; x)$ учун қуйидаги баҳолар ўринли

$$\max_{a \leq x \leq b} |S_3^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)| \leq R_r, \quad r = 0, 1.,$$

бу ерда $a_1 = a - h$, $b_1 = b + h$, R_r лар эса жадвалда келтирилган (1-жадвал).

1-жадвал.

Берилган кесмада узлуксиз бўлган ҳамда биринчи тартибли ҳосиласигача узлуксиз бўлган функциялар синфида қаралган локал интерполяцион кубик сплайн-функция хатолигини баҳолаш

Функция синфлари	R_0	R_1
$C[a_1, b_1]$	$\frac{9}{8} \omega(f, 3h)$	
$C'[a_1, b_1]$	$\frac{3}{8} h \omega(f', 3h)$	$1,75 \omega(f', 3h)$

Сплайн-функция хатоликларини текриш мақсатида гастроэнтерологик сигнал танлаб олинди. Жадвалда Гребенников (GS), Рябенский (RS) ва локал интерполяцион сплайн (S) ларни хатолик натижалари келтирилган (2-жадвал).

2-жадвал.

Гастроэнтерологик сигнални рақамли ишлаш
жараёнидаги хатолик натижалари.

x_i	$f(x)$	$GS_3(x)$	$RS_3(x)$	$S_3(x)$	$ GS_3(x) - f(x) $	$ RS_3(x) - f(x) $	$ S_3(x) - f(x) $
2	0,056	0,0562	0,056	0,056	0,0002	0	0
2.1	0,0553	0,0589	0,0551	0,0557	0,0036	0,0002	0,0004
2.2	0,0546	0,0632	0,0537	0,0549	0,0086	0,0009	0,0003
2.3	0,0539	0,0694	0,0522	0,0539	0,0155	0,0017	0
2.4	0,0532	0,0778	0,0506	0,0528	0,0246	0,0026	0,0004
2.5	0,0525	0,0887	0,0491	0,0516	0,0362	0,0034	0,0009
2.6	0,0518	0,0535	0,0479	0,0504	0,0017	0,0039	0,0014
2.7	0,0511	0,0544	0,0471	0,0495	0,0033	0,004	0,0016
2.8	0,0504	0,0559	0,0469	0,0489	0,0055	0,0035	0,0015

2.9	0,0497	0,0584	0,0475	0,0487	0,0087	0,0022	0,001
3	0,049	0,0625	0,049	0,049	0,0135	0	0
3.1	0,051	0,0684	0,0509	0,0499	0,0174	0,0001	0,0011
3.2	0,053	0,0765	0,0527	0,0511	0,0235	0,0003	0,0019
3.3	0,055	0,0872	0,0545	0,0528	0,0322	0,0005	0,0022
3.4	0,057	0,101	0,0562	0,0547	0,044	0,0008	0,0023
3.5	0,059	0,1183	0,058	0,0568	0,0593	0,001	0,0022
3.6	0,061	0,0703	0,0598	0,0591	0,0093	0,0012	0,0019
3.7	0,063	0,0729	0,0618	0,0616	0,0099	0,0012	0,0014
3.8	0,065	0,0761	0,064	0,0641	0,0111	0,001	0,0009
3.9	0,067	0,0805	0,0664	0,0666	0,0135	0,0006	0,0004
4	0,069	0,0868	0,069	0,069	0,0178	0	0
$\max_{a \leq x \leq b} S_3(x_i) - f(x_i) $					0,0593	0,0040	0,0023

Хатолик натижаларига кўра локал интерполяцион сплайн сигналга яхши яқинлашганини ва сигналларга рақамли ишлов бериш жараёнлари учун қулай эканлигини айтишимиз мумкин.

АДАБИЁТЛАР

1. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. Москва: Наука, 1980. - 352 с.
2. Азимов Б.Р. Локал сплайн усулларда сигналларга рақамли ишлов беришнинг параллел алгоритмлари ва дастурий мажмуаси. 2022, Тошкент.-Б. 117.

СПЛАЙН ФУНКЦИЯЛАР АСОСИДА СИГНАЛЛАРГА РАҚАМЛИ ИШЛОВ БЕРИШ ЖАРАЁНЛАРИНИ ПАРАЛЛЕЛЛАШТИРИШ

Азимов Рахимжон

ф.-м.ф.н. АДУ

Азимов Бунёд

PhD, ТАТУ

Худойбердиева Шохсанам

АДУ

Хасанова Дилафруз

Андижон тумани 4-мактаб

Параллел ҳисоблаш жараёнларини дастурлашда тизимнинг параллел оқимларидан фойдаланилади. Ушбу параллел оқимларни ташкил қилиш ва уларни бошқариш параллел алгоритмнинг мураккаблигига қараб амалга оширилади. Яъни параллел алгоритмда цикл жараёнларни тартиблаштириш зарур. Масалан, дастурда ичма-ич циклларга алоҳида оқимлар яратиш зарур. Лекин параллел оқимларни меъёридан ортиқ яратиш маълумотларнинг йўқолишига олиб келади. Натижада дастурнинг натижаси нотўғри чиқади. Тенг ва тенгмас ораликларда қурилган сплайнларни ҳисоблашнинг параллел алгоритмини дастурлашда худди шу муаммога дуч келинади. Буни бартараф этиш учун параллел оқимларни иккинчи цикл тугаганидан сўнг ўчириш керак. Шунда

биринчи циклниги иккинчи қадамига ўтилганда яна улардан қайта фойдаланиш мумкин.

Аэромагнит сигналларини рақамли ишлашнинг параллел алгоритмни амалга ошириш босқичи қуйидагилардан иборат:

1- алгоритмни амалга оширишда параллел ҳисоблаш мумкин бўлган цикл жараёнларини аниқлаш;

2- алгоритмнинг кетма-кет босқичида динамик массивларни яратиш ва уларни ҳисоблаш;

3- локал кубик сплайн x ўзгарувчига боғлиқ қийматларини (ϕ_i, ψ_i ва φ_i) ҳисоблаш процедурасини ташкил қилиш;

4- тенгмас оралиқларда қурилган кубик сплайннинг x ўзгарувчига боғлиқ қийматларини (φ_i ва h_i) ҳисоблаш процедурасини ташкил қилиш;

5- компьютер ядроларида параллел ҳисобланган массивларни жамлаш процедурасини яратиш ва амалга ошириш;

6- кетма-кет ва параллел ҳисоблаш процедуралари ёрдамида натижалар массивини яратиш ва экранга чиқариш.

Юқоридаги алгоритм асосида кетма-кет ва параллел жараёнлардаги вақтлар ҳисобланиб тезлаштириш коэффицентини аниқланади. Қуйида тезлаштириш коэффицентини аниқлаш усуллари кўриб ўтамыз:

$S_p(n)$ - тезлаштириш коэффицентини n ўлчамдаги бир хил кириш маълумотларини қайта ишлашда параллел дастурнинг p та процессорларда кетма-кет дастурдан қанчалик тез ишлашини кўрсатади.

$$S_p(n) = \frac{T(n)}{T_p(n)}$$

$T(n)$ – кетма-кет дастурни бажаришга сарфланган вақт; $T_p(n)$ – параллел дастурни бажаришга сарфланган вақт.

$$S_{\text{Relative}}(k, p, n) = \frac{T_k(n)}{T_p(n)}$$

нисбий тезлаштириш кўрсаткичи (Relative) - параллел дастурнинг k процессорларида ижро этиладиган вақтини p -процессорларда бажариш вақтига нисбати.

$$E_p(n) = \frac{S_p(n)}{p} = \frac{T(n)}{pT_p(n)} \in [0,1]$$

самаралилик даражаси (Efficiency).

$$S(p, n) = \frac{T_{\text{sync}}(p, n)}{T_{\text{Comp}}(p, n)} = \frac{T_{\text{Total}}(p, n) - T_{\text{Comp}}(p, n)}{T_{\text{Comp}}(p, n)}$$

маълумот алмашиш даражаси (Overhead).

$T_{\text{sync}}(p, n)$ - p та оқимларни яратишга ва синхронлашга сарфланган вақт;

$T_{\text{Comp}}(p, n)$ - p та оқимнинг ҳар бирида ҳисоблашга сарфланган вақт:

Биз натижаларни аниқлашда $S_p(n)$ - тезлаштириш коэффициентидан фойдаланамиз. Унда параллел оқимлар ёрдамида процессор ядролари аниқланиб, цикл жараёнларининг битта қадамидан кейин массивларни ҳисоблаш учун ёрдамчи оқим ҳосил қилинган. Бу цикл жараёнларни икки баробарга тез бажарилишини таъминлади. Демак параллел алгоритмларни дастурлашда операцион тизимларнинг параллел оқимларидан фойдаланиш сплайн параметрларини ҳисоблаш учун кўп вақт сарфлайдиган цикл жараёнларини қисқа вақтларда бажарилишини таъминлайди. Шу билан бирга параллел оқимларни бажарилишида хотира катакларига бир вақтда иккита қийматларни ёзиш ҳодисаси содир бўлди. Бу эса сигналларнинг баъзи нукталардаги қийматларини йўқолишига олиб келди. Бу муаммони ҳал қилиш учун таклиф қилинган параллел алгоритмда синхронлаш амалга оширилади. Синхронлаш жараёнининг алгоритмдаги вазифаларига боғлиқ бўлган муаммолари мавжуд ва бу муаммолар параллел дастурлаш технологияси ҳисобланган OpenMP ёрдамида ҳал қилинади.

АДАБИЁТЛАР

1. Azimov B. Construction of a cubic spline for values of functions obtained at unequal intervals. Scientific and technical journal of NamIET. VOL 5 – Issue (3) 2020. P. 105-111.
2. Dhananjay S., Madhusudan S., Zaynidinov H. Signal processing Applications Using Multidimensional Polynomial Splaynes // indexed by EICompindex, SCOPUS and Springlink, Singapore, 2019, - 70 p.
3. Jain A.I, Shankar R.D. Software Decomposition for Multicore Architectures, Dept. of Computer Science and Engineering, Florida Atlantic University, Boca Raton, FL. 2012. - P. 33-431.

ПРЕИМУЩЕСТВО РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ПАКЕТЕ MATHCAD

Алиева Жамила

PhD, Андижанский государственный университет

Кубижонова Нилуфар

Андижанский государственный университет

Эркинжонов Суннатилло

Андижанский государственный университет

Первоначально рассмотрим некоторых задачи теоретической механики, которые сводятся к решению обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Для их решения будут использоваться встроенные функции пакета MathCAD.

Функция MathCAD для решения обыкновенного дифференциального уравнения m -го порядка. Напомним, что обыкновенным дифференциальным уравнением m -го порядка называются уравнение

$$y^{(m)} = f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}), \quad (1)$$

где $y^{(m)} = \frac{d^m y(t)}{dt^m}$ — означает производную m -го порядка по переменной t .

Задача Коши для такового уравнения заключается в нахождении такой функции $y(t)$, которая является решением уравнения (1) и удовлетворяет начальным условиям:

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(m-1)}(t_0) = y_{m-1}. \quad (2)$$

Для решения рассмотренной задачи Коши в пакете MathCAD наиболее часто используется функция `odesolve`, обращение к которой стоит в решающем блоке `Given`. В этом блоке задаются само дифференциальное уравнение m -го порядка и начальные условия.

Обращение к функции `odesolve` имеет вид:

$$\text{odesolve}(t, t_k, n), \quad (3)$$

где t – имя переменной (аргумент искомого решения);

t_k – значение, задающее конец интервала интегрирования (начало интервала t_0); указывается в начальных условиях, задаваемых в блоке `Given` следующей конструкцией: $y = (t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1$ и т. д. (при этом используется жирный знак `<<равно>>`);

n – необязательный параметр, определяющий число интервалов, на которые разбивается отрезок (t_0, t_k) . Если этот параметр опущен, то вычисление n происходит внутри функции `odesolve`.

Результатом работы является значение решения дифференциального уравнения в момент t .

Применение функции `odesolve` показано в следующем примере.

Пример 1. Задача о свободных колебаниях динамической системы. Пусть груз Q покоится на упругой рессоре. Отклонение груза от положения равновесия и в начальный момент времени обозначим через y_0 , а значения скорости $-y_1$ (начальные условия). Отклонение вниз – положительное, вверх – отрицательное. В положении равновесия вес уравновешивается упругостью пружины. Предполагается, что сила, стремящая вернуть груз в положение равновесия – так называемая восстанавливающая сила, – пропорциональна отклонению, т.е. равна $-k \cdot y$, где k – некоторая постоянная для данной рессоры величина (`<<жесткость рессоры>>`). Предполагается, что движению груза Q препятствует сила сопротивления, направленная в сторону, противоположную направлению движения, и пропорциональная скорости движения груза, т.е. сила $-\lambda \cdot v = -\lambda \cdot \frac{dy}{dt}$, где $\lambda = \text{const} \geq 0$ (амортизатор). Найти функцию $y(t)$ – координату движения груза.

Решение. Дифференциальное уравнение движения груза на рессоре по II закону Ньютона имеет вид:

$$Q \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = -k \cdot y - \lambda \cdot \frac{dy}{dt}. \quad (4)$$

где $k, \lambda \geq 0$.

Решение задачи Коши показано в документе MathCAD.

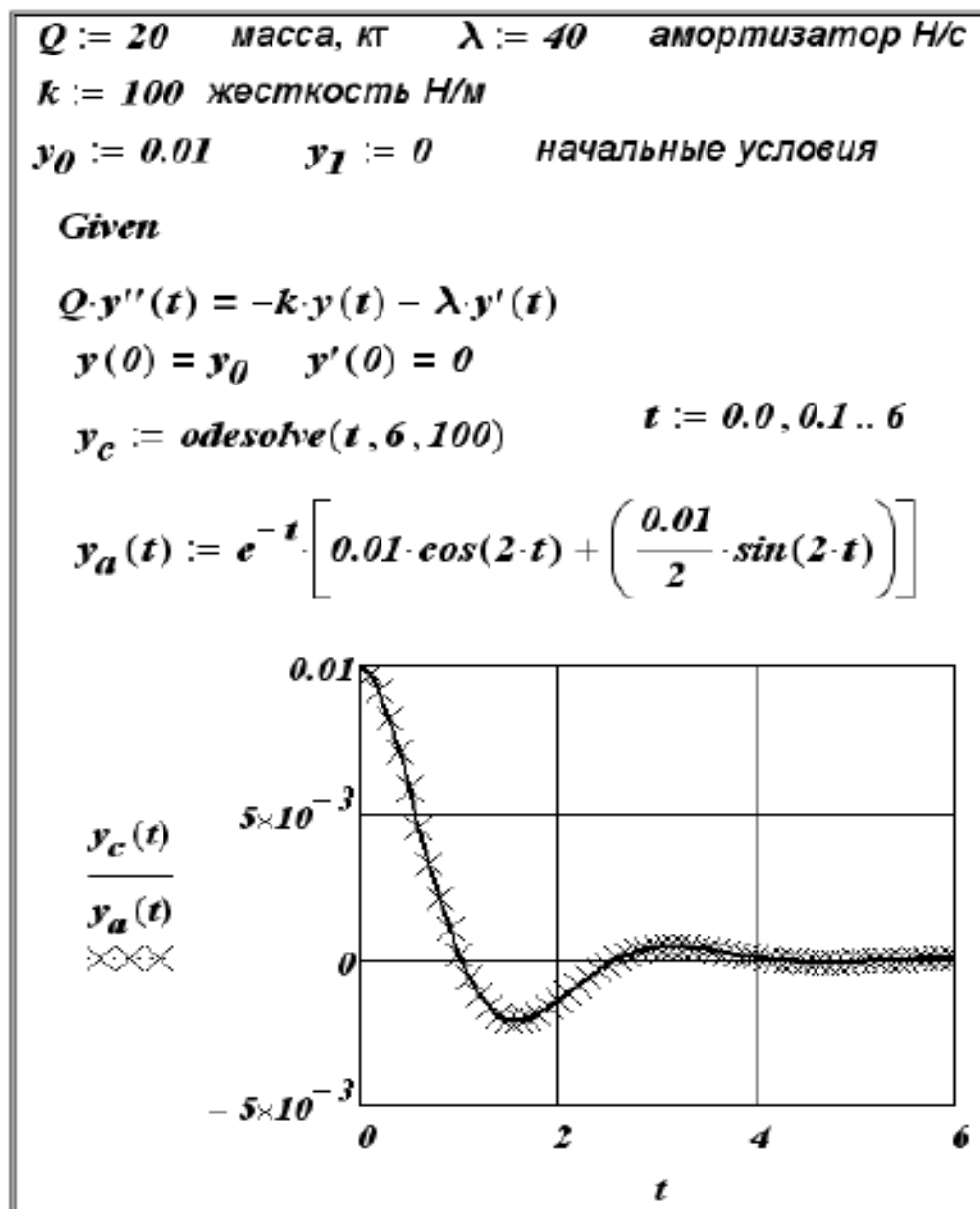


Рис.1.Решение задачи Коши для примера 1.

Здесь же заданы все параметры системы. Для ввода штриха (обозначение производной) нажимается [Ctrl]+[F7]. В документе приведены графики численного решения (кривая $y_c(t)$ – сплошная линия) и аналитического решения (кривая $y_a(t)$ – кретики). Видно хорошее совпадение двух кривых.

Для иллюстрации возможностей MathCAD рассмотрим пример с рессорой, жесткость которой меняется в зависимости от знака отклонения груза.

Пример 2. Задача о свободных колебаниях динамической системы с переменной жесткостью. В условия примера 1. внесем следующее допущение, а именно – жесткость рессоры задается следующим образом:

$$k(y) = \begin{cases} 100, & y(t) \geq 0 \\ 20, & y(t) < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Решение. Для задания переменной жесткости (5) будем использовать функцию if. На рис.2. показан документ, решающий задачу Коши. Сравнивая графики численных решений $y_c(t)$ (рис.1., 2.), можно заметит отличие полученных решений.

Аналитическое решение получить не удастся, и этому график кривой $y_a(t)$ (рис. 2.) отсутствует.

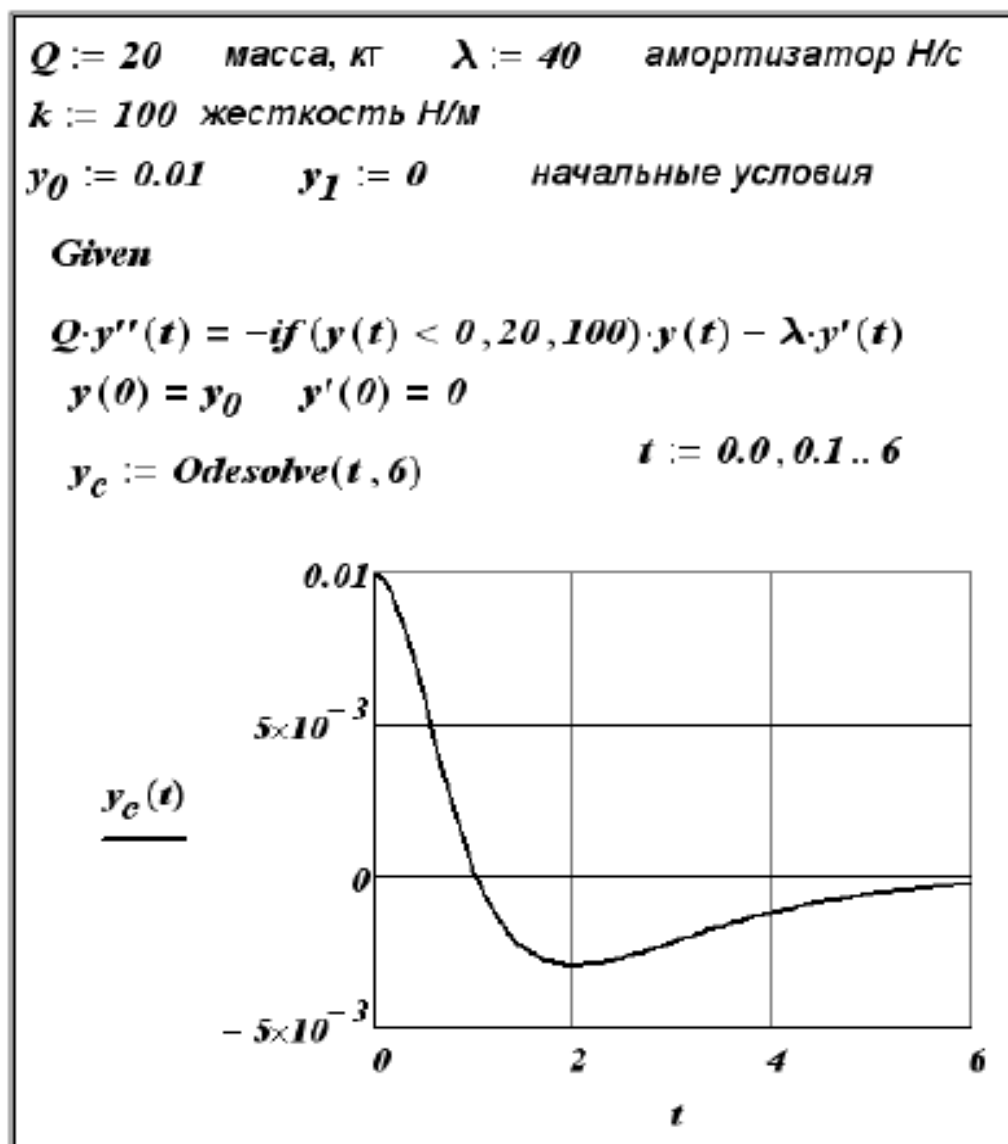


Рис.2. Решение задачи Коши для примера 2.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воскобойников Ю.Е. Программирование и решение задач в пакете MathCAD: учеб.пособие. Новосибирск: НГАСУ, 2002.
2. Очков В.Ф. MathCAD 14 для студентов инженеров и конструкторов. СПб.: БХВ-Петербург, 2007.
3. Павленко Ю.Г. Лекции по теоретической механике. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2002.
4. Поршнев С.В. Численные методы на базе MathCAD. СПб.: БХВ-Петербург, 2005.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРЕХЭТАПНОГО ПРОЦЕССА ТЕПЛООБМЕНА С УЧЕТОМ СКАЧКООБРАЗНОГО ИЗМЕНЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ВЕЩЕСТВА ПРИ ФАЗОВОМ ПЕРЕХОДЕ

Аминова Мухтасар

Национальный Университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека

Исходная плотность массы ρ_1 после плавления становится ρ_2 . Соответственно, в процессе плавления изменяются удельная теплоемкость (c_1 на c_2), коэффициент теплопроводности (λ_1 на λ_2) и коэффициент температуропроводности ($a_1^2 = \frac{\lambda_1}{\rho_1 c_1}$ на $a_2^2 = \frac{\lambda_2}{\rho_2 c_2}$). Но их изменениями до и после плавления можно пренебрегать.

Если отношение плотностей исходной и вновь образованной фаз существенно отличается от единицы, то граница области расчета тоже становится переменной по времени (в двух и трехмерных случаях или при образовании жидкости и газа возникает течение и/или зона с высоким статическим давлением). Например, при 0°C плотность воды составляет 999.87 кг/м^3 , а льда – 916.20 кг/м^3 . Такая разница – фактор весомый и сбрасывать ее со счетов нельзя.

Тело имеет форму бесконечной пластины с определенной исходной толщиной l_0 , что позволяет рассмотреть одномерную задачу [1].

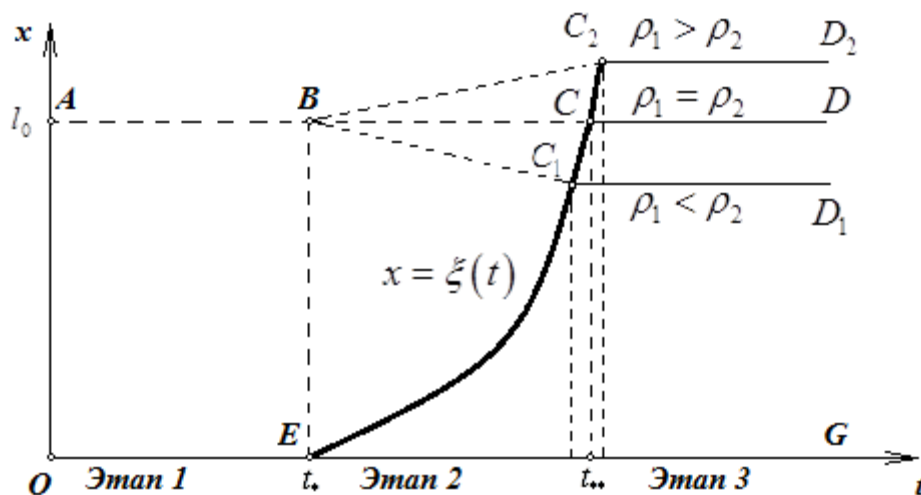


Рисунок 1. Представление этапов плавления в координатной плоскости (t, x) при изменении плотности

Процесс плавления твердого тела происходит в трех этапах: начальный нагрев, процесс плавления и конечный нагрев. На рис. 1 приведены условные границы зон тепломассообмена, выделены зоны и этапы процесса плавления твердой массы при нагреве массы со стороны $x=0$ и при различных соотношения значений плотности массы до и после фазового перехода.

