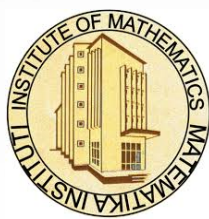


MINISTRY OF HIGHER AND SECONDARY SPECIAL EDUCATION  
OF THE REPUBLIC OF UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN named after MIRZO ULUGBEK  
UNIVERSITI TEKNOLOGI MARA (UiTM), Malaysia

V.I. ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS, Uzbekistan Academy of Sciences  
NAVOI STATE PEDAGOGICAL INSTITUTE

SAMARKAND BRANCH OF TASHKENT UNIVERSITY OF INFORMATION TECHNOLOGIES



# ABSTRACTS

of the Uzbekistan-Malaysia international online conference

COMPUTATIONAL MODELS AND TECHNOLOGIES

August 24-25, 2020

TASHKENT

MINISTRY OF HIGHER AND SECONDARY SPECIAL EDUCATION OF THE REPUBLIC OF  
UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

UNIVERSITI TEKNOLOGI MARA (UITM)

V.I. ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS UZBEKISTAN ACADEMY OF SCIENCES

NAVOI STATE PEDAGOGICAL INSTITUTE

SAMARKAND BRANCH OF TASHKENT UNIVERSITY OF INFORMATION TECHNOLOGIES

# ABSTRACTS

of the Uzbekistan-Malaysia international online conference

**COMPUTATIONAL MODELS AND TECHNOLOGIES**

**August 24-25, 2020**

TASHKENT

**Computational models and technologies:** Abstracts of the Uzbekistan-Malaysia international online conference, Editor-in-chief: Alov R.D., editor: Hayotov A.R., August 24-15, 2020, Tashkent, Uzbekistan

National University of Uzbekistan with partners cordially invites prospective authors to submit original and unpublished papers for publication and to participate with a speech in the International Online Conference on "Computational Models and Technologies", which will be held on August 24-25, 2020.

The conference is aimed at providing a platform for researchers to share their research findings from various disciplines and create a space for intellectual discussions.

The conference topics:

1. Computational mathematics;
2. Computing technology;
3. Information security;
4. Engineering technology;
5. Computational Algebra;
6. Theory of function;
7. Fuzzy analysis;
8. Applied Mathematics;
9. Mathematical modelling;
10. Applied statistics;
11. Fluid dynamics;
12. Interval analysis.

## Table of Contents

WELCOME ADDRESS .....	9
ORGANIZING COMMITTEE .....	10
PROGRAMM COMMITTEE .....	12
<b>1. COMPUTATIONAL MATHEMATICS</b> .....	<b>13</b>
<b>Abu Bakar Sumarni</b> <i>Graph Theory: From Modelling Dynamical Complex System to Ranking Alternatives Involving Multi-Attributes</i> .....	13
<b>Adibah Shuib, Mohamed Fishal, Nur Hayatul Asna</b> <i>Mixed Integer Goal Programming Model For Municipal Solid Waste Transportation - A Case Study Of Shah Alam</i> .....	13
<b>Akhmedov D.M.</b> <i>Optimal quadrature formulas with derivative for Hadamard type hypersingular integrals</i> ....	14
<b>Akhmedov Odiljon, Dustnazarov Sardorbek</b> <i>The accuracy of Runge-Kutta methods for quadratic dynamical systems</i> .....	15
<b>Akhmedov Odiljon, Tilavov Asliddin</b> <i>Application of DN-tracking method to construct a "Bendixon's bag"</i> .	16
<b>Babaev Samandar</b> <i>Optimal approximation formulas for computing of Fourier integrals in a Hilbert space</i> ....	17
<b>Bello Muhammed</b> <i>Group Coloring Via Its Geometric Structures</i> .....	20
<b>Bozarov B.I.</b> <i>Optimal quadrature formulas with trigonometric weight functions in the Sobolev space</i> .....	20
<b>Eshkuvatov Zainidin, Zaid Laadjal, Shahrina Ismail</b> <i>Numerical treatment of nonlinear mixed Volterra-Fredholm integro-differential equations of fractional order</i> .....	22
<b>Eshkuvatov Z.K., Mamatova H.X., Ismail Sh., Ilyani Abdullah, Alov R.D.</b> <i>Numerical approach for nonlinear system of Fredholm-Volterra Integral equations</i> .....	23
<b>Indranil Ghosh, M.S.H. Chowdhury, Suazlan Bin Mt Aznam, Shukranul Mawa</b> <i>New iterative method for solving chemistry problem</i> .....	23
<b>Khairul Anwar Nur Hadirah, Saian Rizaiddin, Abu Bakar Sumarni</b> <i>An enhance Ant Colony Optimization with Gini Index for predicting Type 2 Diabetes</i> .....	24
<b>Khalidjigitov A., Djumayozov U., Ibodullayev Sh.</b> <i>Effective Finite-Difference Method For Elastoplastic Boundary Value Problems</i> .....	25
<b>Khudoyberganov M.U., Nematova D.E., Juraev Sh.B.</b> <i>Application of stable difference splitting schemes for solving a mixed problem for hyperbolic systems of equations</i> .....	26
<b>Mascagni Michael</b> <i>The White Rat of Numerical Reproducibility</i> .....	28
<b>Nur Azliana Azlin Munir, Normi Abdul Hadi, Mohd Agos Salim Nasir</b> <i>Constrained for <math>G^1</math> cubic trigonometric spline curve interpolation</i> .....	29
<b>Rasulov A., Baqoiev M., Rahmatov M.</b> <i>Parallel algorithms and quasi random sequences for calculation multi dimensional integrals</i> .....	30
<b>Rasulov A., Raimova G.</b> <i>Monte Carlo methods for pricing weather derivatives</i> .....	31
<b>Rasulov R.</b> <i>Extension of the Euler-Maclaurin quadrature formula in the space <math>W_2^{(2k, 2k-1)}</math></i> .....	32
<b>Utebaev D., Utebaev B.D.</b> <i>Comparison of some numerical methods solutions of wave equations with strong dispersion</i> .....	34
<b>Yuldashev T.</b> <i>On a Volterra Type Fractional Integro-Differential Equation with Degenerate Kernel</i> .....	35
<b>Алов Р.Д., Давлатов Ш.О.</b> <i>Устойчивость разностной схемы, полученная методом конечных элементов при численном решении симметрических <math>t</math>-гиперболических систем</i> .....	37
<b>Алов Р.Д., Неъматова Д.Э.</b> <i>Численная устойчивость по Ляпунову гиперболической системы линейных законов баланса с неоднородными коэффициентами</i> .....	38
<b>Алов Р.Д., Неъматова Д.Э.</b> <i>Противопоточная разностная схема расщепления для трехмерной линейной гиперболической системы</i> .....	40
<b>Ахмадалиев Г.Н.</b> <i>Интерполяционные сплайны минимизирующие норму в гильбертовом пространстве <math>K_2(P_m)</math></i> .....	41
<b>Бахромов С.А., Исмагуллаев Г.П.</b> <i>Построение кубатурной формулы пятой степени точности содержащие значения частных производных</i> .....	43
<b>Болтаев А.К., Ахмедов Д.М.</b> <i>Экстремальная функция одной квадратурной формулы</i> .....	44
<b>Болтаев Н.Д., Курбонназаров А.И.</b> <i>Оптимальная квадратурная формула в смысле Сарда для вычисления коэффициентов Фурье в <math>K_2(P_m)</math></i> .....	46
<b>Далиев Б.С.</b> <i>Система уравнений для коэффициентов оптимальных квадратурных формул в пространстве <math>L_2^{(2)}(0, t)</math> для приближенного решения общего интегрального уравнения Абеля</i> .....	48
<b>Жалолов Ик.И.</b> <i>О построении дискретного аналога <math>D_3^h[\beta]</math> одного оператора</i> .....	50
<b>Жалолов О.И., Хаятов Х.У.</b> <i>Нижняя оценка нормы функционала погрешности решетчатых кубатурных формул в пространстве <math>H_p^\mu(\Omega)</math></i> .....	51

<b>Имомов А., Тошбоев С.М., Хасанов С.С.</b> <i>MATHECAD не только программа, а исполнитель алгоритмов</i> .....	52
<b>Кулдошев Х.</b> <i>Вычисление коэффициентов оптимальных квадратурных формул в пространстве <math>W_{2,\sigma}^{(2,1)}</math></i> .....	54
<b>Маматов А.Р.</b> <i>Решение линейной игры двух лиц</i> .....	55
<b>Неъматова Д.Э., Амиркулов С.С., Хужаев Ж.И.</b> <i>Противопоточная разностная схема для гиперболической системы из двух уравнений</i> .....	56
<b>Нуралиев Ф.А., Расулов Р.Г., Мирзакабилов Р.Н.</b> <i>Квадрат нормы функционала погрешности одной квадратурной формулы с производными</i> .....	57
<b>Паровик Р.И.</b> <i>Применение метода Адамса-Башфорта-Мултона к численному исследованию моделей линейных дробных осцилляторов</i> .....	59
<b>Твёрдый Д.А.</b> <i>Исследование эргодической динамической системы Риккати с модификацией дробно-дифференциального оператора типа Герасимова-Капуто</i> .....	60
<b>Уликов Ш., Турсунова Э.</b> <i>Учинчи тартибли тўла дифференциалли тенглама интеграловчи кўпайтувчисини аниқлаш</i> .....	61
<b>Шадиметов Х.М., Нуралиев Ф.А.</b> <i>Экстремальная функция кубатурной формулы типа Эрмита</i> ....	63
<b>Эшпулатов Б.Э., Убайдуллаев М.Ш.</b> <i>Вычисление определенных интегралов с применением кусочно-полиномиальной схемы</i> .....	66
<b>2. COMPUTING TECHNOLOGY</b> .....	68
<b>Adilova F, Davronov R.</b> <i>A Simple computational technology for developing regression models in high dimensional small sample cases for drug design</i> .....	68
<b>Aripov M., Norov A., Jorabekov T.</b> <i>Mathematical foundations of automatically syllabing of Karakalpak words</i> .....	69
<b>Madrakhimov Sh.F., Makharov K.T., Lolaev M.Y.</b> <i>Data preprocessing on input</i> .....	70
<b>Muminov B. B, Bekmurodov U.</b> <i>Intoduction of search based models in automatic machine systems</i> .....	71
<b>Narzullaev A., Muminov Z., Narzullaev M.</b> <i>Wi-Fi based student attendance recording system using machine learning classification algorithm</i> .....	72
<b>Qahhorov A.O'., Rangova G.O'.</b> <i>O'zMU sirtqi ta'lim axborot tizimida o'quv kurslarini yaratish</i> .....	73
<b>Syamila Hayatun</b> <i>Classification of paddy leaf disease using cubic support vector machine (SVM)</i> .....	75
<b>Ажмухамедов И.М., Ёркулов Б.А.</b> <i>Методика определения качества образовательных информационных систем</i> .....	76
<b>Кушматов О., Умаров Ш. А.</b> <i>Некоторые практические аспекты перехода вуза к дистанционному обучению на примере ферганского филиала ТУИТ во время пандемии COVID-19</i> .....	79
<b>Примова М.Х.</b> <i>Технология data mining в LMS</i> .....	87
<b>Тоиров Ш.А., Нармурадов У.З.</b> <i>Процессы применения квантового генетического алгоритма в оптимизации функций</i> .....	81
<b>Хасанов С.С.</b> <i>Облачные вычисления в медицинских информационных систем</i> .....	82
<b>Gadoyeva R.A.</b> <i>Ta'lim samaradorligini oshirishda axborot texnologiyalar</i> .....	87
<b>3. INFORMATION SECURITY AND ENGINEERING TECHNOLOGY</b> .....	89
<b>Abdullaev T.R., Juraev G.U.</b> <i>Development of methods for the generation of s-boxes for binary and ternary number systems</i> .....	89
<b>Abdullaev T.R., Juraev G.U.</b> <i>Selection of the optimal type of the gamming function for symmetric encryption algorithms</i> .....	90
<b>Akbarov D.E., Umarov Sh.A.</b> <i>About the chi-square criterion application for the decryption problem automation process</i> .....	91
<b>Alaev R.</b> <i>Applying the O'zDSt 1106: 2009 hash algorithm and the O'zDSt 1092: 2009 signature algorithm in Active Directory Certificate Services</i> .....	94
<b>Ikramov A.</b> <i>Complexity of testing cryptographic functions on linear and cyclic input errors</i> .....	102
<b>Juraev G.U., Bozorov O.N.</b> <i>Problems of ensuring the confidentiality of data objects of informatization</i> .....	104
<b>Juraev G.U., Khakimov M.H., Djaborov A.Kh.</b> <i>Creating a database for state structures</i> .....	105
<b>Nurullaev M.</b> <i>Algebraic cryptanalysis of some symmetric encryption algorithms</i> .....	106
<b>Zaynalov N.R., Narzullaev U.Kh., Muhamadiev A.N., Qilichev D.</b> <i>About using unicode to hide information in a text document</i> .....	108
<b>Наврузов Э.Р., Каримов А.А.</b> <i>О минимизации ресурсов для обнаружение угроз от вредоносного программного обеспечения</i> .....	109
<b>Умарова Ш.Г.</b> <i>Информационная безопасность в системе управления обучением MOODLE.</i> .....	109
<b>Хотамов А., Эшназаров Н.</b> <i>Мониторинг радиочастотного спектра основе комплексная антенная система</i> .....	113

<b>4. COMPUTATIONAL ALGEBRA AND THEORY OF FUNCTIONS</b> .....	115
Abdurasulov K.K., Solijanova G.O. <i>The description of pro-solvable Lie algebras with maximal pro-nilpotent ideals <math>\mathfrak{m}_0</math> and <math>\mathfrak{m}_2</math></i> .....	115
Ajab Bai Akbarally. <i>Applications of operators to classes of analytic functions</i> .....	116
Doud M., Zainuddin N.S. <i>Fuzzy decision making with missing information</i> .....	116
Ganikhodzhaev R.N., Seytov Sh.J. <i>An analytical description of the sets of Mandelbrot and Julia for some multi-dimensional cubic mappings</i> .....	117
Hasni Roslan, Wan Zuki Wan Nor Nadia Nabila, Du Zhibin. <i>On the difference between atom-bond connectivity index and Randic index of trees</i> .....	118
Malik Saad Al-Muhja, Habibulla Akhadkulov and Nazihah Ahmad. <i>On weighted approximation of (Co)convex functions with polynomials of varying degrees</i> .....	119
Muminov Z., Alladustov Sh., Lakaev Sh. <i>On spectrum and threshold analysis for discrete Schrödinger operator</i> .....	119
Narzillaev N. <i>Weighted regularity notions in <math>\mathbb{C}^n</math></i> .....	120
Taylanov N.A., Urinov S.X. <i>The magnetic susceptibility at the transition point of bose condensation</i> .....	121
Nazirah Ramli, Nik Muhammad Farhan Hakim Nik Badrul Alam, Daud Mohamad. <i>Fuzzy time series forecasting model based on Intuitionistic fuzzy sets and arithmetic rules</i> .....	122
Neendha Cheah Soo Thape, Nazihah Ahmad. <i>Solving bipolar fully fuzzy Sylvester matrix equation</i> .....	123
Nik Muhammad Farhan Hakim Nik Badrul Alam, Ajab Bai Akbarally. <i>Hermite-Hadamard type inequalities for composite <math>m</math>-convex functions</i> .....	123
Rakhmonov U., Abdullayev J., Kuramboev Kh. <i>The matrix ball second type and volume its skeleton</i> ..	124
Rozikov U., Imomkulov A. <i>On absolute nilpotent elements of approximation of commutative algebra with evolution algebras</i> .....	126
Shahrina Ismail, Kamel Ariffin Mohd Atan. <i>On the solutions of the Diophantine equation <math>x^4 + y^4 = 2^k z^3</math> for <math>k &gt; 1</math></i> .....	127
Shoyimardonov S. <i>A non-linear discrete-time dynamical system of planktons</i> .....	128
Абдуллаев Ж.И., Топтурдиев А.М. <i>Связанные состояния системы двух фермионов в инвариантном подпространстве</i> .....	129
Абдуллаев Ж.И., Шотемиров Й.С., Эргашова Ш.Х. <i>Нахождения значений энергии в связанном состоянии системы двух бозонов</i> .....	130
Болтаев Х.Х. <i>Существование изоморфизма для вещественных факторов</i> .....	133
Гуломов О.Х., Шодиев С.Ю. <i>Целочисленные точки и их количество на совершенных эллипсоидах</i> ...	135
Мамиров Б.У. <i>Асимптотика собственных значений оператора Шредингера системы двух бозонов на решетке</i> .....	137
Муминов К.К., Гаффоров Р.А. <i>Эквивалентность путей относительно действия группы <math>O(n-2, p-1, K)</math></i> .....	140
Нарзиллаев Н.Х., Эшдавлатова С.Э. <i><math>(\alpha, \psi)</math>-регулярные компакты в комплексной плоскости <math>\mathbb{C}</math></i> .....	142
Примова Х.А, Сафарова Л.У. <i>Прогностическая модель диагностики болезни остеодистрофии у коров с использованием нечеткое множество</i> .....	143
Уктамалиева Д.О., Уктамалиев И.К. <i>Полное описание периодических мер Губбса для HC-модели на дереве Кэли порядка два</i> .....	145
<b>5. APPLIED MATHEMATICS AND STATISTICS</b> .....	148
Ahmad Salehin Nurul Fadhila, Kamis Nor Hanimah. <i>Team formation based on expertise using preference similarity network clustering consensus group decision making model</i> .....	148
Aliah Natasha Affindi, Sanizah Ahmad. <i>A robust ridge regression approach for the combined multicollinearity-outlier problem</i> .....	148
Alias Idham Arif, Salleh Yusra, Ibragimov Gafurjan. <i>An evasion differential game of one evader against two pursuers</i> .....	149
Ali Rehman, Zabidin Salleh, Taza Gul. <i>The effect of Marangoni convection on Cu-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-Water Hybrid Nanofluid over a Stretching Surface with Convection Boundary Condition</i> .....	150
Aliyev A. <i>Central limit theorem for circle maps with a break and external noise</i> .....	150
Amryeen Rasha, Harun Fatimah Noor, Al-Smadi Mohammed, Alias Azwani. <i>An efficient analytical approach for nonlinear time-fractional Swift-Hohenberg equation with conformable operator</i> .....	152
Aripov M., Djabbarov O., Sadullaeva Sh. <i>Mathematic modeling of processes describing by double nonlinear parabolic equation with convective transfer and damping</i> .....	153
Ashurov R.R., Fayziev Yu.E. <i>Uniqueness and existence for inverse problem of determining an order of time-fractional derivative of subdiffusion equation</i> .....	155
Bouchra Azzaoui, Brahim Tellab. <i>Nonexistence of global solutions for a class of fractional differential systems</i> .....	156
Dalabaev U. <i>Mathematical description of the fluid flow outside and inside a porous medium based on an interpenetrating model</i> .....	157

