

А. Садуллаев

ЮНЕСКО

СЕФ/ Боннский Университет

Ургенчский Государственный Университет

Хорезмская академия Мамуна

**Теория теней Беруни
(гномоника)**

6-издание

ТАШКЕНТ – 2020

Предисловие

Выдающийся деятель Средневековья, универсальный ученый-энциклопедист Абу Райхан Мухаммад ибн Ахмад аль - Беруни, родился 3 - зулхижжи^{*)} 362 хиджры (973 г.н.э., 4 сентября) в древнем центре Южного Хорезма в городе Кят (ныне город Беруни).

Из источников известно, что Беруни с детства отличался любознательностью и жаждой знаний. Он обучался у знаменитого ученого-энциклопедиста Абу Насра Мансура ибн Ирака, прозванного в то время Птоломеем. Ярким свидетельством признания учителем таланта и способностей своего любимого ученика служит то, что Абу Наср ибн Ирак посвятил Беруни 12 научных трудов по астрономии, геометрии и математике.

В 995 году эмир Гурганжа Мамун I ибн Мухаммад Сиявуш захватил последний оплот династии Афригидов - крепость Кят и объявил себя шахом объединенного Хорезма. Беспорядки, царившие после этого исторического события в Хорезме, вынуждают Беруни в возрасте двадцати двух лет покинуть Родину. В этот период он проживает в городах Ирана Гургане, Рае и здесь же знакомится с выдающимся ученым Абу Махмудом Хужанди, ведет переписку и научные дискуссии с Ибн Сино (Авиценной).

После смерти Мамуна I в 998 году и воцарения на престоле Али ибн Мамуна политическая ситуация в Хорезме несколько стабилизировалась. Али ибн Мамун был правителем, жаждущим знаний, покровительствовал науке и культуре. Он поручил наставнику Беруни Абу Насру ибн Ираку собрать ученых во дворце и создать научную атмосферу. По приглашению Ибн Ирака, приблизительно в конце 1003 - в начале 1004 года, Беруни возвращается в Гурганж, и с этого момента для него начинается период процветания в науке: он руководит Академией Мамуна, готовит учеников, ведет научные исследования в различных областях науки.

^{*)} Зулхижжа - название 11 месяца мусульманского лунного календаря (хиджры).

Научная деятельность Беруни, основное место в которой отводилось математике, физике, минералогии, этнографии и истории, была многогранной и плодотворной. Его научные труды, состоящие из 11 книг: «Каноны Масъуди», «Геодезия», «Минералогия», труды по этнографии: «Памятники минувших поколений», «Индия» и др., в течение многих веков служили для ученых настольной книгой, основным пособием для специалистов и не потеряли своей актуальности и в наши дни. В целом, Абу Райхан Беруни оставил 152 научных книг. Из этого громадного наследия до нас дошло всего лишь 30.

Настоящая брошюра является частицей огромного творческого наследия Беруни, которая посвящена геометрии – разделу математики. В ней приводятся отдельные математические исследования, суждения и дискуссии Беруни. Текст сопровождается толкованиями и комментариями.

Известно, что Беруни было свойственно сильно развитое логическое мышление, умение верно осветить суть вопроса, доказать и довести все это до читателя в доступной форме. Эти качества Беруни наглядно проиллюстрированы в его трактовке вопросов размера Земли и расстояния от Земли до Луны и Солнца, в дискуссиях о результатах предшественников в этой области, а также в трактовке недочетов по данной проблеме. Все это свидетельствует о том, что Беруни обладал яркими способностями в области естественных наук.

Время, в котором жил Беруни, было очень сложным в социально-политическом отношении: захват Кята, где родился и вырос Беруни, перенесение центра в Ургенч, бродяжничество, самоуправство, зазнайство и корыстолюбие, которые господствовали в обществе того времени, не могли не вызвать в душе мыслителя чувства протеста. И, действительно, они нашли свое отражение в следующих «крылатых» строках Беруни:

«Хотя этот человек недалек в знаниях, но держит себя высокомерно всезнающим и даже допускает оскорбление других. Нас разделяют лишь богатство и роскошь, превращающие гордость в вину бедности.

Богатство уйдет, знания останутся.

Аллах наказывает того, кто обижает безобидного ученого человека и радуется содеянному.

Несомненно, алчность и невежество ведут к произрастанию ростков зла» (аль – Беруни. Асар аль - бакия).