Этап 1 соответствует исходному нагреву твердой массы. На отрезок OA задано исходное распределение температуры в виде

$$T(x, 0) = T_0(x). \quad (1)$$

Изменение значения температуры на поверхности $x = 0$ (линия OEF) задано в зависимости от времени t :

$$T(0, t) = T_g(t). \quad (2)$$

На границе $ABCD$ (при $x = l_0$) задано условие

$$\frac{\partial T(l_0, t)}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

что соответствует поверхности теплоизоляции.

Этап 2 начинается с момента $t = t_*$, когда на поверхности $x = 0$ температура, увеличиваясь, достигает температуру плавления T_* и образуется фронт плавления. Перемещаясь по x , фронт фазового перехода $x = \xi(t)$ в конце этапа 2 достигает границу $x = l$ при $t = t_{**}$. Т.о. кривая фронта плавления $x = \xi(t)$ разделяет расчетную область $0 \leq x \leq l$ на зону 1 (твердой массы – слева от $x = \xi(t)$) и на зону 2 (жидкой массы – справа от $x = \xi(t)$).

Но следует отличить толщину $\xi_1(t)$ уже плавленной массы первой фазы от толщины вновь образованной фазы $\xi_2(t)$ вместо первой фазы. Поскольку в процессе изменения агрегатного состояния тела его масса остается без изменения, то имеет место равенство $\rho_1 \xi_1(t) = \rho_2 \xi_2(t)$. Так как процесс теплопередачи происходит в вновь образованной массе, то в математической модели необходимо пользоваться толщиной $\xi_2(t)$. При этом образуется разница $\xi_2(t) - \xi_1(t) = (1 - \rho_2 / \rho_1) \xi_2(t)$. Если обеспечивается неразрывность массы (например, лед плавает в воде), то граница расчетной области становится переменной и составит

$$l(t) = l_0 + (1 - \rho_2 / \rho_1) \xi_2(t). \quad (4)$$

Далее будем пользоваться толщиной вновь образованной фазы $\xi_2(t)$ и индекс 2 опустим при изложении. Тогда в процессе второго этапа (плавления) $\xi(t)$ проходит путь от нуля до $l(t_{**}) = \xi(t_{**}) = l_0 \rho_1 / \rho_2$. После этого толщина массы остается постоянной в рамках принятых допущений.

Соответственно, время t_{**} – начало третьего этапа наступит при полном плавлении массы. Т.е. этап 3 ($t > t_{**}$) соответствует нагреву зоны, целиком заполненной жидкой фазой, и в ней отсутствует фронт испарения.

Для второго и третьего этапов рассматриваемого процесса при $x=0$ уместно условие

$$T_2(0, t) = T_g(t), \quad (2^1)$$

а при l – условие теплоизоляции :

$$\frac{\partial T_{1,2}(l, t)}{\partial x} = 0. \quad (3^1)$$

При $\rho_1 = \rho_2$, в силу $\xi_2(t) - \xi_1(t) = 0$, граница l остается постоянной в продолжение всего процесса.

Переходим к уравнениям теплопередачи и условиям сопряжения на фронте фазового перехода.

При $\{0 < x < l_0, 0 < t < t_*\}$ уравнение температуропроводности имеет вид [2]

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}. \quad (5)$$

Результат распределения температуры при $t = t_*$, когда $T_1(0, t_*) = T_*$, служит начальным условием для этапа 2.

Уравнение (5) остается в силе и в зоне исходной фазы $\{\xi(t) < x < l(t), t_* < t < t_{**}\}$ во втором этапе.

При $\{0 < x < \xi(t), t_* < t < t_{**}\}$, т.е. в зоне вновь образованной фазы во втором этапе, уравнение теплопередачи имеет вид

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}. \quad (6)$$

На фронте фазового перехода имеет место гладкое сопряжение температуры

$$T_1(\xi, t) = T_2(\xi, t) = T_* \quad (7)$$

и распределение поступающего к фронту потока тепла на дальнейший нагрев зоны исходной фазы и на продвижения фронта фазового перехода вперед со скоростью

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi' [1]:$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial T_2(\xi, t)}{\partial x} = -\lambda_1 \frac{\partial T_1(\xi, t)}{\partial x} + L\rho_2 \xi'. \quad (8)$$

Здесь L – скрытая энергия плавления 1 кг массы.

Второй этап процесса заканчивается замыканием фронта фазового перехода с наружной границей $l(t_{**}) = \xi(t_{**}) = l_0\rho_1 / \rho_2$ при $t = t_{**}$. При этом

$$T_2(l(t_{**}), t_{**}) = T_*.$$

Полученное при $t = t_{**}$ распределение температуры служит начальным условием для третьего этапа, процесс теплопередачи в котором описывается уравнением (6) и условиями (2¹) и (3¹) при постоянной толщине жидкой среды.

Третий этап продолжается до $t = t_{***}$, например, до выполнения условия

$$T_2(l, t_{***}) = T_* + 10^0.$$

В настоящее время разрабатывается численный метод решения задачи с совместным использованием методов ловля и выпрямления фронта фазового перехода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мажукин В.И. Математическое моделирование проблемы Стефана на адаптивной сетке. – Проблемные доклады Минского международного форума по Тепломассообмену, 24-027 мая 1988, Минск, Инст-т тепло- и массопереноса им. А.В.Лыкова. – С. 125-139.
2. Тихонов А.М., Самарский А.А. Уравнения математической физики – М.: Наука, 1977. – 736 с.
3. Самарский А.А., Вабышев Х.Х. Вычислительная теплопередача. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
4. Будак Б.М., Гольдман Н.Л., Успенский А.Б. Разностные схемы с выпрямлением фронтов для решения многофронтовых задач типа Стефана // ДАН СССР, 1966. Том 167, № 4. – С. 735-738.

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ С ДВОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ С ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ С ИСТОЧНИКОМ ИЛИ ПОГЛОЩЕНИЕМ

Арипов Мерсаид

Д.ф.-м.н., Национальный университет Узбекистана

Нигманова Дилобар

Национальный университет Узбекистана

Данная работа демонстрирует возможность автомодельного и приближенно автомодельного подхода к изучению решений двойной нелинейной системы реакции-диффузии. Рассмотрим в области $Q = \{(t, x) : 0 < t, x \in R^N\}$ следующую задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \left(|x|^n u^{m_1-1} |\nabla u^k|^{p-2} \nabla u^{l_1} \right) + \varepsilon u^{p_1} v^{q_1}, \frac{\partial v}{\partial t} = \nabla \left(|x|^n v^{m_2-1} |\nabla v^k|^{p-2} \nabla v^{l_2} \right) + \varepsilon u^{p_2} v^{q_2}, \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, v(0, x) = v_0(x) \geq 0, x \in R^N, \quad (2)$$

где, $k \in R, m_1, m_2 > 1, p_i, q_i \geq 1, p \geq 2, \varepsilon = \pm 1$ действительные числа, $\nabla(\cdot) = grad_x(\cdot)$ и, $u_0(x) \geq 0, v_0(x) \geq 0$ - нетривиальная, неотрицательная, ограниченная и достаточно гладкая функция.

Задача (1), (2) описывает различные процессы теплопроводности, нелинейной диффузии, фильтрации жидкости и газа, распространение вирусов, соле- влагопереноса и др. в двухкомпонентных нелинейных средах при наличии источника ($\varepsilon = +1$) или поглощения ($\varepsilon = -1$) с мощностью равной $u^{p_i} v^{q_i}$, $i = 1, 2$. [1-5].

Будем говорить, что обобщенное решение системы (1) обладает свойством конечной скорости распространения возмущения (КСРВ), если существует такая функция $0 < y(t) \in C(0, \infty)$, что $u(t, x) \equiv 0$, $v(t, x) \equiv 0$ при $|x| \geq y(t)$.

Исследование уравнений и система уравнений типа (11) велось в различных направлениях – исследование асимптотического поведения решений, вопросы существования и не существования (положительных) решений, получение априорных оценок и т.д. Также широко изучались параболические системы уравнения с нелинейностью в главной части. При этом наблюдаемые феномены существенно отличаются от проявляемых свойств решений линейных уравнений. Как показаны в работах многих авторов нелинейные уравнения дивергентного вида являются источником новых нелинейных эффектов, таких как конечная скорость распространения возмущения (КСРВ), пространственная локализация, blow up и др.

Свойства решений задачи (1), (2) зависят от значений параметров системы уравнений (1) и начальной функции $u_0(x)$, $v_0(x)$. В работах [1,3-6] достаточно хорошо изучены свойства решений в частном случае уравнения (1), когда $p_i, q_i > 0$, ($i = 1, 2$) $0 < p_i, q_i < 1$, ($i = 1, 2$), $\varepsilon = -1$, $\varepsilon = +1$, , при $m_1 = m_2 = 1$ или $p = 2$. В них имеют место разные нелинейные эффекты в зависимости от значения параметров [7].

В данной работе с помощью автомодельного анализа решений исследуется глобальная разрешимость типа Фуджиты решений задача Коши, рассматривается влияние переменной плотности, оценка решений, устанавливается асимптотическое поведение автомодельных решений в зависимости от значения числовых параметров системы (1), выявлены критические случаи при котором меняется поведение решения. Решена проблема выбора начальных приближений для численного анализа решений рассматриваемой задачи. Исследовано влияние параметров системы реакции-диффузии на процесс эволюции. Показано, что коэффициент при главном члене асимптотики решения удовлетворяет некоторой системе нелинейных алгебраических уравнений. Предлено соответствующее начальное приближение, сохраняющее свойства нелинейности КСРВ при численном решении. Установлен критический случай $k(p-2) + m_i - 1 = 0$, $i = 1, 2$ при котором поведения решения меняется, а при сингулярном случае когда $p=n$ возникает решение с логарифмической особенностью в начале координат..

ЛИТЕРАТУРА

1. Aripov M., Sadullaeva Sh. To properties of the equation of reaction diffusion with double nonlinearity and distributed parameters. Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2013,
2. Арипов М., Садуллаева Ш. А. Компьютерное моделирование нелинейных процессов диффузии. Ташкент, Университет, 2020, 678 стр.
3. Наац И.Э. Математическое моделирование явления переноса загрязняющих веществ применительно к проблеме экологического мониторинга окружающей среды. Ставрополь, Изд. Сев. КавГТУ, 2001. –С.56-62.
4. Ughi M., A degenerate parabolic equation modelling the spread of an epidemic, Ann. Mat. Pura Appl. 143 (1986) 385–400.
5. Самарский А.А., Соболев И. М. Примеры численного расчета температурных

волн. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, 3, № 4, 702-719.

6. A. S. Kalashnikov, "Some problems of the qualitative theory of nonlinear degenerate parabolic equations of second order," Russian Mathematical Surveys, vol. 42, pp. 169-222, 1987.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕМПЕРАТУРНОГО РЕЖИМА ДВУХПОТОЧНЫХ РЕГЕНЕРАТИВНЫХ ВОЗДУХОПОДОГРЕВАТЕЛЕЙ

Бекимов Мансур

Институт математики им. В.И.Романовского

Садуллаев Лазизбек

Ургенчский государственный университет

В настоящей работе предлагается математическая модель термодинамического процесса двухпоточного регенеративного воздухоподогревателя (РВП), основанная на усреднении величин, связанных с процессом теплообмена между насадками, воздухом и газом как по пространственным координатам, так и по отрезку времени, что приведет к сравнительно простому линейному дискретному уравнению [1-2]. Это позволяет выписать в явном виде расчетные формулы для текущих значений параметров, найти установившийся и периодический режимы, установить эргодичность и другие свойства. Приводятся соответствующие вычисления для случая, когда усреднение по временной переменной производится по отрезку, равному полупериоду вращения барабана РВП.

Пусть двухпоточный РВП представлен в виде цилиндра $x^2 + y^2 \leq R^2$, $0 \leq z \leq 0$. Будем считать, что часть B_A определяется условием $y \geq 0$, а часть B_G – условием $y \leq 0$. Температуру в момент времени t , $t \geq 0$ в точке (x, y, z) , принадлежащей насадкам обозначим $\Theta(t, x, y, z)$, а температуру теплоносителя (воздуха или газа) в точке (x, y, z) вне насадок – $T(t, x, y, z)$. Пара величин $\Theta(t, x, y, z), T(t, x, y, z)$ полностью охарактеризуют процесс теплообмена в РВП, но, как это было отмечено выше, из-за сложности конфигурации насадок начально-граничная задача для соответствующей системы уравнений термо-газодинамики сложно исследовать аналитическими методами. Один из путей преодоления такой сложности предоставляет метод усреднения. С этой целью рассмотрим соответствующие осредненные величины

$$\begin{aligned}\Theta_A(t) &= \frac{1}{V(B_A^\bullet)} \int_{B_A^\bullet} \Theta_A(t, x, y, z) dv, & \Theta_G(t) &= \frac{1}{V(B_G^\bullet)} \int_{B_G^\bullet} \Theta_G(t, x, y, z) dv, \\ T_A(t) &= \frac{1}{V(B_A)} \int_{B_A^0} T_A(t, x, y, z) dv, & T_G(t) &= \frac{1}{V(B_G)} \int_{B_G^0} T_G(t, x, y, z) dv,\end{aligned}$$

где $B_A^\bullet = B_A \cap \bar{B}$, $B_G^\bullet = B_G \cap \bar{B}$, $\bar{B}$ – часть РВП, занимаемая насадками, $B_A^0 = B_A \setminus B_A^\bullet$, $B_G^0 = B_G \setminus B_G^\bullet$, dv – элемент объема, V – объем соответствующей части РВП.

Далее произведем осреднение и по интервалам времени $I(n) = [nh, (n+1)h)$, где h – время полуоборота двухпоточного РВП, $n = 0, 1, 2, \dots$. Полученные при этом средние температуры обозначим

$$x_n = \frac{1}{h} \int_{I(n)} \Theta_A(t) dt, \quad y_n = \frac{1}{h} \int_{I(n)} \Theta_G(t) dt,$$

$$u_n = \frac{1}{h} \int_{I(n)} T_A(t) dt, \quad v_n = \frac{1}{h} \int_{I(n)} T_G(t) dt.$$

Уравнения, связывающие эти величины, выведем при следующих упрощающих предположениях:

1) при $nh \leq t < (n+1)h$ двухпоточный РВП остается неподвижным, порция воздуха (газа), заполнявшая часть B_A^0 (соответственно B_G^0) также остается неподвижной, теплообмен между теплоносителем и насадками происходит в соответствии с линейным законом Ньютона;

2) в момент времени $t = (n+1)h$ нагретая порция воздуха с температурой u_n покидает область B_A^0 , остывшая до температуры v_n порция газа покидает область B_G^0 , барабан скачком поворачивается на 180° (т.е. произойдет переход материальной части $B_A^\bullet$ в часть $B_G^\bullet$ и наоборот); после этого часть B_A^0 заполняется новой порцией воздуха из внешней среды (или из калорифера в случае его подключения к РВП, [12]) с температурой p_n , а часть B_G^0 заполняется новой порцией газа с температурой q_n .

В соответствие с законом Ньютона, имеют место соотношения

$$x_{n+1} = (1 - \beta h) y_n + \beta h q_n, \quad y_{n+1} = (1 - \alpha h) x_n + \alpha h p_n, \quad (1)$$

$$u_n = p_n + \gamma h (x_n - p_n), \quad v_n = q_n + \delta h (y_n - q_n). \quad (2)$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – параметры, зависящие от характеристик процесса теплообмена в РВП (геометрии и теплоемкости корпуса РВП и системы насадок, состава и влажности воздуха и газа, их термодинамических характеристик, коэффициентов теплопроводности и диффузии, параметров, характеризующих процесс теплообмена на поверхностях контакта насадок с воздухом и газом и др.)

Соотношения (1), (2) получены в результате крайне упрощающих предположений о процессе теплообмена в РВП. Тем не менее, благодаря такому упрощению, система (1) допускает достаточно полный анализ, поэтому она может служить базовой моделью для описания работы РВП.

На основе (1), (2) построена компьютерная модель процесса теплообмена в РВП и разработана программа наблюдения за температурой выходящего газа, защищенная авторским свидетельством [3].

ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азамов А.А., Бекимов М.А. Дискретная модель процесса теплообмена во вращающихся регенеративных воздухоподогревателях // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2017, Том 23, № 1, С. 12-19 (№11. Springer: 0,623).

2. Azamov A.A., Bekimov M.A. Simplified Model of the Heat Exchange Process in Rotary Regenerative Air Pre-Heater // Ural Mathematical Journal, Vol. 2, No. 2, 2016. pp. 27-36.

3. DGU 03767 Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ "Программа расчета процесса теплообмена во вращающихся регенеративных воздухоподогревателях". Авторы: Азамов А. А., Бекимов М. А., Абдуганиев А. А. 27.10.2017 г. (регистрационный номер: DGU 20170621).

ГЛОБАЛЬНАЯ СТАБИЛЬНОСТЬ СИСТЕМЫ ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ВИДОВ С КОНВЕКТИВНОЙ И ДИСПЕРСИОННОЙ МИГРАЦИЕЙ

Боборахимова Махбуба

Институт математики имени В.И.Романовского
Академии наук Республики Узбекистан

Джуманазарова Замира

Институт математики имени В.И.Романовского
Академии наук Республики Узбекистан

Исследование стабильности и постоянства модельных сообществ взаимодействующих видов является одним из важных аспектов теоретической биологии. Широко признано, что анализ нелинейной устойчивости и/или областей притяжения равновесных состояний имеет важное значение для полного понимания стабильности и устойчивости экологических систем. В частности, [1] исследовал глобальную стабильность в классе моделей "жертва-хищник", включая модель, в которой хищник обладает функциональной реакцией II типа.

В этой статье я рассматриваю систему двух взаимодействующих видов с конвективной и дисперсионной миграцией. Цель статьи - продемонстрировать утверждение о том, что конвективная миграция видов не влияет на стабильность или нестабильность равновесного состояния системы.

Рассмотрим взаимодействия жертва-хищник двух видов, живущих в конечной ($0 < x < L$) одномерной линейной среде обитания.

$$u_t - d_1 u_{xx} + c_1 u_x = u - \frac{u^2}{\gamma} - \frac{uv}{1+u}, \quad (1)$$

$$v_t - d_2 v_{xx} + c_2 v_x = \frac{\beta u}{1+u} v - \beta \alpha v, \quad (2)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad (3)$$

$$v(0, x) = v_0(x), \quad (4)$$

$$u(t, 0) = u(t, l), \quad u_x(t, 0) = u_x(t, l) \quad (5)$$

$$v(t, 0) = v(t, l), \quad v_x(t, 0) = v_x(t, l), \quad (6)$$

$u(t, x)$ - толщина вида-жертвы, $v(t, x)$ - толщина хищника в момент времени t , а γ - является ли пропускная способность видов-жертв, представляют темпы роста вида на душу населения. d_1, d_2 - представляет коэффициенты диффузии, а c_1, c_2 - их конвективные скорости, а α, β - положительные константы.

Ниже мы находим положения равновесия (u^*, v^*) для задача (1)-(6). Для этого вводим разметку следующим образом

$$f_1(u, v) = u - \frac{u^2}{\gamma} - \frac{uv}{1+u}, \quad (7)$$

$$f_2(u, v) = \frac{\beta u}{1+u} v - \beta \alpha v, \quad (8)$$

$$f_1(u^*, v^*) = 0,$$

$$f_2(u^*, v^*) = 0.$$

Из (7-8) нам ясно известно, что существует 4 положения равновесия как $M_0(0, 0), M_1(\bar{u}, 0), M_2(0, \bar{v})$ и $M_3(u^*, v^*)$. Очевидно, что устойчивое состояние $M_0(0, 0)$ существует всегда. В случае отсутствия видов-убийц стабильной точкой является $M_1(\bar{u}, 0) = M_1(\bar{u}, 0)$. В случае отсутствия видов-жертв стабильная точка $M_2(0, \bar{v}) = M_2(0, \bar{v})$. При появлении, как видов-жертв, так и видов-убийц возможное устойчивое состояние определяется $M_3(u^*, v^*)$ где $u^* = \frac{\alpha}{1-\alpha}$, и $v^* = \left[\gamma - \frac{\alpha}{1-\alpha} \right]$. Здесь u^*, v^* должны быть положительными, если $\alpha < 1$ и $\gamma > \frac{\alpha}{1-\alpha}$.

Все эти найденные состояния равновесия не обеспечивают стабильности. В результате проверки условий устойчивости состояния равновесия $M_0(0, 0), M_1(\bar{u}, 0), M_2(0, \bar{v})$ неустойчивы. $M_3(u^*, v^*)$ глобально асимптотически устойчив

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. B. S. Goh, Global stability in a class of prey-predator models, Bull. Math. Rio/ 40:525-533 (1978).
2. A. Hastings, Global stability of two species systems, J. Math. Biol. 5:399-403 (1978).

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ МНОГОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В НЕФТЯНОМ ПЛАСТЕ ПРИ ЕГО ЗАВОДНЕНИИ

Бурнашев Владимир

Д.ф.-м.н., Самаркандский государственный университет

Холматов Жавлон

Самаркандский государственный университет

Актуальность задачи обусловлена развитием и широким внедрением технологий интенсификации добычи нефти с использованием заводнения. Этот метод сейчас применяется практически во всех нефтедобывающих регионах мира. Накопленный опыт применения данного метода, а также теоретические исследования показывают, что эффективность метода в большей степени зависит от правильного выбора объекта и соответствующей технологии его применения. Поэтому выбор объектов и соответствующей технологии заводнения является актуальной научно-технической

задачей, которая должна решаться на основе теоретических достижений в этой области. Практический интерес представляет прогноз динамики многофазного течения в нефтяном пласте при его заводнении, включающем в качестве составных элементов собственно нефтеносный пласт и водонапорный пласт. Сложность подобной задачи наряду с проблемами расчета процессов многофазной фильтрации усиливается нетривиальностью геометрии. Наиболее достоверную информацию о влиянии значимых факторов на конечный результат (полученная из пласта нефть) можно получить только в результате математического моделирования. Поэтому актуальной является разработка математической модели заводнения нефтяного месторождения.

Динамика многофазного течения в нефтяном пласте при его заводнении, включающем в качестве составных элементов собственно нефтеносный пласт и водонапорный пласт рассматривается в рамках β – модели двухфазной фильтрации. Предполагается, что вода – смачивающая фаза, нефть – не смачивающая фаза. Предполагается, что вода и нефть не смешиваются, не меняются массами и не меняют фазы. Предполагается так же, что флюиды в пласте находятся при постоянной температуре и в состоянии термодинамического равновесия [1].

Тогда система дифференциальных уравнений, описывающих фильтрацию нефти и воды можно представить в виде [2]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{mS_1}{B_1} \right] + \nabla \cdot \left[\frac{W_1}{B_1} \right] = Q_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{mS_2}{B_2} \right] + \nabla \cdot \left[\frac{W_2}{B_2} \right] = Q_2,$$

где: индексы 1, 2 – соответствуют воде и нефти; S_α , Q_α , ($\alpha = \overline{1,2}$)- насыщенности, и суммарный дебит скважин, m – пористость пласта, t – время, $B_1 = \frac{[V_1]_{ny}}{[V_1]_{cy}}$, $B_2 = \frac{[V_2]_{ny}}{[V_2]_{cy}}$, – объемные коэффициенты, $[V_\alpha]_{ny}$ – объем, занятый фиксированной массой фазой α ; $[V_\alpha]_{cy}$ – объем, занятый фазой α при нормальных условиях ($\alpha = \overline{1,2}$); $W_\alpha = -\frac{Kf_\alpha}{\mu_\alpha}(\nabla p - \gamma_\alpha \nabla Z)$ – вектор фазовых скоростей, K – абсолютная проницаемость пласта; f_α – относительные фазовые проницаемости; μ_α – вязкости фаз; γ_α – удельный вес фаз; p – внутрислоежное давление.

Для замыкания этой системы кроме вытекающих из определений соотношения

$$\sum_{\alpha=1}^2 S_\alpha = 1,$$

и зависимостей

$$f_\alpha = F_\alpha(S_1, S_2)$$

требуется знание сложных многопараметрических зависимостей

$$B_\alpha = F_\alpha(p, S_1, S_2),$$

$$\mu_{\alpha} = F_{\alpha}(p, S_1, S_2),$$

Система дифференциальных уравнений с замыкающими соотношениями и соответствующими начальными и граничными условиями представляет собой математическую модель многофазной фильтрации в нефтяном пласте.

Предлагаемая математическая модель позволяет исследовать процессы многофазной фильтрации происходящие в нефтяном пласте при его заводнении с учетом различного расположением систем нагнетательных и добывающих скважин.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Вахитов М.Л., Сургучев М.Л. и др. Методика расчета технологических расчетов разработки нефтяных и нефтегазовых залежей // В сб. Разработка нефтегазовых и нефтегазоконденсатных месторождений. -М.Наука.1978. с.21-52.

2. Khuzhayorov B.Kh., Burnashev V.F. Modelling the multiphase flow of an oil-gas-condensate system in porous media // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2001. 29. 67-82.

АВТОКОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Зафаров Ахмадбек

Андижанский государственный университет

Автоколебания -незатухающие колебания в диссипативной динамической системе с нелинейной обратной связью, поддерживающиеся за счёт энергии постоянного, то есть *непериодического* внешнего воздействия.

Автоколебания отличаются от *вынужденных колебаний* тем, что последние вызваны *периодическим* внешним воздействием и происходят с частотой этого воздействия, в то время как возникновение автоколебаний и их частота определяются внутренними свойствами самой автоколебательной системы.

Термин *автоколебания* в русскоязычную терминологию введён А. А. Андроновым в 1928 году [1,2,3].

Примерами автоколебаний могут служить:

- незатухающие колебания маятника часов за счёт постоянного действия тяжести заводной гири;
- колебания скрипичной струны под воздействием равномерно движущегося смычка
- возникновение переменного тока в цепях мультивибратора и в других электронных генераторах при постоянном напряжении питания;
- колебание воздушного столба в трубе органа, при равномерной подаче воздуха в неё. (см. также Стоячая волна)
- флаттер и бафтинг элементов конструкции летательного аппарата.

Автоколебания лежат в основе многих явлений природы:

- колебания листьев растений под действием равномерного потока воздуха;
- образование турбулентных потоков на перекатах и порогах рек;
- голоса людей, животных и птиц образуются благодаря автоколебаниям, возникающим при прохождении воздуха через голосовые связки;
- действие регулярных гейзеров и пр[1,3,5].

На автоколебаниях основан принцип действия большого количества всевозможных технических устройств и приспособлений, в том числе:

- работа всевозможных часов, как механических, так и электрических;
- звучание всех духовых и струнно-смычковых музыкальных инструментов;
- действие всевозможных генераторов электрических и электромагнитных колебаний, применяемых в электротехнике, радиотехнике и электронике;
- работа поршневых паровых машин и двигателей внутреннего сгорания;
- некоторые системы автоматического регулирования работают в режиме автоколебаний, когда регулируемая величина колеблется в окрестности требуемого значения, то превышая его, то опускаясь ниже него, в допустимом для целей регулирования диапазоне (например, система терморегулирования бытового холодильника).

Разрушение Тэкомского моста (США, штат Вашингтон) 7 ноября 1940 года вследствие автоколебаний, возникших под действием ветра[6].

В то же время, в некоторых технических системах автоколебания могут возникать без специального намерения конструкторов этих систем, в результате неудачного выбора их технических параметров. Такие автоколебания могут быть нежелательными (например, «рычание» водопроводного крана при определённых расходах воды), а зачастую разрушительными, являющимися причиной аварий с тяжёлыми последствиями, когда речь идёт о системах с большими уровнями энергии, циркулирующей в них. Например:

- в турбинах электростанций;
- в реактивных авиационных (помпаж) и ракетных двигателях;
- в магистралях газов и жидкостей высокого давления;
- флаттер различных элементов летательных аппаратов;
- ветровой резонанс - автоколебания высотных сооружений со значительным аэродинамическим сопротивлением при воздействии ветра определённой скорости (возникновение вихрей Кармана) и др.

Автоколебания могут иметь различную природу: механическую, тепловую, электромагнитную, химическую[4]. Механизм возникновения и поддержания автоколебаний в разных системах может основываться на разных законах физики или химии. Для точного количественного описания автоколебаний разных систем может потребоваться разный математический аппарат.

Диссипация (рассеивание энергии) в автоколебательной системе возмещается за счёт поступления в неё энергии из источника постоянного воздействия, благодаря чему автоколебания не затухают.

Если колеблющийся элемент системы способен к собственным *затухающим колебаниям* (т. н. *гармонический диссипативный осциллятор*), автоколебания (при равенстве диссипации и поступления энергии в систему за время периода) устанавливаются на частоте, близкой к *резонансной* для этого осциллятора, их форма становится близкой к гармонической, а амплитуда, в некотором диапазоне значений, тем больше, чем больше величина постоянного внешнего воздействия.

Примером такого рода системы может служить храповой механизм маятниковых часов. Кинематика механизма играет роль обратной связи в системе, синхронизируя

вращение колеса с колебаниями маятника таким образом, что за полный период колебания колесо поворачивается на угол, соответствующий одному зубцу.

Автоколебательные системы, не содержащие гармонических осцилляторов, называются *релаксационными*. Колебания в них могут сильно отличаться от гармонических, и иметь прямоугольную, треугольную или трапецеидальную форму. Амплитуда и период релаксационных автоколебаний определяются соотношением величины постоянного воздействия и характеристик инерционности и диссипации системы.

Простейшим примером релаксационных автоколебаний может служить работа электрического звонка.

Инерционность этой системы определяется двумя различными физическими величинами: моментом инерции якоря A и индуктивностью обмотки электромагнита E . Увеличение любого из этих параметров приводит к увеличению периода автоколебаний.

При наличии в системе нескольких элементов, колеблющихся независимо друг от друга, и одновременно воздействующих на нелинейный регулятор или регуляторы (которых тоже может быть несколько), автоколебания могут принимать более сложный характер, например, *апериодический*, или *динамический хаос*.

Молоток Маклакова.

Молоток, совершающий удары за счёт энергии переменного тока с частотой, во много раз меньшей частоты тока в электрической цепи [3,5].

Катушка L колебательного контура помещается над столом (или другим предметом, по которому требуется ударять). Снизу в неё входит железная трубка, нижний конец которой является ударной частью молотка. В трубке есть вертикальная прорезь, чтобы уменьшить токи Фуко. Параметры колебательного контура такие, что собственная частота его колебаний совпадает с частотой тока в цепи (например, переменного городского тока, 50 герц).

После включения тока и установления колебаний наблюдается резонанс токов контура и внешней цепи, и железная трубка втягивается в катушку. Индуктивность катушки растёт, колебательный контур выходит из резонанса, а амплитуда колебаний тока в катушке уменьшается. Поэтому трубка возвращается в исходное положение -вне катушки -под действием силы тяжести. Затем колебания тока внутри контура начинают нарастать, и снова наступает резонанс: трубка опять втягивается в катушку.

Трубка совершает автоколебания, то есть периодические движения вверх и вниз, и при этом громко стучит по столу, подобно молотку. Период этих механических автоколебаний в десятки раз превосходит период переменного тока, поддерживающего их.

Молоток назван по имени М. И. Маклакова, лекционного ассистента Московского физико-технического института, предложившего и осуществившего такой опыт для демонстрации автоколебаний.

Воздействие может быть периодическим, например вибрации, и при этом в системе будут возникать автоколебания со своей частотой, отличной от частоты вибраций. В частности, это может происходить благодаря осреднённым вибрационным

явлениям, например в случае средних течений, возбуждаемых в вязких пограничных слоях жидкости (слои Стокса, механизм Шлихтинга). Так это происходит при автоколебаниях границы раздела двух жидкостей в осциллирующей системе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сивухин Д. В. Общий курс физики. - М.- Наука, 2020.
2. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. - М.: Наука, 1937.
3. Физика. Большой энциклопедический словарь / Гл. ред. А. М. Прохоров. -4-е изд. -М.: Большая Российская энциклопедия, 1999. -С. 85-88. -ISBN 5-85270-306-0.
4. Вавилин В.А. Автоколебания в жидкофазных химических системах // Природа. -2000. -№ 5.
5. Харкевич А. А. Автоколебания. М.: ГИТТЛ, 1954.
6. A. Jenkins. Self-oscillation // ArXiv.org. -2011. -Р. 1-17.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ФЛЮИДОВ В ТРЕХСЛОЙНОМ ПЛАСТЕ

Каюмов Шукур

к. ф.-м. н Ташкентский Государственный Технический Университет

Хаитов Тожибой

Ташкентский Государственный Технический Университет

Марданов Арслон

Ташкентский Государственный Технический Университет

Каюмов Анвар

ИНХА в Ташкенте

Рассмотрим подземную пористую среду состоящей из трехслойного пласта, которые по своим характеристикам позволяет предположить, возможность применения математической модели фильтрации флюидов изложенной в работе [1].

Научные исследование поэтому направление, когда многослойной пласты насыщено флюидами подчиняющей ньютоновским законом проведены достаточно много [2-3]. Однако относительно нелинейной фильтрации флюидов подчиняющихся неньютоновские законом исследование проведено недостаточно [4,5], особенно для флюидов обладающая структурными свойствами, почти отсутствует.

Структурированные флюиды характерны тем, что в процессе фильтрации образуется три зоны фильтрации, под воздействиями структуры пористой среды и структурным свойствам самого флюида. В этих зонах скорость фильтрации флюида описывается со своими аналитическими выражениями, при этом различают зоны ползучести, зоны аномальной подвижности и зоны «ускоренной» фильтрации. Так как скорости фильтрации в этих зонах различные, то предполагается существование неизвестных подвижных границ между этими зонами [6-8].

Пусть пористая среда состоит из трех пластов (при необходимости их можно считать многократными слоистыми пластами), при этом средний пласт (область Ω_2) считается хорошо проницаемый, горизонтальная проницаемости который несколько порядок выше чем вертикальные и следовательно движение флюида в нем будет происходит по горизонтали, кроме того эта пласт насыщено структурированными

флюидами. Соседние пласты верхний (область Ω_1) и нижний (область Ω_3) характерны тем, что в них вертикальные характеристики проницаемости несколько порядков выше чем горизонтальные и фильтрация будет в основном происходить по вертикали. Считается что области Ω_1 и Ω_3 насыщенны ньютоновскими флюидами (при необходимости можно предположить наличие в этих областях неньютоновских флюидов). Эти предположения позволяют говорить об отсутствии неизвестных подвижных границ в области Ω_1 и Ω_3 , что упрощает построение вычислительных алгоритмов решения.

Эту физическую задачу можно математически моделировать так: найти непрерывную функции $U_1(x, z, t)$, $U_2(x, t)$, $U_3(x, z, t)$ а также границы подвижных зон $G_1(x, t)$ и $G_2(x, t)$ из следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{K_1(z)}{h_1 \mu_1} \frac{\partial U_1}{\partial z} \right) = M_1 \frac{\partial U_1}{\partial t}, \quad z \in \Omega_1, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi_1(|\nabla U_1|, \beta_1) \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) + \psi_1(k_1, h_1, \mu_1) \frac{\partial U_1}{\partial z} \Big|_{z=H_1} - \\ - \psi_3(k_3, h_3, \mu_3) \frac{\partial U_3}{\partial z} \Big|_{z=H_3} = M_l \frac{\partial U_2}{\partial t}, \quad x \in \Omega_2, z \in (H_1, H_2), t > 0, l = 1, 3. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{K_3(z)}{h_3 \mu_3} \frac{\partial U_3}{\partial z} \right) = M_3 \frac{\partial U_3}{\partial t}, \quad z \in \Omega_3, \quad t > 0. \quad (3)$$

Начальные условия

$$U_1(x, z, 0) = U_3(x, z, 0) = U_0(x, z), \quad U_2(x, 0) = U_0(x), \quad (4)$$

Граничные условия

$$\alpha_1 \chi_1(|\nabla U_2|, \beta_1) \frac{\partial U_2}{\partial x} \Big|_{x=x_0} + \alpha_2 U_2 \Big|_{x=x_0} = \varphi_0(t), \quad (5)$$

$$\beta_1 \chi_3(|\nabla U_2|, \beta_3) \frac{\partial U_2}{\partial x} \Big|_{x=x_L} + \beta_2 U_2 \Big|_{x=x_L} = \varphi_1(t), \quad (6)$$

$$\alpha_1 \frac{K_1(z)}{h_1 \mu_1} \frac{\partial U_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad \alpha_2 \frac{K_3(z)}{h_3 \mu_3} \frac{\partial U_3}{\partial z} \Big|_{z=H_3} = 0. \quad (7)$$

Условия на подвижных границах

$$\chi_1(|\nabla U_2|, \beta_1) \frac{\partial U_2}{\partial x} \Big|_{x=l_1-0} = \chi_2(|\nabla U_2|, \beta_2) \frac{\partial U_2}{\partial x} \Big|_{x=l_1+0}, \quad (8)$$

$$\chi_2(|\nabla U_2|, \beta_2) \frac{\partial U_2}{\partial x} \Big|_{x=l_2-0} = \chi_3(|\nabla U_2|, \beta_3) \frac{\partial U_2}{\partial x} \Big|_{x=l_2+0}, \quad (9)$$

$$U_2(x, t) \Big|_{x=l_1-0} = U_2(x, t) \Big|_{x=l_1+0}, \quad (10)$$

$$U_2(x, t) \Big|_{x=l_2-0} = U_2(x, t) \Big|_{x=l_2+0}, \quad (11)$$

здесь $k_i (i = \overline{1,3})$ коэффициенты проницаемости, $h_i (i = \overline{1,2})$ - мощности пластов, $\mu_i (i = \overline{1,3})$ - вязкости флюидов, $M_i (i = \overline{1,3})$ - коэффициенты нелинейности и пористости среды, $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$, $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$, α_1, α_2 - характерные размерности.

$$\chi_i(|\nabla U_2|, \beta_i) = \begin{cases} \frac{k_2}{\mu_2} (1 - \beta_2 \gamma_0 / |\nabla U_2|), & x \in (x_0; l_1 - 0); \\ \frac{k_2 |\nabla U_2|}{\mu_2 (\beta_2 + |\nabla U_2|)}; & x \in (l_1 + 0, l_2 - 0); \frac{k_2}{\mu_2}, & x \in (l_2 - 0; L) \end{cases}.$$

$\varphi_0(t), \varphi_1(t)$ - заданные функции, $\beta_i (i = \overline{1,3})$ - критические значения градиентов, $l_1(t)$ и $l_2(t)$ положение границы подвижных зон соответствующие к $G_1(x, t)$ и $G_2(x, t)$. Задача (1)-(11) решается численными методами. При этом сначала задача линеаризуется, и строится итерационный процесс. Далее применяя метод прямых по t получим дифференциально краевую задачу относительно (1)-(11). В дальнейшем, введением потока, будет получено задача в потоках. Интегрируя эти задачи на определенном сеточном интервале и применяя потоковый вариант разностной прогонки, получим сеточные уравнения [9]. Построенные численные алгоритмы апробированы на данных вида:

$$h_1 = 0,3; h_2 = 0,6; h_3 = 0,9. \Delta x = 0,01; \Delta z = 0,01; \varphi_1 = \varphi_2 = 0,85703; \tau = 0,04328.$$

$$k_1 = k_2 = 0,03. k_2 = 1. \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1,602 \cdot 10^{-4}. m_i = 0,2. (i = \overline{1,3}). h_0 = 0.$$

Частичные результаты расчета приведены в виде рисунка и таблицы

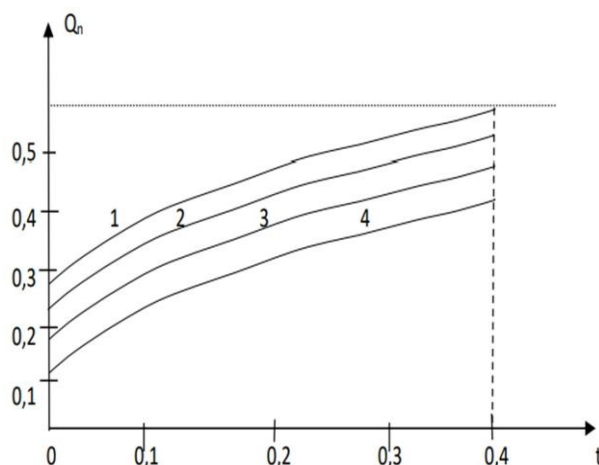


Рис. Изменение функции перетока по времени при $t = 0,2; 0,3; 0,4$.

В таблице приведены величины давления в среднем пласте в зависимости от соотношений k/k_n

Таблица 1.

t	$k/k_n = 10$	$k/k_n = 15$	$k/k_n = 25$	$k/k_n = 30$
100	0,97843	0,97616	0,97304	0,97294
200	0,95793	0,95424	0,95202	0,95118

400	0,88449	0,88101	0,87991	0,87059
700	0,79792	0,78342	0,78110	0,78038

Анализ результатов расчета показало, что небольшое изменение проницаемости по вертикали, влияет на количество перетока из верхней и нижней, в средней пласт что сказывается на перераспределение давление. Замечено что в зоне сильной подвижности величины перетока из пропластков немного больше чем в зоне аномальных подвижностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хантуш М.С. Новое в теории перетекания. Сб. Вопросы гидрогеологических расчетов М. : «Мир», 1964. С. 25-32.
2. Гусейнзаде М.А., Колосовская А.К. Упругий режим в однопластовых и многопластовых системах.-М.: Недра, 1972. 454 с.
3. Гусейнов Г.П., Валиев М.Н., Джаббаров И.И. Движение жидкости в кусочно-однородном пласте со слабо проницаемой кровлей. Изв. АН. Уз ССР, сер. Физ. техн. и мат. наук, 1972., №1. С.16-20.
4. Мухидинов Н. Методы расчета показателей разработки многопластовых месторождений нефти и газа. -Ташкент: Фан Уз ССР. 1978. 116 с.
5. Мухидинов Н., Мукимов Н., и др. Численное моделирование многомерных прямых и обратных задач нестационарной фильтрации жидкости и газа в многослойных пластах. В сб.: Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. -Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1980, с. 165-170.
6. Каюмов Ш., Марданов А.П., Хаитов Т.О., Каюмов А.Б. Математического моделирования структурированных флюидов в связанных пластах. Сборник трудов международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механике». Воронеж. 2020, с. 934-942.
7. Каюмов Ш., Марданов А.П., Хаитов Т.О. Математическое моделированное неньютоновских и структурированных флюидов в многослойной среде. Материалы научной конференции «Актуальные проблемы статистического анализа». Ташкент. 2021. С. 558-561.
8. Хаитов Т.О., Марданов А.П., Каюмов Ш. Каюмов. А.Б. Математическая модель процесса фильтрации неструктурированных и структурированных флюидов в слоистых пластах. Сборник трудов международной научно- практической конференции «Современные проблемы математической физики и математического моделирования» Карши. 2021. С 51-54.
9. Самарский А.А., Гульин А.В., Численные методы. Москва. Наука. 1989. 484 с.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМ ИСТОЧНИКОМ

Мамадалиева Шахноза
ФерГУ

1. Постановка прямой и обратной задачи с сосредоточенным источником

Прямая задача с сосредоточенным источником состоит в нахождении обобщенного решения $u(x,t)$ задачи Коши [1, 2]

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \quad x \in R, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \delta(x) \quad (2)$$

где $\delta(x)$ - дельта функция Дирака. В обратной задаче требуется восстановить непрерывную функцию $q(x)$ по дополнительной информации о решении прямой задачи (1), (2)

$$u(0, t) = r(t), \quad u_x(0, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Задача (1), (2) с начальным условием в виде дельта-функции поставлена для нахождения обобщенного решения. Согласно изложенным в работах [1, 2] результатам прямая задача (1)-(2) эквивалентна следующей задаче Гурса:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \\ u|_{t=|x|} = \frac{1}{2}, \quad |x| < t < 2a - |x|, \end{cases} \quad (4)$$

где $q(x)$ - заданная функция.

Рассмотрим область $D = \{-a < x < a, \quad 0 < t < 2a\}$. Задача Гурса численно решается в области $D_1 = \{-a < x < a, \quad |x| < t < 2a - |x|\}$, $D_1 \subset D$. Строим равномерную сетку D_{hr} .

$$D_{hr} = \{(x_l, t_n): x_l = -a + l \cdot h, \quad l = 0, 1, \dots, N, \quad h \cdot N = 2a; \quad t_n = n \cdot \tau, \quad n = 0, 1, \dots, K, \quad K \cdot \tau = 2a\}.$$

Номер узла сетки при $x = 0$ обозначим через $m = \left\lfloor \frac{N}{2} + 1 \right\rfloor$, искомую сеточную функцию определим как

$$r^n = u_m^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, K.$$

Гиперболическое уравнение (4) численно решается в области D_{hr} с помощью разностной схемы:

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\tau^2} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} - 0,5(q_{i+1} + q_{i-1}) \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n}{2}, \quad (5)$$

при $\tau = h$ получается схему квадрат:

$$u_i^{n+1} = u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - u_i^{n-1} - h^2 \frac{q_{i+1} + q_{i-1}}{2} \left(\frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n}{2} \right), \quad n = 2, 4, 6, 8, \dots, K. \quad (6)$$

где $i = i_l = m, m-1, m-2, \dots, 1$ для вычисления значений решения в узлах расположенных слева от линии $x = 0$;

$i = i_p = m+1, m+2, \dots, N$ для вычисления значений решения в узлах расположенных справа от линии $x = 0$.

Граничные условия для сеточной задачи

$$\begin{aligned} u_i^n &= 0,5; \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad n = m, m-1, \dots, 1; \\ u_i^n &= 0,5; \quad i = m+1, m+2, \dots, N; \quad n = 1, 2, \dots, m; \end{aligned} \quad (7)$$

Так как по формуле (6) значения решения по направлению t находится в узлах кратным двум, другие значения находятся линейной интерполяцией по значениям решения в четырех соседних узлах.

Решение прямой задачи с сосредоточенным источником для гиперболического уравнения с заменой $\delta(x)$ - дельта функции Дирака, функцией удовлетворяющей некоторым ее свойствам

Прямая задача (1),(2) является корректной, т.е. ее решение существует, оно единственно и непрерывно зависит от начальных данных. Задаем множество точек сетки. На отрезке $[-x_l, x_l]$ построим разностную сетку с шагом h , т.е. множество точек

$$\omega_h = \{x_j = -x_l + (j-1)h, \quad j = 1, 2, \dots, 2n+1, \quad hn = x_l\},$$

и сетку по направлению переменной t с шагом Δt , которую обозначим

$$\omega_{\Delta t} = \{t_k = (k-1)\Delta t, \quad k = 1, 2, \dots, 2n+1, \quad 2n\Delta t = T\}.$$

Для задачи (1), (2) в сеточной области $\omega_h \times \omega_{\Delta t}$ построим следующую трехслойную разностную схему

$$\frac{y_j^{k+1} - 2y_j^k + y_j^{k-1}}{\Delta t^2} = \frac{y_{j+1}^k - 2y_j^k + y_{j-1}^k}{h^2} - q_j y_j^k. \quad (8)$$

Разностное уравнение (8) имеет второй порядок погрешности аппроксимации по Δt и по h . Решение y_j^{k+1} выражается явным образом через значения на предыдущих слоях

$$y_j^{k+1} = \left(2 - 2\frac{\Delta t^2}{h^2} - \Delta t^2 q_j\right) y_j^k - y_j^{k-1} + \frac{\Delta t^2}{h^2} y_{j+1}^k + \frac{\Delta t^2}{h^2} y_{j-1}^k \quad (9)$$

Необходимые для начала счета по формуле (9) значения $y_j^0, y_j^1, j = 1, 2, \dots, 2n+1$ берутся из начальных условий (2):

$$y_j^0 = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2n+1, \quad (10)$$

$$y_j^1 = y_j^0 + \Delta t \delta_j, \quad j = 1, 2, \dots, 2n+1. \quad (11)$$

Алгоритм расчета заключается в вычислении $y_j^{k+1}, k = 2, 3, \dots, n+1, j = k, k+1, \dots, n+1$ согласно формуле (9).

Простейшая замена второго из начальных условий (2) уравнением

$$\frac{y_j^1 - y_j^0}{\Delta t} = \delta(x_j)$$

имеет лишь первый порядок аппроксимации по Δt .

Разностное уравнение

$$\frac{y_j^1 - y_j^0}{\Delta t} = \delta(x_j) + \frac{\Delta t}{2} (u_{xx}(x_j, 0) - q(x_j)u(x_j, 0)), \quad j = 1, 2, \dots, 2n+1$$

аппроксимирует второе из условий (2) со вторым порядком по Δt и по h .

Для исследования устойчивости разностной схемы (8) решение представим в виде

$$y_j^k = \eta^k e^{ijh\varphi}.$$

Подставляя это выражение в (8) и сокращая на $\eta^k e^{ijh\varphi}$ получим для η квадратное уравнение

$$\eta^2 - 2 \left(1 - 2\gamma \sin^2 \frac{h\varphi}{2} - \frac{1}{2} \Delta t^2 q_j \right) \eta + 1 = 0, \quad \xi = \frac{\Delta t^2}{h^2}. \quad (12)$$

Будем считать разностное уравнение (8) устойчивым, если оба корня уравнения (12) не превосходят по модулю единицы. Разностное уравнение устойчиво, если при всех действительных φ выполняется неравенство

$$\left(1 - 2\xi \sin^2 \frac{h\varphi}{2} - \frac{1}{2} \Delta t^2 q_j \right)^2 \leq 1,$$

$$\text{т.е. } 0 \leq 2\xi \sin^2 \frac{h\varphi}{2} + \frac{1}{2} \Delta t^2 q_j \leq 2.$$

Последнее неравенство выполняется при всех φ , если

$$4\xi + \Delta t^2 |q_j| \leq 4.$$

Для проведения численных расчетов используем функции

$$q(x) = \frac{2(3x^2 - \varepsilon^2)}{(x^2 + \varepsilon^2)^2}, \quad \delta_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}.$$

где ε - малый параметр, $\delta_\varepsilon(x) \rightarrow \delta(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. В таком случае точное решение задачи (1), (2) имеет вид

$$u(x, t) = \frac{\varepsilon t}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}, \quad r(t) = \frac{t}{\pi\varepsilon}.$$

Погрешность решения задачи разностной схемой (9)-(11) составляет

$$\max_k |r(t^k) - y_0^k| = \varepsilon_T.$$

$$\varepsilon_T = 0.000026 \quad \text{при } n = 100, \quad \varepsilon = 0.01, \Delta t = 0.00005, \quad h = 0.0005, \quad \delta(0) = 31.83.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. - М.: Наука, 1984. - 263с.
2. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. - Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. - 457 с.

К ЧИСЛЕННОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА РЕАКЦИИ – ДИФУЗИИ

Мухаммадиев Жаббор

К.ф.-м.н. НУУЗ

Ўринбоева Шахноза

НУУЗ

Рассмотрим в области $Q = \{(t, x) : t > 0, x \in R^N\}$ параболическая система двух квазилинейных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^{\sigma_1} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \varepsilon u^{\beta_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{\alpha_1} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^{\sigma_2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \varepsilon v^{\beta_2} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^{\alpha_2} \end{cases} \quad (1)$$

Описывающая процесс реакции-диффузии. Система (1) описывает многие физические явления: процессы реакции-диффузии, теплопроводности, фильтрации.

σ, α, β – заданные числовые параметры, $\varepsilon = \pm 1$.

Исследование различных решений системы (1) в общих случаях представляет собой весьма сложную задачу [1]. Поэтому в данной работе мы исследовали асимптотические свойства автомодельных решений системы (1) построенных методом нелинейного расщепления [2].

Построены автомодельные системы уравнений, изучены их асимптотические свойства на основе которых получены оценки решений. Проведены численные эксперименты для различных значений параметров. Предложена начальные приближения для итерационного процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А., и др. Режимы с обострением для квазилинейных параболических уравнений. М., Наука. 1987. 520 ст.
2. Арипов М.М. Методы эталонных уравнений для решения нелинейных краевых задач. Ташкент, Фан, 1988. 137 ст.
3. Aripov M., Muhammadiev L. Asymptotic behavior of automodel solutions for one system of quasilinear equations of parabolic type. France. Buletin Stiintific – Universitatea din Pitesti, Seria Matematica si Informatica. №3, 1999, P.19-40.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НОРМЫ ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ С ПРОИЗВОДНЫМИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

Нуралиев Фарход

д.ф.-м.н. проф. ТГТУ, Институт математики АН РУз

Кузиев Шахобиддин

Институт математики АН РУз

Мы будем рассматривать квадратурные формулы следующего вида, которые называются квадратурными формулами типа Эйлера – Маклорена:

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \cong \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{\beta=0}^N C_i[\beta] \varphi^{(i)}(x_{\beta}), \quad \alpha = 0, 1, \dots, m-1. \quad (1)$$

Далее дадим краткий обзор полученных недавних результатов по квадратурным формулам типа Эйлера-Маклорена.

В работе И.Шенберга [1], с помощью метода сплайн функций, доказана оптимальность квадратурной формулы Эйлера-Маклорена и вычислена погрешность этой формулы в пространстве $L_2^{(m)}(0, n)$.

Пусть W_p^m ($m=1, 2, \dots$) – класс функций f , имеющих на $[0, 1]$ $(m-1)$ -ю абсолютно непрерывную производную, и у которых $\|f^{(m)}\|_p \leq 1$, где $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p(0,1)}$ ($1 \leq p \leq \infty$). В работе А.А.Женсыкбаева [2] доказана оптимальность квадратурной формулы (1) в пространстве W_p^m при $\alpha = m-1$, а в работе Х.М.Шадиметова [3] -

оптимальность решетчатых квадратурных и кубатурных формул типа Эйлера–Маклорена (1) в непериодическом пространстве Соболева $L_2^{(m)}$ при $\alpha = m - 1$.

В работе [4] с использованием метода φ – функции доказана оптимальность квадратурной формулы Эйлера–Маклорена и вычислен погрешность этой формулы в пространстве $L_2^{(2)}(0,1)$. Этот результат получается из наших результатов при $m = 2$. А в [5] обсуждены разные методы построения оптимальных квадратурных формул вида (1) и приведены некоторые примеры.

При $\alpha = 0$ задача об оптимальности решетчатых квадратурных формул вида (1) в различных пространствах рассмотрена многими авторами (как отмечалось выше, А.Сардом, Л.Ф.Мейерсом, Г.Команом, И.Шенбергом, С.Силлиманом, С.Л.Соболевым, З.Ж.Жамаловым, Ф.Я.Загировой, Х.М.Шадиметовым, А.Р.Хаётовым и др.) и полностью решена в работах [6, 7] в пространстве $L_2^{(m)}$.

Здесь, естественно, возникает задача о построении оптимальных решетчатых квадратурных формул при $0 < \alpha < m - 1$.

В настоящей работе рассматривается задача построения оптимальных решетчатых квадратурных формул при $\alpha = 2$.

Рассмотрим следующую квадратурную формулу

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_0[\beta] \varphi(h\beta) + \frac{h^2}{12} (\varphi'(0) - \varphi'(1)) + \sum_{\beta=0}^N C_1[\beta] \varphi''(h\beta) \quad (2)$$

с функционалом погрешности

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N C_0[\beta] \delta(x - h\beta) + \frac{h^2}{12} (\delta'(x) - \delta'(x-1)) - \sum_{\beta=0}^N C_1[\beta] \delta''(x - h\beta) \quad (3)$$

где $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ – характеристическая функция отрезка $[0,1]$, $[\beta] = h\beta$, $h = \frac{1}{N}$,

$$N = 1, 2, 3, \dots, C_0[\beta] = \begin{cases} \frac{h}{2}, & \text{если } \beta = 0, N; \\ h, & \text{если } \beta = \overline{1, N-1}, \end{cases} \quad C_1[\beta] - \text{коэффициенты}$$

квадратурной формулы (2), $\delta(x)$ – известная дельта- функция Дирака.

В пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ вычислена квадрат нормы функционала погрешности (3), так как коэффициенты $C_0[\beta]$ фиксированы, здесь норму функционала погрешности (3) будем минимизировать только по коэффициентам $C_1[\beta]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schoenberg I.J. On monosplines of least deviation and best quadrature formulae. J.SIAM Numerical Analysis. Ser.B, vol. 2, No.1. (1965), pp. 144-170.
2. Женсыкбаев А.А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи матем. наук. –Москва, 1981.-Т. 36, № 4. -С. 107—159.

3. Шадиметов Х.М. Об оптимальных решетчатых квадратурных и кубатурных формулах // Докл. РАН. –Москва, 2001.- Т. 376, № 5. -С. 597 - 599.
4. Teodoro Catanas and Gheorghe Coman. Optimal quadrature formulas based on the φ – function method. Studi Univ. “Babes-Bolyai”, Matematica, vol. L II, № 6, (January 2005) Pp. 1-16.
5. Petru Bloga and Gheorghe Coman. Some problems on optimal quadrature. Studi Univ. “Babes-Bolyai”, Matematica, vol. L II, №4, (December 2007), Pp. 21-44.
6. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Nuraliev F.A. On an optimal quadrature formula in the Sobolev space // Journal of Comp. Appl. Math. – 2013. – 243. – pp. 91-112.
7. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Nuraliev F.A. Optimal quadrature formulas of Euler Maclaurin type // Applied Mathematics and Computation. – 2016. – 276. – pp. 340-355.

МЕТОД ПОИСКА НАПРАВЛЕНИЯ НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА В ОДНОЙ МОДЕЛИ НЕГЛАДКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Отакулов Салим

Д.ф.-м.н., Джизакский Филиал Национального Университета Узбекистана

Абдухамидов Нодир

Джизакский Филиал Национального Университета Узбекистана

1. Введение. Постановка задачи. Задачи выбора наилучшего решения из множества возможных вариантов часто возникают при экономическом планировании и инженерного проектирования, в процессах управления из различных сфер техники и производства. Математическое моделирование этих задач приводит к проблемам оптимизации определенной целевой функции, которая используется для количественной оценки выбираемого решения. Часто возникают модели оптимизации негладких целевых функций. Одним из подходов, приводимых к задачам негладкой оптимизации [1–3], является принцип минимакса [4,5], основанный на оптимизации гарантированного значения критерия качества.

Каждая негладкая функция, возникающая в результате максимизации (или минимизации) функционала по определенному параметру имеет специфику, связанную с заданием самого функционала и ограничений на параметры. Следует отметить, что метод решения каждой негладкой задачи оптимизации существенно зависит от структурных свойств заданной целевой функции и ограничений. Задачи оптимизации негладких функций привели к развитию теории субдифференцируемых и квазидифференцируемых функций [2,3,6]. Оптимизация негладких функционалов составляет важный класс для задач управления ансамблем траекторий динамических систем [7,8].

В математических моделях задач принятия решения часто возникают задачи минимизации негладких функций вида

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad f_1(x) = \sup_{u \in U} \sum_{i=1}^{m_1} \varphi_i(u) g_i(x), \quad f_2(x) = \inf_{v \in V} \sum_{j=1}^{m_2} \psi_j(v) p_j(x) \quad (1)$$

где $\varphi_i(u)$, $g_i(x)$, $\psi_j(v)$, $p_j(x)$ – заданные непрерывные функции, $x \in R^n$, $u \in R^s$, $v \in R^k$, множества $U \subset R^s$ и $V \subset R^k$ компактны. В заданных условиях функции $f_1(x)$ и

$f_2(x)$ непрерывны, но они входят в класс негладких функций. Различные свойства функций вида (1) и применение их для получения условий оптимальности в задачах минимизации таких функций рассмотрены в [9,10]. В данной работе будем использовать их для разработки метода построения направления наискорейшего спуска.

2. Условия оптимальности и поиск направления наискорейшего спуска. Если $\varphi_i(u) \geq 0, i = \overline{1, m_1}, \psi_j(v) \geq 0, j = \overline{1, m_2}$, функции $g_i(x), i = \overline{1, m_1}$, выпуклы на выпуклом множестве $S \subset R^n$, а функции $p_j(x) j = \overline{1, m_2}$, вогнуты на S , то функция $f_1(x)$ является выпуклой на S , а функция $f_2(x)$ – вогнутой [9]. Согласно результатам негладкого и выпуклого анализа [2,3,6] субдифференциал $\overline{\partial} f_1(x)$ функции $f_1(x)$ и супердифференциал $\overline{\partial} f_2(x)$ функции $f_2(x)$ при любом $x \in R^n$ является непустым компактом, причем

$$\overline{\partial} f_1(x) = \overline{co} \bigcup_{u \in U(x)} \sum_{i=1}^{m_1} \varphi_i(u) \overline{\partial} g_i(x), \quad \overline{\partial} f_2(x) = \overline{co} \bigcup_{v \in V(x)} \sum_{j=1}^{m_2} \psi_j(v) \overline{\partial} p_j(x),$$

где $\overline{co} A$ – выпуклое замыкание множества A ,

$$U(x) = \{u^* \in U : \sum_{i=1}^{m_1} \varphi_i(u^*) g_i(x) = f_1(x)\}, \quad V(x) = \{v^* \in V : \sum_{j=1}^{m_2} \psi_j(v^*) p_j(x) = f_2(x)\}.$$

Функция $F(x)$ вида (1) является квазидифференцируемой и производная по направлению этой функции вычисляется по формуле

$$\frac{\partial F(x)}{\partial h} = \sup_{u \in U(x)} \sum_{i=1}^{m_1} \varphi_i(u) \frac{\partial g_i(x_0)}{\partial x} + \inf_{v \in V(x)} \sum_{j=1}^{m_2} \psi_j(v) \frac{\partial p_j(x)}{\partial h}.$$

Теперь для одного класса функций $F(x)$ вида (1) приведем необходимые и достаточные условия оптимальности.

Теорема 1. Пусть для функции (1) $m_1 = m_2 = n, g_i(x) = x_i, p_j(x) = x_j, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, $\varphi(u) = (\varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u)), \psi(v) = (\psi_1(v), \dots, \psi_n(v))$. Предположим, что функции $\varphi(u), u \in U$ и $\psi(v), v \in V$, сохраняют знак в заданном множестве. Тогда, если $x^0 \in R^n$ – точка глобального минимума функции

$$F(x) = \sup_{u \in U} (\varphi(u), x) + \inf_{v \in V} (\psi(v), x), \quad (3)$$

то

$$\min_{\|h\|=1} \max_{u \in U(x^0)} \min_{v \in V(x^0)} (\varphi(u) + \psi(v), h) \geq 0. \quad (4)$$

А если (4) имеет место при $V(x^0) = V$, то x^0 является точкой глобального минимума функции $F(x)$ на R^n .

Следующий результат указывает способ нахождения направления наискорейшего спуска квазидифференцируемой функции $F(x)$.

Теорема 2. Пусть точка x^0 не является стационарной для квазидифференцируемой функции $F(x)$, т.е. $0 \notin \overline{\partial f_2(x^0)} + \partial f_1(x^0)$. Будем считать, что точки $v^0 \in \partial f_2(x^0)$ и $w^0 \in \overline{\partial f_1(x^0)}$ удовлетворяют условию

$$\max_{w \in \partial f_2(x^0)} \min_{v \in \partial f_1(x^0)} \|v + w\| = \min_{v \in \partial f_1(x^0)} \|v + w^0\| = \|v^0 + w^0\|.$$

Тогда направление

$$h^0 = -\frac{v^0 + w^0}{\|v^0 + w^0\|}$$

является направлением наискорейшего спуска функции $F(x)$ в точке x^0 .

Пусть

$$\varphi_i(u) = \varphi^0(u), \psi_j(v) = \psi^0(v) \quad i = \overline{1, m_1}, j = \overline{1, m_2}, g_i(x) = (a_i, x), i = \overline{1, m_1},$$

$$p_j(x) = (b_j, x), j = \overline{1, m_2}, \quad \varphi^0(u) > 0, \forall u \in U, \quad \psi^0(v) > 0, \forall v \in V, \quad a = \sum_{i=1}^{m_1} a_i \neq 0,$$

$$b = \sum_{j=1}^{m_2} b_j \neq 0. \text{ Тогда } F(x) \text{ примет вид}$$

$$F(x) = \sup_{u \in U} (\varphi^0(u)a, x) + \inf_{v \in V} (\psi^0(v)b, x). \quad (5)$$

$$\text{Положим } \varphi_{\sup}^0 = \sup_{u \in U} \varphi^0(u), \varphi_{\inf}^0 = \inf_{u \in U} \varphi^0(u), \psi_{\sup}^0 = \sup_{v \in V} \psi^0(v), \psi_{\inf}^0 = \inf_{v \in V} \psi^0(v).$$

Применяя достаточное условие оптимальности (теорема 1) к функции $F(x)$ вида (5) получим следующий результат.

Теорема 3. Если $(a, x^0) = (b, x^0) = 0$, $a = -kb$, $k > 0$ и $k\varphi_{\inf}^0 \leq \psi_{\inf}^0$, $\psi_{\sup}^0 \leq k\varphi_{\sup}^0$, то точка x^0 является точкой глобального минимума функции (5).

3. Алгоритм построения направления наискорейшего спуска. Рассмотрим функцию вида (5). Дополнительно предположим, что $\varphi^0(u) = u$, $\psi^0(v) = v$, $U = [u_1, u_2]$, $V = [v_1, v_2]$, $u_2 > u_1 > 0$, $v_2 > v_1 > 0$. Тогда $\varphi_{\inf}^0 = u_1$, $\varphi_{\sup}^0 = u_2$, $\psi_{\inf}^0 = v_1$, $\psi_{\sup}^0 = v_2$. Используя теорему 2, можно найти направление спуска функции $F(x)$ для различных случаев расположения точки x^0 относительно гиперплоскостей $(a, x) = 0$, $(b, x) = 0$.

Например, если $(a, x^0) = 0$, $(b, x^0) > 0$ и $-bv_1 \notin a[u_1, u_2]$, то направление наискорейшего спуска h^0 определяется равенством $h^0 = -\frac{au_0 + bv_1}{\|au_0 + bv_1\|}$, где $u_0 \in [u_1, u_2]$,

такое что $\|au_0 + bv_1\| = \min_{u \in [u_1, u_2]} \|au + bv_1\|$. Для данного случая приведем алгоритм построения направления наискорейшего спуска.

Шаг 1. Вычислить скалярное произведение $\alpha_1 = (a, b)$, нормы $\alpha_2 = \|a\|$, $\alpha_3 = \|a\|$ и определим точку $\tilde{u} = -\frac{\alpha_1 v_1}{\alpha_2^2}$.

Шаг 2. Проверить выполнение условия $u_1 \leq \tilde{u} \leq u_2$. Если это условие выполняется, то полагая $u_0 = \tilde{u}$, переходим к шагу 5. Иначе – к шагу 3.

Шаг 3. Вычислить $z_1 = \alpha_2^2 u_1^2 + 2\alpha_1 u_1 v_1 + \alpha_3^2 v_1^2$, $z_2 = \alpha_2^2 u_2^2 + 2\alpha_1 u_2 v_1 + \alpha_3^2 v_1^2$.

Шаг 4. Найти $\min\{z_1, z_2\}$. Если $z_1 < z_2$, то положим $u_0 = u_1$. Иначе, $u_0 = u_2$.

Шаг 5. Проверить условию $\alpha_2^2 u_0^2 + 2\alpha_1 u_0 v_1 + \alpha_3^2 v_1^2 = 0$. Если оно выполняется, то x^0 – стационарная точка: направление наискорейшего спуска нет. Иначе направлением наискорейшего спуска будет вектор $h^0 = -\frac{au_0 + bv_1}{\|au_0 + bv_1\|}$.

4.Заключение. В работе исследована негладкая задача минимизации, имеющую целевую функцию со структурой вида (1). Рассмотрены свойства дифференцируемости по направлениям этой функций и ее квазидифференцируемость. Изучены необходимые условия оптимальности для негладкой задачи минимизации. Указан класс квазидифференцируемых функций вида (3), для которых найденные необходимые условия минимума одновременно являются достаточными.

Исследован вопрос нахождения направления спуска квазидифференцируемой целевой функции вида (5). Указана схема построения направления наискорейшего спуска и дан соответствующий алгоритм для ее реализации. Результаты могут быть использованы для разработки вычислительных алгоритмов решения негладких задач математического программирования.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ РАБОТЫ

1. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, -1988. – 280 с.
2. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, -1981. -384 с.
3. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, -1990. -432 с.
4. Кейн В.М. Оптимизация систем управления по минимаксному критерию. М.: Наука, -1982. -248 с.
5. Федоров В.В. Численные методы максимина. М.: Наука, -1979. -280 с.
6. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, -1980. -320 с.
7. Отакулов С., Рахимов Б.Ш. Об условиях управляемости ансамбля траекторий дифференциальных включений. Tadqiqot.uz. Physical and mathematical sciences. Vol. 3, Issue 1, 2020. pp.45-50. Doi: <http://dx.doi.org/10.26739/2181-0656-2020-3-9>
8. Otakulov S., Rahimov B. Sh., Haydarov T.T. The nonsmooth optimal control problem for ensemble of trajectories of dynamic system under conditions of indeterminacy. Middle European Scientific Bulletin, vol. 5, October 2020. pp. 38-42.
9. Отакулов С., Хайдаров Т.Т. Свойства функций типа максимума и минимума и их применение к негладким задачам оптимизации. Tadqiqot.uz. Physical and mathematical sciences. Vol. 3, Issue 1, 2020. pp. 32-37. Doi: <http://dx.doi.org/10.26739/2181-0656-2020-3-7>

10. Отакулов С., Мусаев А.О. Применение свойства квазидифференцируемости функций типа минимума и максимума к задаче негладкой оптимизации. Colloquium-journal. Miedzynarodowe czasopismo naukowe. № 12(64), Warszawa(Polska), 2020. с. 55-60. DOI. 10.24411/2520-6990-2020-11795.

ПРЯМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БЛОЧНО - ТРЕХ ДИАГОНАЛЬНЫХ И ИМ ОБРАТНЫХ МАТРИЦ И РЕШЕНИЯ ПЛОХО - ОБУСЛОВЛЕННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рахмонов Турдимухаммад

К.ф.-м.н., Университет общественной безопасности Республики Узбекистан

Данная работа посвящена суммированию и анализу ранее полученных результатов работ (см., например, [1-3,7-8]) по решению различных проблем вычислительной линейной алгебры возникающие в процессе численного решения задач уравнение математической физики и обработки экспериментальных данных в различных областях физики, моделирования и численного решения задачи геофизики и т. д.

В указанных работах исследования велись в двух направлениях:

• **разработка** генераторов прямых представлений блочно - трех диагональных (и им обратных) матриц общего вида

$$C = \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & & \\ & p_3 & q_3 & r_4 & \\ & - & - & - & \\ & & & p_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & & & p_m & q_m & \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $\{q_\xi\}_{\xi=1}^m$ - диагональные элементы - блоки матрицы C , являющиеся в общем случае квадратными матрицами различных размерностей, а $\{p_\xi\}_{\xi=2}^m$ и $\{r_\xi\}_{\xi=2}^m$ - под (над) диагональные элементы - блоки матрицы C , являющиеся в общем случае прямоугольными матрицами, размерности которых определяются размерностями соответствующих квадратных матриц $\{q_{\xi-1} \text{ и } q_\xi\}_{\xi=2}^m$;

• **разработка** эффективных численных непараметрических методов критических компонент решение плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений вида

$$AZ = F, \quad (2)$$

где $A = (a_{ij})$ квадратная порядка m или прямоугольная размерности $m \times n$ вещественная матрица общего вида, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, $Z = (z_1, \dots, z_n)^T$ - искомый $F = (f_1, \dots, f_m)^T$ - заданный n и m -мерные векторы соответственно;

Значимость рассматриваемых в настоящей работе задач обусловлена следующим:

Во-первых, в вычислительной математике, по-прежнему высок исследовательский интерес к аппарату и методам линейной алгебры, теории матриц. Поскольку из-за постоянно подкрепляемой новыми результатами уверенности в существовании неиспользованных еще здесь больших резервов повышение эффективности численных методов решения на ЭВМ различных задач теоретической и математической физики [4-6], обработки экспериментальных данных, моделирования сложных физических явлений и установок [1] и управления динамическими процессами [2-3] и т.д.

Накопившихся в настоящее время в литературе результатов свидетельствует о недостаточно полной еще изученности проблем построения всевозможных типов представлений (не использующих в частности, перестановки) и их систематизации для матриц C в (1) и $B = C^{-1}$, а также для их (блочно)угловых миноров Δ_1^i, Δ_j^m и определителей как при всех отличных от нуля, так и некоторых равных нулю указанных минорах.

Решение этой задачи позволяет построить наиболее эффективные методы вычисления на ЭВМ матриц $B = C^{-1}$, миноров Δ_1^i, Δ_j^m и $\det(C)$, а также решение систем линейных алгебраических уравнений $AZ = F$.

Во-вторых, задачи, поставленные во втором направлении, решаются достаточно просто, если матрица системы хорошо обусловлена и, следовательно, решение системы устойчиво относительно погрешностей. В настоящее время проблеме решения систем линейных алгебраических уравнений и исследованию свойств матриц системы, а также разработке и описанию пакетов программ уделено большое место в фундаментальных монографиях, обзорах, справочниках и многочисленных оригинальных публикациях. Проблема решения систем линейных алгебраических уравнений (2) занимает одно из центральных мест в вычислительной алгебре. При численном решении этой задачи точными, по сути, методами имеется несколько источников появления погрешности решения. **Один** из них обусловлен округлением вещественных чисел в процессе вычисления на ЭВМ. **Второй** – неточностью задания самих исходных данных задачи (2). **Третий** – ошибками метода применяемого для решения задач (2). При этом к численному методу предъявляются жесткие требования к устойчивости получаемого им решения относительно указанных погрешностей.

Численное решение систем (2) с плохо обусловленными матрицами сводится, как известно (с помощью ортогональных преобразований), к проблеме устойчивого решения редуцированных систем вида

$$C_3 X = Y, \quad (3)$$

$$C_2 \hat{X} = \hat{Y} \quad (4)$$

где C_3 и C_2 соответственно трех диагональные и двух диагональные матрицы

$$C_3 = \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & \\ p_2 & q_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & r_m \\ & & p_m & q_m \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & \\ & q_2 & \ddots & \\ & & \ddots & r_m \\ & & & q_m \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Здесь $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$, $\hat{X} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_m)^T$ - искомые m -мерные векторы, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$ и $\hat{Y} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_m)^T$ - известные m -мерные векторы. $\{q_i\}_{i=1}^m$ - диагональные и $\{p_i, r_i\}_{i=2}^m$ - под (над) диагональные элементы матриц C_3 и C_2 .