<b>Eshmatova D., Ganikhodzhaev R.</b> <i>Tournaments of Volterra type transversal operators acting in the simplex <math>S^{m-1}</math></i> .....	158
<b>Ganikhodzhaev R.N.</b> <i>Analytical method for determining the section of a polyhedron</i> .....	160
<b>Karachik V., Turmetov B.</b> <i>On sufficient solvability conditions for Neumann type problems for polyharmonic equation in a ball</i> .....	161
<b>Kuchkarova S.</b> <i>The problem of pursuit mixed constraints</i> .....	162
<b>Kulieva G., Kuliev K.</b> <i>Application of extended Rothe's method for nonlinear parabolic variational inequalities in noncylindrical domains</i> .....	163
<b>Loy Kak Choon, Chris Cantwell, Spencer J. Sherwin, Yves Bourgault</b> <i>Efficient solver for the incompressible Navier-Stokes equations: On numerical challenges in solving lid-driven cavity problem</i> .....	164
<b>Mohd Dom Rosma.</b> <i>FTSE Bursa Malaysia KLCI performance prediction using combination of Principal Component Analysis and Artificial Neural Networks</i> .....	165
<b>Muminov M.I., Jumaev Z.Z.</b> <i>Existence conditions of periodic solutions of second-order neutral delay differential equations with piecewise constant arguments</i> .....	165
<b>MustafaKhalid NurIzyan, MdYusof Zahayu.</b> <i>Estimation of covariance matrices</i> .....	167
<b>Naimi Abdellouahab, Brahim Tellab, Khaled Zennir.</b> <i>Existence and uniqueness with ulam stability results for the solution of nonlinear fractional integro-differential equation</i> .....	168
<b>Norani Binti Amit, Hasimah Binti Sapiri, Zahayu Binti Md Yusof.</b> <i>Logistic regression analysis on the determinants of homeownership</i> .....	168
<b>Nur Hafiza Azwani Mohd Saidi, Mohamad Nazri Husin, Nur Baini Ismail.</b> <i>On the topological indices of the line graphs of Polyphenylene dendrimer</i> .....	169
<b>Nur Zahidah Ismail, Siti Khuzaimah Soid, Zaileha Md Ali, Mohd Rijal Ilias.</b> <i>FTSE Bursa Malaysia KLCI performance prediction using combination of Principal Component Analysis and Artificial Neural Networks</i> .....	169
<b>Rabiatuladawiyah Ismail, Ahmad Sukri Abd Aziz, Mohd Rijal Ilias.</b> <i>Effects of radiation and chemical reaction on 3D stretched flow with convective boundary condition in the presence of heat generation</i> .....	170
<b>Raimova G., Abdiganiev D.</b> <i>Econometric Analysis and Statistical Estimating the Parameters of Okun's Law for Uzbekistan</i> .....	171
<b>Sam'an Muhammad, Farikhin, Surarso Bayu, Irwanto Bambang.</b> <i>A New Approach in Solving Transportation Problem Based on Modifications of TDM and Integration of KSAM Algorithms</i> .....	175
<b>Sumarni Abu Bakar, Noor Syahida Fauzi.</b> <i>Improving Smartphone Selection by using Graph Theory Matrix Approach with Generalized Fuzzy Number</i> .....	176
<b>Tahani Jabbar Khraibet.</b> <i>Artificial Fish Swarm Algorithm For Parallel Identical Machines Scheduling With Release Date</i> .....	176
<b>Husanbaev Ya.M., Qudratov H.E.</b> <i>O'zgaruvchan muhitdagi tarmoqlanuvchi jarayonlar momentlari uchun tengsizliklar</i> .....	179
<b>Yuldashev Z., Ibragimov A., Tokhirov F.</b> <i>Interval evaluation of errors in modeling multi-mode objects</i> ...	181
<b>Yuldashev T., Rakhmonov F.</b> <i>Nonlocal Problem for a Nonlinear Fractional Mixed Type Integro-Differential Equation with Spectral Parameters</i> .....	182
<b>Yuldashev T., Rakhmonov F.</b> <i>Nonlocal Inverse Problem for a Pseudohyperbolic-Pseudoelliptic Type Differential Equation</i> .....	184
<b>Ажмухамедов И. М., Кузнецова В. Ю.</b> <i>Методика классификации заемщиков для совершенствования скоринговой системы микрофинансовой организации</i> .....	186
<b>Алоев Р.Д., Акбарова А. А.</b> <i>Численное решение квазилинейной гиперболической системы уравнений Сен-Венана в частном случае (в зависимости от наклона)</i> .....	189
<b>Ганиходжаев Р.Н., Таджиева М. А.</b> <i>Устойчивость неподвижных точек дискретных динамических систем вольтерровского типа</i> .....	191
<b>Жураев Ш.Ю.</b> <i>Асимптотические разложения для вероятностей продолжения критических ветвящихся случайных процессов</i> .....	192
<b>Исмоилов А.С.</b> <i>Слабо некорректная задача интегральной геометрии по семейству парабол с возмущением</i> .....	193
<b>Турметов Б.Х., Еркишева Ж.С., Кулахметова Ш.Б.</b> <i>О разрешимости некоторых вырождающихся краевых задач с инволюцией</i> .....	195
<b>Фаязов К.С., Хажиев И.О.</b> <i>Нелокальная краевая задача для дифференциального уравнения четвертого порядка с одной линией вырождения</i> .....	196
<b>Хусаинова Б.Б., Сирожитдинов А.А.</b> <i>Характеристика Ибрагимова-Осипова и центральная предельная теоремы</i> .....	197
<b>6. MATHEMATICAL MODELING</b> .....	199
<b>Abd Fatah Wahab, Syafiq Bidin, Izat Emir.</b> <i>Fuzzy b-spline modeling methods on fuzzy topological linguistic spaces for uncertainty data visualization problems</i> .....	199
<b>Ilyani Abdullah.</b> <i>The Influence of Magnetic Field on Wall Shear Stress in Power Law Fluid Flow of Blood</i> ...	199
<b>Absalamov A.</b> <i>On Eigenvalue of a Gonosomal Evolution Operator</i> .....	199

<b>Auni Aslah Mat Duad.</b> <i>Why do we need the qualitative theory of ordinary differential equations?</i> .....	201
<b>Chong Nyuk Sian, Hardwick Robert J, Truscott James E, Anderson Roy M.</b> <i>A soil-transmitted helminthiasis prevalence-based deterministic model</i> .....	202
<b>Elmurodov A.</b> <i>A Leslie-Gower predator-prey model with two free boundaries</i> .....	202
<b>Hanani I.S., Muhamad Safih I.</b> <i>Modelling of Ecological and Economic Sustainability of Coastal Area for Shrimp Aquaculture Production at I-SHARP, Setiu, Terengganu Darul Iman</i> .....	203
<b>Imomnazarov Kh., Turdiev U.</b> <i>A system of equations of the two-velocity hydrodynamics without pressure.</i> ..	204
<b>Juraev G.U., Tulaganov Z.Sh., Juraeva D.G.</b> <i>Efficient distribution of water resources in the channels of irrigation systems</i> .....	205
<b>Khudoyorov L.N.</b> <i>Analysis of economic indicators of developing of small business using econometric models</i> .	206
<b>Kosbergenov S, Kosbergenova M.</b> <i>Method for the hierarchical assessment of personnel competence in the educational system</i> .....	209
<b>Kuyliyev S., Imomnazarov Kh., Iskandarov I.</b> <i>The regularity of a Stokes-type problem for a stationary system of the two-velocity hydrodynamics on the plane</i> .....	211
<b>Nazarova K.Zh, Usmanov K.I.</b> <i>Univalent solvability of the boundary value problem for integro-differential equations with involution</i> .....	212
<b>Nigmanova D.B., Yusupov Yu.S.</b> <i>On the properties of generalized solutions of a nonlinear Cauchy problem for a nonlinear parabolic system with absorption or source</i> .....	213
<b>Nik Mohd Asri Bin NIK LONG</b> <i>Stress intensity factor for thermally insulated multiple cracks in bonded dissimilar materials</i> .....	214
<b>Nurumova A.</b> <i>Diffusion processes in heterogeneous bodies</i> .....	214
<b>Rakhmonov Z., Alimov A.</b> <i>Global existence and nonexistence for a multidimensional system of parabolic equations with nonlinear boundary conditions</i> .....	218
<b>Sadullaeva Sh., Fayzullaeva Z., Karimov M.X.</b> <i>Numerical investigation one of doubly nonlinear reaction-diffusion system</i> .....	219
<b>Teow Boon Keong, Nor Fauzan Ramadan Ramadan Ita, Nazihah Ahmad</b> <i>A mathematical modelling approach to predict global life expectancy based on non-medical factors</i> .....	220
<b>Tuliyev U.</b> <i>Space formation for the description of thematic documents</i> .....	221
<b>Uteuliev N., Djaykov G., Seidullaev A.</b> <i>Inversion formula for the problem of integral geometry on families of parabolas</i> .....	221
<b>Yakhshiboev M.U.</b> <i>Fractional difference operators with multiplicative step</i> .....	222
<b>Абдуолимова Г.М.</b> <i>Разрешение конфликта в колебательной системе стартовыми управлениями</i> .....	224
<b>Абиров Р.А., Хусанов Б.Э., Сагдуллаева Д.А.</b> <i>К математическому моделированию упруго-пластического процесса штамповки</i> .....	227
<b>Жалилов М.А., Каюмова Г.А.</b> <i>Об одной краевой задаче для нелокального уравнения смешанного типа с оператором Хилфера</i> .....	229
<b>Журакулов Т.Т.</b> <i>Математическое моделирование процессов обучения на основе теории управления</i> ...	230
<b>Индиаминов Р.Ш., Наркулов А.С., Бутаев Р.Б.</b> <i>Магнитоупругое деформирование гибких оболочек в нелинейной постановке</i> .....	232
<b>Индиаминов Р.Ш., Бутаев Р.Б., Наркулов А.С.</b> <i>Нелинейное деформирование токонесущей оболочки в магнитном поле</i> .....	233
<b>Исломов Б.И., Усмонов Б.З.</b> <i>Краевая задача для уравнения, составляющими из произведения не перестановочных дифференциальных операторов в прямоугольной области</i> .....	234
<b>Ишмаматов М., Рузимов А., Хомидов Ф., Сайидов Х.К., Рузиев Т.Р.</b> <i>Динамическое напряженно-деформированное состояние цилиндрических труб с жидкостью при воздействии гармонических нагрузок</i> .....	235
<b>Макаров Д.В., Паровик Р.И.</b> <i>Численное моделирование длинных волн Кондратева с учетом зредитарности</i> .....	238
<b>Маматов А.З., Бахрамов С.А., Нармаматов А.Б.</b> <i>Приближенное решение метода галеркина квазилинейного уравнения с граничным условием, содержащий производную по времени от искомой функции</i> .....	239
<b>Мусурмонова М.О., Шукуров А.М.</b> <i>Дифракция нестационарных сферических волн давления на жестком неподвижном шаре в акустическом полупространстве</i> .....	240
<b>Рузиев Р.А.</b> <i>Численный алгоритм решения пространственной задачи</i> .....	241
<b>Саттаров А.</b> <i>Компьютерное моделирование прикладных задач с помощью Matlab</i> .....	242
<b>Сафаров И., Кулдашов Н., Эсанов Н., Алмуратов Ш., Болтаев З.</b> <i>Собственные колебания вязкоупругих тороидальных оболочек с протекающей жидкостью</i> .....	243
<b>Сувонов О.О., Кучкарова С.С.</b> <i>Вычислительный эксперимент численного исследования гидродинамических процессов во взаимодействующих пластах</i> .....	244
<b>Сувонов О.О.</b> <i>Математическое моделирование функционирования гидродинамической системы с распределенными параметрами</i> .....	246
<b>Тешаев М., Аблокулов Ш., Эргашев М., Райимов Д., Нуриддинов Б.</b> <i>Радиальные колебания вязкоупругой сферической оболочки</i> .....	247



<b>Турметов Б.Х., Кадиркулов Б.Ж.</b> <i>Об одной обратной задаче для параболического уравнения с инволюцией</i> .....	249
<b>Тухтасинов М., Хайиткулов Б.Х.</b> <i>Консервативные разностные схемы по оптимальному выбору местоположения источников тепла в стержне</i> .....	250
<b>Узаков З.У.</b> <i>Влияние способа вычисления значения коэффициента теплопроводности на численное решение</i> .....	253
<b>Хотамов А.Х., Валетов Р.Ш.</b> <i>Методы анализ характеристики индустриальные радиопомехи на основе измерительные антенны</i> .....	254
<b>Эшматов Б., Каюмова Г.</b> <i>Об одной задаче для параболо - гиперболического уравнения дробного порядка с вырождением по времени</i> .....	254

---

## WELCOME ADDRESS

### **Dear guests! Distinguished colleagues and conference participants!**

The criterion that determines the development of a society and ensures its progress is science. Today, in the context of defining the independence and prospects of our country, the role and importance of science is becoming more widespread. At present, the higher educational institutions of the Republic serve as a kind of scientific center that trains qualified specialists and scientific and pedagogical personnel for the national economy, in particular, the public education system. In recent years, efforts to modernize educational institutions, improve the quality of education, the use of technology in education, knowledge through science, increasing the attention to the practical significance of scientific discoveries based on information and communication technologies are commendable. Today's conference on the eve of the Independence of the Republic of Uzbekistan is also symbolic. The further strengthening of interstate cooperation by scientists is also commendable. Theoretical and practical solution of the problems raised in the research work of the devotees of science will allow further development. This, in turn, renews the content of education and improves its essence. This is the social significance of today's demand.

In order to improve cooperation and contacts in the field of research, in cooperation with the network institutes of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan and Malaysia and other leading universities, lectures by leading scientists on special subjects, young researchers are supervising their dissertations, holding conferences and scientific seminars. Scientific research and the participation of researchers in international relations and cooperation also contribute to the acquisition of modern scientific achievements and the exchange of experience. Has modern knowledge, combines universal and national values, feeling responsible for the happiness of our countries upbringing of a free and free-thinking young generation, economic and social, we are scientific organizations on the path of further development of cultural and spiritual development, we wish universities, public organizations, manufacturing enterprises and all our well-meaning friends success in their cooperation and the most honorable and responsible professions in the world. Mankind is on the verge of overcoming Covid-19 disease with its knowledge and intellect. At the same time, we are winning with our simple, free-spirited habit of forming the national values of the Uzbek and Malay peoples.

The global epidemiological situation is that the conference, which is normally scheduled for May 1-2, 2020, will be held online on August 24-25, 2020 via ZOOM. I would like to take this opportunity to thank the Ministry of Higher and Secondary Special Education and the Ministry of Innovative Development of the Republic of Uzbekistan. Now all conferences and meetings are held online. Working in a virtual environment, preparing, processing, and submitting documents required a great deal of experience from participants and members of the organizing committee.

I would like to express my deep gratitude to the members of the organizing committee who worked hard to organize this conference and stood by me in my sad moments. On behalf of the organizers of the conference, I would like to express my sincere gratitude to the organizers of the conference for their selfless work. 229 people from the Republic of Uzbekistan, 85 - from Malaysia, 6 - from Russia, 7 - from Kazakhstan, 1 -from China, 1 - from Pakistan, 1 - from Jordan, 2 - from Algeria, 3 - from Saudi Arabia, 6 -from Indonesia, 1 - from USA and 1 -from Iraq took part in the Uzbek-Malaysian international online conference.

This joint conference will lay the foundation for the establishment of international research relations between the two nations, as well as between educational institutions of Uzbekistan and Malaysia. In this conference, as in ordinary conferences, let us enjoy the achievements in the field of science together, discuss and debate the results. It is in these debates that the truth emerges, science develops. And the achievements in the field of science are not the achievements of this or that country, but the achievements of humanity. These achievements serve the noble intentions of humanity. I wish the conference every success. Computational models and technologies (CMT2020), Welcome to the Uzbek-Malaysian International Online Conference!

**Chairman of the International Conference CMT2020**

## ORGANIZING COMMITTEE

Patron	Marakhimov A.R.	Professor, DSc, Rector	National University of Uzbekistan (NUUz), Uzbekistan
	Mohd Azraai Kassim	Professor Emeritus, Datuk Ir. Dr. Vice-Chancellor	Universiti Teknologi MARA (UiTM), Malaysia
Advisors	Shirinova R.Kh.	Professor, DSc, Vice-Rector	National University of Uzbekistan (NUUz), Uzbekistan
	Rakhmonov Z.R.	Associate Professor, DSc, Dean of Faculty of Applied Mathematics and Intellectual Technologies	National University of Uzbekistan, Uzbekistan
Scientific Head	Aloev R.D.	Professor, DSc, Department of Computational Mathematics and Information Systems	National University of Uzbekistan (NUUz), Uzbekistan
Chairman	Khudoyberganov M.U.	Associate Professor, Head of Department of Computational Mathematics and Information Systems	National University of Uzbekistan (NUUz), Uzbekistan
Co-Chairman	Haryani Haron	Professor, Ts. Dr. Dean of Faculty Computer and Mathematical Sciences	Universiti Teknologi MARA (UiTM), Malaysia
Deputy Chairman	Ibragimov F.N.	Associate Professor, Head of Department of Information Security	National University of Uzbekistan (NUUz), Uzbekistan
	Ahmad Shukri Abd Aziz	Associate Professor, Head of Department of Mathematics, Faculty Computer and Mathematical Sciences	Universiti Teknologi MARA (UiTM), Malaysia
Secretary I	Alaev R.Kh.	Senior Lecturer, Department of Information Security	National University of Uzbekistan (NUUz), Uzbekistan
Secretary II	Juraev Sh.B.	Lecturer, Department of Computational Mathematics and Information Systems	National University of Uzbekistan (NUUz), Uzbekistan
Treasurer	Primova M.Kh.	Department of Computational Mathematics and Information Systems	National University of Uzbekistan (NUUz), Uzbekistan
Treasurer	Eshkuvatov Z. K.	Associate Professor, Faculty of Ocean Engineering Technology and Informatics	Universiti Malaysia Terengganu (UMT), Malaysia
Protocol and Registration	Ne'matova D.E.	Department of Computational Mathematics and Information Systems	National University of Uzbekistan (NUUz), Uzbekistan

---

 ORGANIZING COMMITTEE
 

---

Website and Publicity	Rakhimov I.S.	Professor, DSc, Faculty of Computer and Mathematical Sciences	Universiti Teknologi MARA (UiTM), Malaysia
	Hayotov A.R.	Professor, DSc, Head of Computational Mathematics Laboratory	V.I.Romanovskiy Institute of Uzbekistan, Uzbekistan Academy of Sciences, Uzbekistan
	Khudoyberganov M.U.	Associate Professor, Head of Department of Computational Mathematics and Information Systems	National University of Uzbekistan (NUUz), Uzbekistan
	Sayfiev J.F.	Associate Professor, Head of Department of Scientific and Innovation Development Commercialization	Tashkent University of Information Technology (TUIT), Uzbekistan
	Alaev R.Kh.	Senior Lecturer, Department of Information Security	National University of Uzbekistan (NUUz), Uzbekistan
Eshkuvatov Z. K.	Associate Professor, Faculty of Ocean Engineering Technology and Informatics	Universiti Malaysia Terengganu (UMT), Malaysia	
Technical and Logistic	Juraev G.U.	Professor, DSc, Department of Information Security	National University of Uzbekistan (NUUz), Uzbekistan
	Muminov B.B.	Associate Professor, DSc, Head of Department of Informatics	Tashkent University of Information Technology (TUIT), Uzbekistan
Programme Book, Abstract and Proceeding	Hayotov A.R.	Professor, DSc, Head of Computational Mathematics Laboratory	V.I.Romanovskiy Institute of Uzbekistan, Uzbekistan Academy of Sciences, Uzbekistan
	Ruziev R.A.	Associate Professor, Faculty of Physics and Mathematics	Navoi State Pedagogical Institute, Uzbekistan
	Ibragimov A.A.	Associate Professor, Faculty of Physics and Mathematics	Navoi State Pedagogical Institute, Uzbekistan
	Rakhimov I.S.	Professor, DSc, Faculty Computer and Mathematical Sciences	Universiti Teknologi MARA (UiTM), Malaysia
	Daud Mohamad	Professor, Dr, Faculty Computer and Mathematical Sciences	Universiti Teknologi MARA (UiTM), Malaysia
Sponsorship	Aloev R.D.	Professor, DSc, Scientific Head of Fundamental Project OT-F4-28 "Construction of adequate computational models for hyperbolic systems"	National University of Uzbekistan (NUUz), Uzbekistan

---

## PROGRAMM COMMITTEE

---

<b>Ahmad Shukri Abd Aziz</b>	Universiti Teknologi MARA (UiTM), Malaysia
<b>Alimov Sh.A.</b>	National University of Uzbekistan, Uzbekistan
<b>Aloev R.D.</b>	National University of Uzbekistan, Uzbekistan
<b>Aripov M.M.</b>	National University of Uzbekistan, Uzbekistan
<b>Ayupov Sh.A.</b>	V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan
<b>Azamov A.</b>	V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan
<b>Akhmedov A.B.</b>	National University of Uzbekistan, Uzbekistan
<b>Akbarov D.E.</b>	Fergana branch of Tashkent University of Information Technologies, Uzbekistan
<b>Bakoev M.T.</b>	University of World Economy and Diplomacy, Uzbekistan
<b>Beshimov R.B.</b>	National University of Uzbekistan, Uzbekistan
<b>Chetverushkin B.N.</b>	Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russia
<b>Daud Mohamad</b>	Universiti Teknologi MARA (UiTM), Malaysia
<b>Dimov I.</b>	Institute of Information and Communication Technologies, Bulgaria
<b>Eshkuvatov Z.K.</b>	Universiti Malaysia Terengganu (UMT), Malaysia
<b>Elov B.B.</b>	Tashkent State University of Uzbek Language and Literature, Uzbekistan
<b>Haryani Haron</b>	Universiti Teknologi MARA (UiTM), Malaysia
<b>Hayotov A.R.</b>	V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan
<b>Ibragimov F.N.</b>	National University of Uzbekistan, Uzbekistan
<b>Ilyani Binti Abdulloh</b>	Universiti Malaysia Terengganu, Malaysia
<b>Juraev G.U.</b>	National University of Uzbekistan, Uzbekistan
<b>Kabulov A.V.</b>	National University of Uzbekistan, Uzbekistan
<b>Kasimov N.H.</b>	National University of Uzbekistan, Uzbekistan
<b>Kholjigitov A.</b>	Samarkand Branch of Tashkent University of Information Technologies, Uzbekistan
<b>Khudoyberganov M.U.</b>	National University of Uzbekistan, Uzbekistan
<b>Madrakhimov Sh.F.</b>	National University of Uzbekistan, Uzbekistan
<b>Mascagni M.</b>	Florida State University, USA
<b>Mohd Azraai Kassim</b>	Universiti Teknologi MARA (UiTM), Malaysia
<b>Muminov B. B</b>	Tashkent University of Information Technologies, Uzbekistan
<b>Nik Mohd Asri Nik Long</b>	Universiti Putra Malaysi, Malaysia
<b>Omirov B.A.</b>	National University of Uzbekistan, Uzbekistan
<b>Pulatov A.</b>	National University of Uzbekistan, Uzbekistan
<b>Ravshanov N.</b>	Tashkent University of Information Technologies, Uzbekistan
<b>Rasulov A.S.</b>	University of World Economy and Diplomacy, Uzbekistan
<b>Raimova G.A.</b>	V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan
<b>Rakhmonov Z.</b>	National University of Uzbekistan, Uzbekistan
<b>Rakhimov I.S.</b>	Universiti Teknologi MARA (UiTM), Malaysia
<b>Rozikov U.A.</b>	V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan
<b>Ruziev R.A.</b>	Navoi State Pedagogical Institute, Uzbekistan
<b>Sadullaev A.</b>	National University of Uzbekistan, Uzbekistan
<b>Shadimetov Kh.M.</b>	Tashkent Institute of Railway Engineers, Uzbekistan
<b>Sharipov O.Sh.</b>	National University of Uzbekistan, Uzbekistan
<b>Yakubovskiy M.B.</b>	Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russia
<b>Zikirov O.S.</b>	National University of Uzbekistan, Uzbekistan
<b>Roslan Hasni Bin Abdullah</b>	Universiti Malaysia Terengganu, Malaysia

---

## 1. COMPUTATIONAL MATHEMATICS

### GRAPH THEORY: FROM MODELLING DYNAMICAL COMPLEX SYSTEM TO RANKING ALTERNATIVES INVOLVING MULTI-ATTRIBUTES

<sup>1</sup>Abu Bakar Sumarni

<sup>1</sup> *Department of Mathematics, Faculty of Computer and Mathematical Sciences, Universiti Teknologi MARA, 40450 Shah Alam, Malaysia,*  
e-mail: sumarni@tmsk.uitm.edu.my

Graph theory is a well-known and established branch of mathematics where its exploitation exists in almost all real-life applications involving network ranging from telecommunication to genomics structure. In this session, capacity of graph theory to solve problems in two different applications is discussed. Firstly, the use of graph theory in modelling dynamic nature of combustion process in complex system and secondly in ranking alternatives of a problem involving multi-attributes which are interrelated. Besides that, the role of fuzzy theory to strengthen the models is also highlighted.