Наш великий предок Беруни скончался в 440 году хиджры, то есть 13 декабря 1048 года н.э. в возрасте 75 лет в городе Газне. В книге «Номойи донишворон» («Письма учёных»), о последних мгновеньях жизни учёного рассказывается: «Беруни был тяжело болен, он доживал свои последние дни. Как-то, когда он на какой-то миг пришёл в себя, его взгляд упал на друга, учёного Абулхасана Валвалижи, тогда Беруни попросил друга растолковать ему новые положения о наследстве. Абулхасан ответил, что для этого сейчас не время. Посмотрев на друга, Беруни сказал: «О, мой великий друг, каждый, кто приходит в этот мир, непременно когда-то уходит, но разум диктует мне, что сейчас самое время осознать суть того, о чём ты когда-то мне и упоминал. Поэтому лучше мне умереть, зная об этом, чем умереть в незнании». Затем Абулхасан начал разъяснять то, о чём просил Беруни. Спустя несколько минут, Беруни уснул вечным сном. Это была последняя беседа учёного о науке».

Какой счастливый конец! Это был конец жизни ученого, который ушёл из жизни с чувством полного удовлетворения своей деятельностью...

Чтобы охарактеризовать деятельность Хорезмской Академии Мамуна и заслуги аль – Беруни более полно, мы сперва приведем трудовую деятельность Мухаммеда аль – Хорезми, который был руководителем академии «Байт ул – хикма» в Багдаде, что функционировала примерно 200 лет раньше и играла большую роль в становлении Хорезмской Академии.

Мухаммад аль-Хорезми и академия «Байт ул - хикма»

Абу Жафар Мухаммед ибн - Мусо аль - Хорезми родился в 783 году в одном из самых известных культурных центров Хорезма – в городе Хиве. Он получил первоначальное образование в медресе Хивы, Кяте, в Гургенче (Ургенч) и в юношеских годах изучал математику, астрономию и другие естественные науки; исследовал книги, написанные на арабском, персидском, сирийском, индийском и греческом языках. Благодаря проницательному уму и редкому таланту, он утвердился как ведущий учёный Хорезма, вскоре его имя распространилось по всему востоку.

В 809 году второй сын Халифа Хорун ар-Рашида, Абул Аббос Абдуллах аль – Мамун был назначен правителем восточных земель Халифата, столицей которого был город Марв в Хурасане. С ранних лет, аль – Мамун жаждал знаний и был очень способным.

Аль - Мамун вошёл в историю не только как государственный деятель, но и как талантливый ученый. Он собирал вокруг себя молодых талантливых одаренных людей со всего света. Среди них были такие великие учёные, как Мухаммад аль - Хорезми, Яхё ибн Абу - Мансур, Халид аль - Марварридий, Санад ибн – Али, Аббос аль – Жавхарий, Яхё ибн - Аксам, Кози Хамед, Ахмад аль – Марвазий и др., труды которых позже служили в развитии мировой науки.

После смерти отца аль–Мамун встал на трон халифата и в 813 году привёл с собой группу учёных в Багдад. Аль – Мамун присоединил учёных приехавших с Марва к тем, которые были в Багдаде, чтобы организовать научное заведение под названием «Байт ул - хикма».

Сначала он назначил Яхё ибн Абу Мансура главой научного заведения. После смерти Яхё в 829 году Мухаммад аль - Хорезми был назначен главой «Байт ул - хикма» и возглавлял заведение до конца своей

жизни. Аль - Хорезми проводил научные исследования в сотрудничестве с такими учеными из Средней Азии, как Ахмад Фаргоний, Абуль Вафо Бужжони, Исок Ибоди, Абу Жаъфар Хуросони, Абу Фатих Исфихони, аль - Марвази и другие.

Учёные из Средней Азии оказывали огромную поддержку в деятельности «Байт ул - хикма». Согласно чешскому историку учёному Ю.Рушка большинство учёных в этом заведении были из Хорезма, Ферганы, Шаша, Хуросана, из них две трети составляли хорезмийцы. Следует отметить, что известный арабский географ ибн - Хавкал, описывая земли Хорезма в своей работе «Дороги и страны», написанной в начале X века, упоминает жажду знаний и проницательность людей Хорезма. «В настоящее время в Багдаде нет кози, халифа или ученых, у которых нет последователя из Хорезма», – пишет ибн Хавкал.

Аль - Хорезми является автором множества ценных научных трудов, которые принесли ему славу в свое время. Некоторые из его книг «Аль - Жабр вал - Мукобола» (восполнение и противопоставления), «Хисоб аль - Хинд» (об индийском счете), «Зиджи Хорезми» (Таблица Хорезми), «Китоб Сурат аль - Арз» (О картине земли), «Китоб аль - Амал Астролябия» (Книга о методах работы с Астролябиями), «Китоб ат – тария» (Книга об истории), «Куеш соати хакида китоб» (Книга о солнечных часах) дошли до наших дней.