В-третьих, трех диагональные, ленточные и блочно - трехдиагональные матрицы играют и самостоятельную роль при решении многих задач вычислительной математики и математической физики. В самом деле, численное решение краевых задач математической физики приводится, в общем случае, к решению алгебраических задач с трех диагональными ленточными и блочно - трехдиагональными матрицами. Как известно, например, что исследование процессов ядерных взаимодействий и структуры атомного ядра и процессов электрофизики приводит к решению полной алгебраической проблемы собственных значений матриц вида C_3 (5).

Методом решения систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами посвящена обширная литература. Эти методы в значительной степени связаны с построением экономичных алгоритмов для характерных типов систем, возникающих при решении задач математической физики. Основная задача при их разработке заключается в минимизации числа арифметических действий с учетом специфики уравнений или в обеспечении надежности, т.е. устойчивости к накоплению погрешностей округления при реализации на ЭВМ.

В-четвертых, практическое использование существующих пакетов программ и сравнительный анализ результатов расчетов на их основе, показывают, что в случае плохой обусловленности (особенно патологически плохой обусловленности $\text{cond}(A) > 1/\varepsilon_1$, где $\text{cond}(A)$ - число обусловленности матрицы A , ε_1 - относительная погрешность вычислений с вещественными числами данной ЭВМ) поставленная задача разработки эффективного пакета программ еще не решена окончательно.

Полученные результаты исследований и их программные реализации, а также их практическое использования по выше поставленным вопросам подробно приведены в работах [1,7-8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Т.Т. Рахмонов, М.И. Фазылов, Г. А. Кулабдуллаев. О роли свойств матричной алгебры при создании математического обеспечения для анализа и обработки информации, регистрируемой детекторами частиц высоких энергий. Доклады Академии Наук Республики Узбекистан, №1, 2015, стр.22-26.
2. Alekseyev A.S., Imomnazarov Kh. Kh., Rakhmonov T.T. et.al. Direct and inverse dynamic problems for a system of equations of homogeneous media. Journal Applied Mathematic Letters. USA, 2004, V.17, No 9, pp.1097-1103.
3. Imomnazarov Kh. Kh., Karovin P.P., Rakhmonov T.T. Numerical solution of an inverse problem of gravimetry for a contact surface. Journal Applied Mathematics Letters. USA. 2005, vol. 18, No. 2, pp. 187-190.
4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректно поставленных задач. М., «Наука» 1979.

5. Годунов С.К., Антонов А.Г. и др. Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах, Новосибирск, «Наука», Сибирское отделение. 1988.
6. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М., «Наука», 1989.
7. Emel'yanenko G.A., Rakhmonov T.T. и др. On efficiency of critical - component method for solving degenerate and ill – posed systems of linear algebraic equations. JINR, E11-98-302, Dubna, 1998.
8. Емельяненко Г.А., Душанов Э.Б., Рахмонов Т.Т. и др. Машинно - независимый пакет программ JINRLINPACK для решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений. ОИЯИ, P11-2000-287, Дубна, 2000.

ПАХТА БЎЛАКЧАСИНИ ҚУВУР БЎЙЛАБ ҲАРАКАТИНИ ТАХЛИЛ ҚИЛИШ

Саримсоқов Олимжон

т.ф.д., Наманган муҳандислик-технология институти

Исмоилов Хамроли

Андижон давлат университети

1. Кириш.

Ҳозирда пахта тозалаш саноатида пахта хомашёсини дастлабки ишлаш технологик жараёнларини юқори самарадорликка эга бўлган техника ва тахнологияларни яратишга оид бўлган кенг қамровли ишлари амалга оширилмоқда. Пахта тозалаш корхоналарида пахта хомашёсини дастлабки ишлашда мослашувчан тахнологиялар жорий этиш бўйича ишлар амалга оширилмоқда. Жумладан, пахта тозалаш корхоналари томонидан тайёрланган пахта хомашёси, ишлаб чиқарилаётган пахта маҳсулотлари миқдори ва сифатини сақлашни таъминлаш, хомашё ва энергия сарфини камайтириш имкониятини берадиган техника ва тахнологияларни яратиш муҳим аҳамият касб этмоқда [1-4].

Пахтани ҳаво ёрдамида ташишда ҳаво ва пахта аралашмасининг концентрацияси транспортлаш характериға сезиларли таъсир кўрсатади. Материал ҳаво ёрдамида тўғри чизиқли қувурда ҳаракат қилган вақтда инерция кучлари билан қаршилик кучлари ўлчамлари деярли ўзгармайди. Бунда, пахтани пневмотранспорт ускунасиқувури ўқиға бўйлаб узатиш ташиш жараёни учун қулай шарт-шароит яратади.

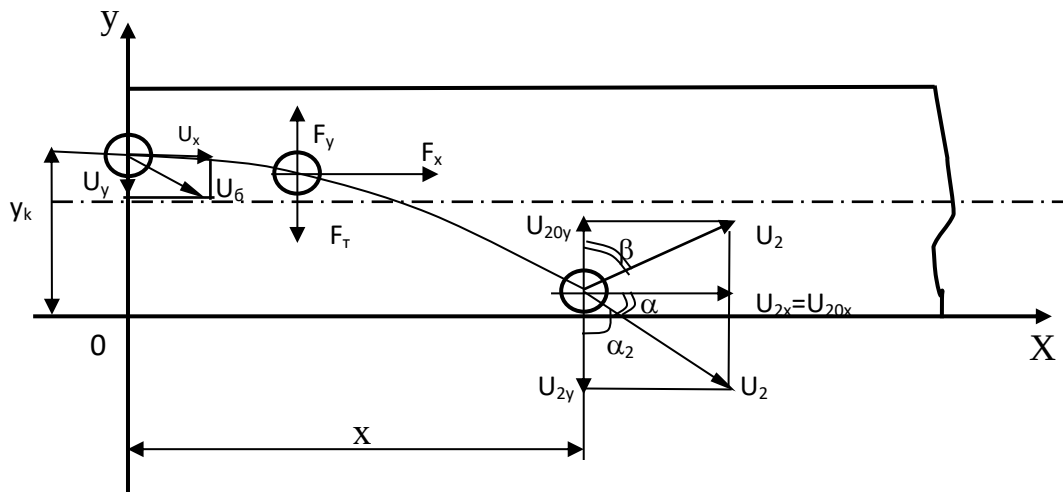
2. Пахта бўлакчасини қувур ичидаги ҳаракатини ўрганиш.

Қувур сўрувчи қисмидаги пахтанинг ҳаракатини ўрганиш вақтида, қулай бўлиши учун, олдин координатани қувурнинг бошиға қўямиз. Бўлакнинг ҳаракати икки чексиз девор орасида содир бўляпти, деб фараз қилайлик [5-7]:

$$y=0 \quad \text{ва} \quad y=d.$$

Ҳаво оқими билан учрашиш пайтида пахта бўлағи абсолют тезликка эга бўлсин, уни қувур ўқиға нисбатан маълум бурчак остида ҳаракат қилаёпти, деб фараз қилайлик. У ҳолда ҳаракат тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} mx'' = -k(x' - V) \\ my'' = ky' - mg \end{cases} \quad (1)$$



1-расм. Пахтанинг қувурдаги ҳаракати

$U_x = \frac{dx}{dt}$ ва $U_y = \frac{dy}{dt}$ эканини ҳисобга олиб, (1) системани $t=0$ шартда интеграллаймиз. Ечим қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} x = \frac{m}{k} (U_H \cos \alpha - U) (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) + Vt \\ y = -\frac{m}{k} (U_H \sin \alpha - \frac{mg}{k}) (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) + \frac{mg}{k}t + y_1 \end{cases} \quad (2)$$

Бу тенгламалар системаси пахтанинг хоу текислигида траекториясини аниқлайди. Маълум (X) масофада бўлакча қувур ички девори билан тўқнашади ва зарба кучи таъсирида юқорига отилади.

1-расмдаги схемадан қуйидаги тенгликни топамиз:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2 \right) = \operatorname{ctg} \alpha_2 \text{ ёки } \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{ctg} \alpha_2}{n} \quad (3)$$

буерда: n - қайта тикланиш коэффиценти.

Аналитик ҳисоблашлардан келиб чиқиб, зарбадан кейинги пахта бўлагининг тезлиги ифодасини ва координата ўқлари (x, y) бўйича жойлашишини аниқлаймиз:

$$\begin{cases} U_x = (U_{20x} - V)l - \frac{k}{m}(t - t_1) + V \\ U_y = \left(U_{20y} - \frac{mg}{k} \right)l - \frac{k}{m}(t - t_1) + \frac{mg}{k} \end{cases} \quad (4)$$

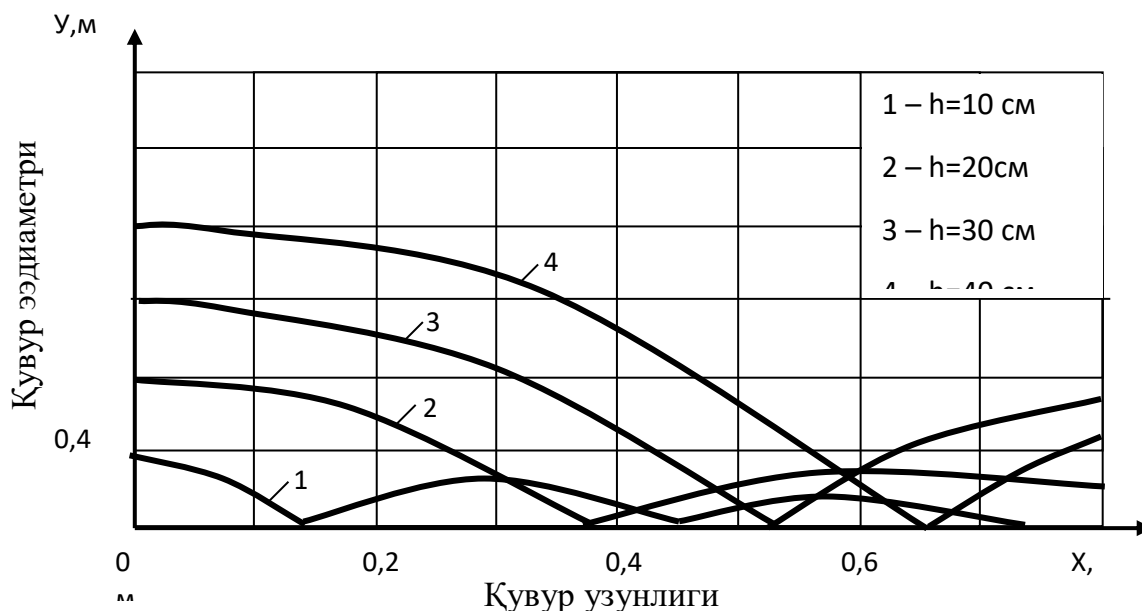
$$\begin{cases} X = \frac{m}{k} (U_{20x} - V) \left(1 - l - \frac{k}{m}(t - t_2) \right) + V(t - t_2) \\ Y = \frac{m}{k} \left(U_{20y} - \frac{mg}{k} \right) \left(1 - l - \frac{k}{m}(t - t_2) \right) + \frac{mg}{k}(t - t_2) \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{Бу ерда: } U_{20x} = (U_n \cos \alpha_1 - V) \frac{k}{m} t_2 + V \quad U_{20y} = U_{20x} \cdot \operatorname{tg} \beta$$

(4) ва (5) тенгламалар қувур деворига бўлакчанинг биринчи урилишидаги ҳолатини аниқлайди. Бунда бўлакча критик нуқтага етади ва пастга тушади. Агар,

критик нукта вертикал координатаси катталиги қувур диаметридан катта бўлса, у ҳолда бўлакча юқори деворга урилади. Унинг кейинги ҳолатини етарлича аниқлик билан (4) ва (5) лар шаклдаги тенгламалар билан аниқлаш мумкин. Фақат, зарбадан кейинги бошланғич тезлик йўналишини ҳисобга олган ҳолда ишораларга ўзгартиш киритилади.

(5) ифодадан вақт t ни чиқариб ташлаш натижасида $y=f(x)$ - пахта пахта бўлакчасини қувур диаметри ва узунлиги бўйича траектория тенгласини олиш мумкин, унинг график кўриниш 2-расмда тасвирланган.



2-расм. Бўлакчанинг қувурдаги ҳаракати траекторияси.

Натижалардан қизиқ бир ҳолатни кузатиш мумкин, яъни пахта бўлагининг қувурда ҳаракати пайтида, оқимнинг турбулентлигини, бўйлама, қўндаланг ва циркуляция кучларини ҳисобга олинмаганда ҳам пахтанинг қувур деворига зарба билан тўқнашуви содир бўлади. Бунда тезликлар қанча катта бўлса, зарба шунчалик тез ва интенсив бўлади. Бу эса пахтанинг дастлабки сифат кўрсаткичларига салбий таъсир кўрсатиши аниқланган.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

1. Мурадов Р., Саримсаков О., Хусанов С. Внутривозводская пневмотранспортировка хлопка-сырца: состояние, проблемы и перспективы. Журнал «Механика муаммолари», 2014, №2
2. Саримсаков О. Рузметов М. Ғарам бузиш машинаси ишчи органларининг пахта билан таъсирлашуви динамикаси //Ж.Тўқимачилик муаммолари. 2016й., №4, Б.31-34
3. Марданов Б., Саримсаков О., Пахта ғарамини механик бузиш жараёнини назарий ўрганиш.//Ж.ФарПИ. 2017., №1,Б.125-127
4. Саримсаков О. Пахтани пневмотранспортга узатиш ва ҳаво ёрдамида ташиш жараёнини такомиллаштириш. Монография. «Наврўз» нашриёти, Наманган, 2019й.
5. Саримсаков О. Д.Турғунов, А.Исакжанов. Пахта хомашёсини пневмотранспортга узатиш жараёнини амалий ўрганиш// НамМТИ илмий-техника журнали, №3-4, 2018, 37-41 бет

6. Abbazov I., O. Sarimsakov, M.Khodjiev, B.Mardonov. Waste Produced at Cotton Waste Factories. // American Journal ASCIT Communications. 2018; 5(2): pp.22-28
7. Kholmiraev F., Azimov S. Abdurahimov K., Sarimsakov O. Investigation of the Loss of Air Pressure in the Pipeline of the Cotton Pneumatic Conveying.// Saudi Journal of Engineering and Technology// Dubai, United Arab Emirates. February 2019; 4(2): pp.23-27
8. Obidov A., Akhmedkhodjaev Kh., Sarimsakov O., Holikov Q. Investigation of the Properties of Fibrous Cotton Seeds, for Sorting on a Mesh Surface. // Scientific Research Publishing, USA. J.Engineering. 2018,10,pp.572-578.
9. Sarimsakov O. The possibility of reducing cotton consumption in cotton. // American Journal of Science and technology.// 2016; 4 (6): pp.68-72. <http://www.aascitjournal.com/ajst>.
10. Sarimsakov O., Gaybnazarov E. About energy consumption in pneumatic conveying of raw cotton. American Journal of Energy and Power Engineering.vol.3, No.4,2016, pp.26-29. Published: March 2, 2017.
11. Sarimsakov O. , C. Xusanov, R. Muradov. The Change in Air Pressure Along the Length of the Pipeline Installation for Pneumatic Conveying of Raw Cotton.// J. Engineering and Technology// www.aascit.org/journal/et. 2016; 3(5): pp.89-92
12. Abduraimovich, M.O., Ibragimovich, A.K. and Sharipjanovich, S.O. (2018) Designing a New Design of a Loading Cylinder for Pneumomechanical Spinning Machines. Engineering, 10, pp. 345-356.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ КОНВЕКЦИИ-ДИФфузии ПО ОПТИМАЛЬНОМУ РАЗМЕЩЕНИЮ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

Хайиткулов Бобомурод

PhD, Национальный Университет Узбекистана

Латипов Нусратулла

Национальный Университет Узбекистана

Абдужабборов Зафар

Национальный Университет Узбекистана

В [1-3] рассматривались нестационарные задачи расчета оптимального обогрева простых геометрических областей: отрезок, прямоугольник и параллелепипед.

В области $D = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, 0 \leq t \leq T\}$ требуется найти функцию $f(x, y, t) \geq 0$ такую, что для любого $t \in [0, T]$ линейный функционал [4]

$$J\{f\} = \int_a^b \int_c^d f(x, y, t) dy dx \rightarrow \min, \quad (1)$$

достигал минимума и удовлетворялись следующие условия:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \chi(x, y, t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - v(x, y, t) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + f(x, y, t), \quad a < x < b, c < y < d, 0 < t \leq T,$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d,$$

$$u(a, y, t) = \mu_1(y, t), \quad u(b, y, t) = \mu_2(y, t), \quad c \leq y \leq d, \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(x, c, t) = \mu_3(x, t), \quad u(x, d, t) = \mu_4(x, t), \quad a \leq x \leq b, \quad 0 < t \leq T,$$

(2)

$$m(x, y, t) \leq u(x, y, t) \leq M(x, y, t), \quad (x, y, t) \in D,$$

(3)

где $u = u(x, y, t)$ – температура в точке (x, y) прямоугольника в момент t ; $\chi(x, y, t) > 0$ – коэффициент диффузии (температуропроводности); $v(x, y, t)$ – скорость конвекции по соответствующим направлениям; $u_0(x, y)$, $\mu_1(y, t)$, $\mu_2(y, t)$, $\mu_3(x, t)$, $\mu_4(x, t)$, $m(x, y, t)$, $M(x, y, t)$ – заданные непрерывные функции, удовлетворяющие условиям сопряжения $\mu_1(c, t) = \mu_3(a, t)$, $\mu_1(d, t) = \mu_4(a, t)$, $\mu_2(c, t) = \mu_3(b, t)$, $\mu_2(d, t) = \mu_4(b, t)$. Функции $m(x, y, t)$, $M(x, y, t)$ – имеют смысл функций минимального и максимального профиля температуры в области D соответственно. Мощность объемных источников тепла описывается квадратично интегрируемой функцией $f(x, y, t)$ в пространстве $L_2(D)$.

Пусть $Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \chi(x, y, t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + v(x, y, t) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$. Оператор L , определенный в $L_2(D)$, имеет обратный L^{-1} . Здесь L^{-1} интегральный оператор с непрерывным ядром (функция Грина). Используя его, можно записать задачу (1)-(3) в следующем виде:

$$f(\cdot, \cdot, \cdot) \in L_2(D), \quad f(x, y, t) \geq 0, \quad m(x, y, t) \leq (L^{-1}f)(x, y, t) \leq M(x, y, t). \quad (4)$$

Поскольку трудно найти непрерывное решение задачи (1)-(4), ищем численное решение задачи. В этом случае, используя неявную схему, заменяем задачу (2) конечно-разностным уравнением.

Введем в D равномерную по трем переменным разностную сетку $\bar{\omega}_{h_1 h_2}^T = \bar{\omega}_{h_1} \times \bar{\omega}_{h_2} \times \bar{\omega}^T = \{(x_i = ih_1, y_j = jh_2, t_k = k\tau), \quad i = \overline{0, N_1}, \quad j = \overline{0, N_2}, \quad k = \overline{0, N_3}\}$ с шагами $h_1 = (b-a)/N_1$, $h_2 = (d-c)/N_2$, $\tau = T/N_3$.

Неявная разностная схема для задачи (2) имеет вид [5]:

$$\begin{cases} \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\tau} = \chi_{ij}^{k+1} \left(\frac{u_{i+1j}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{i-1j}^{k+1}}{h_1^2} + \frac{u_{ij+1}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{ij-1}^{k+1}}{h_2^2} \right) - \\ v_{ij}^{k+1} \left(\frac{u_{i+1j}^{k+1} - u_{i-1j}^{k+1}}{2h_1} + \frac{u_{ij+1}^{k+1} - u_{ij-1}^{k+1}}{2h_2} \right) + f_{ij}^{k+1}, \\ i = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1, \quad k = 0, 1, \dots, N_3 - 1, \\ u_{ij}^0 = u_0(x_i, y_j), \quad i = 0, 1, \dots, N_1, \quad j = 0, 1, \dots, N_2, \\ u_{0j}^{k+1} = \mu_1(y_j, t_{k+1}), \quad u_{N_1 j}^{k+1} = \mu_2(y_j, t_{k+1}), \quad j = 0, 1, \dots, N_2, \quad k = 0, 1, \dots, N_3 - 1, \\ u_{i0}^{k+1} = \mu_3(x_i, t_{k+1}), \quad u_{iN_2}^{k+1} = \mu_4(x_i, t_{k+1}), \quad i = 0, 1, \dots, N_1, \quad k = 0, 1, \dots, N_3 - 1. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $\chi_{ij}^{k+1} = \chi(x_i, y_j, t_{k+1})$, $v_{ij}^{k+1} = v(x_i, y_j, t_{k+1})$, $f_{ij}^{k+1} = f(x_i, y_j, t_{k+1})$.

Введем обозначения

$$\overline{XY} = \left(\frac{1}{\tau} + \frac{2\chi_{ij}^{k+1}}{h_1^2} + \frac{2\chi_{ij}^{k+1}}{h_2^2} \right), \quad X^+ = \left(-\frac{\chi_{ij}^{k+1}}{h_1^2} + \frac{v_{ij}^{k+1}}{2h_1} \right), \quad X^- = \left(-\frac{\chi_{ij}^{k+1}}{h_1^2} - \frac{v_{ij}^{k+1}}{2h_1} \right),$$

$$Y^+ = \left(-\frac{\chi_{ij}^{k+1}}{h_2^2} + \frac{v_{ij}^{k+1}}{2h_2} \right), \quad Y^- = \left(-\frac{\chi_{ij}^{k+1}}{h_2^2} - \frac{v_{ij}^{k+1}}{2h_2} \right).$$

Рассмотрим расширенную матрицу системы:

$$A = \begin{bmatrix} \overline{XY} & Y^+ & 0 & \dots & 0 & X^+ & 0 & \dots & \dots & 0 \\ Y^- & \overline{XY} & Y^+ & 0 & \dots & 0 & X^+ & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & X^- & 0 & \dots & 0 & Y^- & \overline{XY} & Y^+ \\ 0 & \dots & \dots & 0 & X^- & 0 & \dots & 0 & Y^- & \overline{XY} \end{bmatrix}.$$

Получаем

$$G = A^{-1}.$$

Аппроксимируем задачу (1)-(5) в виде задачи линейного программирования. Разделим область D по x, y, t соответственно на N_1, N_2, N_3 равных частей:

$$D = \bigcup_{k=1}^{N_3} \bigcup_{i=1}^{N_1} \bigcup_{j=1}^{N_2} D_{ij}^k, \quad \text{где} \quad D_{ij}^k = \{(x, y, t), x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j, t_{k-1} \leq t \leq t_k\}, \quad i = \overline{1, N_1},$$

$j = \overline{1, N_2}, k = \overline{1, N_3}$. В пространстве $L_2(D)$ функции $f_{ij}^k = f(x_i, y_j, t_k)$, $(x, y, t) \in D_{ij}^k$ ($i = \overline{1, N_1-1}, j = \overline{1, N_2-1}, k = \overline{1, N_3}$) определяются как кусочно-постоянные функции.

Отсюда получаем $f(x, y, t) \approx \sum_{k=1}^{N_3} \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} f_{ij}^k$.

Пусть $g_{pq}^k = G$, $m_{ij}^k = m(x_i, y_j, t_k)$, $M_{ij}^k = M(x_i, y_j, t_k)$, $\tilde{f}_q^k = f_{ij}^k$, $N = (N_1-1)(N_2-1)$, $p = q$, $q = (i-1)(N_2-1) + j$, $p = \overline{1, N}$, $q = \overline{1, N}$, $i = \overline{1, N_1-1}$, $j = \overline{1, N_2-1}$, $k = \overline{1, N_3}$. Подставим выражение $f(x, y, t)$ в (1) и заменим неравенство (4) на сеточные функции.