### MIXED INTEGER GOAL PROGRAMMING MODEL FOR MUNICIPAL SOLID WASTE TRANSPORTATION - A CASE STUDY OF SHAH ALAM

<sup>1,2</sup>Shuib, Adibah, <sup>1</sup>Mohamed Fishal, Nur Hayatul Asna

<sup>1</sup>*Faculty of Computer & Mathematical Sciences Universiti Teknologi MARA (UiTM), 40450 Shah Alam, Selangor, Malaysia,*  
e-mail: adibah@fskm.uitm.edu.my, hayatulasnaoffc@gmail.com

<sup>2</sup>*Malaysia Institute of Transport (MITRANS) Universiti Teknologi MARA (UiTM), 40450 Shah Alam, Selangor, Malaysia,*  
e-mail: adibah253@uitm.edu.my

Municipal solid waste (MSW) management is a great concern especially for urban areas as it incurs high collection and transportation cost. Developed countries establish wastes pre-treatment facilities, called transfer stations, that conduct composting, recycling and incineration to reduce amount of wastes to be disposed of at landfills. Many developing countries, however, are still having collected MSW end up in landfills with minimal treatment. This paper presents a study that concerns with MSW management of Shah Alam city area comprises of 24 zones with 58 sections. Current practice of Shah Alam MSW management does not involve any transfer station. Thus, three potential transfer stations have been proposed. Their locations, as identified by the Shah Alam City Council, are at Denai Alam, Meru and Kota Kemuning. A Mixed-Integer Goal Programming (MIGP) model has been formulated to find the best way to transport wastes from zones to transfer stations. The objective functions (goals) of the model are to minimize total transportation cost (fuel), to minimize total carbon dioxide (CO<sub>2</sub>) emission and to minimize noise pollution. Different capacities of vehicles used for transporting wastes are considered as each contributes different transportation cost, CO<sub>2</sub> emission and noise pollution. The model was solved using preemptive Goal Programming (GP) approach and MATLAB optimization solver. The optimal solution determines not only zone-to-transfer station assignments and volumes of wastes transported but also number and type of vehicles utilized for these arrangements. Based on the results, Denai Alam transfer station ranks the highest potential to be established as transfer station since it received the highest amount of wastes (273.34 tonnes per collection) from the respective zones due to having the most strategic location compared to other two transfer stations. The minimum total transportation cost is RM2,320.24, the minimum CO<sub>2</sub> is 1,287.22 kilogram and the minimum noise pollution

is 10,444 decibels per waste collection operation for the city. The MIGP model has been able to achieve the three goals and provide optimal transportation strategies for Shah Alam MSW when transfer stations are being considered as destinations for wastes collected from zones and for pre-treatment prior to being sent to landfills.

## OPTIMAL QUADRATURE FORMULAS WITH DERIVATIVE FOR HADAMARD TYPE HYPERSINGULAR INTEGRALS

Akhmedov Dilshod M.

*V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Uzbekistan*  
e-mail: axmedovdilshod@mail.ru

There are a large number of problems, both in physics and technology, and directly in various sections of mathematics, the solution of which requires to calculate hypersingular integrals. Since direct computations of such integrals is possible only in exceptional cases, it becomes necessary to develop approximate methods. This paper is devoted to the construction of approximate methods for calculating hypersingular integrals. Particular attention is paid to the investigation of the connection between the methods for calculating singular and hypersingular integrals.

We consider following hypersingular integral

$$H\varphi = \int_a^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p}, \quad -1 < t < 1, p = 2, 3, \dots \quad (1)$$

We construct an optimal quadrature formula for approximate integration of the integral (1) for the case  $a = 0, b = 1, p = 2$ . By integrating by parts we reduce the integral (1) to the form

$$\int_0^1 \frac{f(x)dx}{(x-t)^2} = \frac{f(1)}{t-1} - \frac{f(0)}{t} + \int_0^1 \frac{f'(x)dx}{(x-t)}, \quad 0 < t < 1. \quad (2)$$

Now it is sufficiently to construct an optimal quadrature formula for numerical integration of the Cauchy type singular integrals which is in right hand side of (2). For this first we introduce denotation  $f'(x) = \varphi(x)$ . Then we consider the following quadrature formula

$$\int_0^1 \frac{\varphi(x)dx}{x-t} \cong \sum_{\alpha=0}^n \sum_{\beta=0}^N C_\alpha[\beta] \varphi^{(\alpha)}[\beta], \quad (3)$$

with the error functional

$$\ell(x) = \frac{\varepsilon_{[0,1]}(x)}{x-t} - \sum_{\alpha=0}^n \sum_{\beta=0}^N (-1)^\alpha C_\alpha[\beta] \delta^{(\alpha)}(x-x_\beta), \quad (4)$$

where  $0 < t < 1$ ,  $x_\beta = h\beta$  ( $\in [0, 1]$ ) are the nodes,  $h = \frac{1}{N}$ ,  $N = 2, 3, 4, \dots$ ,  $n = \overline{0, m-1}$ ,  $C_\alpha[\beta]$  are the coefficients,  $\varphi(x)$  is a function of the space  $L_2^{(m)}(0, 1)$ .

The main aim of the present paper is to construct optimal quadrature formulas in the sense of Sard [1] of the form (3) in the space  $L_2^{(m)}(0, 1)$  by the Sobolev method for approximate integration of the Cauchy type singular integral. This means to find the coefficients  $C_\alpha[\beta]$  which satisfy the following equality

$$\|\dot{\ell}|L_2^{(m)*}\| = \inf_{C[\beta]} \|\ell|L_2^{(m)*}\|. \quad (5)$$

Thus, in order to construct optimal quadrature formulas in the form (3) in the sense of Sard we have to consequently solve the following problem.

**Problem 1.** Find the coefficients  $C_\alpha[\beta]$  which satisfy the equality (5).

Here we solved Problem 1 and obtained the following main result

**Theorem 1.** The optimal coefficients for the quadrature formulas of the form (3) in the Sobolev space  $L_2^{(m)}(0, 1)$  are defined as follows

$$\begin{aligned}\mathring{C}_{k-1}[0] &= h^{-1} \left[ F_{k-1}[1] - F_{k-1}[0] + \frac{h}{2} \left( \frac{g_{k-1}}{(k-1)!} - \nu_{k-2} \right) \right], \\ \mathring{C}_{k-1}[\beta] &= h^{-1} \left[ F_{k-1}[\beta-1] - 2F_{k-1}[\beta] + F_{k-1}[\beta+1] \right],\end{aligned}$$

$$\beta = 1, \dots, N-1$$

$$\mathring{C}_{k-1}[N] = h^{-1} \left[ F_{k-1}[N-1] - F_{k-1}[N] + \frac{h}{2} \left( \frac{g_{k-1}}{(k-1)!} - \nu_{k-2} \right) \right],$$

$k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ , where  $F_{k-1}$  and  $g_{k-1}$  are known expressions.

It should be noted that, in particular, when  $m = 1, 2, 3$  from the results of this work we get the results of [2].

## References

1. Sard A. Best approximate integration formulas; best approximation formulas, Amer. J. Math. 71 (1949) 80-91.
2. Akhmedov D.M., Hayotov A.R., Shadimetov Kh.M. Optimal quadrature formulas with derivatives for Cauchy type singular integrals. Applied Mathematics and Computation, 317 (2018), -pp. 150-159.

## THE ACCURACY OF RUNGE-KUTTA METHODS FOR QUADRATIC DYNAMICAL SYSTEMS

<sup>1</sup> Akhmedov Odiljon, <sup>2</sup> Dustnazarov Sardorbek

<sup>1</sup> Uzbekistan Academy of Science, Institute of Mathematics, Uzbekistan,  
e-mail: odiljon.axmedov@gmail.com

<sup>2</sup> Gulistan State University, Uzbekistan,  
e-mail: sdustnazarov@mail.ru

Consider a Cauchy problem for a quadratic dynamical system

$$\dot{z} = f(z), \quad z(0) = z_0, \quad (1)$$

where  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(z)$  is a quadratic polynomial.

Assume that solution  $z(t)$  of system (1) exists on the interval  $[0, T]$  and does not leave pre-selected convex compact region  $K$ .

If system (1) is not integrable and does not have a symmetry, one has to use numerical methods in order to study the qualitative behavior of considering the system. From a mathematical point of view, finding the upper bound of the accuracy of numerical methods is essential to make strictly mathematical deductive conclusions.

In this work we give such kind of upper bounds for the well-known 2nd and 3rd order Runge-Kutta methods with integrating step  $h = T/N$ , i.e.

for 2nd order:

$$z_{n+1} = z_n + c_1 k_1 + c_2 k_2 \quad (2)$$



where  $k_1 = hf(z_n)$ ,  $k_2 = f(z_n + \alpha k_1)$ ,  $c_1 + c_2 = 1$ ,  $2\alpha c_2 = 1$ ,  $n = \overline{0, N-1}$ ;  
for 3rd order:

$$z_{n+1} = z_n + c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3 \quad (3)$$

where  $k_1 = hf(z_n)$ ,  $k_2 = hf(z_n + \alpha k_1)$ ,  $k_3 = hf(z_n + \frac{\beta k_1 + \gamma k_2}{2})$ ,  $c_1 + c_2 + c_3 = 1$ ,  $6\alpha\gamma c_3 = 1$ ,  
 $2\alpha c_2 + 2(\beta + \gamma)c_3 = 1$ ,  $3\alpha^2 c_2 + 2(\beta + \gamma)^2 c_3 = 1$ ,  $n = \overline{0, N-1}$ .

Let

$$m_0 = \max_{z \in K} \|f(z)\|, m_1 = \max_{z \in K} \|f'(z)\|, m_2 = \max_{z \in K} \|f''(z)\|$$

where  $\|\cdot\|$  is Euclidean norm symbol.

**Theorem 1.** *Let the condition  $z_n \in K$  holds for all  $n = \overline{0, N}$ . Then for the scheme (2) the inequality*

$$|z(nh) - z_n| < \frac{e^{m_1 T} - 1}{m_1} L h^2,$$

holds, where  $L = C + C_* h$ ,  $C = \frac{2m_0 m_1^2 + |3\alpha - 2| m_0^2 m_2}{12}$ ,  $C_* = \frac{m_0 m_1^3 + 4m_0^2 m_1 m_2}{24}$ .

**Theorem 2.** *Let the condition  $z_n \in K$  holds for all  $n = \overline{0, N}$ . Then for the scheme (3) the inequality*

$$|z(nh) - z_n| < \frac{e^{m_1 T} - 1}{m_1} L h^3,$$

holds, where  $L = C + 1.01 C_* h$ ,  $C = \frac{m_0 m_1^3 + 2|\alpha + \beta + \gamma - 2| m_0^2 m_1 m_2}{24}$ ,  $C_*$  is the maximum value of quantities  $\frac{m_0 m_1^4 + |10\alpha + 11| m_0^2 m_1^2 m_2 + |10(\beta + \gamma) + 4| m_0^2 m_2^2}{120}$ ,  $\frac{\alpha^2 |\gamma| m_0^3 m_1 m_2^2}{2}$ ,  $\frac{7|\alpha^3 \gamma| m_0^4 m_2^3}{16}$ .

## References

1. *Bakhvalov N.S.* Numerical Methods. Moscow: Nauka, 1973.
2. *Butcher, J.C.* Numerical Methods for Ordinary Differential Equations, Chichester: John Wiley and Sons, 2003.

## APPLICATION OF DN-TRACKING METHOD TO CONSTRUCT A "BENDIXON'S BAG"

<sup>1</sup>Akhmedov Odiljon, <sup>2</sup>Tilavov Asliddin

<sup>1</sup> *Uzbekistan Academy of Science, Institute of Mathematics, Uzbekistan,*  
e-mail: odiljon.axmedov@gmail.com

<sup>2</sup> *Uzbekistan Academy of Science, Institute of Mathematics, Uzbekistan,*  
e-mail: asliddintm@mail.ru

One of the main problems of the qualitative theory of dynamical systems is to prove the existence of a closed trajectory. To prove its existence even for a concrete two-dimensional dynamical system remains a difficult task. In 2008, A.A.Azamov proposed a new method called DN-tracking of trajectories, which under certain conditions allows one to rigorously prove the specific properties of dynamical systems (namely, existence of closed trajectory) based on numerical methods.

It is known that one of the criteria an existence of a closed trajectory of given dynamical systems on the plane is to construct a "Bendixon's bag", which is bounded, invariant region as  $t \rightarrow \infty$  and contains an equilibrium point of the anti-saddle (node or focus) type.

In the talk, using DN-tracking method the construction of "Bendixon's bag" will be demonstrated for the nonlinear dynamical system

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + y + x^2 \\ \dot{y} = bx + y \end{cases}$$

for the certain values of parameters  $a$  and  $b$ .

### References

1. *Andronov, A. A., Leontovich, E. A., Gordon, I. I., Maier, A. G.* Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems, Moscow: Nauka, 1966.
2. *Azamov, A. A.* DN-Tracking Method to Prove the Existence of Limit Cycles. Differential Equations and Topology. Proceedings of the International Conference The 100th Anniversary of Academician Lev Semenovich Pontryagin, Moscow, 2008, 17-22 June, pp. 87–88.

## OPTIMAL APPROXIMATION FORMULAS FOR COMPUTING OF FOURIER INTEGRALS IN A HILBERT SPACE

<sup>1,2</sup>**Babaev Samandar**

<sup>1</sup>*Bukhara State University, 11, M.Ikbol str., Bukhara 200114, Uzbekistan,*

<sup>2</sup>*V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, 81, M.Ulugbek str., Tashkent 100170, Uzbekistan,*  
e-mail: bssamandar@gmail.com

The main aim in this work is to find efficient numerical approximations for the Fourier integrals

$$I(\varphi) = \int_0^1 e^{2\pi i\omega x} \varphi(x) dx \quad (1)$$

with  $\omega \in \mathbb{R}$ . It is known that for sufficiently large  $\omega$  this type of integrals are called *highly oscillating integrals*.

In most cases it is impossible to get the exact values of such integrals. Thus, they can be approximately calculated using the formulas of numerical integration. However, standard methods of numerical integration cannot be successfully applied for that. Therefore special effective methods should be developed for approximation of highly oscillating integrals. One of the first numerical integration formula for the integral (1) was obtained by Filon [5] in 1928 using a quadratic spline. Since then, for integrals of different types of highly oscillating functions many special effective methods have been developed, such as Filon-type method, Clenshaw-Curtis-Filon type method, Levin type methods, modified Clenshaw-Curtis method, generalized quadrature rule, and Gauss-Laguerre quadrature (see, for example [4,7,8] and references therein).

Recently, in [2,3], based on Sobolev's method, the problem of construction of optimal quadrature formulas in the sense of Sard for numerical calculation of the integral (1) with integer  $\omega$  was studied in Hilbert spaces  $L_2^{(m)}$  and  $W_2^{(m,m-1)}$ , respectively. The optimal quadrature formulas are constructed in [1,6] for approximation of Fourier integrals in the spaces  $W_2^{(1,0)}$  and  $L_2^{(1)}$ , respectively.

For approximation of integral (1) we consider the following quadrature formula

$$\int_0^1 e^{2\pi i\omega x} \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_\beta \varphi(h\beta) \quad (2)$$

with the error functional

$$\ell(x) = e^{2\pi i\omega x} \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta \delta(x - h\beta),$$

where  $C_\beta$  are the coefficients of formula (2),  $h = \frac{1}{N}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ ,  $i^2 = -1$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon_{[0,1]}(x)$  is the indicator of the interval  $[0, 1]$  and  $\delta(x)$  is the Dirac delta-function.

Sard's optimization problem for numerical integration formulas of the form (2) in the space  $W_2^{(m,m-1)}[0, 1]$  is the problem of finding the minimum of the norm of the error functional  $\ell$  by coefficients  $C_\beta$ , i.e., to find coefficients  $C_\beta$  satisfying the equality

$$\|\mathring{\ell}\|_{W_2^{(m,m-1)*}[0,1]} = \inf_{C_\beta} \|\ell\|_{W_2^{(m,m-1)*}[0,1]}.$$

The coefficients satisfying the last equality are called *optimal one* and they are denoted as  $\mathring{C}_\beta$ . The quadrature formula with coefficients  $\mathring{C}_\beta$  is called *the optimal quadrature formula in the sense of Sard*, and  $\mathring{\ell}$  is the error functional corresponding to the optimal quadrature formula. In the current work optimal coefficients are found.

**Theorem 1.** *Coefficients of the optimal quadrature formulas of the form (2) in the space  $W_2^{(m,m-1)}[0, 1]$  have the form*

$$\mathring{C}_{0,\omega} = \frac{K_{\omega,m} e^{2\pi i\omega h}}{e^{2\pi i\omega h} - 1} + \frac{1}{1 - 2\pi i\omega} + \sum_{k=1}^{m-1} \left( a_k \frac{\lambda_k}{\lambda_k - e^h} + b_k \frac{\lambda_k^N}{1 - \lambda_k e^h} \right),$$

$$\mathring{C}_{\beta,\omega} = e^{2\pi i\omega h\beta} K_{\omega,m} + \sum_{k=1}^{m-1} (a_k \lambda_k^\beta + b_k \lambda_k^{N-\beta}), \quad \beta = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$\mathring{C}_{N,\omega} = K_{\omega,m} \frac{e^h (e^{2\pi i\omega} - e^{2\pi i\omega h}) + e^{2\pi i\omega h} (1 - e^{2\pi i\omega})}{(e^h - e^{2\pi i\omega h})(1 - e^{2\pi i\omega h})} + \frac{e^{2\pi i\omega} (2\pi i\omega - 1) + 1}{2\pi i\omega (2\pi i\omega - 1)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \left( a_k \frac{\lambda_k^N (e^h - \lambda_k) + \lambda_k (1 - e^h)}{(1 - \lambda_k)(e^h - \lambda_k)} + b_k \frac{\lambda_k^{N+1} (e^h - 1) + \lambda_k (1 - \lambda_k e^h)}{(1 - \lambda_k)(\lambda_k e^h - 1)} \right),$$

where  $a_k$  and  $b_k$  satisfy the following system of  $2m - 2$  linear equations