Две работы аль – Хорезми, посвященные арифметике и алгебре – «Восполнение и противопоставления» и «Хисоб аль - Хинд», сыграли важную роль в развитии математической науки не только на Востоке, но и во всем мире. Эти книги являются основанием современной математики, а аль – Хорезми вправе считается основоположником нашей действующей математики.

В свое время индийская книга «Большой синдхинд» была основным пособием. Некоторые части книги были недоступными, имели много

ошибок и недостатков. Халиф аль – Мамун поручил аль – Хорезми разъяснить, переработать и дополнить эту книгу. Новая книга аль - Хорезми имела название «Маленький синдхинд».

Аль – Хорезми пишет: «Когда увидел я, что индийцы составляли из 9 знаков любое число, благодаря расположению, какое они установили, я пожелал раскрыть, если будет угодно Аллаху, что получается из этих букв для облегчения изучающему. Если индийцы именно хотели того, что и я и смысл для них в этих 9 буквах был тот, который мне открыт, да направит меня Аллах на это. Если же они делали это по другой причине, кроме той, которую я указал, то из моего изложения эту причину можно будет найти точно и без всякого сомнения. И она легче откроется наблюдающему и изучающему».

Из сказанного следует, что когда аль – Хорезми создал свою математику, он не взял всю основу индийской математики, а взял только идею составления любых чисел с помощью девяти знаков: 1,2,3,4,5,6,7,8, 9.

Чтобы осмыслить значение заслуги аль–Хорезми перед мировой цивилизации, давайте возвратимся назад в VIII-XI века нашей эры: это был период, когда люди создавали комбинации цифрами, используя различные пути к системе прибавлений и умножений. В то время отсутствовали определенные точные правила этих действий, с другой стороны, беспорядки в индийской десятичной системе, римской цифровой системе и в других имеющихся 12, 20, 60 - тичных системах, а также отсутствие в них точных правил вычисления явились серьезными причинами, что «Маленький синдхинд» превратился в главное пособие своего времени. Книга была доступна и в ней легко объяснялись правила умножение, деление, вычитание и сложение чисел. Успех данного пособия объяснялся еще тем, что ал - Хорезми дополнил десятичную систему цифрой ноль. Все это привело к тому, что вскоре «Маленький синдхинд» стал известный во всем мире.

По мнению выдающегося историка учёного Жамолиддина Кифти, эта книга была редчайшим пособием для ученых. В действительности эта работа открыла новую эпоху в сфере астрономии и математики как в Европе, так и на Востоке. В XII веке европейский ученый Аделард перевел её на латинский язык. Перевод этой рукописи хранится в библиотеке Кембриджского университета в Великобритании.

Любой логический обоснованный вычислительный процесс математического понятия – алгоритм также связан с именем аль – Хорезми. В 1849 году европейский ученый – востоковед Ж.Рино определил, что слово алгоритм заимствовано от имени аль-Хорезми, потому что латинизированное имя ученого легло в основу слова алгоритм, алгоритмус на западе. В настоящее время понятие алгоритм широко используется в математике, в кибернетике, и в экономике.

Книга ученого «Аль – Жабр вал – Мукобала» является основой современной алгебры: Слово алгебра заимствовано от слова «ал - Жабр». В XII веке европейские ученые Герардо и Роберт Честерский перевели работу на латинский и арабский языки, которые дошли до нас.

Аль - Хорезми провел последние более 40 лет своей жизни в Багдаде и посвятил свою научную, творческую деятельность академии «Байт ул – хикма». Согласно некоторым источникам, аль - Хорезми умер в результате внезапного инфаркта в 850 году, в 67 лет. Он был похоронен на кладбище Шамазия около обсерватории в Багдаде. Смерть аль - Хорезми была огромной потерей в научном мире.

Почти все люди Багдада и выдающиеся ученые востока участвовали в похоронной процессии великого ученого. Говорили, что даже природа оплакивала внезапную кончину ученого. Именно в те моменты непредвиденные события случились в небесах Багдада: «...произошло землетрясение, небо покрылось тёмными облаками. Была сильная гроза и молния на небе, которая потрясла всю землю. Неожиданный проливной

дождь начался и продолжался 3 дня. Проливной дождь переполнил реки Дажла и Фрот. Религиозные лидеры восприняли событие тех времён как печаль Аллаха над внезапной кончиной великого ученого аль – Хорезми».