После этого получим следующую задачу линейного программирования:

$$J_k\{f\} = \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} (\text{mes} D_{ij}^k) f_{ij}^k \rightarrow \min, \quad k = 1, 2, \dots, N_3,$$

$$m_{ij}^k \leq \sum_{q=1}^N g_{pq}^k \tilde{f}_q^k \leq M_{ij}^k, \quad p = \overline{1, N}, \quad i = \overline{1, N_1-1}, \quad j = \overline{1, N_2-1}, \quad k = \overline{1, N_3}, \quad (6)$$

$$\tilde{f}_q^k \geq 0, \quad q = 1, 2, \dots, N, \quad k = 1, 2, \dots, N_3.$$

Задача (6) решается М-методом [6-7]. Численное решение задачи (2) находится с помощью $u_{ij}^k = \sum_{q=1}^N g_{pq}^k \tilde{f}_q^k$. Найденная $\tilde{f}_q^k$ является функцией, дающей минимум функционалу (1).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Хайиткулов Б.Х. Конечно-разностный метод решения нестационарных задач управления конвекцией-диффузией. Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2021, № 57, С. 45-52.
2. Khaitkulov B.Kh. Homogeneous different schemes of the problem for optimum selection of the location of heat sources in a rectangular body. Solid State Technology, 2020, Vol. 63, Issue 4, pp. 583-592.
3. Tukhtasinov M., Khayitkulov B.Kh. Numerical solution of the non-stationary problem of choosing the optimal placement of heat sources in a parallelepiped. Acta of Turin Polytechnic University in Tashkent, 2021, Vol. 11, No. 1, pp. 29-34.
4. Khayitkulov B.Kh. Approximate solution of the nonstationary convection-diffusion problem based on the optimal selection of the location of heat sources. Abstracts of the International Online Conference "Frontier in Mathematics and Computer Science". 12-15 october, 2020, NUU, Tashkent, 75 p.
5. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. – М.: ЛИБРОКОМ, 2015, 248 с.
6. То'xtasinov M. Jarayonlar tadqiqoti. Toshkent: Barkamol Fayz media nashriyoti, 2017. 572 bet.
7. Фомин Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности: учебник. – 3-е изд. – М.: Финансы и статистика, 2009, 640 с.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ДЛЯ АНАЛИЗА ПРОГРАММ И РЕАЛИЗАЦИИ ЯЗЫКОВ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Ходиев Шухрат

к.т.н, Национальный Университет Узбекистана

Введение. Среди всех видов моделирования наиболее абстрактным и применимым к наиболее широкому классу реальных объектов является *математическое моделирование*, ставящее в соответствие изучаемому объекту его математическую модель. Математическая модель – это совокупность математических формул, уравнений, соотношений, описывающая интересующие исследователя свойства объекта моделирования. С помощью моделей, реализованных на компьютере, можно изучать новые явления, решать практически все задачи анализа и проектирования сложных систем, осуществлять выбор наилучших вариантов решений, выполнять анализ и прогнозирование поведения технических систем и решать множество других задач. Например, целью дисциплины «Математическое моделирование технических систем» является изучение методов построения и анализа математических моделей, постановка и решение задачи синтеза проектируемых и оптимизации находящихся в эксплуатации технических систем (машин, механизмов и т.п.) [1,2].

Работа написана на опыте преподавания курсов по инженерии создания и языкам программирования, а также на исследованиях автора по реализации систем построения трансляторов и окружений программирования.

Компьютерная алгебра. Она широко используется для экспериментов в математике и для разработки формул, используемых в числовых программах. Она

также используется для полных научных вычислений, когда чисто численные методы терпят неудачу, как в криптографии с открытым ключом, или для некоторых нелинейных задач [3]. Программное обеспечение приложения, выполняющие символьные вычисления, называются системами компьютерной алгебры, при этом термин «система» указывает на сложность основных приложений, которые включают, по крайней мере, метод представления математических данных в компьютер, язык пользовательского программирования (обычно отличный от языка, используемого для реализации), выделенный менеджер памяти, пользовательский интерфейс для ввода/вывода математических выражений, большой набор подпрограмм для выполнения обычных операций, таких как упрощение выражений, дифференцирование с использованием правила цепочки, факторизация полинома, неопределенное интегрирование и т. д. Некоторые авторы отличают компьютерную алгебру от символьных вычислений. Последнее название относится к видам символьных вычислений, отличным от вычислений с помощью математических формул. Некоторые авторы используют символические вычисления для информативного аспекта предмета и «компьютерную алгебру» для математического аспекта.

Применения математических аппаратов для морфологического анализа аналитических языков. Объектом исследования работ [4,5] является морфологический анализ естественных языков аналитического типа, в число которых входит узбекский и таджикские языки. В частности, рассматриваются именные части речи в этих языках: имя существительное и имя прилагательное. Из-за того, что для аналитических языков очень сильно развиты словообразования и словосложения в области именных частей речи, морфологический анализ этих частей речи требует глубокого знания методов анализа.

Доказательное программирование. Это составление программ с доказательством их правильности. Программирование включает в себя не только составление, но и исследование программы, доказательство её свойств, главным из которых является правильность программ. Речь идёт не о синтаксической правильности которая автоматически проверяется транслятором, а о соответствии синтаксически правильной программы той задаче, для решения которой она предназначена.

Математические основы доказательного программирования — это математическая семантика структурированных алгоритмов. Анализ правильности сложных алгоритмов и программ проводится по частям— блокам и вспомогательным алгоритмам с помощью вспомогательных пред- и пост- утверждений и вспомогательных лемм, как это делается в стандартных курсах и учебниках математического анализа.

Создание программ на основе формальных преобразований. Метод формальных преобразований заключается в автоматическом построении программы на основе ее формального описания, что гарантирует получение кода, который будет абсолютно точно соответствовать исходной спецификации. Формальные преобразования - это набор методов, позволяющих математически корректно трансформировать исходные спецификации в код целевой программной системы. Т.к. переход от требований к коду происходит математически корректно, то проблема тестирования и доказательства корректности конечной программы по отношению к

спецификации исчезает. Из моделей процесса разработки программного обеспечения на сегодня широко применяем такую, как «Сборка программных продуктов из ранее созданных компонентов (модель сборки)» [3].

Искусство программирования, в частности, и состоит в том, чтобы правильно выбрать набор средств, адекватный представляемым данным и эффективному алгоритму их обработки. Большинство алгоритмов создания систем трансляции и преобразований при программировании сводится к работе со структурами данных, знания о которых имеют большое значение [3]. Формулирование алгоритмов трансляции оказывается существенно связанным с выбором как естественного представления структур всех данных, возникающих в процессе трансляции, так и наиболее эффективных их отображений.

Применение моделей на основе дискретной математики. Большинство алгоритмов создания систем (автоматизации) трансляции и преобразований сводится к работе со структурами данных. Формулирование алгоритмов трансляции оказывается существенно связанным с выбором как естественного представления структур всех данных, возникающих в процессе трансляции, так и наиболее эффективных их отображений. Часто, автоматизация создания транслирующих систем сводится к работе с графовым представлением исходной программы. Значительное количество алгоритмов и методов работы с графовыми данными можно найти в сети, во множестве научных статей и книг, монографиях ученых, в учебных пособиях. Обычно моделирование нисходящего (как и восходящего) распознавателя связано с реализацией специального обхода вершин дерева выводов. В общем случае, различные алгоритмы разбора связаны с различными алгоритмами работы с деревьями вывода. При практической реализации таких алгоритмов возникает вопрос хранения отношений в случае, например грамматик предшествования, где рассматриваются отношения между символами грамматик. Указанные отношения можно хранить в виде (различных) *матриц*, содержащих символы этих грамматик. Алгоритмы разбора связаны со специальными способами рассмотрения вершин дерева разбора исходного предложения в процессе чтения его символов

Относительно способов определения языков в виде предложений порождающих грамматик, то например, удобным является использование графического представления для классов эквивалентных выводов как деревьев вывода или деревьев разбора. Некоторым грамматикам соответствуют конечные автоматы, и эти конечные автоматы удобно представлять в виде помеченных *ориентированных графов*. В свою очередь граф можно задать в виде *матрицы переходов*. Контекстно-свободным грамматикам соответствуют автоматы с магазинной памятью. Внутреннее представление исходной программы, которое лексический анализатор или сканер передаёт синтаксическому анализу, состоит из *таблиц* и лексической свёртки программы. Разбор или синтаксический анализ сводится к работе с *деревом разбора*. Узнавая на каждом следующем шаге разбора всё большее число символов (или число висячих вершин её дерева разбора), из лексической свёртки транслируемой программы, строится дерево разбора. Подход к реализации идентификации и атрибутивной индукции (нахождения значений атрибутов) заключается в построении по определяющим вхождениям имён

программы *информационного множества*, которое оформляется как таблица (имён). Основное содержание процесса идентификации состоит в работе с этой таблицей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аюпов В.В. Математическое моделирование технических систем: учебное пособие. М-во с.-х. РФ, федеральное гос. бюджетное образов. Учреждение высшего образования – Пермь : ИПЦ «Прокрость», 2017. – 242 с.
2. Ковалёв С.П. Применение формальных методов для обеспечения качества вычислительных систем. Вестник НГУ. Серия «Математика, механика, информатика». Том IV. Выпуск 2. - Новосибирск. - 2004 г. С. 49–74.
3. Арипов М.М. Методы трансляции и преобразования программ. Учебное пособие для ВУЗов – Т: Университет, 2008. – 134 с.
4. Болтаев Т.Б., Кобиллов С.С., Ходиев Ш.И. Лингвистические системы на основе семантики естественного языка. Материалы XIX -Международной научно – методической конференции «Информатика: проблемы, методология, технологии». Изд. «Научно- исследовательские публикации», Воронеж, 14-15-февраля 2019 г. с. 1413-1417.
5. Википедия site:360wiki.ru.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ КРЫЛА ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Худаяров Бахтияр

д.т.н., Национальный исследовательский университет “ТИИИМСХ”

Комилова Холидахон

PhD, Национальный исследовательский университет “ТИИИМСХ”

Шамситдинов Салохиддин

Андижанский государственный университет

Аэродинамическая устойчивость крыла летательных аппаратов в потоке воздуха является одним из важнейших факторов, определяющих эффективность её применения. Аэроупругие колебания необходимо исследовать ещё на этапе проектирования, так как возникновение незатухающих упругих колебаний частей реальной конструкции или всей летательного аппарата в целом может привести к потере управляемости и даже разрушению [1, 2].

Исследования изгибно-крутильного флаттера крыла летательных аппаратов не потеряли своей актуальности и в настоящее время и одной из узловых задач является отыскание закономерностей, которые бы в дальнейшем могли быть использованы для развития системного подхода к анализу различных форм флаттера. Практическая значимость этой задачи возрастает по мере накопления экспериментальных и расчетных результатов исследования флаттера и потому необходимы поиски эффективных путей ее решения [3, 4].

В работе [5] приведены изгибно-крутильные флаттерные характеристики крыла летательных аппаратов (ЛА). Приведен вывод предлагаемой формы уравнений движения из вариационного принципа Гамильтона. Результаты расчетов сравниваются с опубликованными в литературе данными.

В работе [6] описывается формула аэроупругого анализа крыла летательных аппаратов. Изучено влияние аэродинамической нелинейности на критическую скорости флаттера.

Целью исследования является разработка математической модели изгибно-крутильных колебаний крыла в потоке воздуха, определение флаттера конструкции.

Крыло может совершать колебания двух основных видов: изгибные и крутильные. Однако вследствие несовпадения линий центров тяжести с линией центров жесткости сечений чисто изгибные или чисто крутильные колебания крыла практически невозможны. Вне зависимости от того, каков начальный импульс, изгибный или крутильный, колебания всегда совместны - изгибно-крутильные.

Рассмотрим консольное нестреловидное крыло летательных аппаратов конечного размаха с прямой вязкоупругой осью нормальной к корневому сечению. Будем считать, что крыло жестко зашпунтовано в массивном фюзеляже, который примем неподвижным. Таким образом, из анализа исключается влияние на флаттер крыла остальных частей ЛА и, в частности, фюзеляжа.

Допустим, что крыло обтекается воздушным потоком со скоростью V , направленной вдоль оси x , совпадающей с корневой хордой крыла. В результате воздействия воздушного потока крыло деформируется, и будет находиться в некотором равновесном состоянии. Тогда уравнения равновесия элемента вязкоупругой линии, при совместных изгибно-крутильных колебаниях можно записать в виде

$$\begin{cases} E(1-R^*) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(J \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) + m(z) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - m(z) \sigma \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \\ - C_y^\alpha \rho b V^2 \left[\theta + \frac{1}{V} \frac{\partial \theta}{\partial t} \left(\frac{3}{4} b - x_i \right) - \frac{1}{V} \frac{\partial W}{\partial t} \right] = 0 \\ G(1-R^*) \frac{\partial}{\partial z} \left(J_p \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + m(z) \sigma \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \rho_m J_m \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \\ + C_{mE}^\alpha \rho b^2 V^2 \left[\theta + \frac{1}{V} \frac{\partial \theta}{\partial t} \left(\frac{3}{4} b - x_i - \frac{\pi b}{16 C_{mE}^\alpha} \right) - \frac{1}{V} \frac{\partial W}{\partial t} \right] = 0 \end{cases} \quad (1)$$

где $m(z)$ – погонная масса; J_m – погонный массовый момент инерции относительно центра жесткости; x_i – расстояние от передней кромки крыла до его оси жесткости; ρ_m , E , G – плотность и модули упругости материала; $J(z)$ – главный момент инерции сечений; $J_p(z)$ – геометрическая жесткость на кручение; θ – угол закручивания; W – прогиб; x_0 – координата центра тяжести сечения; ρ – плотность воздуха; ρ_m – плотность материала; $F(z)$ – площадь крыла на единицу длины (вдоль размаха); $C_y^\alpha, C_{mE}^\alpha$ – аэродинамические характеристики крыла; σ – расстояние центра тяжести сечения крыла от центра жесткости.

Совмещение оси жесткости с осью центров тяжести соответствует значению $\sigma = 0$ и совмещение оси жесткости с осью фокусов крыла – значению $C_{mE}^\alpha = 0$.

В этом случае уравнения движения принимают вид:

$$\begin{cases} E(1-R^*)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(J(z)\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right) + m(z)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - C_y^a \rho b V^2 \left[\theta + \frac{1}{V} \frac{\partial \theta}{\partial t} \left(\frac{3}{4}b - x_i \right) - \frac{1}{V} \frac{\partial W}{\partial t} \right] = 0 \\ G(1-R^*)\frac{\partial}{\partial z}\left(J_p(z)\frac{\partial \theta}{\partial z}\right) - \rho_m J_m \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\pi}{16} \rho b^3 V \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Таким образом, задача исследования изгибно-крутильного флаттера крыла сводится к решению системы интегродифференциальных уравнений в частных производных шестого порядка. В соответствии с этим необходимо сформулировать по три краевых условия на каждом конце крыла.

Уравнения (1) должны быть проинтегрированы при следующих граничных условиях:

а) На левом конце крыла, в заделке должны быть равны нулю прогиб, его первая производная по координате z и угол закручивания:

$$W = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial z} = 0; \quad \theta = 0; \quad \text{при } z = 0; \quad (3)$$

в) На правом свободном от нагрузки конце крыла, будут равны нулю изгибающий и крутящий моменты и поперечная сила:

$$EJ \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(EJ \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) = 0; \quad GJ_p \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = l. \quad (4)$$

Решение системы (2), удовлетворяющей граничным условиям задачи будем искать в виде:

$$\begin{aligned} W(z, t) &= \sum_{n=1}^N W_n(t) \varphi_n(z) \\ \theta(z, t) &= \sum_{n=1}^N \theta_n(t) \psi_n(z) \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n(z) &= \sin \lambda_n \frac{z}{l} - sh \lambda_n \frac{z}{l} - a_n \left(\cos \lambda_n \frac{z}{l} - ch \lambda_n \frac{z}{l} \right) \\ \psi_n(z) &= \sin \frac{\pi n z}{2l} \\ \lambda_n &= \frac{2n-1}{2} \pi, \quad a_n = \frac{\sin \lambda_n + sh \lambda_n}{\cos \lambda_n + ch \lambda_n}. \end{aligned} \right\}$$

Подставляя разложение в систему (1) и используя метод Бубнова-Галеркина, получим систему интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ). Вводя в ИДУ следующие безразмерные величины:

$$\frac{z}{l}, \quad \frac{x_i}{b}, \quad \frac{W}{l}, \quad \frac{h}{b}$$

и сохраняя прежние обозначения, имеем:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^N \left\{ D_{nk} \ddot{W}_{nk} - \bar{E}_{nk} \ddot{\theta}_{nk} - \gamma_1 \left(\ddot{\theta}_{nk} L_{nk} - \dot{W}_{nk} D1_{nk} \gamma_2 \right) + \right. \\ \left. + \gamma_3 (1 - R^*) A_{nk} W_{nk} - \gamma_1 \gamma_2 K_{nk} \theta_{nk} \right\} = 0 \\ \sum_{n=1}^N \left\{ U_{nk} \ddot{\theta}_{nk} - \gamma_4 \bar{N}_{nk} \ddot{W}_{nk} - \gamma_5 \left(U_{nk} \theta_{nk}(t) - \gamma_6 \dot{\theta}_{nk} U_{nk} - \right. \right. \\ \left. \left. - \gamma_7 Z_{nk} \dot{W}_{nk} \right) - \gamma_8 (1 - R^*) S_{nk} \theta_{nk} \right\} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\gamma_1 = \frac{\partial G_y}{\partial \alpha} \cdot \bar{\rho} M^* \gamma \lambda, \quad \gamma_2 = \frac{M^*}{\lambda}, \quad \gamma_3 = M_E g, \quad \gamma_4 = \frac{F b^2}{J_i} \cdot \frac{1}{\lambda},$$

$$\gamma_5 = \bar{\rho}_b \cdot \frac{\partial G_{mi}}{\partial \alpha} \cdot M^{*2} \gamma_4 \cdot \gamma, \quad \gamma_6 = \left(\frac{V_0}{V} \right) \cdot \lambda \cdot \left(\frac{3}{4} \right) - \bar{x}_i - \frac{\pi}{16 \frac{\partial C_{mi}}{\partial \alpha}}, \quad \gamma_7 = \frac{V_0}{V},$$

$$\gamma_8 = M_G \cdot \lambda \cdot \frac{F b^2}{J_i} \cdot \gamma \cdot \left(\frac{h_0}{b} \right)^3 \cdot \frac{\pi^2}{128}$$

При совмещении оси жесткости с осью центров тяжести и совмещении оси жесткости с осью фокусов крыла уравнения (6) принимают вид:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^N \left\{ D_{nk} \ddot{W}_{nk} - \gamma_1 \left(\dot{\theta}_{nk} L_{nk} - \dot{W}_{nk} D1_{nk} \gamma_2 \right) + \right. \\ \left. + \gamma_3 (1 - R^*) A_{nk} W_{nk} - \gamma_1 \gamma_2 K_{nk} \theta_{nk} \right\} = 0 \\ \sum_{n=1}^N \left\{ U_{nk} \ddot{\theta}_{nk} - \gamma_5 \gamma_6 \dot{\theta}_{nk} U_{nk} - \gamma_8 (1 - R^*) S_{nk} \theta_{nk} \right\} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

где $M^* = \frac{V}{V_0}$ — число Маха, $\rho_b = \frac{\rho}{\rho_m}$, $\gamma = \frac{bl}{F_0}$, $g = \frac{J_0}{l^2 F_0}$,

$$\lambda = \frac{l}{b}, \quad g_m = \frac{b^2 F_0}{J_m}, \quad M_G = \frac{G}{\rho_m V_0^2}, \quad M_E = \frac{E}{\rho_m V_0^2},$$

$$D_{nk} = \int_0^1 (1 - \alpha^* z) \varphi_n(z) \varphi_k(z) dz, \quad L_{nk} = \int_0^1 \left(\frac{3}{4} - x_i \right) \psi_n(z) \varphi_k(z) dz,$$

$$D1_{nk} = \int_0^1 \varphi_n(z) \varphi_k(z) dz,$$

$$A_{nk} = \int_0^1 \left[6\alpha^* \varphi_n''(z) - 6\alpha^* (1 - \alpha^* z)^2 \varphi_n'''(z) + (1 - \alpha^* z)^3 \varphi_n^{IV}(z) \right] \varphi_k(z) dz$$

$$U_{nk} = \int_0^1 \psi_n(z) \psi_k(z) dz, \quad S_{nk} = \frac{128}{\pi^2} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z} \left(J_p \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \psi_k(z) dz$$

Интегрирование системы (6) проводилось численным методом, предложенным в работах [7,8]. На основе этого метода описан алгоритм численного решения системы (7). На базе разработанного алгоритма создан пакет прикладных компьютерных программ [9-12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Zhen Rong, Bochao Cao, Jianqiang Hu, Stability analysis on an aeroelastic system for design of a flutter energy harvester, *Aerospace Science and Technology*, 60(2017) 203-209.
2. Xianjia Chen, Zhiping Qiu, Xiaojun Wang, Yunlong Li, Ruixing Wang, Uncertain reduced-order modeling for unsteady aerodynamics with interval parameters and its application on robust flutter boundary prediction, *Aerospace Science and Technology*, 71(2017) 214-230.
3. Lamper R.E. Introduction to flutter theory. - M.: Mashinostroenie, 1990. - 144 p.
4. Farbod Alijani, Marco Amabili, "Non-linear Vibrations of Shells: A literature review from 2003 to 2013," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol.58 (2014) 233-257.
5. Fazelzadeh, S.A., Mazidi, A., Kalantari, H. Bending-torsional flutter of wings with an attached mass subjected to a follower force, *Journal of Sound and Vibration*, Volume 323, Issues 1–2, 2009, Pages 148-162, <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.01.002>.
6. Mayuresh J. Patil, Dewey H. Hodges, Carlos E. S. Cesnik. Nonlinear aeroelasticity and flight dynamics of High-Altitude Long-Endurance aircraft. Conference: 40th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, AIAA-98-1955. DOI: [10.2514/6.1999-1470](https://doi.org/10.2514/6.1999-1470)
7. Badalov, F.B., Eshmatov, Kh., Yusupov, M. "Some Methods of Solution the Systems of Integro-differential Equations in Problems of Viscoelasticity," *Applied Mathematics and Mechanics*, vol.51, no.5 (1987) 867-871.
8. Badalov, F.B., Khudayarov, B.A. "Investigation of the Effect of Viscoelastic Properties of Material of an Aircraft Structures," *Proc. of NAS of Armenia. Series "Mechanics"*, vol.61, no.1 (2008) 75-82.
9. Khudayarov, B.A., Turayev, F.Zh. Nonlinear supersonic flutter for the viscoelastic orthotropic cylindrical shells in supersonic flow, *Aerospace Science and Technology* 84 (2019) 120-130. doi: [10.1016/j.ast.2018.08.044](https://doi.org/10.1016/j.ast.2018.08.044)
10. Khudayarov, B.A., Komilova, Kh.M. (2019), "Vibration and dynamic stability of composite pipelines conveying a two-phase fluid flows", *Engineering Failure Analysis*, Vol.104, pp. 500-512.
11. Khudayarov, B.A. "Numerical Analysis of Nonlinear Flutter of Viscoelastic Plates," *INTERNATIONAL APPLIED MECHANICS*, vol.41, no.5 (2005) 538-542.
12. Khudayarov, B.A., Bandurin, N.G. "Numerical Investigation of Nonlinear Vibrations of Viscoelastic Plates and Cylindrical Panels in a Gas Flow," *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, vol.48, no.2 (2007) 279-284.

ОПТИМАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ПРИБЛИЖЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ

Шадиметов Холмат

д.ф.-м.н. ТГТУ, Институт математики АН РУз

Давлатова Фотима

Институт математики АН РУз

Для приближенного вычисления интеграла

$$I([0,1], \omega) = \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx \quad (1)$$

могут быть применены многие известные классические правила интегрирования, например, формулы прямоугольников, трапеций, парабол, а также, формулы которые основаны на методах Котеса, Гаусса и др. Эти формулы получены заменой интегрируемой функции на всем отрезке интегрирования или его частях алгебраическим многочленом невысокой степени. Поэтому они дают хорошую точность в случае, если интегрируемая функция является достаточно гладкой и не быстро изменяющейся. В интеграле (1) интегрируемой функцией является произведение $e^{2\pi i \omega x} \varphi(x)$. Здесь, если параметр ω – большое число, то функция $e^{2\pi i \omega x}$ быстро осциллирует, и для получения значения $I([0,1], \omega)$ с допустимой погрешностью, даже при медленно изменяющейся функции $\varphi(x)$, следует в соответствующей приближенной формуле брать многочлены степени $n \gg \omega$. Это приводит к трудоемким вычислениям.

Таким образом, указанные выше приближенные формулы практически могут применяться для вычисления $I([0,1], \omega)$ при небольших значениях ω , чтобы построить квадратурные формулы, пригодные для применения при изменении ω в широких пределах, необходимо заранее учесть наличие множителя $e^{2\pi i \omega x}$. Это можно сделать, принимая например, такие множители за весовые функции.

Одной из первых работ, посвященных вычислению интеграла типа $I([0,1], \omega)$, является работа Файлона [1], в которой предлагается метод, напоминающий метод Симпсона. Однако в то время как в методе Симпсона вся подынтегральная функция заменяется параболой, в методе Файлона параболой заменяется только функция $\varphi(x)$. Таким образом Файлон получил квадратурную формулу с коэффициентами, зависящими от ω .

Современный уровень развития методов вычисления интегралов $I([0,1], \omega)$ отражен в работах [2-4].

Мы рассмотрим квадратурных формул с производными вида

$$\int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N d[\beta] \varphi(h\beta) + Q(\varphi'(0) - \varphi'(1)), \quad (2)$$

с функционалом погрешности

$$\ell_{\omega}^N(x) = \chi_{[0,1]}(x)e^{2\pi i\omega x} - \sum_{\beta=0}^N d[\beta]\delta(x-h\beta) + Q(\delta'(x) - \delta'(x-1)), \quad (3)$$

здесь $d[\beta]$ и Q коэффициенты квадратурной формулы (2), ω – произвольное число, т.е. $\omega \in R$ – множество действительных чисел, $\chi_{[0,1]}(x)$ – характеристическая функция отрезка $[0,1]$, $\delta(x)$ – дельта функция Дирака.

В настоящей работе в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ вычислена квадрат нормы функционала погрешности $\ell_{\omega}^N(x)$.