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{m-1} a_k \left[ \sum_{l=1}^j \frac{h^{2l-2}}{(2l-2)!} \sum_{i=0}^{2l-2} \frac{\lambda_k \Delta^i 0^{2l-2}}{(\lambda_k - 1)^{i+1}} - \frac{\lambda_k}{\lambda_k - e^h} \right] + \sum_{k=1}^{m-1} b_k \left[ \sum_{l=1}^j \frac{h^{2l-2}}{(2l-2)!} \sum_{i=0}^{2l-2} \frac{\lambda_k^{N+i} \Delta^i 0^{2l-2}}{(1 - \lambda_k)^{i+1}} - \frac{\lambda_k^N}{1 - \lambda_k e^h} \right] = \\
 & = \frac{K_{\omega, m} e^{2\pi i \omega h}}{e^{2\pi i \omega h} - e^h} + \frac{1}{1 - 2\pi i \omega} - \sum_{l=1}^j \frac{h^{2l-2}}{(2l-2)!} \left[ \frac{K_{\omega, m} e^{2\pi i \omega h}}{e^{2\pi i \omega h} - 1} \sum_{\alpha=0}^{2l-2} \frac{\Delta^\alpha 0^{2l-2}}{(e^{2\pi i \omega h} - 1)^\alpha} - \frac{1}{(2\pi i \omega)^{2l-1}} \right], \quad j = 1, \overline{\left[ \frac{m}{2} \right]}; \\
 & \sum_{k=1}^{m-1} a_k \left[ \sum_{l=1}^j \frac{h^{2l-1}}{(2l-1)!} \sum_{i=0}^{2l-1} \frac{\lambda_k \Delta^i 0^{2l-1}}{(\lambda_k - 1)^{i+1}} \right] + \sum_{k=1}^{m-1} b_k \left[ \sum_{l=1}^j \frac{h^{2l-1}}{(2l-1)!} \sum_{i=0}^{2l-1} \frac{\lambda_k^{N+i} \Delta^i 0^{2l-1}}{(1 - \lambda_k)^{i+1}} \right] = \\
 & = - \sum_{l=1}^j \frac{h^{2l-1}}{(2l-1)!} \left[ \frac{K_{\omega, m} e^{2\pi i \omega h}}{e^{2\pi i \omega h} - 1} \sum_{\alpha=0}^{2l-1} \frac{\Delta^\alpha 0^{2l-1}}{(e^{2\pi i \omega h} - 1)^\alpha} - \frac{1}{(2\pi i \omega)^{2l}} \right], \quad j = 1, \overline{\left[ \frac{m-1}{2} \right]}; \\
 & \sum_{k=1}^{m-1} a_k \left[ h^j \sum_{i=0}^j \frac{\lambda_k^i - \lambda_k^{N+i}}{(1 - \lambda_k)^{i+1}} \Delta^i 0^j - \sum_{l=0}^{j-1} h^l C_j^l \sum_{i=0}^l \frac{\lambda_k^{N+i} \Delta^i 0^l}{(1 - \lambda_k)^{i+1}} + \frac{\lambda_k^N (e^h - \lambda_k) + \lambda_k (1 - e^h)}{(1 - \lambda_k)(e^h - \lambda_k)} \right] + \\
 & + \sum_{k=1}^{m-1} b_k \left[ h^j \sum_{i=0}^j \frac{\lambda_k^{N+1} - \lambda_k}{(\lambda_k - 1)^{i+1}} \Delta^i 0^j - \sum_{l=0}^{j-1} h^l C_j^l \sum_{i=0}^l \frac{\lambda_k \Delta^i 0^l}{(\lambda_k - 1)^{i+1}} + \frac{\lambda_k^{N+1} (e^h - 1) + \lambda_k (1 - \lambda_k e^h)}{(1 - \lambda_k)(\lambda_k e^h - 1)} \right] = \\
 & = g_j - \frac{e^{2\pi i \omega}}{2\pi i \omega} - \frac{1}{2\pi i \omega (2\pi i \omega - 1)} - K_{\omega, m} h^j \sum_{\alpha=0}^j \frac{(e^{2\pi i \omega h})^\alpha (1 - e^{2\pi i \omega})}{(1 - e^{2\pi i \omega h})^{\alpha+1}} \Delta^\alpha 0^j + \\
 & + K_{\omega, m} \sum_{l=1}^{j-1} h^l C_j^l \sum_{\alpha=0}^l \frac{(e^{2\pi i \omega h})^{N+\alpha} \Delta^\alpha 0^l}{(\lambda_k - 1)^{\alpha+1}} - K_{\omega, m} \frac{e^h (e^{2\pi i \omega} - e^{2\pi i \omega h}) + e^{2\pi i \omega h} (1 - e^{2\pi i \omega})}{(e^{2\pi i \omega h} - 1)(e^{2\pi i \omega h} - e^h)}, \quad j = \overline{1, m-2}. \\
 & \sum_{k=1}^{m-1} \left[ a_k \frac{\lambda_k^{N+1} - \lambda_k}{(\lambda_k - 1)(e^h - \lambda_k)} + b_k \frac{\lambda_k^{N+1} - \lambda_k}{(\lambda_k - 1)(\lambda_k e^h - 1)} \right] = \\
 & = K_{\omega, m} \left[ \frac{e^{2\pi i \omega} - e^{2\pi i \omega h}}{(e^{2\pi i \omega h} - 1)(1 - e^h)} + \frac{e^{2\pi i \omega h} - e^{2\pi i \omega + h}}{(e^{2\pi i \omega h} - e^h)(1 - e^h)} \right] + \frac{e^{2\pi i \omega} - 1}{2\pi i \omega (2\pi i \omega - 1)(1 - e^h)},
 \end{aligned}$$

and

$$K_{\omega, m} = \left( \frac{2}{(2\pi \omega)^2 + 1} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{2}{(2\pi i \omega)^{2k}} \right) / \left( \frac{e^h}{e^h - e^{2\pi i \omega h}} - \frac{1}{1 - e^{2\pi i \omega h + h}} + \sum_{l=1}^{m-1} \frac{2h^{2l-1}}{(2l-1)!} \cdot \sum_{\alpha=0}^{2l-1} \frac{e^{2\pi i \omega h} \Delta^\alpha 0^{2l-1}}{(e^{2\pi i \omega h} - 1)^{\alpha+1}} \right).$$

## References

1. *Babaev S.S., Hayotov A.R., Khayriev U.N.* On an optimal quadrature formula for approximation of Fourier integrals in the space  $W_2^{(1,0)}$ . *Uzbek Math. Zh.*, no. 2, 2020, 23-36.
2. *Boltaev N.D., Hayotov A.R. and Shadimetov Kh.M.* Construction of optimal quadrature formulas for Fourier coefficients in Sobolev space  $L_2^{(m)}(0, 1)$ . *Numerical Algorithms*, no. 74, 2017, 307-336.
3. *Boltaev N.D., Hayotov A.R., Milovanović G.V., and Shadimetov Kh.M.* Optimal quadrature formulas for Fourier coefficients in  $W_2^{(m, m-1)}$  space. *Journal of applied analysis and computation*, no. 7, 2017, 1233-1266.
4. *Deaño A., Huybrechs D., and Iserles A.* Computing highly oscillatory integrals. SIAM, Philadelphia. 2018.
5. *Filon L.N.G.* On a quadrature formula for trigonometric integrals. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, no. 49, 1928, 38-47.
6. *Hayotov A.R., Jeon S., Lee C-O.* On an optimal quadrature formula for approximation of Fourier integrals in the space  $L_2^{(1)}$ . *Journal of Computational and Applied Mathematics* Volume 372, July 2020, 112713.
7. *Milovanović G.V. and Stanić M.P.* Numerical integration of highly oscillating functions. In: *Analytic Number Theory, Approximation Theory, and Special Functions/ G.V. Milovanović and M.Th. Rassias (Eds.)*, Springer, New York, 2014, 613-649.
8. *Olver S.* Numerical approximation of highly oscillatory integrals. PhD dissertation, University of Cambridge. 2008.

## GROUP COLORING VIA ITS GEOMETRIC STRUCTURES

<sup>1</sup>Bello Muhammed

e-mail: mbatap560@gmail.com

Let  $\Gamma$  be a graph with vertex set  $V(\Gamma)$  and edge set  $E(\Gamma)$ . A vertex coloring of  $\Gamma$  is an assignment of colors to  $V(\Gamma)$ , so that no any two adjacent vertices share the same color. Meanwhile an edge coloring of  $\Gamma$  is an assignment of colors to  $E(\Gamma)$ , so that no any two incident edges share the same color. Let  $G$  be a finite group, an order product prime graph of  $G$ , is a graph  $\Gamma^{opp}(G)$ , having the elements of  $G$  as its vertices and two vertices are adjacent if and only if the product of their order is a prime power. In this paper, the general structure of the order product prime graph is used to investigate the vertex chromatic number, the dominated chromatic number, the locating chromatic number and the edge chromatic number of the order product prime graph on cyclic groups, dihedral groups and generalized quaternion groups.

## OPTIMAL QUADRATURE FORMULAS WITH TRIGONOMETRIC WEIGHT FUNCTIONS IN THE SOBOLEV SPACE

Bozarov B.I.

*V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan,,*

e-mail: b.bozarov@mail.ru

One of the most important and interesting discoveries in mathematics is that any math function can be approximated with a series of sinusoids (sine and cosine waves), called Fourier series. It is known that the Fourier coefficients

$$F_S(\omega) = \int_0^1 f(t) \sin(\omega t) dt \quad \text{and} \quad F_C(\omega) = \int_0^1 f(t) \cos(\omega t) dt$$

are strongly oscillating integrals for sufficiently large values of  $\omega$ . In most cases it is impossible to calculate these integrals. Therefore, they should be calculated using formulas of numerical integration. It should be noted that standard methods are not practical for the numerical calculation of these integrals. Therefore, for the approximate calculation of such integrals, it is necessary to develop special methods.

The present work is devoted to one of such methods. Here we construct optimal quadrature formulas for numerical integration of integrals  $F_S(\omega)$  and  $F_C(\omega)$  in the space  $L_2^{(m)}(0, 1)$ .  $L_2^{(m)}(0, 1)$  is the Sobolev space of real functions on  $[0, 1]$  having square integrable derivatives up to the order  $m$  and equipped with the norm

$$\|\varphi\|_{L_2^{(m)}(0,1)} = \left( \int_0^1 (\varphi^{(m)}(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

We consider the following quadrature formulas

$$\int_0^1 \sin \omega x \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_1[\beta] \varphi[\beta], \quad (1)$$

and

$$\int_0^1 \cos \omega x \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_2[\beta] \varphi[\beta]. \quad (2)$$

Here  $C_1[\beta]$  and  $C_2[\beta]$  are coefficients,  $\omega \neq 0$ ,  $[\beta] = h\beta$ ,  $\beta = \overline{0, N}$ ,  $h = \frac{1}{N}$ ,  $N$  is a natural number and  $\varphi$  is a function of the space  $L_2^{(m)}(0, 1)$ . Here the error functionals for each of the quadrature formulas (1) and (2) are defined as follows

$$\ell_1(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) \sin \omega x - \sum_{\beta=0}^N C_1[\beta] \delta(x - h\beta)$$

and

$$\ell_2(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) \cos \omega x - \sum_{\beta=0}^N C_2[\beta] \delta(x - h\beta),$$

where  $\varepsilon_{[0,1]}(x)$  is the indicator of the  $[0, 1]$ ,  $\delta(x)$  is the Dirac delta-function.

The aim of the work is to find the coefficients  $\mathring{C}_1[\beta]$  and  $\mathring{C}_2[\beta]$  which give minimum to  $\|\ell_1\|_{L_2^{(m)*}}$  and  $\|\ell_2\|_{L_2^{(m)*}}$ , respectively, i.e.,

$$\inf_{C_1[\beta]} \|\ell_1\|_{L_2^{(m)*}} \quad \text{and} \quad \inf_{C_2[\beta]} \|\ell_2\|_{L_2^{(m)*}}.$$

A minimization of the norm of the error functional with respect to coefficients, when nodes are fixed, is called as Sard's problem. The obtained formula is called the optimal quadrature formula in the sense of Sard. This problem was first investigated by A. Sard.

In this paper we give the solution of Sard's problem in the space  $L_2^{(m)}(0, 1)$  for quadrature formulas (1) and (2) when  $N \geq m - 1$ .

The main results of the present work are the following.

**Theorem 1.** *The coefficients of the optimal quadrature formula (1) in the space  $L_2^{(m)}(0, 1)$  have the following form*

$$\mathring{C}_1[\beta] = \begin{cases} h \left[ \frac{1}{\omega h} - K_\omega \frac{\sin \omega h}{2 - 2 \cos \omega h} + \sum_{k=1}^{m-1} \left( m_k \frac{q_k}{q_k - 1} + n_k \frac{q_k^N}{1 - q_k} \right) \right], & \beta = 0, \\ h \left[ K_\omega \sin(\omega h \beta) + \sum_{k=1}^{m-1} \left( m_k q_k^\beta + n_k q_k^{N-\beta} \right) \right], & \beta = 1, 2, \dots, N - 1, \\ h \left[ \frac{\cos \omega}{\omega h} - K_\omega \frac{\cos(\omega - \frac{\omega h}{2})}{2 \sin \frac{\omega h}{2}} + \sum_{k=1}^{m-1} \left( m_k \frac{q_k^N}{q_k - 1} + n_k \frac{q_k}{1 - q_k} \right) \right], & \beta = N. \end{cases}$$

where  $K_\omega$ ,  $m_k$  and  $n_k$  are knowns,  $q_k$  are the roots of the Euler-Frobenius polynomial  $E_{2m-2}(q)$ ,  $|q_k| < 1$ .

**Theorem 2.** *The coefficients of the optimal quadrature formula (2) in the space  $L_2^{(m)}(0, 1)$  have the following form*

$$\mathring{C}_2[\beta] = \begin{cases} h \left[ \frac{T_\omega}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} \left( a_k \frac{q_k}{q_k - 1} + b_k \frac{q_k^N}{1 - q_k} \right) \right], & \beta = 0, \\ h \left[ T_\omega \cos(\omega h \beta) + \sum_{k=1}^{m-1} \left( a_k q_k^\beta + b_k q_k^{N-\beta} \right) \right], & \beta = 1, 2, \dots, N - 1, \\ h \left[ \frac{\sin \omega}{\omega h} - T_\omega \frac{\sin(\omega - \frac{\omega h}{2})}{2 \sin \frac{\omega h}{2}} + \sum_{k=1}^{m-1} \left( a_k \frac{q_k^N}{q_k - 1} + b_k \frac{q_k}{1 - q_k} \right) \right], & \beta = N. \end{cases}$$

where  $T_\omega$ ,  $a_k$  and  $b_k$  are knowns,  $q_k$  are the roots of the Euler-Frobenius polynomial  $E_{2m-2}(q)$ ,  $|q_k| < 1$ .

## NUMERICAL TREATMENT OF NONLINEAR MIXED VOLTERRA-FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FRACTIONAL ORDER

<sup>1,2</sup>Zainidin Eshkuvatov, <sup>2</sup> Zaid Laadjal, <sup>3</sup> Shahrina Ismail

<sup>1</sup> Faculty of Ocean Engineering Technology and Informatics (FOETI), University Malaysia Terengganu (UMT), Kuala Terengganu, Malaysia,

<sup>2</sup> Independent Researcher, National University of Uzbekistan (NUUZ), Tashkent, Uzbekistan,

<sup>2</sup> Department of Mathematics and Computer Sciences, University of Khenchela, Algeria,  
e-mail: zaid.laadjal@yahoo.com

<sup>3</sup> Faculty of Science and Technology (FST), University Sains Islam Malaysia (USIM), Negeri Sembilan, Malaysia, e-mail: shahrinaismail@usim.edu.my

Corresponding author email: zainidin@umt.edu.my

In recent years, considerable interest in fractional differential equations has been stimulated due to their numerous applications in the areas of physics and engineering. Many important phenomena in electromagnetics, acoustics, viscoelasticity, electrochemistry and material science are well described by differential equations of fractional order (Podlubny, 1999). In certain circumstances, many exact solutions for linear fractional differential equation had been found, however in general, there exists no method that yields an exact solution for nonlinear fractional differential equations.

In this note, we consider the following nonlinear mixed Volterra-Fredholm integro-differential equation (VFIDEs) of fractional order

$${}^c D_{0+}^\alpha u(t) = \varphi(t) + \lambda \int_0^t \int_0^T k(x, s) F(u(s)) dx ds, \quad (1)$$

$$u^{(i)}(0) = b_i, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad n-1 < \alpha \leq n, \quad (2)$$

where  $t \in \Omega = [0; T]$ ,  $k : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , are known functions,  $F : C(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  is nonlinear function and  $u(x)$  is unknown function to be determined,  $b_i$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ) and  $\lambda$  are constants,  ${}^c D_{0+}^\alpha$  is the Caputo fractional derivative of order  $\alpha$ .

At first, Eq. (1)-(2) is written into operator form and applied standard homotopy analysis method (HAM) (Liao, 1992) to reduce Eq. (1) into sequence of known integral equation problems. Solving the latter equations step by step and using truncated Taylor series approximate solutions will be obtained. Description of the method and discretization of the problems together with the control convergence parameter are fully studied. In addition, one example is illustrated to show the accuracy and validity of the proposed approach. Numerical results reveals that proposed method is highly accurate and approaches to the exact solution very fast when number of iteration increases.

### References

1. Podlubny I., Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego, 1999.
2. Liao S. J., The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems, PhD thesis, Shanghai Jiao Tong University, 1992.

## NUMERICAL APPROACH FOR NONLINEAR SYSTEM OF FREDHOLM-VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS

<sup>1,2</sup>Eshkuvatov Z.K., <sup>3</sup>Mamatova H.X., <sup>4</sup>Ismail Sh., <sup>1</sup>Ilyani Abdullah, <sup>3</sup>Aloev R.D.

<sup>1</sup> Faculty of Ocean Engineering Technology and Informatics (FOETI), University Malaysia  
Terengganu (UMT), Kuala Terengganu, Malaysia

<sup>2</sup> Independent Researcher, National University of Uzbekistan (NUUZ), Tashkent, Uzbekistan

<sup>3</sup> Faculty of Mathematics, National University of Uzbekistan (NUUZ), 100174, NUUZ  
University street 4, Tashkent, Uzbekistan.

<sup>4</sup> Faculty of Science and Technology, University Sains Islam Malaysia (USIM), Negeri  
Sembilan, Malaysia

e-mail: zainidin@umt.edu.my

The homotopy analysis method (HAM) is proposed by Shijun Liao [1] in 1992 based on the fundamental concept in topology. The concept of the homotopy can be traced back to Jules Henri Poincare (1854- 1912), a French mathematician. Shortly speaking, a homotopy describes a kind of continuous variation or deformation in mathematics. For example, a circle can be continuously deformed into a square or an ellipse, the shape of a coffee cup can deform continuously into the shape of a doughnut. However, the shape of a coffee cup cannot be distorted continuously into the shape of a ball. Essentially, a homotopy defines a connection between different things in mathematics, which contain same characteristics in some aspects.

In this note, homotopy analysis method (HAM) is applied as a tool for solving the system of nonlinear Fredholm-Volterra integral equations. Generalized chain rule is implemented for differentiation of the nonlinear kernel functions with many variables and nonlinear problem is reduced into sequence of known problems. Proposed method is compared with homotopy perturbation method (HPM) given in Yusufoglu [2] and Biazar and Ghazyini [3]. Numerical results revealing that proposed method is very effective, simple and high accurate.

### References

1. *Liao S. J.* The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems, PhD thesis, Shanghai Jiao Tong University. 1992.
2. *Yusufoglu E.* A homotopy perturbation algorithm to solve a system of Fredholm-Volterra type integral equations, *Mathematical and Computer Modelling* 47, 1099-1107, 2008.
3. *Bakodah H.O.* Adomian Decomposition Method and Its Modification for Nonlinear Abel's Integral Equation, *International Journal of Mathematical Analysis*, 48, 2349-2358

## NEW ITERATIVE METHOD FOR SOLVING CHEMISTRY PROBLEM

<sup>1</sup>Indranil Ghosh, <sup>2</sup>M.S.H. Chowdhury, <sup>3</sup> Suazlan Bin Mt Aznam, <sup>4</sup> Shukranul  
Mawa

<sup>1, 2, 3</sup> Department of Science in Engineering, Faculty of Engineering, International Islamic  
University Malaysia, Jalan Gombak, 53100 Kuala Lumpur, Malaysia

e-mail: sazzadbd@iium.edu.my

<sup>4</sup> Faculty of Pharmacy, Universiti Kebangsaan Malaysia, Jalan Raja Muda Abdul Aziz, 50300,  
Kuala Lumpur, Malaysia

e-mail: sazzadbd@iium.edu.my

The chemical kinetics model or chemistry problem is extremely well known in nonlinear science. In this paper, we implement a semi analytical technique, the New Iterative Method (NIM), for solving chemical kinetics systems which appear in the form of nonlinear ordinary differential equations. To examine the reliability and effectiveness of the technique, first we



solved the selected system by the fourth-order Runge-Kutta method (RK4) and then by New Iterative Method (NIM). Numerical outcomes show good agreement of the proposed technique in terms of precision compare to conventional fourth-order Runge-Kutta method (RK4). It is notable that this procedure requires less computational exertion and provides fast approximate solutions without any transformation, linearization and discretization. Consequently, it can be predicted that the NIM is an efficient approach in finding approximate numerical solutions for a wide range of initial value problems.

## AN ENHANCE ANT COLONY OPTIMIZATION WITH GINI INDEX FOR PREDICTING TYPE 2 DIABETES

<sup>1</sup>Khairul Anwar Nur Hadirah, <sup>2</sup>Saian Rizauddin, <sup>3</sup>Abu Bakar Sumarni

<sup>1</sup> *Faculty of Computer and Mathematical Sciences, UiTM Arau Campus, 02600 Arau, Perlis, Malaysia,*

e-mail: hadirah1995@gmail.com

<sup>2</sup> *Faculty of Computer and Mathematical Sciences, UiTM Arau Campus, 02600 Arau, Perlis, Malaysia,*

e-mail: rizauddin@uitm.edu.my

<sup>3</sup> *Faculty of Computer and Mathematical Sciences, UiTM Shah Alam Campus, 40450 Shah Alam, Selangor, Malaysia,*

e-mail: sumarni@tmsk.uitm.edu.my

Diabetes is referred to a group of metabolic disorder that is caused by irregular amount of insulin produced in body. There are two types of diabetes in major clinical cases that is type 1 diabetes (T1D) and type 2 diabetes (T2D). Most of the cases reported is T2D and this is caused by a number of people that are unaware of their possibility in having T2D and lack of knowledge regarding its risks. It is important to perform an early diagnosis of T2D to ensure that people will become more aware and also reduce the chances of them getting high risk or complications such as stroke, blindness and damage to body and nerves. To do a classification task, a tool namely machine learning will be used. This tool is used by researcher to analyze a large amount of data to obtain a data pattern. This pattern then will be interpreted to get a knowledge that can help in decision making process. For the medical diagnosis, there are two things that is important which is accuracy and comprehensibility. Ant Colony Optimization (ACO) is a meta-heuristic method that is branch of swarm intelligence and it has been used to solve many complex problems and generate comprehensible result. Hence, this paper will introduce the new proposed algorithm that will hybrid between ACO with Gini Index. Gini Index is a heuristic measure that is widely used in Classification and Regression Trees (CART). The proposed algorithm was execute using the BlueJ application that is written in Java language. The aim of this paper is to investigate the performance of the new proposed algorithm in terms of accuracy and computation time. Experimental results on Pima Indian Diabetes data set show that the proposed algorithm can improve the predictive accuracy and computation time compared to the original ACO. In addition, it also leads to a smaller number of rules and terms.