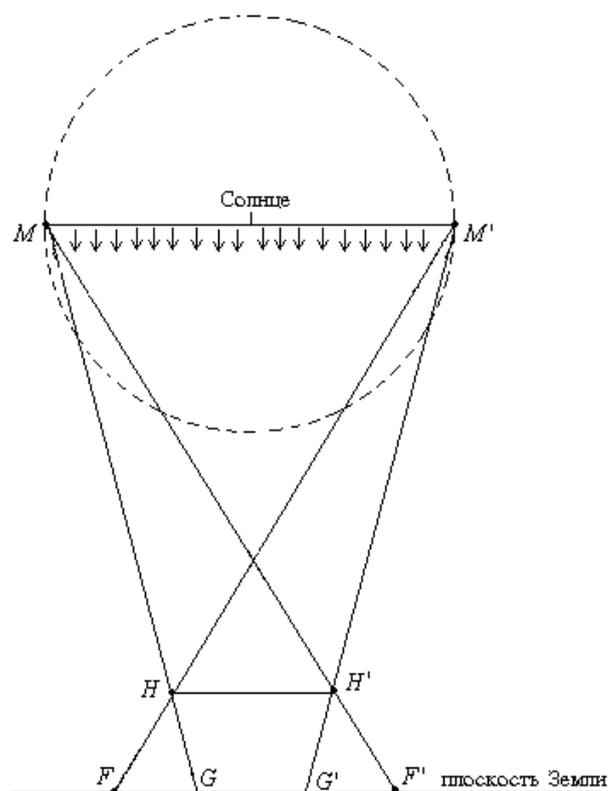
В 1983 году по указу ЮНЕСКО 1200 годовщина великого сына узбекского народа, выдающегося ученого энциклопедиста аль – Хорезми широко отмечалась во всём мире.

Теория теней Беруни (гномоника)

Введение

С давних пор внимание многих ученых привлекали вопросы измерения небесных тел (Земли, Луны, Солнца) и расстояния до них от той точки, где мы находимся. В частности, ученые Хорезмской Академии Ма’муна и, в первую очередь, её руководитель, великий ученый Абу Райхан Беруни, оставил значительный след в этой области.

С целью измерения размеров Земли, Луны и Солнца и определения расстояния от Земли до Солнца и Луны, Беруни создал совершенную с математической точки зрения теорию теней. Суть теории состоит в том, что, если мы от точки, где стоим, на некотором расстоянии t в сторону Солнца установим круг радиуса d , то на Землю ляжет полная тень (т.е. в этой точке круг закрывает солнце полностью) или частичная тень (в этих точках солнце закрывается частично). На основании измерений размеров этих теней Беруни разработал способ вычисления расстояния от Земли до Солнца, а также способ вычисления диаметра Солнца (см. 1-чертёж).



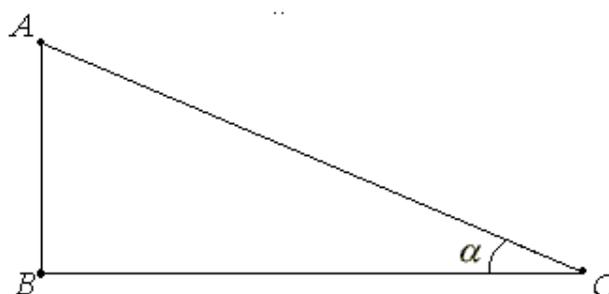
1 – чертеж

Здесь MM' - диаметр Солнца, а HH' - диаметр круга, преграды (гномона), GG' - площадь полной тени, падающей от гномона, FG и $F'G'$ - площадь частичной тени HH' .

В брошюре мы даем анализ этого метода. Кроме того мы приведем схему Беруни по измерению радиуса Земли, а также возможность применения на практике и включения в современные учебные пособия по математике, способы измерения расстояния от точки, на которой мы стоим, до какого-либо тела, находящегося на расстоянии от нас. Наряду с этим, в брошюре даны фрагменты из его книг, высказывания, которые помогут читателю оценить величие нашего соотечественника Беруни – выдающегося математика даже с точки зрения сегодняшнего дня.

Измерение высоты гор и расстояния на Земле

Если у нас возникнет необходимость измерить высоту вертикально расположенного тела (например, минарета) AB , мы, отойдя к точке C , (2-чертеж), расположенной на некотором расстоянии от этого тела, при помощи алидода (нивелира) измерим угол α и из уравнения $\operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{BC}$, или $AB = BC \cdot \operatorname{tg}\alpha$ легко сможем вычислить отрезок AB .