Справедлива следующая

Теорема. Для квадрата нормы функционала погрешности (3) квадратурной формулы (2) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ имеет место следующая формула:

$$\begin{aligned} & \left\| \ell_{\omega}^N(x) \right\|_{L_2^{(m)*}(0,1)}^2 = \\ & = (-1)^m \left[\sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N d[\beta]d[\gamma] \frac{|h\beta - h\gamma|^{2m-1}}{2(2m-1)!} - 2 \sum_{\beta=0}^N d[\beta] \int_0^1 e^{2\pi i\omega x} \frac{|x - h\beta|^{2m-1}}{2(2m-1)!} dx + \right. \\ & \quad + 2Q \int_0^1 e^{2\pi i\omega x} \frac{(x^{2m-2} + (1-x)^{2m-2})}{2(2m-2)!} dx + \frac{Q^2}{(2m-3)!} - \\ & \quad - 2Q \sum_{\beta=0}^N d[\beta] \frac{(h\beta)^{2m-2} + (1-h\beta)^{2m-2}}{2(2m-2)!} + \\ & \quad \left. + \int_0^1 \int_0^1 e^{2\pi i\omega x} e^{2\pi i\omega y} \frac{(x-y)^{2m-1}}{2(2m-1)!} \text{sign}(x-y) dx dy \right]. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Filon L.N.G. On a quadrature formula for trigonometric integrals.—Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1928, 49, p. 38—47.
2. Abdullo R. Hayotov, Soomin Jeon, Kholmat M. Shadimetov, Application of optimal quadrature formulas for reconstruction of CT images, Journal of Computational and Applied Mathematics 388 (2021) 113313, <https://doi.org/10.1016/j.cam.2020.113313>
3. A.R. Hayotov, S. Jeon, C.-O. Lee, Kh.M. Shadimetov. Optimal quadrature formulas for non-periodic functions in Sobolev space and its application to CT image reconstruction, Filomat, 2021, vol.35, no.12, 4177-4195.
4. Boltaev N.D., Hayotov A.R., Milovanovic G.V., Shadimetov Kh.M. Optimal quadrature formulas for Fourier coefficients in $W_2^{(m,m-1)}$ space. Journal of Applied analysis and Computation, 2017, Volume 7, Number 4, 1233-1266.

МОДЕЛИ ВИРУСНЫХ ЗАБОЛЕВАНИЙ, ПЕРЕДАЮЩИХСЯ ВОЗДУШНО-КАППИЛЛЯРНЫМ ПУТЕМ

Эшмаматова Дилфуза

К.ф.–м.н., Ташкентский Государственный Транспортный Университет

История повальных болезней, охватывавших народы на протяжении многих веков, есть не только история неисчислимых бедствий и тяжелейших социальных потрясений, сопровождавшихся огромным количеством уносимых этими болезнями жертв, но это есть также история напряженной работы человеческой мысли, стремящейся познать сущность происходящих при этом явлений и изыскать меры борьбы с ними.

Моделирование инфекционных заболеваний – это инструмент, который использовался для изучения механизмов распространения болезней, прогнозирования будущего развития вспышки и оценки стратегий борьбы с эпидемией [1].

Первые статистические исследования инфекционных заболеваний произвел Джон Граунт. В 1662 году Дж.Граунт издал книгу «Естественные и политические наблюдения над списками умерших», (*Natural and Political Observations Made upon the Bills of Mortal*) которая посвящена преимущественно статистике по социальной гигиене и статистике заболеваний. Спустя сто лет, в 1760 году Даниэль Бернулли использовал математические методы для анализа смертности от оспы [2]. Д. Бернулли создал математическую модель для защиты практики прививки от оспы [2].

В 20-х годах прошлого века появились компартментные модели. Модель Кермак-Маккендрик эпидемии (1927) и модель эпидемии Reed-Frost (1928), которые описывают связь между восприимчивыми, инфицированными и выздоровевшими особями в популяции. Модель эпидемии Кермака – МакКендрика успешно предсказывала поведение вспышек, очень похожих на те, что наблюдались во многих зарегистрированных эпидемиях [1]–[3].

Идеи, заложенные Уильямом О. Кермаком и Андерсоном Г. Маккендриком стали основой для дальнейших исследований в вопросах популяционной генетики и эпидемиологии. На основе модели SIR построена целая иерархия математических моделей эпидемиологических ситуаций вирусных заболеваний. Это модели такие как SI, SIS, SIRS, SEIR, SEIRS, MSIR, MSEIR и др. Эти модели построены на дифференциальных уравнениях. Мы рассматриваем дискретный аналог этих моделей, так как считаем, что дискретный аналог более адекватно описывает данный процесс.

В работе предлагается дискретный вариант этих моделей, так как считаем, что дискретная модель более адекватно соответствует реальной ситуации.

Известно [4], что при отображение Лотки–Вольтерра, действующий $m-1$ – мерном симплексе $S^{m-1} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_m) : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\}$ имеет вид:

$$V : x'_k = x_k \left(1 + \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i \right), k = 1, \dots, m, \quad (1)$$

при этом $a_{ki} = -a_{ik}$, $|a_{ki}| \leq 1$.

Возьмём произвольную внутреннюю точку симплекса $x^0 \in S^{m-1}$. Последовательность $\{x^{(n)}\}$, где $x^{(n)} = V^n x^0$, называется траекторией при $n \in \mathbb{Z}$, положительной (отрицательной) траекторией при $n \in \mathbb{N}$ ($-n \in \mathbb{N}$). Через $\omega^+(x^0)$ и $\omega^-(x^0)$ обозначим множество предельных точек, соответственно, положительной и отрицательной траекторий.

С работ [5] известна следующая

Теорема [5]. Пусть $A = (a_{ki})$ – кососимметрическая матрица. Тогда решение системы линейных неравенств

$$P = \left\{ x \in S^{m-1} : \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i \geq 0, k = \overline{1, m} \right\} \neq \emptyset$$

и

$$Q = \left\{ x \in S^{m-1} : \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i \leq 0, k = \overline{1, m} \right\} \neq \emptyset$$

выпуклые многогранники.

Пусть отображение Лотки-Вольтерра, действующий в трехмерном симплексе имеет вид:

$$V: \begin{cases} x'_1 = x_1(1 - a_{12}x_2), \\ x'_2 = x_2(1 + a_{12}x_1 - a_{23}x_3), \\ x'_3 = x_3(1 + a_{23}x_2 - a_{34}x_4), \\ x'_4 = x_4(1 + a_{34}x_3). \end{cases} \quad (2)$$

Соответствующая кососимметрическая матрица является вырожденной, так как некоторые коэффициенты матрицы равны нулю [6], т.е. $a_{ki} = 0$. В случае, когда кососимметрическая матрица, вырожденная мы можем ввести понятие смешанного графа [6].

Теперь динамическую систему (3) переведем в эпидемиологическую лексику, т.е. все неизвестные x_i ($i = \overline{1, 4}$) имеют смысл:

x_1 – здоровые, но восприимчивые к инфекции особи. т.е. группа S;

x_2 – инфицированные особи, находящиеся в стадии инкубационного (латентного) периода, т.е. группа E;

x_3 – инфицированные и склонные к заражению других особей, т.е. группа I;

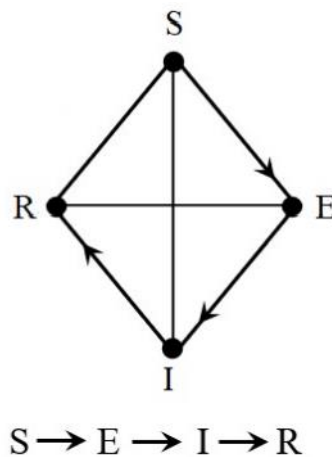
x_4 – выздоровевшие и имеющие иммунитет к болезни особи группа R;

Тогда в эпидемиологической терминологии наше отображение имеет вид:

$$V: \begin{cases} S' = S(1 - aE), \\ E' = E(1 + aS - dI), \\ I' = I(1 + dE - fR), \\ R' = R(1 + fI). \end{cases} \quad (3)$$

Инфекция может возникнуть в результате контакта инфекционных и восприимчивых особей. Основной вопрос заключается в том, как меняется доля инфицированных и доля восприимчивых в популяции.

Соответствующий смешанный граф и переход особей из групп в группы имеют вид:



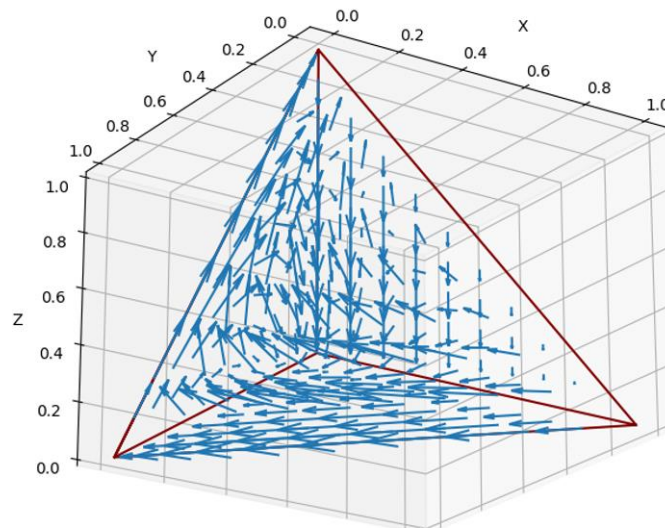
Теорема. Если эпидемиологическая ситуация описывается моделью (3) (смотреть рисунок) $S \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow R$, тогда множества

$$P = \left\{ \frac{d}{a+d} \leq S \leq 1 \right\} \text{ либо } P = \left\{ 0 \leq I \leq \frac{a}{a+d} \right\},$$

$$Q = \left\{ 0 \leq E \leq \frac{f}{f+d} \right\} \text{ либо } Q = \left\{ \frac{d}{f+d} \leq R \leq 1 \right\}.$$

Нахождение множества P и Q даёт нам возможность определить историю начала эпидемиологической ситуации и ее спад. Другими словами говоря, множество P соответствуют истории болезни, т.е. оно состоит из множества предельных точек отрицательной траектории, множество Q соответствует концу эпидемиологической ситуации т.е. множество предельных точек положительной траектории.

Фазовый портрет данной модели построен на языке программирования Python 10 (смотреть рисунок).



ЛИТЕРАТУРА.

1. <https://monographies.ru/en/book/9660>
2. Murray J.D. Mathematical biology. Third Edition. Springer. 2009. p.776.
3. W.O. Kermack and A.G. McKendrick. A contribution to the mathematical theory of epidemics, Proc. R. Soc. Lond, 115 (1927), 700-721.
4. Eshmamatova D.B., Ganikhodzhaev R.N. Tournaments of Volterra type transversal operators acting in the simplex S^{m-1} // AIP Conference Proceedings 2365, 060009 (2021); <https://doi.org/10.1063/5.0057303>.
5. Ganikhodzhaev R.N., Tadzieva M.A., Eshmamatova D.B. Dynamical Properties of Quadratic Homeomorphisms of a Finite-Dimensional Simplex. Journal of Mathematical Sciences, 245(3). P.398-402.
6. D.B.Eshmamatova., R.N.Ganikhodzhaev., M.A.Tadzhieva. Dynamics of Lotka-Volterra quadratic mappings with degenerate skew-symmetric matrix (the case of small dimensions) // Uzbek Mathematical Journal, 2022. № 1.

ЗАДАЧА ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ С ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Юнусов Насиржан

Андижанский государственный университет

В задачах интерполирование для функций заданных равномерными сетками, с шагом $h = x_{i+1} - x_i$ при постоянном. Рассмотрим интерполяционную формулу Ньютона для этого случая. С начала введем понятие конечных разностей для непрерывной функции изменения аргумента заменяющим дискретным множеством точек так называемым сеткой[1].

Пусть функция задана таблицей с постоянным шагом:

x	y	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$		$\Delta^k y_i$

x_0	y_0					
x_1	y_1	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$		...
x_2	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$		...
x_3	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$		...
x_4	y_4	Δy_3				...
...	...					
x_n	y_n					

Рис.1.

Разности между значениями функции в соседних узлах называются конечными разностями первого порядка:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1). \quad (1).$$

Из конечных разностей первого порядка можно получить конечные разности второго порядка:

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-2) \quad (2).$$

– это разность между двумя соседними разностями первого порядка.

Здесь

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0,$$

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1$$

и

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0.$$

(Индекс «разности» идет по младшему индексу: $\Delta y_0 = y_1 - y_0$).

Теперь определим конечные разности третьего порядка:

$$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-3).$$

Разностей последующего порядка на одну меньше, чем предыдущего. Имея $n+1$ значений y , можно получить разности до n -го порядка включительно. Т.е. k в таблице равно n .

Конечные разности любого порядка могут быть представлены через значения функции. Выразим конечные разности второго и третьего порядка через значения функции:

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - y_{i+1} - y_{i+1} + y_i = y_{i+2} - 2 \cdot y_{i+1} + y_i$$

т.е.

$$\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2 \cdot y_{i+1} + y_i$$

Для конечных разностей третьего порядка:

$$\begin{aligned}\Delta^3 y_i &= \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i = y_{i+3} - 2y_{i+2} + y_{i+1} - 2y_{i+2} + 2 \cdot y_{i+1} - y_i = \\ &= y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i\end{aligned}$$

т.е.

$$\Delta^3 y_i = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i$$

Существует формула

$$\Delta^k y_i = \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j y_{k+i-j}, \quad (3).$$

где $C_k^j = \frac{k!}{j!(k-j)!}$.

Найдем с помощью этой формулы, например $\Delta^3 y_i$:

$$C_3^0 = \frac{3!}{0!(3-0)!} = 1, \quad C_3^1 = 3, \quad C_3^2 = 3, \quad C_3^3 = 1$$

$$\begin{aligned}\Delta^3 y_i &= (-1)^0 \cdot 1 \cdot y_{3+i-0} + (-1)^1 \cdot 3 \cdot y_{3+i-1} + (-1)^2 \cdot 3 \cdot y_{3+i-2} + (-1)^3 \cdot 1 \cdot y_{3+i-3} = \\ &= y_{i+3} - 3 \cdot y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i\end{aligned}$$

$$\Delta^3 y_i = y_{i+3} - 3 \cdot y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i, \text{ что мы и получали выше.}$$

Будем искать интерполяционный многочлен в виде [2]:

$$\begin{aligned}P_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots \\ &\dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}).\end{aligned} \quad (4).$$

Это многочлен n -ой степени. Согласно условию интерполяции должно быть:

$$P_n(x_0) = y_0.$$

Отсюда

$$a_0 = y_0.$$

$$P_n(x_1) = y_1,$$

т.е.

$$a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1.$$

Отсюда

$$a_1 = \frac{y_1 - a_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h}.$$

Далее,

$$y_2 = P_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1),$$

отсюда

$$a_2 = \frac{y_2 - a_0 - 2a_1 h}{2h^2} = \frac{y_2 - y_0 - 2\Delta y_0}{2h^2} = \frac{y_0 - 2y_1 + 2y_2}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}.$$

Т.е.

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}.$$

Аналогично, из того, что $y_3 = P_n(x_3)$ найдем $a_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{6h^3}$. Вообще,

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k} \quad (5).$$

Конечная разность нулевого порядка, по определению, есть само значение функции:

$$\Delta^0 y_0 = y_0.$$

Искомый многочлен примет вид:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{6h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots$$

$$\dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}). \quad (6).$$

Введем вместо переменной x переменную t :

$$t = \frac{x - x_0}{h} \quad (7).$$

$$x = th + x_0$$

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{th + x_0 - x_1}{h} = t - 1$$

$$\frac{x - x_2}{h} = \frac{th + x_0 - x_2}{h} = t - 2$$

.....

$$\frac{x - x_k}{h} = \frac{th + x_0 - x_k}{h} = t - k$$

тогда

$$P_n(x) = P_n(x_0 + th) = y_0 + \Delta y_0 t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t(t-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!} t(t-1)(t-2) + \dots$$

$$\dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t-1)(t-2)\dots(t-n+1). \quad (8).$$

Это первая интерполяционная формула Ньютона.

Она применяется, когда точка x , в которой необходимо найти приближенное значение функции, находится в начале отрезка интерполяции (рис. 2):

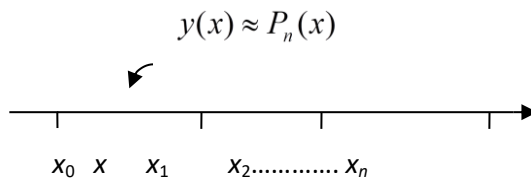


Рис. 2

В качестве точки x_0 берется ближайшая к x точка таблицы слева. Точки, правее той, которую взяли за x_0 , перенумеровываются.

Значение функции в точке x_0 и точках правее нее используются для нахождения конечных разностей $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \Delta^3 y_0$ и т.д. Поэтому точек в таблице, правее той, которую мы взяли за x_0 , должно быть достаточно, чтобы построить полином нужной степени. Используются точки «впереди» x , поэтому первую интерполяционную формулу Ньютона называют формулой для интерполирования «вперед».

Когда x ближе к концу отрезка интерполяции, формула интегрирования «вперед» может не позволить построить полином нужной степени n – может не хватить узлов для расчета конечных разностей вплоть до n -го порядка (впереди слишком мало узлов). В этом случае лучше использовать узлы слева от точки x . Для этого используется формула интерполирования «назад» – вторая интерполяционная формула Ньютона (рис. 3).

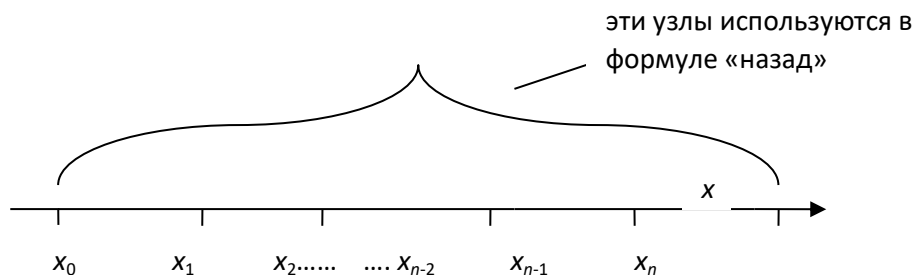


Рис. 3

Интерполяционный полином будем искать в виде:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + a_3(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + \dots \\ \dots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})\dots(x - x_1). \quad (9)$$

Из условий интерполирования $y_n = P_n(x_n)$, отсюда $a_0 = y_n$.

$$P_n(x_{n-1}) = y_{n-1},$$

$$P_n(x_{n-1}) = a_0 + a_1(x_{n-1} - x_n) = y_{n-1}$$

отсюда

$$a_1 = \frac{y_{n-1} - a_0}{x_{n-1} - x_n} = \frac{y_{n-1} - y_n}{x_{n-1} - x_n} = \frac{\Delta y_{n-1}}{h},$$

т.е.

$$a_1 = \frac{\Delta y_{n-1}}{h}.$$

Аналогично, из условия $P_n(x_{n-2}) = y_{n-2}$ можно получить, что

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2h^2}.$$

Вообще,

$$a_k = \frac{\Delta^k y_{n-k}}{k!h^k}, \quad (10).$$

и полином будет

$$\begin{aligned} P_n(x) = & y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \\ & + \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!h^3}(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1})\dots(x - x_1). \end{aligned} \quad (10)$$

Введем переменную $t = \frac{x - x_n}{h}$, тогда

$$\begin{aligned} x &= th + x_n \\ \frac{x - x_n}{h} &= \frac{th + x_n - x_n}{h} = t \\ \frac{x - x_{n-1}}{h} &= \frac{th + x_n - x_{n-1}}{h} = t + 1 \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{x - x_{n-k}}{h} &= \frac{th + x_n - x_{n-k}}{h} = t + k \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} P_n(th + x_n) = & y_n + \Delta y_{n-1}t + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!}t(t+1) + \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!}t(t+1)(t+2) + \dots \\ & \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}t(t+1)(t+2)\dots(t+n-1). \end{aligned} \quad (11).$$

Это вторая интерполяционная формула Ньютона, «назад».

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы.
2. В.Е.Шнейдер, А.И.Слущкий, А.С.Шумов. Краткий курс высшей математики.

ЛИНЕЙНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА**Юнусов Насиржан**

Андижанский государственный университет

$$A(n)X_{n+2} + B(n)X_{n+1} + C(n)X_n = D(n) \quad (1.1) [1]$$

Уравнение вида (1,1) называется линейным разностным уравнением второго порядка, где $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$ и $D(n)$ заданные функции от n . Если $D(n)=0$, то уравнение называется однородным. В противном случае $d(n) \neq 0$ не однородным.

Если $A(n)$, $B(n)$ и $C(n)$ постоянные, то (1.1) называют уравнением с постоянными коэффициентами. Уравнение (1.1) можно решить методами, аналогичными методом решения уравнений первого порядка. Полагая $n=0$, можно выразить X_2 через X_0 и X_1 . Полагая $n=1$, выразим X_3 через X_2 и X_1 , а затем через X_0 и X_1 . Теоретически таким образом можно выразить X_n через X_0 и X_1 . Однако вычисления при этом оказываются очень громоздкими, и вывести общую формулу для X_n крайне трудно. Случай постоянных коэффициентов поддается решению общими методами.

Рассмотрим линейное однородное разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$aX_{n+2} + bX_{n+1} + cX_n = 0 \quad (1.2)$$

Будем считать a, b, c постоянными, причем $a \neq 0$.

Будем искать решение уравнения (1.2) в виде:

$$X_n = \lambda^n, \quad (1.3) [1].$$

где λ – некоторое число. Учитывая, что $X_{n+1} = \lambda^{n+1}$, $X_{n+2} = \lambda^{n+2}$ из уравнения (1.2) получим:

$$a \lambda^{n+2} + b \lambda^{n+1} + c \lambda^n = 0,$$

или a

$$\lambda^2 + b \lambda + c = 0, \quad (1.4)$$

Уравнение (1.4) называется характеристическим уравнением для разностного уравнения (1.8). Оно является квадратным и имеет следующие корни:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

При решении характеристического уравнения следует рассматривать три случая. Два его корня могут быть действительными и различными (когда $b^2 - 4ac > 0$); они могут быть действительными и равными между собой ($b^2 - 4ac = 0$) или же комплексными ($b^2 - 4ac < 0$).

Случай 1. Если $b^2 - 4ac > 0$, то описанный выше метод дает два решения уравнения (1.4): и . Общее решение имеет вид:

$$\begin{aligned} X_1 &= \lambda_1^n, \quad X_2 = \lambda_2^n \\ X_n &= C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n, \end{aligned} \quad (1.5) [2].$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Полагая $n=0, n=1$ в решении (1.5) получаем: постоянные C_1 и C_2 можно выразить через значения X_0, X_1 .

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= X_0 \\ C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2 &= X_1 \end{aligned}$$

Решая систему уравнений, находим:

$$C_1 = (\lambda_2 X_0 - X_1) / (\lambda_2 - \lambda_1), \quad C_2 = (\lambda_1 X_0 - X_1) / (\lambda_1 - \lambda_2) \quad (1.6)$$

Таким образом, если даны X_0, X_1 то этим определено единственное решение уравнения (1.4).

Случай 2. Если $b^2 - 4ac = 0$, то корни характеристического уравнения (1.4) равны между собой: $\lambda_1 = \lambda_2 = -b/2a$. Рассмотренный метод порождает лишь одно решение $X_n = \lambda^n$. Однако, другим решением уравнения (1.4) служит $X_n = n\lambda^{n-1}$.

Тогда общее решение можно записать в виде:

$$X_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 n \lambda_1^{n-1}, \quad (1.7)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Полагая $n=0, n=1$ в решении (1.7) получаем:

$$\begin{aligned} C_1 &= X_0 \\ C_1 \lambda_1 + C_2 &= X_1 \end{aligned}$$

Отсюда,

$$C_1 = X_0, C_2 = X_1 - \lambda_1 X_0, \quad (1.8)$$

Случай 3. Если $b^2 - 4ac < 0$, то корни характеристического уравнения (1.4) являются комплексно-сопряженными числами:

$$\lambda_1 = -\frac{b}{2a} - i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}, \lambda_2 = -\frac{b}{2a} + i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad (1.9) [2].$$

где i – мнимая единица ($i^2 = -1$).

Общее решение уравнения (1.4) записывается в виде:

$$X_n = \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{n}{2}} (c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta), \quad (1.10)$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные,

$$\tan \theta = -\sqrt{4ac - b^2} / b.$$

Постоянные c_1, c_2 можно выразить, как и прежде, через X_0 и X_1 .

Решение (1.10) разностного уравнения (1.4) обладает интересными свойствами. Так как $\cos n\theta, \sin n\theta$ с увеличением n колеблются между значениями -1 и 1 , решение X_n также колеблется несколько более сложным образом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Математика для биологов С.Гроссман, Дж. Тернер.
2. Линейные разностные уравнения. В.Н.Кудашев.