## EFFECTIVE FINITE-DIFFERENCE METHOD FOR ELASTOPLASTIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS

<sup>1</sup>Abduvali Khaldjigitov, <sup>1</sup>Umidjon Djumayozov, <sup>2</sup>Sherzod Ibodullayev

<sup>1</sup> Samarkand branch of Tashkent University of Information Technology Shokhrukh Mirzo St.,  
47A, Samarkand, 140100, Uzbekistan,

e-mail: akhald@mail.ru, djumayozov@bk.ru

<sup>2</sup> National University of Uzbekistan, Faculty of mathematics, Tashkent, 100114, Uzbekistan.  
e-mail: sherzoduzmu@inbox.ru

On the basis of deformation theory of plasticity and the strain space plasticity theories the boundary value problems are formulated. Discrete analogies of the boundary-value problems are constructed by the finite-difference method. By resolving the finite-difference equations with respect to central and boundary nodal displacements, recurrence relations, separately for internal and boundary points are obtained. This relations allow to find the desired quantities using the iterative method under zero initial conditions. Note that the boundary value problem based on strain space plasticity is formulated with respect to the increments of the displacement. In this case, the external load is applied gradually with small increments, and the total solution is found, in accordance with these as a sum of displacement increments corresponding to every increments. As an example, the problem of compressing a plastic rod with constant force has been solved; a comparison of the numerical results of the plastic boundary value problems formulated by the deformation theory and the strain space theories obtained by the iterative and the elimination methods show that they are very close thereby ensuring the validity of the proposed iterative method based on finite-difference equations.

### References

1. *Khaldjigitov A.A., Khudazarov R.S., Sagdullaeva D.A.* The theory of plasticity and thermoplasticity for anisotropic materials. T.: Fan va texnologiya press, 2015, 320 p.
2. *Ilyushin A.A.* Plasticity. M.: Gostekhizdat, 1948, 376 p.
3. *Samaraskii A., Nikolaev E.* Numerical methods of grid equation, Birkhauser Verlag, Berlin, 1989.
4. *Zenkevich O.* Finite Element Method in Engineering. M.: World, 1976.
5. *Pobedrya B.E.* Numerical methods of elasticity and plasticity. M.: MSU, 1995, 366 p. (in Russ).
6. *Naghdi, P. M. and Trapp, J. A.* The significance of formulating plasticity theory with reference to loading surface in strain space, Int. J. Eng. Sci. 1975, 785-797 p.
7. *Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C.* Boundary element techniques. Theory and applications in engineerings. Springer- Verlag 1984.
8. *Khaldjigitov A.A., Qalandarov A., Nik M.A. Asri Long., Eshqvatov Z.* Numerical solution of 1D and 2D thermoelastic coupled problems. International journal of modern physics. Vol. 9, 2012, 503-510 p.
9. *Khaldjigitov A.A., Kalandarov A.A.* A new approach to the numerical solution of problems of the theory of elasticity. Republican conference on the topic Actual problems of mathematical modeling, algorithmization and programming - Tashkent, September 17-18, 2018 - S. 546-550 p.
10. *Adambaev U.E., Kalandarov A.A., Kalandarov A.* Numerical solution of the coupled problem of thermoelasticity for anisotropic bodies // Bulletin of NUUZ, - Tashkent, 2017.- 2 / 1. -FROM. 48-53 p.
11. *Nowaski V.* Theory of elasticity. M.: World, 1975, 864 p
12. *Kolarov D., Baltov A., Boncheva N.* Mechanics of plastic media. M: World, 1979, 302 p.
13. *Vasizu K.* Variational methods in the theory of elasticity and plasticity. M.: World, 1987, 542 p.
14. *Bezukhov N.I., Luzhin O.V.* Application of the methods of the theory of elasticity and plasticity to the solution of engineering problems. M.: High scholl, 1974, 200p.
15. *Kalitkin N.N.* Numerical methods. M.: Science, 1978.
16. *Royzen L.I.* An approximate method for studying the problems of thermal conductivity of multilayer bodies. - Thermophysics of high temperatures, t.19, No. 4, 1981. P. 821-831 p.

17. *Rekach V.G.* Guide to solving problems of the applied theory of elasticity. M., 1973, 384 p.

## APPLICATION OF STABLE DIFFERENCE SPLITTING SCHEMES FOR SOLVING A MIXED PROBLEM FOR HYPERBOLIC SYSTEMS OF EQUATIONS

**Khudoyberganov M.U., Nematova D.E., Juraev Sh.B.**

*National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan*

e-mail:mirzoali@mail.ru, nematova@mail.ru, shaxboz0594@mail.ru

### 1. Differential setting of the problem

In the domain  $G = \{(t, x, y) : 0 < t \leq T, 0 < x < l, -\infty < y < +\infty\}$ , it is considered a symmetric hyperbolic system [1]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \mathbf{M} \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (1.1)$$

with boundary conditions for  $x = 0$ :

$$\mathbf{v}^{\mathbf{I}} = \mathbf{s} \mathbf{v}^{\mathbf{II}}, \quad (1.2)$$

for  $x = l$ :

$$\mathbf{v}^{\mathbf{II}} = \mathbf{r} \mathbf{v}^{\mathbf{I}}, \quad (1.3)$$

and with initial data at  $t = 0$

$$v_i(0, x, y) = \varphi_i(x, y), \quad i = 1, \dots, n, \quad 0 \leq x \leq l, \quad -\infty \leq y \leq +\infty \quad (1.4)$$

where  $\mathbf{v}^{\mathbf{I}} = (v_1, v_2, \dots, v_m)^T$ ,  $\mathbf{v}^{\mathbf{II}} = (v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_n)^T$ ,  $\mathbf{K}$  is a diagonal matrix,  $\mathbf{C}$  is a positive definite matrix,  $\mathbf{M}$  is a square real matrix of order  $n$ ,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{\mathbf{I}} \\ \mathbf{v}^{\mathbf{II}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} K^+ & 0 \\ 0 & -K^- \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}^+ = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & k_m \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}^- = \begin{pmatrix} k_{m+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_{m+2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & k_n \end{pmatrix}, \quad k_i > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

$\mathbf{s}$  is a matrix of order  $n - m \times m$ ,  $\mathbf{r}$  is a matrix of order  $m \times n - m$ . For  $|y| > \frac{1}{2}Y$  the initial functions are assumed to be zero.

Let the initial data  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)^T \in W_2^1((0, l), (-\infty, +\infty), \mathbb{R}^n)$  satisfy the compatibility condition:

$$\begin{cases} \varphi^{\mathbf{I}} = \mathbf{s} \varphi^{\mathbf{II}}, & x = 0, \quad t = 0, \\ \varphi^{\mathbf{II}} = \mathbf{r} \varphi^{\mathbf{I}}, & x = l, \quad t = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Here  $W_2^1((0, l), (-\infty, +\infty), \mathbb{R}^n)$  is the Sobolev space.

### 2. The difference scheme

We construct in  $G$  a difference grid  $G_h = \{(t^\kappa, x_j, y_q) : 0 \leq t^\kappa \leq T, 0 \leq x_j \leq l, -\infty < y_q < +\infty\}$  where  $t^\kappa = \kappa \Delta t$ ,  $\kappa = 0, \dots, N$ ;  $N \Delta t = T$ ,

$$\begin{aligned} x_j &= \left(j + \frac{1}{2}\right) \Delta x; \quad J \Delta x = l; \quad j = 0, \dots, J - 1; \\ y_q &= \left(q + \frac{1}{2}\right) \Delta y; \quad q = -\infty, \dots, +\infty; \end{aligned}$$

Denote the values of the numerical solution at the nodes by

$$\mathbf{v}_{jq}^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{y_{q-\frac{1}{2}}}^{y_{q+\frac{1}{2}}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \mathbf{v}(t^n, x, y) dx dy, \quad j = 0, \dots, J-1.$$

For the numerical solution of the mixed problem (1.1)-(1.4), we suggest a difference splitting scheme [1]:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{w}^I)_{jq}^\kappa \\ (\mathbf{w}^{II})_{jq}^\kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{v}^I)_{jq}^\kappa \\ (\mathbf{v}^{II})_{jq}^\kappa \end{bmatrix} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \begin{bmatrix} \mathbf{K}^+ & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{v}^I)_{jq}^\kappa - (\mathbf{v}^I)_{j-1,q}^\kappa \\ (\mathbf{v}^{II})_{jq}^\kappa - (\mathbf{v}^{II})_{j+1,q}^\kappa \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

$j = 0, \dots, J-1; \kappa = 0, \dots, N-1; q = -\infty, \dots, +\infty;$

$$\mathbf{u}_{jq}^\kappa = \mathbf{w}_{jq}^\kappa - \frac{\Delta t}{\Delta y} \mathbf{C} [\mathbf{w}_{jq}^\kappa - \mathbf{w}_{jq-1}^\kappa], \quad (2.2)$$

$j = 0, \dots, J-1; \kappa = 0, \dots, N-1; q = -\infty, \dots, +\infty;$

$$\mathbf{v}_{jq}^{\kappa+1} = \mathbf{u}_{jq}^\kappa - \Delta t \mathbf{M} \mathbf{u}_{jq}^\kappa, \quad j = 0, \dots, J-1; \kappa = 0, \dots, N-1. \quad (2.3)$$

The initial conditions (1.4) are approximated in this way:

$$\mathbf{v}_j^0 = \frac{1}{\Delta x} \frac{1}{\Delta y} \int_{y_{q-\frac{1}{2}}}^{y_{q+\frac{1}{2}}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \Phi(x, y) dx dy, \quad j = 0, \dots, J-1; q = -\infty, \dots, +\infty \quad (2.4)$$

The boundary conditions are approximated as follows

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{v}^I)_{-1,q}^{\kappa+1} \\ (\mathbf{v}^{II})_{Jq}^{\kappa+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s} \\ \mathbf{r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{v}^I)_{J-1,q}^{\kappa+1} \\ (\mathbf{v}^{II})_{0q}^{\kappa+1} \end{pmatrix}, \quad \kappa = 0, \dots, N-1; q = -\infty, \dots, +\infty \quad (2.5)$$

Suppose that the CFL condition

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max |k_i| \leq 1, \quad \frac{\Delta t}{\Delta y} \max |\lambda_i(\mathbf{C})| \leq 1$$

is valid. Here  $\lambda_i(\mathbf{C})$  are eigenvalues of the matrix  $\mathbf{C}$ .

In [1] the question of exponential stability is studied solution of the difference problem (2.1)-(2.5).

**Theorem.** Let  $T > 0$  and the discrete Lyapunov function be defined by (2.6). If the CFL condition is valid,  $(\Delta t/\Delta x) \max |k_i| \leq 1$ ,  $(\Delta t/\Delta y) \max |\lambda_i(\mathbf{C})| \leq 1$ , and there exist real numbers  $\nu > 0$  and  $\mu_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  such that  $0 < \alpha(1 - e^{-\nu\Delta x}) < 1$  where  $\alpha = \min_i |k_i|$ ,  $\mathbf{M}^T \mu_j + \mu_j \mathbf{M} - \Delta t \mathbf{M}^T \mu_j \mathbf{M}$ ,  $j = 0, \dots, J-1$  are non-negative definite matrices and

$$\begin{bmatrix} \mu^+ e^{-\nu x_j} \mathbf{K}^+ & 0 \\ 0 & \mu^- e^{\nu x_{j-1}} \mathbf{K}^- \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{r} \\ \mathbf{s} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mu^+ e^{-\nu x_0} \mathbf{K}^+ & 0 \\ 0 & \mu^- e^{\nu x_{J-1}} \mathbf{K}^- \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s} \\ \mathbf{r} & 0 \end{pmatrix}$$

is a positive definite matrix, then the numerical solution  $\mathbf{v}_{jq}^\kappa$  of the difference boundary value problem (2.1)-(2.5) converges to the stationary solution  $\mathbf{v}_{jq}^* = 0$  for the norm  $\mathbb{L}^2$ .

### 3. Computational experiment

In this section, we present the results of a computational experiment on model problems of stable difference splitting schemes for solving mixed problems for hyperbolic systems of equations.

## References

1. *Aloev R.D., Khudoyberganov M.U., Nematova D.E.* On stability of the difference splitting scheme for hyperbolic systems, *Uzbek mathematical journal*. vol 2, 2018, pp.4-16.
2. *Bastin, G. and Coron, J.-M.* Stability and Boundary Stabilization of 1-D Hyperbolic Systems. *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*, Vol. 88. Birkhäuser Basel. 2016.
3. *Blokhin, A.M., Aloev, R.D.* Energy integrals and their applications to the study of the stability of the difference schemes. *Novosibirsk State University Press*, 1993, 224 p.
4. *Aloev, R.D., Eshkuvatov, Z.K., Davlatov, Sh.O., Nik Long, N.M.A.* Sufficient condition of stability of finite element method for symmetric t-hyperbolic systems with constant coefficients. *Computers and Mathematics with Applications*, 68, 2014, 1194-1204.
5. *Aloev R.D., A.M. Blokhin, M.U. Hudayberganov* One Class of Stable Difference Schemes for Hyperbolic System. *American Journal of Numerical Analysis*. 2(3), 2014, 85-89.
6. *Aloev R.D., Davlatov Sh.O., Eshkuvatov Z. K., Nik Long N.M.A.* Uniqueness solution of the finite elements scheme for symmetric hyperbolic systems with variable coefficients. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences (MJMS)*, 10(S), 2016, 49-60.

## THE WHITE RAT OF NUMERICAL REPRODUCIBILITY

<sup>1,2</sup> Mascagni Michael

<sup>1</sup> *Departments of Computer Science, Mathematics, and Scientific Computing, Florida State University, Tallahassee, FL 32306-4530 USA,*  
e-mail: mascagni@fsu.edu

<sup>2</sup> *Applied and Computational Mathematics Division, National Institute of Standards and Technology, 100 Bureau Drive, Gaithersburg, MD 20899-8910 USA,*  
e-mail: mascagni@nist.gov

We explore an application from the author's work in neuroscience. A code used to investigate neural development modeled 100 neurons with all-to-all excitatory connectivity. We used a simple ordinary differential equation system to model each neuron, and this model was used to produce a paper published in the *Journal of Neurophysiology*. Later a colleague used our code to continue this work, and found he could not reproduce our results. This lead us to thoroughly investigate this code and we discovered that it offered many different ways to thwart reproducibility.

Numerical reproducibility is considered a task that directly follows from the determinism in computations. However, reproducibility has become an intense concern and an issue for research. In fact, the author developed an international workshop of numerical reproducibility that is now a regular offering at the annual Supercomputing XX conference. We will show how this particular code provides a lack of reproducibility from the following sources:

1. The non-associativity of floating-point operations in two ways
2. Differences in library mathematical functions whose reliability and correctness we take for granted

This code's sensitivity makes it a very powerful tool to explore many different manifestations of numerical reproducibility. However, this code is by no means exceptional, as in neuroscience these types of models are used extensively to gain insights on the functioning of the nervous system. In addition, these types of models are widely used in many other fields of study.

This is joint work with Prof. Wilfredo Blanco in CS at Universidade do Estado do Rio Grande do Norte in Brazil, and Woohyeong Kim, who is currently my doctoral student.

## References

1. Blanco W., Lopes P. H., Souza A. A. de S. and Mascagni M. "Non-replicability circumstances in a neural network model with Hodgkin-Huxley-type neurons," *Journal of Computational Neuroscience*, **48(3)**: 1–7, 2020.
2. Mascagni M. "Three Numerical Reproducibility Issues That Can Be Explained as Round-Off Error," *Lecture Notes in Computer Science*, **11887**: 452–462, 2019.

## CONSTRAINED FOR $G^1$ CUBIC TRIGONOMETRIC SPLINE CURVE INTERPOLATION

<sup>1</sup>Nur Azliana Azlin Munir, <sup>2</sup>Normi Abdul Hadi, <sup>3</sup>Mohd Agos Salim Nasir

<sup>1</sup> Faculty of Computer and Mathematical Sciences, Universiti Teknologi MARA, 40170 Shah Alam, Selangor, Malaysia,

e-mail: nurazlianaazlin91@gmail.com

<sup>2,3</sup> Faculty of Computer and Mathematical Sciences, Universiti Teknologi MARA, 40170 Shah Alam, Selangor, Malaysia,

e-mail: normi, masn@fskm.uitm.edu.my

In this paper,  $G^1$  cubic trigonometric spline function with three parameters that has been developed in [1] is used to construct a constrained curve which interpolates data within line constraints. The data is lying above or below an arbitrary straight line or between two straight lines.

The  $G^1$  cubic trigonometric spline curve with two shape parameters is given as,

$$F(u) = \sum_{i=0}^2 f_i(u)V_i, \quad (1)$$

where  $V_i$  are the control points and  $f_i(u)$  are the basis functions as follows

$$\begin{aligned} f_0(u) &= (1 - \sin(u))^2(1 - \beta_1(\sin(u))) \\ f_1(u) &= 1 - f_0(u) - f_2(u) \\ f_2(u) &= (1 - \cos(u))^2(1 - \beta_2(\cos(u))) \end{aligned} \quad (2)$$

with  $\beta_1$  and  $\beta_2$  as the shape parameters. Another shape parameter is  $\gamma_i$  which appears when joining two curves  $F_i(u)$  and  $F_{i+1}(u)$ .

There are three cases of line constraints considered in this paper,

**Case 1.** The data lies above any arbitrary line  $L_i$  where  $\sum_{i=0}^2 f_i(u)V_i - L_i > 0$

**Case 2.** The data lies below any arbitrary line  $L_i$  where  $L_i - \sum_{i=0}^2 f_i(u)V_i < 0$

**Case 3.** The data lies between two arbitrary lines  $L_i^1$  and  $L_i^2$  where  $L_i^1 < \sum_{i=0}^2 f_i(u)V_i < L_i^2$

The effect of each shape parameter in satisfying the line constraints is analyzed. In each analysis, constrained data interpolation scheme is implemented on one parameter, while the remaining two parameters are set as free. Numerical examples are given to illustrate the produced constrained curve. The results show that the developed trigonometric spline curve can satisfy all three cases of line constraints while maintaining the  $G^1$  curve continuity.

## References

1. *Munir N.A.A.A., Yahya F. and Hadi N.A.* Cubic Trigonometric Spline for Preserving Positive Data, *ASM Sci. Journal*, 6, 2019, 67-73.

## PARALLEL ALGORITHMS AND QUASI RANDOM SEQUENCES FOR CALCULATION MULTI DIMENSIONAL INTEGRALS

<sup>1</sup>Rasulov Abdujabar, <sup>1</sup>Baqoev Matyokub, <sup>1</sup>Rahmatov Muhamadrasul

<sup>1</sup> *University of World Economy and Diplomacy, Mustaqillik avenue 54, Tashkent, Uzbekistan,*  
e-mail: arasulov@uwed.uz

Keywords: Quasirandom sequences; Monte Carlo methods; complexity and efficiency of parallel algorithms, multi dimensional integrals.

In this paper we applied parallel algorithms and pseudorandom sequences for calculation multi dimensional integrals. With the development of high-speed multi-processor computers for parallel calculations, nowadays Monte Carlo methods have been widely used in calculation multi dimensional integrals. We consider quasi random Halton , Sobol and Korobov sequences [1] and standard random number generator for calculation multi variable integrals, analyze their discrepancy and complexity of parallel algorithms. Unlike pseudo-random numbers, quasi-random numbers (uniform sequences with small deviations) are tuned to a certain dimension integrals. From a statistical point of view, quasi-random numbers are strongly correlated and should be used in statistical modeling problems with caution.

However, sequences of quasi-random numbers have following useful properties (advantages) [2]:

- Allows to calculate integrals over a unit n-dimensional hypercube for a fixed n with an error of the order  $(\ln N)^n/N$  for a wide class of functions, where N is sample size.
- Have improved properties compared to pseudorandom numbers uniform distribution, which can be very important for general methods global optimization.
- Since quasi-random sequences have some properties that are similar with the properties of random numbers (analogue of the law of large numbers), you can try apply to them formally statistical procedures for estimating the error [3], that research is planned in this direction in the near future.

Analysis of the numerical results of constructed parallel algorithms shows [4] that:

- with a large proportion of the sequential part of the algorithm, an increase in the number of processors does not lead to a significant acceleration of the task execution.
- there is a certain critical value of the number of processors p, after which increasing the number of processors does not lead to an increase in the acceleration factor. (In our case p= 4, for the standard quad-core computer).
- the acceleration factor depends not only on the number of processors p, but also on the sample size N.

The complexities of calculation parallel algorithms were compared in concrete problems and were given some recommendations for further applications.