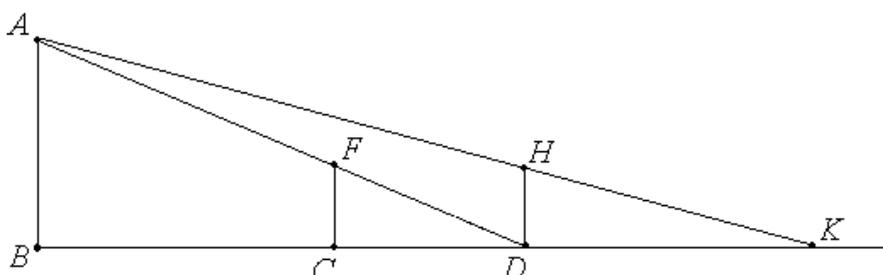


2 – чертеж

Задача более усложнится, если невозможно достичь основания вертикально расположенного тела, т.е. точки B (к примеру, если необходимо определить высоту тела на противоположном берегу реки или высоту пологого склона).

Аль - Беруни в своем труде «Гномоника» подробно останавливается на подобных задачах и, в частности, приводит способы их решения из книги «Брахмассиддхата» индийского математика и астронома Брахмагупты.

По его мнению, чтобы измерить высоту тела, к основанию которого нельзя подойти, нужно выбрать ровное место на некотором расстоянии от него (3 - чертеж).



3 - чертеж

Выбрав точку C на ровном месте, вертикально к ней устанавливаем преграду (гномон) CF и находим его полную тень CD . О том, как найти точку D , помогающую определить полную тень гномона CF , Беруни предлагает следующее:

«... нужно идти в обратном направлении от точки C до того места, откуда F и A должны быть видны через диоптр алидоны на одном ориентире. Так как точка D расположена на Земле, то для определения её нужно лечь на землю или спуститься в яму, высотой в рост человека». (аль – Беруни. Математические и астрономические трактаты, «Фан», 1987, стр. 244). После того, как найдена точка D , поднимаем второй гномон DH , равный гномону CF и, как прежде, определяем его тень DK . Из подобий $\triangle ABD \sim \triangle CDF$, $\triangle ABK \sim \triangle DKH$ вытекают равенства:

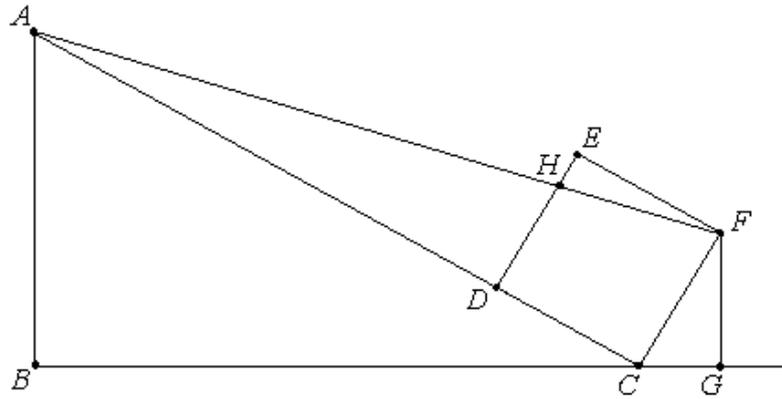
$$\frac{AB}{BD} = \frac{CF}{CD}, \quad \frac{AB}{BK} = \frac{HD}{DK}$$

и с их помощью несложно определить:

$$BD = \frac{CD \cdot DK}{DK - CD}, \quad AB = \frac{CF \cdot DK}{DK - CD}$$

В своей книге «Геодезия» (ал – Беруний. Геодезия, «Фан», 1982, с.167) ученый создал простые доступные методы измерения расстояний на поверхности Земли.

Для этого он берёт квадрат $CDEF$ с равными сторонами, вбивает тонкий гвоздь в точки C и D и устанавливает длинную диоптрическую алидоду в точке F (4 - чертеж).



4 – чертеж

Устанавливаем квадрат в точке C таким образом, чтобы точки A, D, C оказались расположенными на одной прямой линии. Затем из точки F , бросив камень (по словам Беруни), проводим перпендикуляр FG .

Из:

$$\triangle ACF \sim \triangle EFH, \quad \triangle ABC \sim \triangle CFG$$

получаем равенства

$$AC = \frac{1}{EH}, \quad AB = \frac{CG}{EH} \quad (1)$$

Размер Земли

Первые попытки измерить диаметр Земли связаны с именем Эратосфена (276-196 годы до н.э). Он определил параметры Земного шара по состоянию Солнца над Асваном и Александрией.

