

FINLANDIYADA GIMNAZIYA BITIRUVCHILARI UCHUN MATEMATIKADAN MILLIY IMTIHON

2020-yil bahor, profil daraja

Imtihon 13 ta topshiriqdan iborat bo'lib, ulardan o'ntasini bajarish yetarli. Topshiriqlar uch qismga ajratilgan. **A qism** hamma uchun bajarish majburiy bo'lgan to'rtta topshiriqdan iborat. **B1 qism** beshta topshiriqdan iborat bo'lib, ulardan uchtasini bajarish kerak. **B2 qism** to'rtta topshiriqdan iborat bo'lib, ulardan uchtasini bajarish kerak. Har bir topshiriq yechimi **0 balldan 12 ballgacha** baholanadi, shuning uchun imtihonda to'plash mumkin bo'lgan ballarning maksimal yig'indisi **120 ballga** teng.

A QISM

1. Tenglama va tengsizlik (12 ball)

1. (2 ball) Tenglamani yeching $-4x + 2 = 0$.
2. (3 ball) Tengsizlikni yeching $2x + 4 < -6$.
3. (3 ball) Tenglamani yeching $x^6 + x^3 = 0$.
4. (4 ball) Qanday $x \in \mathbb{R}$ sonlar ikkala $x^2 - 9 < 0$ va $-3x + 6 < 0$ tengsizliklarni ham qanoatlantiradi?

2. Vektorlar ustida amallar (12 ball)

Aytaylik, $\vec{a} = 7\vec{i} + 2\vec{j}$ va $\vec{b} = -3\vec{i} + 5\vec{j}$ vektorlar berilgan bo'lsin.

1. (2 ball) Hisoblang $\vec{a} + \vec{b}$.
2. (2 ball) Hisoblang $\vec{b} - 2\vec{a}$.
3. (2 ball) Hisoblang $|\vec{b}|^2$.
4. (2 ball) $\vec{a} + \vec{b}$ vektorning uzunligini yuzdan birgacha aniqlikda hisoblang.
5. (2 ball) Hisoblang $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
6. (2 ball) Hisoblang \vec{a} va \vec{b} vektorlar orasidagi burchakni bir gradus aniqligida toping.

3. Yuzaning ekstremumi (12 ball)

1. (3 ball) Integralni hisoblang $\int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$.
2. (9 ball) $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ funksiya grafigi va x o'qi bilan chegaralangan sohadan $x = t$ va $x = t + \frac{1}{2}$ to'g'ri chiziqlar bilan vertikal soha kesib olindi. $0 \leq t \leq \frac{3}{2}$ parametrning qanday qiymatida ushbu sohaning yuzi eng katta bo'ladi?

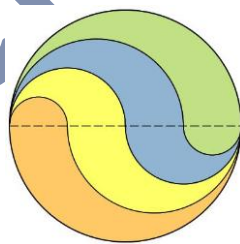
4. Eng katta masofa (12 ball)

$(x; y)$ nuqta $x^4 + y^2 < 1$ tengsizlikni qanoatlantiradi. $(x; y)$ nuqtadan koordinatalar boshigacha bo'lgan eng katta masofani toping.

B1 QISM

5. Doira ichidagi shakllar (12 ball)

Doiraning radiusi 4 ga teng. Doraning ichida gorizontaal diametr uchlarini tutashtiruvchi uchta egri chiziq xuddi rasmda ko'rsatilgandek chizilgan. Har bir egri chiziq ikkita yarim aylanalardan iborat bo'lib, ular gorizontaal diametrni to'rtta teng qismga ajratadi. Egri chiziqlar doirani to'rtta turli xil rangdagi sohalarga ajratadi. Bu sohalarning har biri bir xil yuzaga ega ekanligini ko'rsating.



6. Parabola va nuqta (12 ball)

Ushbu topshiriq uchun aniq yoki verguldan keyin ikki xona aniqlikdagi o'nli kasr ko'rinishidagi javoblarni berish mumkin.

$y = x^2$ parabola va $A(1; -1)$ nuqtani qaraymiz.

1. (4 ball) A nuqtadan o'tkazilgan urinmalar parabolaning qaysi nuqtalaridan o'tadi.
2. (8 ball) Paraboladagi A nuqtaga eng yaqin nuqtani va shu nuqtadan A nuqttagacha masofani toping.

7. Yatszi (12 ball)

Yatszi o'yinchisi 5 ta o'yin kubini tashlaydi. Full xaus yoki kare hosil bo'ladigan tashlashlarni qaraylik. **Full xaus** – uchtasi bir xil va qolgan ikkitasi ham bir xil sonlardan iborat kombinatsiya hosil bo'lganini, **kare** – to'rttasi bir xil va qolgan bittasi boshqa xil bo'lgan kombinatsiya hosil bo'lganini anglatadi.