СЎЗБОШИ		5
3-SHO‘‘BA. FUNKSIONAL ANALIZ VA EHTIMOLLAR NAZARIYASINING ZAMONAVIY MASALALARI		9
Abdullayev Janikul, Rustamov Bilol, Abduxolliqov Adhambek	MUSBAT QO‘ZG‘ALISHLI FRIDRIXS OPERATORI XOS QIYMATLARI UCHUN QUYI VA YUQORI BAHOLAR	9
Abdullayev Janikul, Safarova Gulshoda, Mavlanova Hafiza	PANJARADAGI IKKI FERMIONLI SISTEMANING INVARIANT QISM FAZOLARI VA BOG‘LANGAN HOLATLARI	12
Abdushukurov Abdurakhim, Muradov Rustam, Abdulvohidov Alisher	WAVELET DENSITY ESTIMATION IN NONPARAMETRIC REGRESSION MODEL	16
Abdushukurov Fazihuddin	ON PROBABILITY: EACH CELL CONTAINS EVEN NUMBER OF PARTICLES. ASYMPTOTICS	18
Abduxakimov Saidakbar, Samatov Barhayot	PANJARADAGI IKKI BOZONLI SISTEMAGA MOS SCHRÖDINGER OPERATORI XOS QIYMATI HAQIDA	20
Ahmadov Rahmatjon	PANJARADA BIR ZARRACHALI SCHRÖDINGER OPERATORI XOS QIYMATINING MAVJUDLIGI HAQIDA	21
Azizova Mukammal, Esirgapov Ilyosjon	PANJARADA BIR ZARRACHALI SCHRÖDINGER OPERATORI XOS QIYMATI HAQIDA	23
Bahronov Bekzod	PANJARADAGI UCH ZARRACHALI SISTEMAGA MOS MODEL OPERATORNING XOS FUNKSIYALARI UCHUN FADDEYEV TENGLAMASI	24
Bozorov Suxrob	ESTIMATION OF DISTRIBUTION FUNCTION BASED ON PRESMOOTHED RELATIVE-RISK FUNCTION	27
Dadamirzayeva Odina	JARAYONNI PUASSON QONUNIGA BO‘YSUNISHINI TEKSHIRISHNING NAZORAT KARTA USULI HAQIDA	31
Davronov Odil, Eshmuminova Dilbar	EHTIMOLIY MOLIVAVIY OPERATSIYALARNING XARAKTERISTIKALARI	33
Egamberdiyev Ubaydullo	UCHINCHI TARTIBLI KELI DARAXTIDA α PARAMETRLI BIR ARALASH TIPDAGI MODEL UCHUN ASOSIY HOLATLAR	36
Ergashev Nodir	BIRLIK DOIRADAGI TASODIFIY QAVARIQ QOPLAMA UCHLARI JARAYONINING BIR ASIMPTOTIK XOSSASI HAQIDA	38

G'anixo'jayev Rasul, Mo'minov Ulug'bek	PARAMETRLANGAN KVADRAT FUNKSIYA BIFURKATSIYASI	40
Gafurov Maxamat, Takabayev Umidjon	TAJRIBALARNI REJALASHTIRISHDA MATEMATIK KUTILMANING QO'LLANISHI	41
Hamdamova Surayyo	QAVARIQ QOPLAMA FUNKSIONALLARINING O'RTA QIYMATLARINI IFODALARI HAQIDA	43
Husanboyev Javohir	PARAMETRIK VA NOPARAMETRIK OPSIONLARNI NARXLASH MODELLARI	45
Imomov Azam	ON PROPERTIES OF A STRUCTURAL PARAMETER OF THE MARKOV Q-PROCESS	47
Ismoilova Dildora	CHEKLI O'LCHAMLI QO'ZG'ALISHGA EGA UMUMLASHGAN FRIDRIXS MODELINING MUHIM VA DISKRET SPEKTRLARI	51
Khakimov Otabek, Abduqodirov Asliddin	ON P-ADIC GIBBS MEASURES FOR COUNTABLE STATE POTTS MODEL ON A CAYLEY TREE	53
Khakimov Otabek, Saidov Abdulatif	ON DYNAMICS OF RIESZ TYPE STOCHASTIC OPERATOR	54
Khalkhadjaev Bakhtiyor	ABOUT DEPENDENCE BETWEEN PQD AND ASSOCIATED VARIABLES	56
Khalkhuzhaev Ahmad, Khamidov Shakhobiddin, Jumanov Jamol	THE EXISTENCE OF EIGENVALUES OF THE ONE PARTICLE DISCRETE SCHRÖDINGER OPERATOR	58
Lakaev Saidakhmat, Abduvayitov Saidakbar	EXISTENCE OF EIGENVALUES IN A SYSTEM OF TWO PARTICLES IN AN OPTICAL LATTICE	60
Lakaev Saidakhmat, Khamidov Shakhobiddin, Uktamov Aminjon	THE NUMBER AND LOCATION OF EIGENVALUES OF THE TWO PARTICLE DISCRETE SCHRÖDINGER OPERATORS	62
Nematov Mirsulton	KELI DARAXTIDA μ PARAMETRLLI POTTS - SOS MODEL UCHUN TRANSLATION – INVARIANT ASOSIY HOLATLAR	64
Qarshiyev Umidjon	BIRJINSLLI BO'LMAGAN PUASSON NUQTAVIY JARAYONIDAN YARALGAN QAVARIQ QOPLAMA UCHLARINING TAQSIMOTI	66
Quljanov O'tkir, Eshmuxammedov Abdulla	KOP O'LCHOVLLI NORMAL TAQSIMOT	68

Qurbonov Habibullo, Axmatova Shaxnoza	KUTISH JOYLARI SONI CHEKLANGAN SISTEMALAR NOSTATSIONAR NAVBAT UZUNLIKLARI TAQSIMOTLARI UCHUN IKKILANMA MUNOSABAT	70
Rozikov Utkir, Safarov Janibek	A P-ADIC DYNAMICAL SYSTEM: LIMIT POINTS	72
Shamsiyeva O'g'iloy	BA'ZI FUNKSIYALARNING QO'ZG'ALMAS NUQTALARI VA ORBITALARI	74
Shukurillayeva Kibriyo	BOSHLANG'ICH SINFI O'QUVCHILARINI XOTIRASINI MUSTAHKAMLASH BO'YICHA OLIB BORILGAN SO'NGGI TAJIRIBALARNING STATISTIK TAHLILI	76
Sobitaliyev Shaxzod	KICHIK KVADRATLAR USULI VA UNING TATBIQLARI	78
Tagaymurotov Abror	ON POLAR OF THE SPACES OF PROBABILITY AND IDEMPOTENT PROBABILITY MEASURES	81
Takabayev Umidjon	EKSPERIMENTAL MA'LUMOTLAR ASOSIDA KO'P FAKTORLI CHIZIQLI REGRESSIYA TENGLAMASINI TUZISH VA TAHLIL QILISH	84
Tojiboyev Bahtiyor, Burxonova Maloxatxon	TO'RT HOLATLI HC MODELLARINING BIRI UCHUN DAVRIY GIBBS O'LCHOVLARI HAQIDA	87
Tursunov Bekzod	NATURAL SONNI ABSOLYUT BO'LAKLASHDAGI BUTUN YECHIMLARI SONI	90
Umarov Tursunboy	BATTACHARIYANING QUYI CHEGARALAR SISTEMASI VA ULAR BILAN BOG'LIQ STATISTIK MASALALAR	91
Xayitova Xilola	UMUMLASHGAN FRIDRIXS MODELLARI OILASI XOS QIYMATLARINING SONI VA JOYLASHUV O'RNI	93
Zaxidov Dilshodbek, Abdulvoxidov Alisher	TO'LIQSIZ KUZATUVCHILAR HOLI UCHUN HAQIQATGA O'XSHASHLIKNING EFFEKTIV METODI	95
Абдуллаев Алишер	ЗАКОНЫ АРКСИНУСА И СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДЕНИЕ	97
Аблазова Камола, Каримова Нилуфар, Исмоилов Каримжон	ТАНЛАНМА АСИММЕТРИЯ ВА ЭКСЦЕСС КОЭФФИЦИЕНТЛАРИНИНГ ЛИМИТ ТАҚСИМОТЛАРИ ҲАҚИДА	100
Абсаттарова Хурзада	МАРТИНГАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИОНАЛОВ ВЕРШИННОГО ПРОЦЕССА ВЫПУКЛОЙ ОБОЛОЧКИ	101

Актамов Феруз	О ПРОДОЛЖЕНИЯХ ИДЕМПОТЕНТНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ	103
Аскарров Жавохир	ОСНОВНЫЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ ИЗИНГА С КОНКУРИРУЮЩИМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ И ВНЕШНИМ ПОЛЕМ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ ПОРЯДКА 4	105
Ахмаджонов Абдурахим	СТАТИСТИК БАҲОЛАШ НАЗАРИЯСИДА КОРРЕЛЯЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТИ	107
Ахмедов Сохибжон, Аблазова Камолахон, Юлдашев Хушнудбек	ЖАРАЁНЛАРНИ СТАТИСТИК БОШҚАРИШДА НАЗОРАТ КАРТАЛАР МЕТОДИНИНГ МОҲИЯТИ ВА БАЪЗИ ЯНГИ НАТИЖАЛАР	110
Гаимназаров Олимжон, Қодирова Наргизахон, Гаффарова Сарвиноз	ПОЛИГАРМОНИК ОПЕРАТОРГА ДОИР БЎЛГАН БАЪЗИ МАСАЛАЛАР	113
Курбонов Хабибулло, Бозорова Угиллой	О ВЕЩЕСТВЕННЫХ КОРНЯХ УРАВНЕНИЯ $v = b(\lambda - \lambda v)$ И СРЕДНОМ ЗНАЧЕНИИ ПЕРИОДА ЗАНЯТОСТИ СИСТЕМЫ С ОГРАНИЧЕННОЙ ОЧЕРЕДЬЮ	116
Курганов Карим, Шаропов Авазбек	ДИНАМИКА СЕМЕЙСТВА СТОХАСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА ТРЕТИЙ СТЕПЕНИ	118
Маматов Хусниддин	ЗАМЕЧАНИЕ ОЦЕНКИ ЛЕВИ – ПРОХОРОВА МЕЖДУ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ ПРОЦЕССОВ, ПОРОЖДЕННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ИНТЕГРАЛАМИ	119
Махаммадалиев Мухторжон, Орипов Хамидулло	О НОВЫХ МЕРАХ ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛИ ЖЕСТКОЙ СЕРДЦЕВИНЫ С ДВУМЯ СОСТОЯНИЯМИ	121
Махмудов Жасур, Рашидов Акрам, Парпиева Нозима	ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ПОТТСА С КОНЕЧНЫМ РАДИУСОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ	123
Машраббоев Ахмадали, Тулаков Сирождиддин	ДВУХТИПНЫЙ ВЕТВЯЩИЙСЯ ПРОЦЕСС С ИММИГРАЦИЕЙ (2-СХЕМА)	124
Неъматов Ислом, Рўзиков Махаммаджон	ТАСОДИФИЙ ИНДЕКСЛИ ЛИМИТ ТЕОРЕМАЛАРДА ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАРНИНГ СОНЛИ ХАРАКТЕРИСТИКАЛАРИНИ ҲИСОБЛАШ	126
Омонова Нигора	ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ОДНОРОДНОГО ПУАССОНОВСКОГО ТОЧЕЧНОГО ПРОЦЕССА В КОНУСЕ	128

Расулов Олимжон	СТАТИСТИКАНИНГ АСИМПТОТИК ЕТАРЛИЛИК ШАРТЛАРИ ҲАҚИДА	129
Расулов Тўлқин	ОПЕРАТОРЛИ МАТРИЦАЛАРГА МОС БЛОК СОНЛИ ТАСВИРНИНГ АСОСИЙ ХОССАЛАРИ	130
Рахматуллаев Музаффар, Расулова Мухайё	H_A - ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОСНОВНЫЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ α -МОДЕЛИ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ	134
Рашидов Акрам, Парпиева Нозима, Махмудов Жасур	ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ ОДНОЙ МОДЕЛИ ИЗИНГА С КОНЕЧНЫМ РАДИУСОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ	136
Сайфуллоева Гулноз	ТАСОДИФИЙ ЦЕНЗУРЛАНИШЛИ УМУМЛАШГАН МОДЕЛДА ВЕКТОР – ҚИЙМАТЛИ ЭМПИРИК КАЦ ПРОЦЕССЛАРИНИНГ АППРОКСИМАЦИЯСИ	138
Толибжонов Ботирбек	МЕНЕЖМЕНТДА МЕНЕДЖЕРНИНГ СТАТИСТИК МЕТОДЛАРИ БЎЙИЧА ФАОЛИЯТИ	140
Хакимов Рустамжон, Аминжонova Нилуфар, Хошимов Дониёр	О ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫХ МЕРАХ ГИББСА ДЛЯ НС-МОДЕЛЕЙ С ТРЕМЯ СОСТОЯНИЯМИ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ ПОРЯДКА ЧЕТЫРЕ	143
Хатамов Носиржон, Эркабоева Зулхаё, Адашев Кахрамон	ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ ГРАДИЕНТНЫЕ МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛИ НС-БЛЮМА-КАПЕЛЯ В СЛУЧАЕ “ЖЕЗЛ” НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ	145
Ходжибаев Вали, Олимжонova Махлиё	ОБ АСИМПТОТИКЕ СРЕДНЕГО ВРЕМЕНИ ДОСТИЖЕНИЯ ВЫСОКОГО УРОВНЯ ПРОЦЕССОМ С ЗАДЕРЖИВАЮЩЕЙ ГРАНИЦЕЙ	148
Эшниязов Абдумалик	О КРАЙНИХ ТОЧЕК МНОЖЕСТВА БИСТОХАСТИЧЕСКИХ КВАДРАТИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ	151
Юлдошева Наргиза	ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ГРАНИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОДНОРОДНОГО ПУАССОНОВСКОГО ТОЧЕЧНОГО ПРОЦЕССА	155
Юсупов Фаррух	ДИНАМИКА КВАДРАТИЧНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА, ДЕЙСТВУЮЩИХ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ СИМПЛЕКСЕ	156

Юсупов Фаррух, Ахмедова Дилафруз	ДИНАМИКА КВАДРАТИЧНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ В ШЕСТИМЕРНОМ СИМПЛЕКСЕ	160
4-SHO‘BA. MATEMATIK MODELLASHTIRISH VA ZAMONAVIY HISOBLASH USULLARI		163
Abdushukurov Abdurakhim, Mansurov Dilshod	A STUDY OF THE KAPLAN–MEIER ESTIMATOR AND ITS DEPENDENCE ON THE DEGREE OF CENSORSHIP	163
Aliyeva Jamila, Qo‘chqarova Arofat	CALCULATION OF CONVERGENCE ISSUES USING MATLAB SOFTWARE FOR CONVERGENCES BUILT ON THE BASIS OF THE CENTRAL LIMIT THEOREM	166
Asimov Alijon, Abduvaliyeva Muslimaxon	MODEL VA MODELLASHTIRISH HAQIDA TUSHUNCHA. MATEMATIK MASALALARNI MODELLASHTIRISH	169
Boboniyozova Dildora	GUDVIN MODEL I YECHIMLARI	171
Boboniyozova Dildora	IQTISODIY PALOMBA MODEL I	173
Boltaev Aziz, Atamuradova Baxshand	ON AN EXTREMAL FUNCTION OF INTERPOLATION FORMULA	174
Davronov Javlon	OPTIMAL KVADRATUR FORMULANING EKSTREMAL FUNKSIYASI	177
Eshniyozov Abdumalik, Usmanov Navruz	TRANSPORT MASALASINING OPTIMAL YECHIMINI TOPISHNING POTENSIALLAR USULI	179
Hayotov Abdullo, Abdullayev Abdulla	$W_{2,\omega}^{(2,0)}(0,1)$ FAZODA TRIGONOMETRIK OPTIMAL INTERPOLYASTION FORMULA	182
Indiaminov Ravshan, Abdullaev Abdubakir, Ismailova Nilufar	MAGNIT MAYDONIDA TO‘K O‘TKAZUVCHI JISMNING MAGNITOELASTIK DEFORMATSIYALANISHI MODEL I	184
Indiaminov Ravshan, Shodmonov Javohir, Qarshiboyev Normuhammad	ELEKTROMAGNIT KUHLAR TA‘SIRIDA YUPQA MIKROELEMENTNING MAGNITOELASTIK TEBRANISHI MATEMATIK MODEL I	186
Jumonzorov Dostonbek, Anora Qurbanova	TASVIRLARNI BURUSH UCHUN PROYEKTIV AKSLATIRISHLAR	188
Karimov Roziq, Ashurova Gulshoda, Ravshanova Nasiba	$W_2^{(3,2)}(0,1)$ GILBERT FAZOSIDA AYIRMALI FORMULA EKSTREMAL FUNKSIYASI	192
Khaldjigitov Abduvali, Adambaev Uchkunbek, Pardabaeva Nodira	NUMERICAL MODELING OF STRESS AND STRAIN SPACE VISCOPLASTIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS	195

Khayriev Umedjon	AN OPTIMAL QUADRATURE FORMULA IN THE SPACE $W_2^{(1,0)}$ OF PERIODIC FUNCTIONS	196
Kurbonov Xasan	IQTISODIYOTDA YIRTQICH O'LJA MODEL	198
Kurbonov Xasan	AHOLI EHTIYOJLARINI O'RGANISHDA YIRTQICH O'LJA MODEL	201
Majidov Shodi	FLASHDA GEOMETRIYA FANI BO'YICHA TRENAJYOR DASTURLAR YARATISH	203
Mamatov Mashrabjon, Esanov Egamberdi	DIGITAL IMAGE BRIGHTNESS NORMALIZATION BY DISCRETE GAME PURSIT	208
Muhammadiev Jabbor, O'rinboyeva Shahnoza	NODIVERGENT REAKSIYA DIFFUZIYA TENGLAMASINING AVTOMODEL YECHIMI ASIMPTOTIKASI	211
Mullajonov Rustamjon, Abdugapparova Shahodat, Mirzaahmedova Jumagul	AYLANMA HARAkatDAGI MURAKKAB JISMLARNING HARAkATI TURG'UNLIGINING YETARLI SHARTINI HOSIL QILISHDA LYAPUNOV FUNKSIYASI USULINING QULAYLIGI	212
Muxammadiyev Jabbor, Islamov Erkinjon	HARAkatLANUVCHI MUHIT TEZLIGINING ISSIQLIK TARQALISH JARAYONIGA TA'SIRINI KOMPYUTERDA TADQIQ QILISH	215
Nazirova Elmira, Madolimov Fahriddin	SUN'IY INETELEKT TIZIMLARI YORDAMIDA TIBBIY TASVIRLARNI QAYTA ISHLASH	217
Salimov Shoolim	ABOUT MATHEMATICAL MODELING OF THE DEFORMATION PROCESS OF COMPOSITE SHELL STRUCTURES	219
Tursinboyeva Zebo, Ismoilova Zamira, Abdullayeva Dildora	MATHCAD DASTURIDA UCH O'LCHAMLI GRAFIKLAR QURISH	221
Ulikov Shukurillo	IKKINCHI TARTIBLI HOSILASI KVADRATI BILAN INTEGRALLANUVCHI FUNKSIYALAR FAZOSIDA KVADRATUR FORMULANING EKSTREMAL FUNKSIYASI	225
Xasanova Dilduzahon, Bekova Vazirahon	OPSION NARXLARINI BAHOLASHDA HOSIL BO'LGAN KO'P KARRALI INTEGRALLARNI MONTE-KARLO USULIDA HISOBLASH	228
Xaydarova Sevara	BUBNOV-GALERKIN USULI	230
Yuldashev Xushnodbek	GRAFIK AXBOROTLAR BILAN ISHLASH TEXNOLOGIYASI	235

Абдуғаниев Мухриддин	ЖАДВАЛ КЎРИНИШДА БЕРИЛГАН ФУНКЦИЯЛАРНИ ТИКЛАШ МАСАЛАЛАРИДА КУБИК В-СПЛАЙН МОДЕЛИДАН ФОЙДАЛАНИШ	238
Абдураимов Достонбек, Сафоева Дилноза	ИЗОТРОП ЖИСМЛАР УЧУН ТЕРМОЭЛАСИК БОҒЛИҚ МАСАЛАНИ ЧЕКЛИ АЙИРМАЛИ УСУЛИНИНГ МАТЕМАТИК МОДЕЛИ	241
Абдураимов Достонбек, Сафоева Дилноза	ИККИ ЎЛЧОВЛИ КОМПОЗИЦИОН ЖИСМЛАРНИНГ КУЧЛАНГАНЛИК ХОЛАТИНИНГ МАТЕМАТИК МОДЕЛИНИ ЯРАТИШ	245
Абираев Имомали	ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА 2-ГО РОДА С ПОМОЩЬЮ РАВНОМЕРНЫХ СЕТОК	248
Азимов Рахимжон, Азимов Бунёд, Азимова Шахноза	СПЛАЙН-ФУНКЦИЯ УСУЛЛАРИ ХАТОЛИКЛАРИНИ БАҲОЛАШ	250
Азимов Рахимжон, Азимов Бунёд, Худойбердиева Шохсанам, Хасанова Дилафруз	СПЛАЙН ФУНКЦИЯЛАР АСОСИДА СИГНАЛЛАРГА РАҚАМЛИ ИШЛОВ БЕРИШ ЖАРАЁНЛАРИНИ ПАРАЛЛЕЛЛАШТИРИШ	252
Алиева Жамила, Кубижонова Нилуфар, Эркинжонов Суннатилло	ПРЕИМУЩЕСТВО РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ПАКЕТЕ MATHCAD	254
Аминова Мухтасар	МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРЕХЭТАПНОГО ПРОЦЕССА ТЕПЛООБМЕНА С УЧЕТОМ СКАЧКООБРАЗНОГО ИЗМЕНЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ВЕЩЕСТВА ПРИ ФАЗОВОМ ПЕРЕХОДЕ	258
Арипов Мерсаид, Нигманова Дилобар	СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ С ДВОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ С ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ С ИСТОЧНИКОМ ИЛИ ПОГЛОЩЕНИЕМ	261
Бекимов Мансур, Садуллаев Лазизбек	МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕМПЕРАТУРНОГО РЕЖИМА ДВУХПОТОЧНЫХ РЕГЕНЕРАТИВНЫХ ВОЗДУХОПОДОГРЕВАТЕЛЕЙ	263

Боборахимова Махбуба, Джуманазарова Замира	ГЛОБАЛЬНАЯ СТАБИЛЬНОСТЬ СИСТЕМЫ ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ВИДОВ С КОНВЕКТИВНОЙ И ДИСПЕРСИОННОЙ МИГРАЦИЕЙ	265
Бурнашев Владимир, Холматов Жавлон	МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ МНОГОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В НЕФТЯНОМ ПЛАСТЕ ПРИ ЕГО ЗАВОДНЕНИИ	266
Зафаров Ахмадбек	АВТОКОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ	268
Каюмов Шукур, Хаитов Тожибой, Марданов Арслон, Каюмов Анвар	МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ФЛЮИДОВ В ТРЕХСЛОЙНОМ ПЛАСТЕ	271
Мамадалиева Шахноза	ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМ ИСТОЧНИКОМ	274
Мухаммадиев Жаббор, Ўринбоева Шахноза	К ЧИСЛЕННОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА РЕАКЦИИ – ДИФУЗИИ	277
Нуралиев Фарход, Кузиев Шахобиддин	ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НОРМЫ ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ С ПРОИЗВОДНЫМИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА	278
Отакулов Салим, Абдухамидов Нодир	МЕТОД ПОИСКА НАПРАВЛЕНИЯ НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА В ОДНОЙ МОДЕЛИ НЕГЛАДКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ	280
Рахмонов Турдимухаммад	ПРЯМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БЛОЧНО - ТРЕХ ДИАГОНАЛЬНЫХ И ИМ ОБРАТНЫХ МАТРИЦ И РЕШЕНИЯ ПЛОХО - ОБУСЛОВЛЕННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ	284
Саримсоқов Олимжон, Исмоилов Хамроли	ПАХТА БЎЛАКЧАСИНИ ҚУВУР БЎЙЛАБ ҲАРАКАТИНИ ТАХЛИЛ ҚИЛИШ	287
Хайиткулов Бобомурод, Латипов Нусратулла, Абдужабборов Зафар	ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ ПО ОПТИМАЛЬНОМУ РАЗМЕЩЕНИЮ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ	290
Ходиев Шухрат	МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ДЛЯ АНАЛИЗА ПРОГРАММ И РЕАЛИЗАЦИИ ЯЗЫКОВ ПРОГРАММИРОВАНИЯ	293

Худаяров Бахтияр, Комилова Холидахон, Шамситдинов Салохиддин	МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ КРЫЛА ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ	296
Шадиметов Холмат, Давлатова Фотима	ОПТИМАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ПРИБЛИЖЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ	301
Эшмаматова Дилфуза	МОДЕЛИ ВИРУСНЫХ ЗАБОЛЕВАНИЙ, ПЕРЕДАЮЩИХСЯ ВОЗДУШНО–КАППИЛЛЯРНЫМ ПУТЕМ	303
Юнусов Насиржан	ЗАДАЧА ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ С ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ	306
Юнусов Насиржан	ЛИНЕЙНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА	312