Когда в Асване Солнце находится в Зените, в Александрии оно имеет наклонение $7,2^\circ$ по отношению к Зениту и отсюда уточнив, что на Земном шаре дуга, соединяющая Асван и Александрию, равна $7,2^\circ$, т.е. она соответствует $1/50$ части большой окружности Земли.

Отсюда вычислялась протяженность большой окружности Земли путём увеличения расстояния между Асваном и Александрией в 50 раз.

Таким же способом Птолемей (II в. до н. э.) пытался вычислить размер Земли, и своё мнение по данной проблеме изложил в книге «География». Ученые античного века в качестве единиц измерения использовали стадий, но с течением времени, в частности, начиная с эпохи Академии «Байтул - хикма» (IX в.), в стадийном методе измерения Земли и в других единицах измерения были обнаружены ошибки и противоречия. Поэтому халиф Аль - Ма'мун ибн ар-Рашид поручил ученым «Байтул-хикма» (Дома мудрецов) осуществить реальное (точное) измерение земного шара. Измерительные работы, в которых приняли участие среднеазиатские ученые, проводились вблизи Масула в Синжарской степи.

В частности, под руководством нашего земляка аль - Хорезми ученые «Байтул – хикма» успешно справились с заданием, уточнили радиус Земли, добились того, что он равен $3247 \text{ миль} = 129865996 \text{ газ}$ или 6406 км^* .

На самом деле радиус в экваторе Земли $R = 6378 \text{ км}$, а радиус в полюсе равен 6357 км .

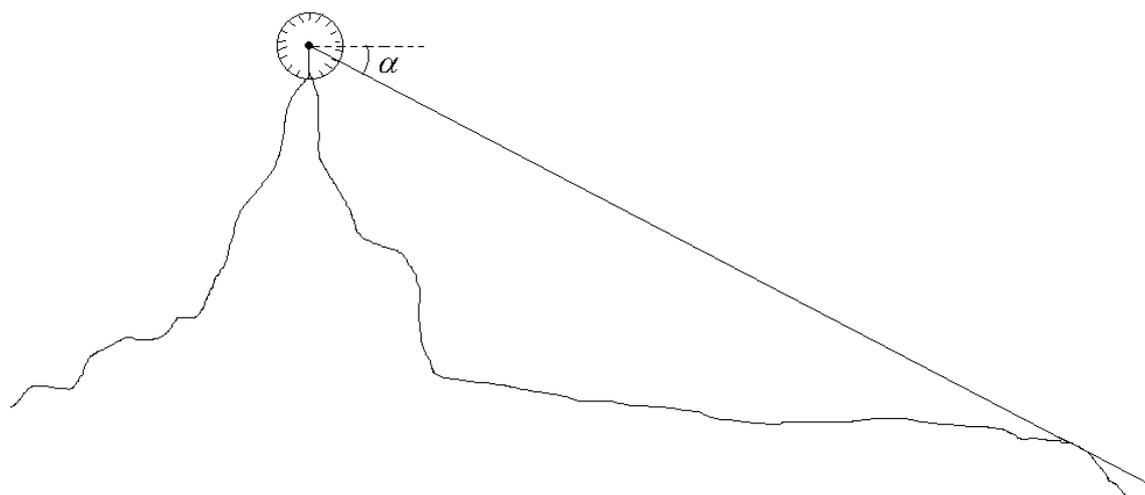
Абу Райхан Беруни (973 - 1048) в своих трудах «Геодезия», «Каноны Масъуди» попытался обстоятельно описать измерение размеров земного шара и остановился ещё на одном новом усовершенствованном методе: «что касается размеров Земли, - пишет Беруни, - до нас, [т.е. до эпохи «Байтул - хикма» - А.С], дошли лишь описания римских и индийских ученых. У римлян и индийцев единицы измерения были разными в количественном соотношении. Индийцы измеряли окружность Земли *милями*, включавшими в себя от одного до 8 наших *милей*, и в различных измерениях их мнения менялись; в каждой из пяти «Сиддихонта» окружность Земли описана с расхождениями. Римляне же измеряли её одной мерой и называли её «стадия». По мнению Галена, Эратосфен осуществил измерительные работы между городами Асван и Александрией, находящимися на одном меридиане.

*) Ученые современности признали, что $1 \text{ мил} = 400 \text{ газ} = 1973,2 \text{ см}$ (см: Хинц. «Мусульманские меры»).