## References

1. *Sobol I.M.* Computational methods of Monte Carlo. Nauka, Moscow (in Russian). 1973, p.312
2. *Rasulov A.S., Bakoev M.T.* Modeling of pseudorandom sequences and their application to the calculation of multidimensional integrals, *Problems of computational and applied mathematics*, 2018, No 4, 16, p. 61-66 (in Russian)

3. *Bakoev M.T.* Numerical simulation of solutions of diffusion equations in problems of finance and management, UWED press, 2020, p.224, ISBN 9789943-340-62-6. (in Russian, Monograph )
4. *Voevodin V., V., Voevodin VL.V.* Parallel computation, Sankt Petersburg, 2002, p. 608 (in Russian)

## MONTE CARLO METHODS FOR PRICING WEATHER DERIVATIVES

<sup>1</sup>Rasulov Abdujabar, <sup>2</sup>Raimova Gulnora

<sup>1</sup>*University of World Economy and Diplomacy,  
Mustaqillik avenue 54, Tashkent, Uzbekistan, 100007  
e-mail:asrasulov@gmail.com*

In recent years the complexity of numerical computation in financial weather derivative theory and practice has increased enormously, putting more demands on computational speed and efficiency. Numerical methods, particularly Monte Carlo method are used for a variety of purposes. In modern finance, the prices of the basic securities and the underlying state variables are often modelled as continuous-time stochastic processes [1,2]. A derivative security, such as a call option, is a security whose payoff depends on one or more of the basic securities[3]. Using the assumption of no arbitrage, financial economists have shown that the price of a generic derivative security can be expressed as the expected value of its discounted payouts. This expectation is taken with respect to a transformation of the original probability measure known as the equivalent martingale measure or the risk-neutral measure. The same situation exist in the area of pricing weather derivatives [4].

On the other hand the Monte Carlo method lends itself naturally to the evaluation of security prices represented as expectations. Generically, the approach consists of the following steps:

- Simulate sample paths of the underlying state variables (e.g., underlying asset prices and interest rates) over the relevant time horizon. Stimulate these according to the risk-neutral measure. In case of weather derivatives the simulation of weather process.
- Evaluate the discounted cash flows of a security (weather options) on each sample path, as determined by the structure of the security in question.
- Average the discounted cash flows over sample paths. In effect, this method computes a multi-dimensional integral as the expected value of the discounted payouts over the space of sample paths. The increase in the complexity of derivative securities in recent years has led to a need to evaluate high-dimensional integrals. Monte Carlo becomes increasingly attractive compared to other methods of numerical integration as the dimension of the problem increases.

Different variance reduction techniques have been developed to increase precision of numerical calculation [5]. In theory of Monte Carlo methods existed following well known classical variance reduction techniques. Control variate approach, the antithetic variate method, moment matching, importance sampling, and others have been introduced in finance applications. Another technique for speeding up the valuation of multi-dimensional integrals uses deterministic sequences rather than random sequences. These deterministic sequences are chosen to be more evenly dispersed throughout the region of integration than random sequences. If we use these sequences to estimate multi-dimensional integrals we can often improve the convergence rate. Deterministic sequences with this property are known as low-discrepancy sequences or quasi-random sequences [5]. In the work we will describe more detailed theoretical foundation of each variance reduction techniques with connection of weather derivatives which applied for the calculation weather options and presented the results of numerical experiments.



## References

1. *Alaton P. et al.* Alaton On modeling and pricing weather derivatives, Applied mathematical finance, vol.9, issue 1, 2002.
2. *Glaserman P.*, Monte Carlo Methods in Financial Engineering, Springer Series: Stochastic Modelling and Applied Probability, Vol. 53 2003.
3. *Rasulov A., Abdurakhmonov L., Gemma M.*, Monte Carlo solutions of European Multi-Asset Rainbow Options, Methodological issues of the analysis and forecasting of the world economy development, Tashkent, Tokyo, 2014
4. *Richard T.J. et al.* Pricing weather derivatives, Amer., J. of Agricultural Economy, 86(4), 2004.
5. *Raimova G.M.*, Application variance reduction techniques of Monte-Carlo methods for the pricing weather derivatives// Uzbek Math.Journal, no1, 2011, p.109-118.

## EXTENSION OF THE EULER-MACLAURIN QUADRATURE FORMULA IN THE SPACE $W_2^{(2k, 2k-1)}$

**Rasulov Rashidjon**

*V.I.Romanovskiy Institute of mathematics Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan*

e-mail: r.rasulov1990@mail.ru

In the present work we consider a problem of construction of an optimal quadrature formula with derivatives in the sense of Sard [2]. There are several methods for constructing the optimal quadrature formulas in the sense of Sard such as the spline method, the  $\phi$ -function method and the Sobolev method [1]. It should be noted that the Sobolev method is based on using a discrete analogue of a linear differential operator. In different spaces based on these methods, the Sard problem was studied by many authors.

Among these formulas the Euler-Maclaurin type quadrature formulas are very important for numerical integration of differentiable functions and they are widely used in applications. In different spaces the optimality of the Euler-Maclaurin type quadrature and cubature formulas were studied.

The Euler-Maclaurin quadrature formulas can be viewed as well as an extension of the trapezoidal rule by the inclusion of correction terms. It should be noted that in applications and in solution of practical problems numerical integration formulas are interesting for functions with small smoothness.

The present paper is also devoted to extension of the trapezoidal rule and to construction of the optimal quadrature formulas in the sense of Sard.

We consider the following quadrature formula

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_0[\beta] \varphi(h\beta) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h^{2j} B_{2j}}{(2j)!} (\varphi^{(2j-1)}(0) - \varphi^{(2j-1)}(1)) + \sum_{\beta=0}^N C[\beta] \varphi^{(2k-1)}(h\beta) \quad (1)$$

here  $[\beta] = (h\beta)$ ,  $h = 1/N$ ,  $N$  is a natural number,  $B_{2j}$  is Bernoulli number,  $C_0[\beta] = h/2$ ,  $\beta = 0, N$ ,  $C_0[\beta] = h$ ,  $\beta = 1, 2, 3, \dots, N-1$ , and  $C[\beta]$  are coefficients of the formula (1).  $\varphi$  is an element of the space  $W_2^{(2k, 2k-1)}(0, 1)$ , where by  $W_2^{(2k, 2k-1)}(0, 1)$  we denote the class of all functions  $\varphi$  defined on  $[0, 1]$  which possess an absolutely continuous  $2k - 1$ -th derivative and whose  $2k$ -th derivative is in  $L_2(0, 1)$ .

The error of the formula (1) is the difference

$$(\ell, \varphi) = \int_0^1 \varphi(x) dx - \sum_{\beta=0}^N C_0[\beta] \varphi(h\beta) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h^{2j} B_{2j}}{(2j)!} (\varphi^{(2j-1)}(0) - \varphi^{(2j-1)}(1)) - \sum_{\beta=0}^N C[\beta] \varphi^{(2k-1)}(h\beta)$$

and it defines a functional

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N C_0[\beta] \delta(x-h\beta) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h^{2j} B_{2j}}{(2j)!} (\delta^{(2j-1)}(x-0) - \delta^{(2j-1)}(x-1)) + \sum_{\beta=0}^N C[\beta] \delta^{(2k-1)}(x-h\beta) \quad (2)$$

which is called the error functional of the quadrature formula (1), where  $\varepsilon_{[0,1]}(x)$  is the indicator the interval  $[0,1]$ ,  $\delta(x)$  is the Dirac delta-function. The error of the formula (1) is estimated by the norm of the error functional (2) in the conjugate space  $W_2^{(2k,2k-1)*}(0,1)$ :

$$\left\| \ell | W_2^{(2k,2k-1)*}(0,1) \right\| = \sup_{\|\varphi | W_2^{(2k,2k-1)}(0,1)\|=1} |(\ell, \varphi)|.$$

Furthermore, the norm of the error functional  $\ell$  depends on the coefficients  $C[\beta]$ . Finding the coefficients when the node points are fixed is a linear problem. Therefore we minimize the norm of the functional  $\ell$  by coefficients, i.e. we find the following quantity

$$\left\| \overset{\circ}{\ell} | W_2^{(2k,2k-1)*}(0,1) \right\| = \inf_{C[\beta]} \left\| \ell | W_2^{(2k,2k-1)*}(0,1) \right\| \quad (3)$$

If  $\left\| \overset{\circ}{\ell} | W_2^{(2k,2k-1)*}(0,1) \right\|$  is found then the functional is said to be correspond to the optimal quadrature formula (1) in  $W_2^{(2k,2k-1)}(0,1)$  and the corresponding coefficients are called optimal.

Thus in order to construct optimal quadrature formulas of the form (1) we get the following problems.

**Problem 1.** Find the norm of the error functional  $\ell$  in the space  $W_2^{(2k,2k-1)*}(0,1)$ .

**Problem 2.** Find the coefficients  $C[\beta]$  which satisfy the equality (3).

Here we solve Problems 1 and 2. The main results of the paper is the following.

**Theorem 1.** The coefficients of optimal quadrature formulas in the sense of Sard of the form (1) in the space  $W_2^{(2k,2k-1)}(0,1)$  have the following form

$$\begin{aligned} C[0] &= \frac{h(e^h+1)}{2(e^h-1)} - 1 - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h^{2j} B_{2j}}{(2j)!}, \\ C[\beta] &= 0, \quad \beta = \overline{1, N-1}, \\ C[N] &= -\frac{h(e^h+1)}{2(e^h-1)} + 1 + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h^{2j} B_{2j}}{(2j)!}. \end{aligned} \quad (1)$$

In particular, from Theorem 1 when  $k = 1$  we get the result of the work [3].

## References

1. Sobolev S.L. The coefficients of optimal quadrature formulas, Selected Works of S.L. Sobolev, Springer, 2006, 561–566.
2. Sard A. Best approximate integration formulas; best approximation formulas, Amer. J. Math, 1949, 71, 80–91.
3. Hayotov A.R., Rasulov R.G. The order of convergence of an optimal quadrature formula with derivative in the space  $W_2^{(2,1)}$ , Filomat (to appear), arXiv:1908.00450.

## COMPARISON OF SOME NUMERICAL METHODS SOLUTIONS OF WAVE EQUATIONS WITH STRONG DISPERSION

<sup>1</sup>Utebaev D., <sup>2</sup>Utebaev B.D.

<sup>1</sup> *Karakalpak State University named after Berdakh, Nukus, Uzbekistan,*  
e-mail: dutebaev\_56@mail.ru

<sup>2</sup> *Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus,*  
e-mail: bakhadir1992@gmail.com

Internal vibrations of a fluid with stable stratification due to gravity are known as internal waves. When studying the movement of internal waves propagating in a stratified liquid, at rest or in uniform rotation, partial differential equations arise as a mathematical model. They are similar to the classical wave equation, but contain additional terms that lead to a strong dispersion of these waves. Such problems arise in geophysics, oceanology, atmospheric physics, etc. [1].

The paper considers the following problem for a wave equation with strong dispersion in the general formulation [2]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \lambda \frac{\partial^2}{\partial t^2}(Lu) = Lu + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T = \{x \in \Omega, t \in (0, T]\}, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (2)$$

$$u(x, t) = 0, \quad x \in PY = \partial\Omega, \quad t \in (0, T], \quad (3)$$

where  $Lu = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}$  - Laplace operator,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ ,  $\bar{\Omega}$  - there is  $p$  - dimensional finite region with boundary  $\partial\Omega$ ,  $\Omega = \bar{\Omega}/\partial\Omega$ . Here  $\lambda > 0$  - is a numeric parameter, characterizes the variance.

Approximation of the problem (1)-(3) at the first stage is carried out by the method of straight lines, i.e. only spatial variables are approximated. On the basis of the finite difference method, schemes of the second and fourth orders of accuracy for spatial and temporal variables are constructed for sufficiently smooth solutions of the original problem. In addition, based on the finite element method, third-order schemes of accuracy in space are constructed using a cubic Hermite spline and a B-spline. Then the resulting system of ordinary differential equations is first approximated again using the finite difference method, and then using the finite element method. At the same time, a three-parameter scheme of the fourth order of accuracy in time is constructed using a cubic Hermite spline. The corresponding stability conditions are obtained and the convergence theorems of all considered schemes are proved. Various combinations of the scheme the finite difference method and the finite element method are considered. Questions of convergence to the generalized solution of the initial problem are considered. A priori estimates are obtained in classes of generalized solutions. The corresponding theorems on the convergence of solutions of difference schemes to the generalized solution of the original problem are proved.

Thus, a method of a high degree of accuracy for solving the problem (1)-(3) has been developed and studied. It is based on: a) a finite-difference approximation in space and time; b) a finite-element approximation in space and time using third-degree polynomials. An algorithm for implementing the method was developed, it was tested on an exact solution in the form of a Fourier series and compared with finite-difference methods of different accuracy.

### References

1. *H. Ikezi*. Experiments on solitons in plasmas, in *Solitons in Action*, Redstone Arsenal, Ala., 1977, pp. 153-172.

2. *M.V. Kuzeleu, A.A. Rukhadze. Methods of Waves Theory in Dispersive Media, World Publisher, Zhurikh, 2009.*

## ON A VOLTERRA TYPE FRACTIONAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

### WITH DEGENERATE KERNEL

**Yuldashev Tursun**

*National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,*

*100174, Universitet street, 4, Tashkent, Uzbekistan*

*e-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com,*

One of the important sections of the theory of integral and differential equations is the theory of integro-differential equations, to study which are devoted a large number of research works. Here we note that the presence of an integral term in a differential equations of the first and second orders has an important role in the theory of dynamical systems with automatic control [1, 2]. Different boundary value and inverse problems for Fredholm type integro-differential equations with degenerate kernels are studied in [3–6].

Fractional calculus plays an important role for the mathematical modeling in many scientific and engineering disciplines (see more detailed information in [7]). In [8] it is considered some basic problems in continuum and statistical mechanics. In [9] is studied the mathematical problems of Ebola epidemic model. In [10, 11] are studied the fractional model for the dynamics of tuberculosis infection and novel coronavirus (nCoV-2019), respectively.

We consider the fractional Volterra type integro-differential equation on a segment  $[0; T]$ :

$$D^{\alpha, \gamma} u(t) + \omega^2 u(t) = \lambda \int_0^t K(t, s) u(s) ds + f(t, u(t))$$

under initial value condition

$$\lim_{t \rightarrow +0} J_{0+}^{1-\gamma} u(t) = u_0,$$

where  $K(t, s) \in C[0; T]^2$ ,  $K(t, s) = a(t) \cdot b(s) > 0$ ,  $f(t, u) \in C(\Omega)$ ,  $0 < \omega$ ,  $\lambda$  are real parameters,  $u_0 = \text{const}$ ,  $\Omega \equiv [0; T] \times \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R} \equiv (-\infty; \infty)$ . Here

$$D^{\alpha, \gamma} = J_{0+}^{\gamma-\alpha} \frac{d}{dt} J_{0+}^{1-\gamma}, \quad 0 < \alpha \leq \gamma \leq 1$$

is Hilfer operator and  $J_{0+}^{\nu}$  is the Riemann-Liouville integral operator and defined by the formula

$$J_{0+}^{\nu} \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\nu}}, \quad \nu > 0.$$

By the aid of uncomplicated integral transformation based on degenerate kernel and Dirichlet formula, this initial value problem is reduced to the nonlinear Volterra type fractional integral equation.

$$\begin{aligned} u(t) = \mathbf{I}(t; u) \equiv & G(t) + \lambda \int_0^t K(t, s) \int_0^s \mathbf{R}(s, \theta; \lambda) \int_0^\theta H_1(\theta, \xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi d\theta ds + \\ & + \lambda \int_0^t K(t, s) \int_0^s H_1(s, \theta) f(\theta, u(\theta)) d\theta ds + \int_0^t H_0(t, s) f(s, u(s)) ds, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
 G(t) &= u_0 t^{\gamma-1} E_{\alpha, \gamma}(-\omega^2 t^\alpha) + \lambda \int_0^t H_0(t, s) a(s) g(s) ds = \\
 &= u_0 t^{\gamma-1} E_{\alpha, \gamma}(-\omega^2 t^\alpha) + \lambda u_0 \int_0^t K(t, s) \int_0^s b(\theta) \theta^{\gamma-1} E_{\alpha, \gamma}(-\omega^2 \theta^\alpha) d\theta ds + \\
 &\quad + \lambda u_0 \int_0^t K(t, s) \int_0^s \mathbf{R}(s, \theta; \lambda) \int_0^\theta b(\xi) \xi^{\gamma-1} E_{\alpha, \gamma}(-\omega^2 \xi^\alpha) d\xi d\theta ds, \\
 K(t, s) &= H_0(t, s) a(s), \quad H_0(t, s) = (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\omega^2 (t-s)^\alpha), \\
 H_1(t, s) &= H_0(t, s) \int_s^t b(\theta) d\theta, \\
 E_{\alpha, \gamma}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \gamma)}, \quad z, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\alpha) > 0.
 \end{aligned}$$

The class of functions bounded in the norm with a positive number  $M$  is denoted by  $Bnd(M)$ . The class of functions satisfying the Lipschitz condition with respect to variables  $u, \vartheta, \dots$  with a positive coefficient  $L$  is denoted by  $Lip \{L|_{u, \vartheta, \dots}\}$ . For the functions of one variable, the index is omitted. As a norm we use the usual Euclidean norm in the space  $C[0; T]$ :

$$\|u(t)\| = \max_{t \in [0; T]} |u(t)|.$$

**Theorem.** *Let the following conditions be satisfied  $f(t, u) \in Bnd(M) \cap Lip \{L(t)|_u\}$ . Then there exists a unique solution of the Cauchy problem under consideration on a segment  $[0; T]$ , which can be found by the method of successive approximations:*

$$\begin{cases} u_0(t) = G(t), \\ u_{k+1}(t) = \mathbf{I}(t; u_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

This theorem of existence and uniqueness of the solution of given initial value problem in segment under consideration by the method of successive approximations. For numerical implementation of solution is applied the generalized Jacobi spectral-Galerkin method.

## References

1. *Yuldashev T. K.* Nonlocal boundary value problem for a nonlinear Fredholm integro-differential equation with degenerate kernel. *Differ. Equations*, 2018. Vol. 54. No. 12. P. 1646–1653.
2. *Yuldashev T. K.* On the solvability of a boundary value problem for the ordinary Fredholm integrodifferential equation with a degenerate kernel. *Comput. Math. and Math. Physics*, 2019. Vol. 59. No. 2. P. 241–252.
3. *Yuldashev T. K.* Inverse problem for a nonlinear Benney-Luke type integro-differential equations with degenerate kernel. *Russ. Math.*, 2016. Vol. 60. No. 9. P. 53–60.
4. *Yuldashev T. K.* Nonlocal mixed-value problem for a Boussinesq-type integro-differential equation with degenerate kernel. *Ukr. Math. J.*, 2016. Vol. 68. No. 8. P. 1278–1296.
5. *Yuldashev T. K.* Determination of the coefficient and boundary regime in boundary value problem for integro-differential equation with degenerate kernel. *Lobachevskii J. of Mathematics*, 2017. Vol. 38. No. 3. P. 547–553.
6. *Yuldashev T. K.* Mixed problem for pseudoparabolic integro-differential equation with degenerate kernel. *Differ. Equations*, 2017. Vol. 53. No. 1. P. 99–108.

7. Samko S. G., Kilbas A. A. and Marichev O. I. Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications. Gordon and Breach, Yverdon, 1993.
8. Mainardi F. Fractional calculus: some basic problems in continuum and statistical mechanics. In: Carpinteri, A., Mainardi, F. (eds.) Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. Springer, Wien, 1997.
9. Area I., Batarfi H., Losada J., Nieto J. J., Shammakh W. and Torres A. On a fractional order Ebola epidemic model. Adv. El. J. Differ. Equations, 2015. Vol. 1. Article ID 278.
10. Hussain A., Baleanu D. and Adeel M. Existence of solution and stability for the fractional order novel coronavirus (nCoV-2019) model. Adv. in Differ Equations, 2020. Vol. 384.
11. Ullah S., Khan M. A., Farooq M., Hammouch Z. and Baleanu D. A fractional model for the dynamics of tuberculosis infection using Caputo-Fabrizio derivative. Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. S, 2020. Vol. 13. No. 3. P. 975–993.

## УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ, ПОЛУЧЕННАЯ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ СИММЕТРИЧЕСКИХ $t$ -ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

<sup>1</sup>Алоев Р.Д., <sup>2</sup>Давлатов Ш.О.

<sup>1</sup>Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, г.Ташкент,  
Узбекистан

e-mail: aloevr@mail.ru,

<sup>2</sup>Каршинский инженерно-экономический институт, г.Карши, Узбекистан

e-mail: davlatov1968@mail.ru

Найти вектор функцию  $u$  удовлетворяющей в области  $\Omega_T \equiv \Omega \times [0, T]$  симметрическую  $t$ -гиперболическую систему ([1,2])

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^N A_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Bu = F \quad (3)$$

и на  $G(\Omega) \times [0, T]$  граничным условиям

$$(D - N)u = 0 \quad (4)$$

и при  $t = 0$  начальным условиям

$$u|_{t=0} = g(x), x \in \Omega. \quad (5)$$

где  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  точка в пространстве  $R^N$ ,  $\Omega$  ограниченная область в  $R^N$ ,  $G(\Omega)$ -граница области  $\Omega$ ,  $A_i(t, x)$ ,  $i = \overline{1, N}$  симметрические квадратные матрицы размерностью  $m \times m$ , элементы которых функции из  $C([0, T]) \times C^1(\Omega)$ ,  $B(t, x)$  квадратная матрица  $m \times m$ , элементы которого функции из  $C(\Omega_T)$ ,  $u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x), \dots, u_m(t, x))^T$  неизвестная вектор функция,  $F(t, x) = (f_1(t, x), f_2(t, x), \dots, f_m(t, x))^T$ ,  $f_i(t, x) \in C(\Omega_T)$ ,  $i = \overline{1, m}$ ;  $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x))^T$ ,  $g_i(x) \in C(\Omega)$ ,  $i = \overline{1, m}$  - заданные вектор функции.  $D = \sum_{i=1}^N n_i A_i$ ,  $n = (n_1, \dots, n_N)$  внешняя нормаль к области  $\Omega$ .  $N(t, x)$  квадратная матрица размерности  $m \times m$ , удовлетворяющая условию  $N + N^* \geq 0$  и элементы которого непрерывные функции.