1. (3 ball) Uchta oltidan va ikkita beshdan iborat full xaus tushishi ehtimolini toping.
2. (6 ball) Full xaus tushish ehtimolini toping.
3. (3 ball) Kare tushish ehtimolini toping.

8. Ko'phadlarni bo'lish algoritmi (12 ball)

Ko'phadlarni bo'lish algoritmi yordamida masalan, $p(x) = x^6 - 4x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 3x + 4$ ko'phadni $q(x) = x^2 - 3x + 1$ ko'phadga bo'lish mumkin. Algoritmning dastlabki qadamlari: $p(x) = x^4q(x) + 3x^5 - 5x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 3x + 4 = (x^4 + 3x^2)q(x) + 4x^4 - x^3 + 7x^2 - 3x + 4$.

Bu yerda nima qilinganini tushuntiring va bo'lish algoritmining qolgan qadamlarini oxirigicha bajaring.

9. Teskari funksiyaning hosilasi (12 ball)

Shunday f funksiyaga misol keltiringki, unga teskari funksiya hosilasi uchun $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{2}$ tenglik bajarilsin. Nima uchun siz keltirgan misol ushbu tenglikni qanoatlantirishini asoslashni unutmang.

B2 QISM

10. Katta sonning logarifmi (12 ball)

1, 2, 3, ..., 998 va 999 sonlarini ketma-ket yozish natijasida $a = 1234 \dots 9101112 \dots 99100101 \dots 998999$ ko'p xonali son hosil qilindi.

1. (3 ball) Qanday k butun son uchun $a \approx 1,23 \cdot 10^k$ tenglik bajariladi?
2. (9 ball) $\ln a$ ni toping.

11. Sonli ketma-ketlik (12 ball)

$a_1 = 2$ va $n \geq 1$ da $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ bo'lsin.

1. (4 ball) Induksiyadan foydalanib, (a_n) ketma-ketlik o'suvchi ekanligini ko'rsating.
2. (4 ball) Har qanday $n \geq 1$ uchun $a_n < 2$ ni isbotlang.
3. (4 ball) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$ ifodaning qiymatini (a_n) ketma-ketlikning limiti sifatida hisoblang.

12. O'rta heometrik ehtimoli (12 ball)

a va b musbat sonlarining o'rta geometrigi \sqrt{ab} ga teng.

1. (3 ball) \sqrt{ab} butun son bo'ladigan $[2; 100]$ oraliqdagi ikkita turli a va b sonlarga misol keltiring.
2. (9 ball) Tasodifiy sonlar generatori $[1; 100]$ oraliqdan ikkita sonni har birini bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda $\frac{1}{100}$ ehtimol bilan chiqarib beradi. Shu ikkita sonning o'rta geometrigi butun son bo'lishi ehtimolini toping. Siz ushbu hodisaning klassik ehtimolini aniq hisoblashingiz yoki ehtimolni modeli tasavvurlarga asoslangan bahosini berishingiz mumkin.

13. Trigonometrik tengsizlik (12 ball)

n – musbat butun son bo'lsin. $f(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ va $g(x) = n \cos x$ funksiyalarni qaraylik. $f(x) = g(x)$ tenglamaning $x_0 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ildizi uchun $g'(x_0) < -n + 1$ ekanligini ko'rsating.

Javoblar

1.1. $x = \frac{1}{2}$

1.2. $x < -5$

1.3. $x = 0$ yoki $x = -1$

1.4. $2 < x < 3$

2.1. $4\vec{i} + 7\vec{j}$

2.2. $-17\vec{i} + \vec{j}$

2.3. 34

2.4. $\approx 8,06$

2.5. -11

2.6. $\approx 105^\circ$

3.1. $\frac{4}{2}$

3.2. $\frac{\pi}{4}$

4. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

6.1. $(1 - \sqrt{2}; 3 - 2\sqrt{2}) \approx (-0,41; 0,17)$ va $(1 + \sqrt{2}; 3 + 2\sqrt{2}) \approx (2,41; 5,83)$

6.2. $\approx (0,31; 0,10)$

7.1. $\frac{10}{6^5}$

7.2. $\frac{50}{6^4}$

7.3. $\frac{25}{6^4}$

8. $p(x) = (x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 11x + 36)q(x) + 94x - 32$

10.1. 2888

10.2. 6650

11.3. 2

12.2. 0,031