Если основываться на мнении Галена в «Книге доказательств» Птолемея во «Введении в искусство сфериков» и «Географии», то между мерами наблюдается разница. Подобные противоречия пробудили желание Ма'муна вновь уделить внимание данному вопросу и решить его с помощью ученых, проделать измерения на землях Масула в Синжарских степях.

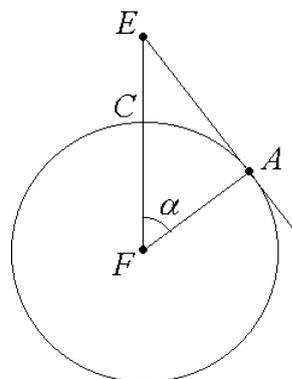
Если человек движется по прямой линии на Земле, то, на самом деле, он движется вокруг Земли по окружности. Но провести прямую линию на большое расстояние - дело очень сложное. Поэтому ученые Ма'муна в качестве ориентира определили полюс вселенной (здесь, возможно, имеется ввиду полярная звезда). Для измерения окружности они вычислили $\frac{1}{360}$ части окружности Земли, равной $56\frac{2}{3}$ мили.

У меня появилось огромное желание самому вычислить размер Земли, и я выбрал большое ровное место в Журжане. Но из-за трудных условий пустыни, отсутствия надежных помощников, я нашел в Индии высокую гору с ровной поверхностью и использовал другой способ измерения. С вершины горы я обнаружил угол наклона соединения Неба и Земли (5-чертеж) и вычислил его как $0^{\circ}34'$, измерил в двух местах вершину горы и вычислил её как 652 газ и ещё половину одной десятой части от него.



5 – чертеж

Высота горы, перпендикулярная сфере Земли - это линия CE (6 - чертеж). Пусть F - центр Земли, а EA - касательная к Земле с вершины горы.



6 – чертеж

Соединив линию AF с линией горизонта, получим треугольник AFE . Здесь все его углы известны, поскольку угол A – прямой, а угол AEF дополняет угол наклона горизонта, т.е. $90^{\circ} - \alpha = 89^{\circ}26'...$ » (ал – Беруний. Конуни - Масбуди, 1973, V китоб, «Фан», 1973, 386-387 б). Таким образом, по определению синусов, вычисляется радиус Земли R . Из ΔAEF

$$\sin(90^{\circ} - \alpha) = \frac{AF}{AF + CE}, \text{ отсюда}$$

$$AF = \frac{CE \cdot \sin(90^{\circ} - \alpha)}{1 - \sin(90^{\circ} - \alpha)} \text{ или } AF = \frac{CE \cdot \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \quad (2)$$

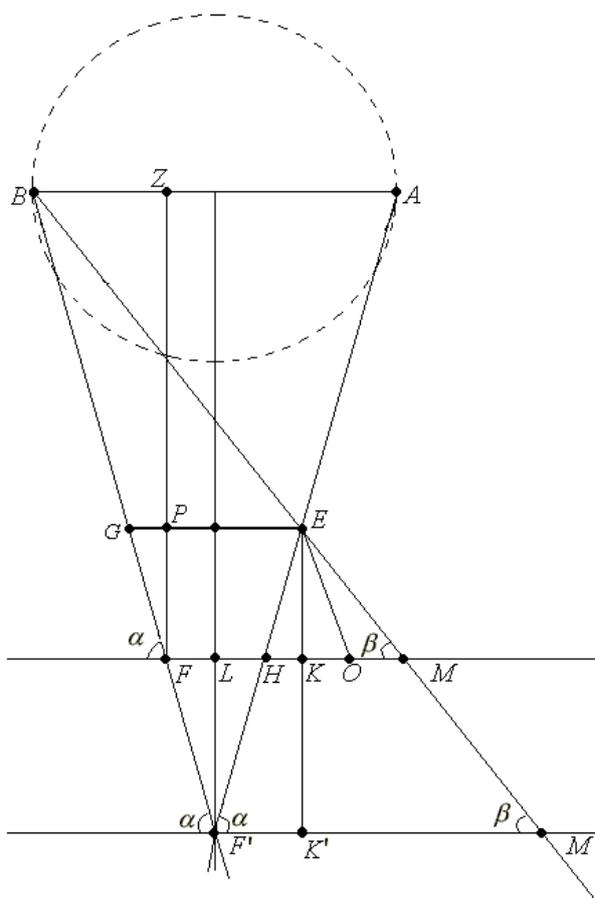
Зная высоту горы CE и $\sin 89^{\circ}26'$, Беруни находит $R = 12851370 \text{ газ} = 3212,8 \text{ мил} = 6340 \text{ км}$.