Область  $\Omega$  разобьем на конечные элементы (выпуклые многоугольники), не имеющие общих внутренних точек. Конечный элемент обозначим буквой  $K$ . Тогда  $\Omega = \bigcup_{K \subset \Omega} K$ .

$[0, T]$  отрезок разобьем на  $N_t$  части т.е.

$$t_k = \tau \cdot k, (k = 0, \dots, N_t), \tau = \frac{T}{N_t}.$$

При аппроксимации смешанной задачи (1)-(3) методом конечных элементов получим

$$\begin{aligned} & \left( \tau \sum_{i=1}^N A_i(t_k, x) \frac{\partial u_h}{\partial x_i}(t_k, x) + (I + \tau \cdot B(t_k, x)) u_h(t_k, x), v_h(x) \right)_K + \\ & + \frac{\tau}{2} \int_{G^*(K)} (N(t_k, x) - D(t_k, x)) u_h(t_k, x) \cdot v_h(x) ds = \\ & = (u_h(t_{k-1}, x) + \tau \cdot F_h(t_k, x), v_h(x))_K \end{aligned} \quad (6)$$

неявную схему. Здесь  $(u, v)_K = \int_K u \cdot v dx$ ,  $G^*(K) = G(K) \cap G(\Omega)$ ,  $v_h(x)$  базисная функция[3]. Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** При выполнении следующих условий

$$N + N^* \geq 0, \quad (7)$$

$$B + B^* - \sum_{i=1}^N \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \geq 0 \quad (8)$$

приближенное решение  $u_h \in P_l(K)$  смешанной задачи (1)- (3) однозначно определено в  $K$  и справедливо следующее неравенство

$$\|u_h(t, x)\|_{\Omega}^2 \leq e^T \|u_h(0, x)\|_{\Omega}^2 + (T + 1)(e^T - 1)F.$$

где  $\|u\|_{\Omega} = \sqrt{\int_{\Omega} u \cdot u dx}$ ,  $F = \max_{t \in [0, T]} \|F_h(t, x)\|_{\Omega}^2$ ,  $P_l(K)$  множество полиномов степени  $\leq l$  определенные в  $K$ , и коэффициенты которых функции от  $t$ .

### Литература

1. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.:Наука, 1979, 372с.
2. Friedrichs K.O. Symmetric positive linear differential equations, Comm. Pure Appl.Math.,11 (1958), pp. 333-418.
3. Segerlind L.J. Applied Finite Element Analysis. John Wiley & Sons, Inc. 1976. 289-308 с.

## ЧИСЛЕННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ЗАКОНОВ БАЛАНСА С НЕОДНОРОДНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

<sup>1</sup>Алоев Р.Д., <sup>2</sup>Неъматова Д.Э.

<sup>1</sup> *Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,*  
e-mail: aloevr@mail.ru

<sup>2</sup> *Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,*  
e-mail: nematova\_dilfuza@mail.ru

Рассмотрим противопоточную разностную схему расщепления

$$\begin{cases} (u_i)_{j}^{\kappa} = (v_i)_{j}^{\kappa} - (a_i)_{j} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ (v_i)_{j}^{\kappa} - (v_i)_{j-1}^{\kappa} \right], & i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, J; \\ (u_i)_{j}^{\kappa} = (v_i)_{j}^{\kappa} - (a_i)_{j} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ (v_i)_{j}^{\kappa} - (v_i)_{j+1}^{\kappa} \right], & i = m + 1, \dots, n; \quad j = 0, \dots, J - 1, \\ \kappa = 0, \dots, K - 1. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} (v_i)_{j}^{\kappa+1} = (u_i)_{j}^{\kappa} - \Delta t \sum_{p=1}^n (M_{ip})_{j} (u_p)_{j}^{\kappa}, & i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, J; \\ (v_i)_{j}^{\kappa+1} = (u_i)_{j}^{\kappa} - \Delta t \sum_{p=1}^n (M_{ip})_{j} (u_p)_{j}^{\kappa}, & i = m + 1, \dots, n; \quad j = 0, \dots, J - 1, \\ \kappa = 0, \dots, K - 1. \end{cases} \quad (2)$$

Задаём граничные условия для (1)-(2) следующим способом:

$$(v_i)_0^\kappa = \sum_{l=m+1}^n s_{il} (v_l)_0^\kappa, \quad i = \overline{1, m}; \quad (v_i)_J^\kappa = \sum_{l=1}^m r_{il} (v_l)_0^\kappa, \quad i = \overline{m+1, n}; \quad \kappa = 1, \dots, K; \quad (3)$$

Начальные условия заданы следующим образом:

$$(v_i)_j^0 = (v_{i0})_j, \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 0, \dots, J. \quad (4)$$

Здесь  $(a_i)_j > 0$  и  $s, r, M$ - вещественные матрицы.

Для любой вещественной квадратичной матрицы  $A$  размерности  $n \times n$  введем функцию  $\rho_2$ , определенные с помощью

$$\rho_2(A) \triangleq \inf \{ \|DAD^{-1}\|_2, \quad D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) \},$$

$d_i > 0$ - вещественные числа

где  $d_i > 0$  обозначает множество строго положительных вещественных чисел и

$$\|\zeta\|_2 \triangleq \left[ \sum_{i=1}^n |\zeta_i|^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \zeta \triangleq (\zeta_1, \dots, \zeta_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad \|A\|_2 \triangleq \max_{\|\xi\|_2=1} \|A\xi\|_2.$$

Доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** Если шаги разностной сетки удовлетворяют условию  $K\Phi Л \frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq J}} |(a_i)_j| \leq$

1 и параметры граничных условий (3)  $\mathbf{r}, \mathbf{s}$  подчиняются неравенству  $\rho_2(R) < 1$ ,  $R = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s} \\ \mathbf{r} & 0 \end{pmatrix}$ , тогда численное решение  $\mathbf{v}_j^\kappa$  разностной начально краевой задачи (1)-(4) экспоненциально устойчиво в  $L^2$ -норме.

## Литература

1. Alov R.D., Eshkuvatov Z.K., Davlatov Sh.O., Nik Long N.M.A., Sufficient condition of stability of finite element method for symmetric t-hyperbolic systems with constant coefficients, Computers and Mathematics with Applications, Vol. 68, 2014, pp.1194-1204.
2. Alov R.D., Davlatov Sh.O., Eshkuvatov Z. K., Nik Long N.M.A. Uniqueness solution of the finite elements scheme for symmetric hyperbolic systems with variable coefficients. Malaysian Journal of Mathematical Sciences (MJMS), 10(S), 2016, pp. 49-60.
3. Alov R.D., Khudoyberganov M. U., Blokhin A.M. Construction and research of adequate computational models for quasilinear hyperbolic systems. Numerical Algebra, Control and Optimization. Vol. 8(3) 2018. pp. 287-299.
4. Alov R. D., Eshkuvatov Z. K., Khudoyberganov M. U., Nematova D. E. The Difference Splitting Scheme for Hyperbolic Systems with Variable Coefficients. Mathematics and Statistics. Vol. 7(3), 2019, pp. 82-89 DOI: 10.13189/ms.2019.070305.

## ПРОТИВОПОТОЧНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

<sup>1</sup>Алов Р.Д., <sup>2</sup>Неъматова Д.Э.

<sup>1</sup> Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,  
e-mail: aloevr@mail.ru

<sup>2</sup> Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,  
e-mail: nematova\_dilfuza@mail.ru



В области  $G = \{(t, \mathbf{x}) : 0 \leq t \leq T, \mathbf{x} \in \bar{\Omega}\}$  построим разностную сетку с шагами  $\Delta t$  по направлению  $t$ ,  $\Delta x$  по направлению  $x$ ,  $\Delta y$  по направлению  $y$  и  $\Delta z$  по направлению  $z$ . Узловые точки разностной сетки обозначим через  $(t^\kappa, \mathbf{x}_{\bar{j}})$  где  $\mathbf{x}_{\bar{j}} \triangleq (x_{j_x}, y_{j_y}, z_{j_z})$ ,  $\bar{j} \triangleq j_x j_y j_z$  — мультииндекс. Множество узловых точек разностной сетки обозначим через  $G_h$ , где

$$\mathbf{J} \triangleq \{\bar{j} = j_x j_y j_z : j_x = \overline{0, J_x}; j_y = \overline{0, J_y}; j_z = \overline{0, J_z}\},$$

$$\Omega_h \triangleq \{\mathbf{x}_{\bar{j}} : \bar{j} \in \mathbf{J}\}, \quad G_h \triangleq \{(t^\kappa, \mathbf{x}_{\bar{j}}) : \kappa = \overline{0, K}; \mathbf{x}_{\bar{j}} \in \Omega_h\}.$$

И значения численного решения в узловых точках обозначим через

$$(v_i)_{\bar{j}}^\kappa = v_i(t^\kappa, \mathbf{x}_{\bar{j}}), \quad i = \overline{1, n}; \quad \kappa = \overline{0, K}; \quad \bar{j} \in \mathbf{J}.$$

Шаги разностной сетки  $\Delta t$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  подберем таким образом, чтобы выполнялись равенства  $K \Delta t = T$  и  $J_x \Delta x = X$ ,  $J_y \Delta y = Y$ ,  $J_z \Delta z = Z$ .

Рассмотрим следующую разностную схему расщепления по направлениям

$$\begin{cases} (v_i^x)_{\bar{j}} = (v_i)_{\bar{j}}^\kappa - a_i \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ (v_i)_{\bar{j}}^\kappa - (v_i)_{j_x-1}^\kappa \right], & i = \overline{1, m}; \quad j_x = \overline{1, J_x}; \\ (v_i^x)_{\bar{j}} = (v_i)_{\bar{j}}^\kappa - a_i \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ (v_i)_{\bar{j}}^\kappa - (v_i)_{j_x+1}^\kappa \right], & i = \overline{m+1, n}; \quad j_x = \overline{0, J_x-1}, \\ & \forall j_y, j_z; \kappa = \overline{0, K-1}. \end{cases}$$

$$(\mathbf{v}^{xy})_{\bar{j}} = (\mathbf{v}^x)_{\bar{j}} - \frac{\Delta t}{\Delta y} \mathbf{C} \left[ (\mathbf{v}^x)_{\bar{j}} - (\mathbf{v}^x)_{j_y-1} \right], \quad j_y = \overline{1, J_y}; \quad \forall j_x, j_z; \quad (1)$$

$$\begin{cases} (\mathbf{v}^{xyz})_{\bar{j}}^{\mathbf{I}} = (\mathbf{v}^{xy})_{\bar{j}}^{\mathbf{I}} - \frac{\Delta t}{\Delta z} \mathbf{D}^+ \left[ (\mathbf{v}^{xy})_{\bar{j}}^{\mathbf{I}} - (\mathbf{v}^{xy})_{j_z-1}^{\mathbf{I}} \right], & j_z = \overline{1, J_z}; \\ (\mathbf{v}^{xyz})_{\bar{j}}^{\mathbf{II}} = (\mathbf{v}^{xy})_{\bar{j}}^{\mathbf{II}} - \frac{\Delta t}{\Delta z} \mathbf{D}^- \left[ (\mathbf{v}^{xy})_{\bar{j}}^{\mathbf{II}} - (\mathbf{v}^{xy})_{j_z+1}^{\mathbf{II}} \right], & j_z = \overline{0, J_z-1}; \end{cases} \quad \forall j_x, j_y.$$

Здесь для краткости записи ввели обозначения:

$$(v_i)_{j_x-1}^\kappa = (v_i)_{j_x-1, j_y, j_z}^\kappa, \quad (\mathbf{v}^{xy})_{j_z-1}^{\mathbf{I}} = (\mathbf{v}^{xy})_{j_x, j_y, j_z-1}^{\mathbf{I}}, \quad (\mathbf{v}^x)_{j_y-1} = (\mathbf{v}^x)_{j_x, j_y-1, j_z},$$

$$(v_i)_{j_x+1}^\kappa = (v_i)_{j_x+1, j_y, j_z}^\kappa, \quad (\mathbf{v}^{xy})_{j_z+1}^{\mathbf{II}} = (\mathbf{v}^{xy})_{j_x, j_y, j_z+1}^{\mathbf{II}}, \quad (\mathbf{v}^x)_{\bar{j}} \triangleq \left( (\mathbf{v}^x)_{\bar{j}}^{\mathbf{I}}, (\mathbf{v}^x)_{\bar{j}}^{\mathbf{II}} \right)^T$$

$$(\mathbf{v}^{xy})_{\bar{j}} \triangleq \left( (\mathbf{v}^{xy})_{\bar{j}}^{\mathbf{I}}, (\mathbf{v}^{xy})_{\bar{j}}^{\mathbf{II}} \right)^T, \quad \mathbf{v}_{\bar{j}}^{k+1} \triangleq (\mathbf{v}^{xyz})_{\bar{j}} = \left( (\mathbf{v}^{xyz})_{\bar{j}}^{\mathbf{I}}, (\mathbf{v}^{xyz})_{\bar{j}}^{\mathbf{II}} \right)^T$$

Начальные условия заданы следующим образом:

$$(v_i)_{\bar{j}}^0 = (v_{i0})_{\bar{j}}, \quad i = \overline{1, n}; \quad \bar{j} \in \mathbf{J}. \quad (2)$$

Граничные условия заданы следующим способом:

$$\begin{cases} (v_i)_{0, j_y, j_z}^\kappa = \sum_{l=m+1}^n s_{il} (v_l)_{0, j_y, j_z}^\kappa, & i = \overline{1, m}; \\ (v_i)_{J_x, j_y, j_z}^\kappa = \sum_{l=1}^m r_{il} (v_l)_{J_x, j_y, j_z}^\kappa, & i = \overline{m+1, n}; \end{cases} \quad \kappa = \overline{1, K}; \quad (3)$$

$$(\mathbf{v}^x)_{j_x, 0, j_z} = (\mathbf{v}^x)_{j_x, J_y, j_z}, \quad (\mathbf{v}^{xy})_{j_x, j_y, 0}^{\mathbf{I}} = (\mathbf{v}^{xy})_{j_x, j_y, J_z}^{\mathbf{I}}, \quad (\mathbf{v}^{xy})_{j_x, j_y, J_z}^{\mathbf{II}} = (\mathbf{v}^{xy})_{j_x, j_y, 0}^{\mathbf{II}}, \quad (4)$$

Здесь  $T, X, Y, Z, m, n$  — положительные вещественные числа;  $a_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;

$\mathbf{C}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}^+ & 0 \\ 0 & \mathbf{D}^- \end{pmatrix}$  — симметричные вещественные квадратичные матрицы размерности  $n \times n$ ;

$\mathbf{D}^+ > 0$ ,  $-\mathbf{D}^- > 0$ .

$\mathbf{v} = \left( [\mathbf{v}^{\mathbf{I}}]^T, [\mathbf{v}^{\mathbf{II}}]^T \right)$  — неизвестная вектор-функция размерности  $n$ ;

$$\mathbf{v}^{\mathbf{I}} = (v_1(t, \mathbf{x}), v_2(t, \mathbf{x}), \dots, v_m(t, \mathbf{x}))^T; \quad \mathbf{v}^{\mathbf{II}} = (v_{m+1}(t, \mathbf{x}), v_{m+2}(t, \mathbf{x}), \dots, v_n(t, \mathbf{x}))^T.$$

Для любой вещественной квадратичной матрицы  $A$  размерности  $n \times n$  введем функцию  $\rho_2$ , определенные с помощью  $\rho_2(A) \triangleq \inf \{ \|DAD^{-1}\|_2, D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) \}$ ,  $d_i > 0$ -вещественные числа

где  $d_i > 0$  обозначает множество строго положительных вещественных чисел и

$$\|\zeta\|_2 \triangleq \left[ \sum_{i=1}^n |\zeta_i|^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \zeta \triangleq (\zeta_1, \dots, \zeta_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad \|A\|_2 \triangleq \max_{\|\xi\|_2=1} \|A\xi\|_2$$

**Теорема 1.** Пусть  $T > 0$ . Если шаги разностной сетки удовлетворяют условию КФЛ

$$\max \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|, \frac{\Delta t}{\Delta y} \max |\lambda(\mathbf{C})|, \frac{\Delta t}{\Delta y} \max |\lambda(\mathbf{D})| \right) \leq 1$$

и матрицы граничных условий  $\mathbf{R}, \mathbf{S}$  подчиняются неравенству  $\rho_2(\mathbf{R}) < 1$ , где  $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{S} \\ \mathbf{R} & 0 \end{pmatrix}$ , тогда численное решение  $\mathbf{v}_j^k$  разностной начально-краевой задачи (1)-(4) экспоненциально устойчиво в  $L^2$ -норме.

### Литература

1. Alov R.D., Eshkuvatov Z.K., Davlatov Sh.O., Nik Long N.M.A., Sufficient condition of stability of finite element method for symmetric t-hyperbolic systems with constant coefficients, Computers and Mathematics with Applications, Vol. 68, 2014, pp.1194-1204.
2. Alov R.D., Davlatov Sh.O., Eshkuvatov Z. K., Nik Long N.M.A. Uniqueness solution of the finite elements scheme for symmetric hyperbolic systems with variable coefficients. Malaysian Journal of Mathematical Sciences (MJMS), 10(S), 2016, pp. 49-60.
3. Alov R.D., Khudoyberganov M. U., Blokhin A.M. Construction and research of adequate computational models for quasilinear hyperbolic systems. Numerical Algebra, Control and Optimization. Vol. 8(3) 2018. pp. 287-299.
4. Alov R. D., Eshkuvatov Z. K., Khudoyberganov M. U., Nematova D. E. The Difference Splitting Scheme for Hyperbolic Systems with Variable Coefficients. Mathematics and Statistics. Vol. 7(3), 2019, pp. 82-89 DOI: 10.13189/ms.2019.070305.

## ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ СПЛАЙНЫ МИНИМИЗИРУЮЩИЕ НОРМУ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ $K_2(P_m)$

Ахмадалиев Г.Н.

Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта, Ташкент,  
Узбекистан,

e-mail: ahmadaliyev78@mail.ru

Хорошо известно, что сплайны играют очень важную роль в прикладных науках. Существуют полиномиальные и сплайновые интерполяции. Известно, что полиномиальная аппроксимация непрактична для аппроксимации функций с конечной и малой гладкостью, что часто встречается в приложениях. Это обстоятельство делает необходимым работу со сплайнами. Сплайн функции очень полезны в приложениях. Классы сплайновых функций обладают многими удобными структурными свойствами, а также отличными аппроксимационными способностями. Они используются, например, при подгонке данных, аппроксимации функций, численном интегрировании и численном решении дифференциальных и интегральных уравнений и т.д.

Одним из важных шагов в теории сплайнов является результат Д.Холлидей, который связывает кубический сплайн И.Шенберг с решением вариационной задачи, которая

даёт минимум квадрату нормы функции в пространстве  $L_2^{(2)}$ . Результат Д.Холлидея был позднее обобщен К. де Буром. Эти результаты вызвали большой интерес, и появилось большое количество научных исследований, в которых вариационная направление построения сплайнов было улучшена в соответствии с конкретными требованиями. Следует отметить, что теория сплайнов, основанная на вариационных методах, была разработана и развита в исследованиях многих авторов, в частности, в работах Дж.Алберга, Е.Нильсона, Дж.Уолша, П.Ж.Лорана, В.А. Василенко, С.Б.Стечкина, Ю.Н.Субботина, С.Л.Соболева, М.И.Игнатева, А.Б.Певный, Г.Нурнберга, А.Ю.Бежаева, Х.М.Шадиметова, А.Р.Хаётова и других.

Настоящая работа также посвящена исследованию задачи построения интерполяционных сплайнов основываясь на вариационные методы. Здесь, используя метод С.Л.Соболева, мы построим интерполяционные сплайны, минимизирующие полунорму в пространстве

$$K_2(P_m) = \left\{ \varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi^{(m-1)} \text{ абсолю. непр. и } \varphi^{(m)} \in L_2(0, 1) \right\},$$

с нормой

$$\|\varphi|_{K_2(P_m)}\| = \left\{ \int_0^1 \left( P_m \left( \frac{d}{dx} \right) \varphi(x) \right)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

где  $P_m \left( \frac{d}{dx} \right) = \frac{d^m}{dx^m} - \omega^2 \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}$ ,  $\omega \neq 0$ ,  $m \geq 2$  и  $\int_0^1 \left( P_m \left( \frac{d}{dx} \right) \varphi(x) \right)^2 dx < \infty$ .

Равенство (1) является полунормой и  $\|\varphi\| = 0$  тогда и только тогда, когда  $\varphi(x) = c_1 \sinh(\omega x) + c_2 \cosh(\omega x) + R_{m-3}(x)$ , где  $R_{m-3}(x)$ -многочлен степени  $m - 3$ .

Рассмотрим следующую интерполяционную задачу:

**Задача.** Найти функцию  $S_m(x) \in K_2(P_m)$ , которая даёт минимум величине (1) и удовлетворяет условиям интерполяции  $S_m(x_\beta) = \varphi(x_\beta)$ ,  $\beta = 0, 1, \dots, N$ , где  $x_\beta \in [0, 1]$ -узлы интерполяции,  $\varphi(x_\beta)$ -заданные значения.