В своей книге «Геодезия» Беруни, описывая поход на Рим халифа ал-Ма'муна (830 - 832), отмечает, что с халифом был и ученый-математик Абу Тайиб Санад ибн Али, пригласив которого, он поручил ему взобраться на гору, возвышающуюся над морем с восточной стороны, измерить угол наклона (для точности во время захода Солнца), что он, Санад ибн Али,

выполнил эту задачу, то есть он, используя угол наклона и несколько вспомогательных треугольников, вычислил измерение радиуса Земли (ал – Беруний. Геодезия, «Фан», 1982, с.166).

Расстояние между небесными телами

Беруни пишет: «Диаметр солнца обозначен AB . Поверхность Земли – FM , EG – гномон тело, дающее тень на Землю, FH – тень этого тела (его диаметр), L – центр тени (7 – чертеж, здесь FH – полная тень, HM – часть тени). Если нам известны FH , HM , EG и EK ($EK \perp FM$), то мы определим расстояние от Солнца до Земли и диаметр Солнца^{*)}.



7 – чертеж

^{*)} Вышеуказанные FH , HM , EG и EK размеры, обеспечивающие возможность измерения Земли.

Действительно, если провести $EO \parallel GF$, то $OF = GE$ и OM известно. Его отношение к EM , такое же, как FM к MB . Значит, известны MB и треугольник FMB . Отношение FG и GP такое же, как FB к BZ . Итак, BZ , а значит FZ известна» (аль – Беруни. Математические и астрономические трактаты, «Фан», 1987, с.210).

По утверждению Беруни, $\Delta BFM \sim \Delta EOM$, отсюда вытекают равенства

$$\frac{BM}{FM} = \frac{EM}{OM} \text{ или } BM = \frac{EM}{OM} FM$$

$$\frac{FB}{FM} = \frac{EO}{OM} \text{ или } FB = \frac{EO}{OM} FM$$

Из $\Delta FGP \sim \Delta FBZ$ получаются равенства

$$\frac{FZ}{FB} = \frac{FP}{FG} \text{ или } FZ = \frac{FP}{FG} \cdot FB$$

$$\frac{BZ}{FB} = \frac{GP}{FG} \text{ или } BZ = \frac{GP}{FG} \cdot FB$$

С помощью этих уравнений мы легко можем определить расстояние от Солнца до Земли $L = FZ$, радиус Солнца $R = BZ + LH$.

$$L = \frac{EK \cdot FM}{FM - EG}, R = \frac{GP \cdot FM}{FM - EG} + \frac{FH}{2}, \quad (3)$$

где

$$FM = FH + HM, GP = \frac{EG - FH}{2}$$

Если мы острые углы при F и M обозначим через α и β , применив к ΔEOM теорему синусов, можно переписать формулы (3) в следующем виде:

$$L = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} FM, R = \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} FM + \frac{FH}{2}. \quad (4)$$

И, наконец, продолжив прямые линии BF или AH , определим точку F' , проведем прямую $F'M' \parallel FM$. Проведем перпендикуляр $EK' \perp F'M'$, и пользуясь определением $tg\alpha$, $tg\beta$, получим формулы

$$L = d \, tg\alpha \frac{tg\beta + tg\alpha}{tg\alpha - tg\beta} - d' \, tg\alpha$$

$$R = d \frac{tg\beta + tg\alpha}{tg\alpha - tg\beta}$$
(5)

где $d = \frac{EG}{2}$, $d' = \frac{FH}{2}$

Формулы (3), (4), (5) - это формулы измерения расстояния между Землей и небесными светилами Луной и Солнцем, и размеров Луны и Солнца.

К сожалению, на практике из-за дальности расстояния до Луны и Солнца, а также ввиду использования простых приборов, величины FM и EG или углы α и β в формулах почти равны друг другу, а значит знаменатели дробей почти равны 0. Поэтому в эпоху Беруни не было возможности для применения этих формул по измерению небесных тел. Хотя в указанной книге Беруни обстоятельно изложил попытки предшественников по измерению небесных тел, недостатки в их способах и предложил удобные и простые в теоретическом плане формулы, он не приводит конкретных цифр измерений Луны и Солнца.

Тем не менее, предложенными формулами можно пользоваться для измерения тел, до которых невозможно добраться и для вычисления расстояния до них. В этой связи было бы целесообразно называть эти формулы в науке **формулами Беруни** и на основе этого теорию теней (гномонику) связать с именем Беруни.