В этой работе нами решена эта задача и доказана, что решение этой задачи является интерполяционный сплайн, имеющий следующий вид

$$S_m(x) = \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma G_m(x - x_\gamma) + d_1 \sinh(\omega x) + d_2 \cosh(\omega x) + R_{m-3}(x), \quad (2)$$

где  $C_\gamma$ ,  $\gamma = 0, 1, \dots, N$ ,  $d_1$  и  $d_2$  действительные число,  $R_{m-3}(x) = \sum_{i=0}^{m-3} r_i x^i$  многочлен степени  $m - 3$  и

$$G_m(x) = \frac{\operatorname{sgn} x}{4\omega^{2m-1}} \left( \omega x \cosh(\omega x) - (2m - 3) \sinh(\omega x) + 2 \sum_{k=1}^{m-2} \frac{(m - k - 1)(\omega x)^{2k-1}}{(2k - 1)!} \right).$$

Кроме того, для коэффициентов сплайна (2) получена следующая система линейных ал-

гебраических уравнение

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma} G_m(x_{\beta} - x_{\gamma}) + d_1 \sinh(\omega x_{\beta}) + d_2 \cosh(\omega x_{\beta}) + R_{m-3}(x) &= \varphi(x_{\beta}), \beta = \overline{0, N}, \\ \sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma} \sinh(\omega x_{\gamma}) &= 0, \\ \sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma} \cosh(\omega x_{\gamma}) &= 0, \\ \sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma} x_{\gamma}^{\alpha} &= 0, \alpha = 0, 1, \dots, m-3. \end{aligned}$$

Далее, нами исследованы условия существования и единственность решения этой системы и используя дискретный аналог конкретного дифференциального оператора она решена.

## ПОСТРОЕНИЕ КУБАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ ТОЧНОСТИ СОДЕРЖАЩИЕ ЗНАЧЕНИЯ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

<sup>1</sup>Бахромов С.А., <sup>2</sup>Исматуллаев Г.П.

<sup>1</sup> *Национальный Университет Узбекистана им. Мирза Улугбека,*  
e-mail: [бахромовсаяфиддин@gmail.com](mailto:бахромовсаяфиддин@gmail.com)

<sup>2</sup> *Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз*

Одним из способов приближенного вычисления интеграла является метод неопределенных параметров, который применяется давно и большинство кубатурных формул имеющие алгебраическую степень точности  $S$  построены этим методом [1], [2], [3] для стандартных областей.

В данной работе рассматривается вопрос о построении кубатурной формулы пятой степени точности следующего вида:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x-y} x^{\alpha} y^{\alpha} f(x, y) dx dy &\cong C_{00} f(0, 0) + C_{10} \left( \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} \right) \\ &+ A f(a, a) + B f(b, b) + C [f(c, d) + f(d, c)] + D [f(l, m) + f(m, l)] \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\alpha > -1$ .

При написании кубатурной формулы (1) предполагается, что подынтегральная функция  $f(x, y)$  имеет непрерывные производные. Кроме этого учитывалось симметрия области, весовой функции  $\rho(x, y) = e^{-x-y} x^{\alpha} y^{\alpha}$  и расположение узлов относительно прямой  $y = x$ .

Для определения 12 неизвестных параметров формулы (1) потребуем, чтобы она была точна для следующих одночленов:

$$1, x, x^2, xy, x^3, x^2y, x^4, x^3y, x^2y^2, x^5, x^4y, x^3y^2$$

и получим систему нелинейных уравнений, число которых равен двенадцати столько, сколько неизвестных параметров. Эта система решается в три этапа. В первом этапе полагая в (1)  $f = x^2 - xy, x^3 - x^2y, x^4 - x^3y, x^3y - x^2y^2, x^5 - x^4y, x^4y - x^3y^2$  получим систему нелинейных уравнений из шести уравнений в которых участвуют только

лишь  $C, D, c, d, l, m$ . Эта система уравнений решаемая. Во-втором этапе полагая в (1)  $f = x^2 + xy, x^3 + 3x^2y, x^4 + 4x^3y + 3x^2y^2, x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2$  получим систему из четырех нелинейных уравнений зависящие только лишь от  $A, B, a, b$  которая также решается как в первом этапе. В последнем этапе при  $f = 1, x$  из (1) получим значение  $C_{00}$  и  $C_{10}$ . Все параметры таким образом определены, они вещественные коэффициенты положительны. Узлы принадлежат области интегрирования.

### Литература

1. Крылов В.И., Шульгина Л.Т. Справочная книга по численному интегрированию, Наука, 1966.
2. Stroud A.N. Approximate calculation of multiple integrals- Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1971.
3. Мысовских И.П. Интерполяционные кубатурные формулы, Наука, 1981.

## ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ ОДНОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ

<sup>1</sup>Болтаев А.К., <sup>2</sup>Ахмедов Д.М.

<sup>1</sup> Институт математики им. В.И.Романовского, Академии наук Узбекистана,  
Ташкент, Узбекистан,

e-mail: aziz\_boltayev@mail.ru

<sup>2</sup> Институт математики им. В.И.Романовского, Академии наук Узбекистана,  
Ташкент, Узбекистан,

e-mail: axmedovdilshod@mail.ru

Как известно, приближенное вычисление определенных интегралов с возможно большой точностью является одной из актуальных задач вычислительной математики. Это связано с тем, что большинство задач науки и техники приводятся к интегральным или дифференциальным уравнениям, а их решения выражаются с помощью определенных интегралов, которые во многих случаях невозможно вычислить точно. В связи с этим рассмотрим следующую квадратурную формулу:

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_{\beta} \varphi(x_{\beta}), \quad (1)$$

где соответственно,  $C_{\beta}$  и  $x_{\beta}$  называются коэффициентами и узлами квадратурной формулы (1),  $\varphi(x)$  является элементом гильбертова пространства  $W_2^{(5,3)}(0,1)$ . Норма функций из пространства  $W_2^{(5,3)}(0,1)$  определяется следующим образом:

$$\left\| |\varphi| W_2^{(5,3)}(0,1) \right\| = \left\{ \int_0^1 [\varphi^{(5)}(x) + 5\varphi^{(3)}(x) + 4\varphi'(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Разность между интегралом и квадратурной суммой, называется погрешностью квадратурной формулы (1), и этой разности соответствует функционал погрешности  $\ell_N(x)$ , который имеет вид:

$$\ell_N(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta} \delta(x - x_{\beta}).$$

В настоящей работе мы занимаемся вычислением нормы  $\left\| \ell_N | W_2^{(5,3)*}(0,1) \right\|$  функционала погрешности  $\ell_N(x)$ . Для этого мы пользуемся понятием экстремальной функции функционала погрешности  $\ell_N(x)$  введенным С.Л.Соболевым [4].

Функция  $\psi$ , для которой выполняется равенство

$$(\ell_N, \psi) = \|\ell_N\| \cdot \|\psi\|,$$

называется экстремальной функцией функционала погрешности  $\ell_N(x)$ .

Так как пространство  $W_2^{(5,3)}(0, 1)$  является гильбертовым, то по теореме Рисса об общем виде линейного функционала (см. [6]) существует единственная функция  $\psi(x) \in W_2^{(5,3)}(0, 1)$  для которой

$$(\ell_N, \varphi) = \langle \psi, \varphi \rangle \quad (2)$$

и  $\|\ell_N\| = \|\psi\|$ , где  $\langle \psi, \varphi \rangle$  - скалярное произведение двух функций  $\psi$  и  $\varphi$  из пространства  $W_2^{(5,3)}(0, 1)$ .

Займемся решением уравнения (2). Интегрируя по частям правую часть уравнения (2). Отсюда, учитывая единственность функции  $\psi(x)$  получаем уравнение

$$\psi^{(10)}(x) + 10\psi^{(8)}(x) + 33\psi^{(6)}(x) + 40\psi^{(4)}(x) + 16\psi^{(2)}(x) = \ell_N(x) \quad (3)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^4 (-1)^i [\psi^{(5+i)}(x) + 5\psi^{(3+i)}(x) + 4\psi^{(3+i)}(x)] \Big|_{x=0}^{x=1} &= 0, \\ \sum_{i=0}^2 (-1)^i [\psi^{(5+i)}(x) + 5\psi^{(3+i)}(x) + 4\psi^{(3+i)}(x)] \Big|_{x=0}^{x=1} &= 0, \\ [\psi^{(6)}(x) + 5\psi^{(4)}(x) + 4\psi^{(2)}(x)] \Big|_{x=0}^{x=1} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Для решения уравнения (3) с краевыми условиями (4) справедлива следующая

**Теорема.** Решение уравнения (3) с краевыми условиями (4) является экстремальной функцией  $\psi(x)$  функционала погрешности  $\ell_N(x)$  квадратурной формулы (1) и имеет вид:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= -\ell_N(x) * G_m(x) + P(x) = \\ &= - \int \ell_N(y) G_m(x-y) dy + Y(x) \end{aligned}$$

где

$$G(x) = \frac{\text{sign}(x)}{3456} \cdot [108x - 160 \sin x - 25 \sin 2x + 9 \cos x + 6x \cos 2x],$$

и

$$P(x) = d_0 + d_1 \sin x + d_2 \cos x + d_3 \sin 2x + d_4 \cos 2x$$

## Литература

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул.- М.:Наука, 1974,- 808 с.

## ОПТИМАЛЬНАЯ КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА В СМЫСЛЕ САРДА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ В $K_2(P_m)$

<sup>1</sup>Болтаев Н.Д., <sup>2</sup>Курбонназаров А.И.

<sup>1</sup>Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан,  
e-mail: nboltayev@list.ru.

<sup>2</sup>Термезский государственный университет, Ташкент, Узбекистан,  
e-mail: mumini\_1974@inbox.ru.

Вычисление интегралов от сильно осциллирующих функций является одним из более важных задач численного анализа потому что такие интегралы встречаются в большом количестве в приложениях во многих разделах математики также как и в других науках, такие как квантовая физика, механика жидкости и электромагнетизм. Основные примеры сильно осциллирующих подынтегральных функций встречаются в различных преобразованиях, например, преобразование Фурье и преобразование Фурье-Бесселя. Следует отметить, что стандартные методы численного интегрирования часто требуют очень большое количество вычислительных работ и не могут быть применены успешно. Поэтому, для интегралов со сильно осциллирующими функциями разработались многочисленные специальные подходы, которые являются эффективными.

Самые ранние формулы для численного интегрирования сильно осциллирующих функций был дан Файлоном [1] в 1928 году. Подход Файлона для интегралов Фурье

$$I[f; \omega] = \int_a^b f(x)e^{i\omega x} dx,$$

основывается на кусочном аппроксимации  $f(x)$  с помощью дуг параболы на интервале интегрирования. Конечные интегралы над подинтервалами тогда интегрируются точно. Подход Файлона модифицировался многими математиками.

Как отмечалось выше, имеются несколько методов в теории квадратурных формул, которые позволяют приближенно вычислить интегралы от сильно осциллирующих функций. Настоящая работа также посвящена одному из таких методов, т.е. построению оптимальных квадратурных формул в смысле Сарда для приближенного вычисления интегралов Фурье. Отметим, что прежде в пространствах  $L_2^{(m)}$  и  $W_2^{(m, m-1)}$  оптимальные квадратурные формулы вида (1) в смысле Сарда были построены в работах [2,3,4,5].

Рассмотрим следующую квадратурную формулу

$$\int_0^1 e^{2\pi i p x} \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_\beta \varphi(h\beta), \quad (1)$$

с функционалом погрешности

$$\ell(x) = e^{2\pi i p x} \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta \delta(x - h\beta). \quad (2)$$

Здесь  $C_\beta$  – коэффициенты формулы (1),  $h = 1/N$ ,  $i^2 = -1$ ,  $N$  – натуральное число,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $p \neq 0$ ,  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака,  $\varepsilon_{[0,1]}(x)$  – индикатор отрезка  $[0, 1]$ . Функции  $\varphi$  принадлежат в пространстве  $K_2(P_m)$ .

$$K_2(P_m) = \{\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi^{(m)} - \text{абсолютно непрерывно и } \varphi^{(m)} \in L_2(0, 1)\}$$

– гильбертово пространство комплекснозначных функций и скалярное произведение в этом пространстве определяется следующим образом

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 (\varphi^{(m)}(x) + \omega^2 \varphi^{(m-2)}(x)) (\bar{\psi}^{(m)}(x) + \omega^2 \bar{\psi}^{(m-2)}(x)) dx,$$

где  $\bar{\psi}$  – сопряженная функция к функции  $\psi$  и соответственно норма функций определяется формулой

$$\|\varphi\|_{K_2(P_m)} = \langle \varphi, \varphi \rangle^{1/2}.$$

Разность

$$(\ell, \varphi) = \int_0^1 e^{2\pi ipx} \varphi(x) dx - \sum_{\beta=0}^N C_\beta \varphi(h\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) \varphi(x) dx \quad (3)$$

называется *погрешностью* формулы (1).

Так как пространство  $K_2(P_m)$  является гильбертовым, то по неравенству Коши-Шварца получим следующую оценку для погрешности (3)

$$|(\ell, \varphi)| \leq \|\varphi\|_{K_2(P_m)} \cdot \|\ell\|_{K_2^*(P_m)},$$

где  $K_2^*(P_m)$  является сопряженной к пространству  $K_2(P_m)$ . Так что разность (3) оценивается с помощью нормы функционала погрешности  $\ell$ :

$$\|\ell\|_{K_2^*(P_m)} = \sup_{\|\varphi\|_{K_2(P_m)}=1} |(\ell, \varphi)|, \quad (4)$$

Следовательно, оценка погрешности квадратурной формулы (1) над функциями пространства  $K_2(P_m)$  приводится к нахождению нормы (4) функционала погрешности в сопряженном пространстве  $K_2^*(P_m)$ . Очевидно, что норма функционала погрешности зависит от коэффициентов  $C_\beta$ . Задача минимизации нормы функционала погрешности  $\ell$  по коэффициентам  $C_\beta$  при фиксированных узлах (в нашем случае расстояния между соседними узлами формулы (1) равны, т.е.  $x_\beta = h\beta$ ,  $\beta = \overline{0, N}$ ,  $h = \frac{1}{N}$ ) называется *задачей Сарда* и полученная формула называется *оптимальной квадратурной формулой в смысле Сарда*.

Основной целью настоящей работы является решить задачу Сарда для квадратурных формул вида (1) в пространстве  $K_2(P_m)$ , т.е. найти коэффициенты  $C_\beta$ , которые дают наименьшее значение нормы функционала погрешности, т.е.

$$\|\dot{\ell}\|_{K_2^*(P_m)} = \inf_{C_\beta} \|\ell\|_{K_2^*(P_m)}, \quad (5)$$

Таким образом, чтобы построить оптимальные квадратурные формулы вида (1) в смысле Сарда нам следует последовательно решить следующие задачи.

**Задача 1.** Найти норму функционала погрешности квадратурных формул вида (1) в пространстве  $K_2^*(P_m)$ .

**Задача 2.** Найти такие коэффициенты  $C_\beta$ , которые удовлетворяют равенство (5).

Результаты вычислений приведены следующей теореме, которая является основным результатом настоящей работы.

**Теорема.** Коэффициенты оптимальных квадратурных формул вида (1) в смысле Сарда в пространстве  $K_2(P_m)$  имеют вид ( $p \in Z$ ,  $p \neq 0$ )

$$\begin{aligned} C_0 &= K \frac{e^{2\pi iph} \sin(\omega h - \omega) - e^{2\pi iph} \sin(\omega h) + e^{4\pi iph} \sin \omega}{\sin \omega (1 + e^{4\pi iph} - 2e^{2\pi iph} \cos(\omega h))} + \frac{\omega - \omega \cos \omega - 2\pi ip \sin \omega}{\sin \omega ((2\pi ip)^2 + \omega^2)} + \\ &+ \sum_{k=1}^{m-1} \left( \frac{\lambda_k \sin(\omega h - \omega) - \lambda_k^{N+1} \sin(\omega h) + \lambda_k^2 \sin \omega}{\sin \omega (1 + \lambda_k^2 - 2\lambda_k \cos(\omega h))} a_k + \frac{\lambda_k^{N+1} \sin(\omega h - \omega) - \lambda_k \sin(\omega h) + \lambda_k^N \sin \omega}{\sin \omega (1 + \lambda_k^2 - 2\lambda_k \cos(\omega h))} b_k \right), \\ C_\beta &= K e^{2\pi iph\beta} + \sum_{k=1}^{m-1} \left( a_k \lambda_k^\beta + b_k \lambda_k^{N-\beta} \right), \beta = \overline{1, N-1}, \\ C_N &= K \frac{e^{2\pi iph} \sin(\omega h - \omega) - e^{2\pi iph} \sin(\omega h) + \sin \omega}{\sin \omega (1 + e^{4\pi iph} - 2e^{2\pi iph} \cos(\omega h))} + \frac{\omega - \cos \omega - 2\pi ip \sin \omega}{\sin \omega ((2\pi ip)^2 + \omega^2)} + \\ &+ \sum_{k=1}^{m-1} \left( \frac{\lambda_k^{N+1} \sin(\omega h - \omega) - \lambda_k \sin(\omega h) + \lambda_k^N \sin \omega}{\sin \omega (1 + \lambda_k^2 - 2\lambda_k \cos(\omega h))} a_k + \frac{\lambda_k \sin(\omega h - \omega) - \lambda_k^{N+1} \sin(\omega h) + \lambda_k^2 \sin \omega}{\sin \omega (1 + \lambda_k^2 - 2\lambda_k \cos(\omega h))} b_k \right), \end{aligned}$$



где  $K$ ,  $a_k$ ,  $b_k$  и  $\lambda_k$  - известные величины.

### Литература

1. *Filon L.N.G.* On a quadrature formula trigonometric integrals, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1928, 49, pp.38-47.
2. *Boltaev N.D., Hayotov A.R., Shadimetov Kh.M.* Construction of optimal quadrature formulas for Fourier coefficients in Sobolev space  $L_2^{(m)}$ , Numerical Algorithms, 74 (2017), 307-336.
3. *Boltaev N.D., Hayotov A.R., Milovanović G.V., Shadimetov Kh.M.* Optimal quadrature formulas for Fourier coefficients in  $W_2^{(m,m-1)}$  space, Journal of Applied Analysis and Computation, 7 (2017), 1233-1266.
4. *Hayotov A.R., Jeon S., Lee Ch.-O.* On an optimal quadrature formula for approximation of Fourier integrals in the space  $L_2^{(1)}$ , Journal of Computational and Applied Mathematics, 372 (2020), 112713.
5. *Hayotov A.R., Jeon S., Lee Ch.-O., Shadimetov Kh.M.* Optimal quadrature formulas for non-periodic functions in Sobolev space and its application to CT image reconstruction, arXiv: 2001.02636v2.

## СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОПТИМАЛЬНЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_2^{(2)}(0, t)$ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБЩЕГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ

<sup>1</sup>Далиев Б.С.

<sup>1</sup> Ферганский политехнический институт, Узбекистан  
e-mail: bahtiyorjon@inbox.ru

Для квадратурных формул вида

$$\int_0^t \frac{\varphi(x)dx}{(t-x)^{1-\alpha}} \cong \sum_{\beta=0}^N C[\beta]\varphi(h\beta), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (1)$$

с функционалом погрешности

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0,t]}(t-x)^{\alpha-1} - \sum_{\beta=0}^N C[\beta]\delta(x-h\beta), \quad (2)$$

в пространстве Соболева  $L_2^{(m)}(0, t)$  (см. [2,3]) в работе [1] найдена экстремальная функция, вычислена квадрат нормы функционала погрешности, а в работе [5] получена система для коэффициентов  $\overset{0}{C}[\beta]$ :

$$G_m[\beta] * \overset{0}{C}[\beta] + P_{m-1}[\beta] = f_m[\beta], \quad \beta = 0, 1, \dots, N, \quad (3)$$

$$\overset{0}{C}[\beta] = 0, \quad h\beta \notin [0, t] \quad (4)$$

$$\sum_{\beta=0}^N \overset{0}{C}[\beta](h\beta)^k = g_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (5)$$

Здесь

$$G_m[\beta] = \frac{|h\beta|^{2m-1}}{2 \cdot (2m-1)!}, \quad (6)$$

$$f_m[\beta] = \sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^k \frac{(h\beta)^{2m-1-k} (\alpha-1)! t^{\alpha+k}}{2 \cdot (2m-1-k)! (\alpha+k)!} + \frac{(\alpha-1)! (t-h\beta)^{2m-1+\alpha}}{(\alpha+2m-1)!}, \quad (7)$$

$$g_k = \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} x^k dx = \frac{(\alpha-1)! k! t^{\alpha+k}}{(\alpha+k)!}. \quad (8)$$

В работе [4] разработан алгоритм решения системы типа (3)-(5). А в работе [5] мы вычислили коэффициенты в случае  $m = 1$ .

В настоящей работе этот алгоритм реализуем в случае  $m = 2$ .

В случае  $m = 2$  систему (5)-(7) можем писать в виде

$$G_2[\beta] * \overset{0}{C}[\beta] + \lambda_1 h\beta + \lambda_0 = f_2[\beta], \quad h\beta \in [0, t], \quad (9)$$

$$\overset{0}{C}[\beta] = 0, \quad h\beta \notin [0, t], \quad (10)$$

$$\sum_{\beta=0}^N \overset{0}{C}[\beta] = g_0, \quad \sum_{\beta=0}^N \overset{0}{C}[\beta] h\beta = g_1. \quad (11)$$

Здесь  $G_2[\beta] = \frac{|h\beta|^3}{12}$ ,  $[\beta] = h\beta$ ,

$$f_2[\beta] = \frac{t^\alpha (h\beta)^3}{12\alpha} - \frac{t^{\alpha+1} (h\beta)^2}{4\alpha(\alpha+1)} + \frac{t^{\alpha+2} (h\beta)}{2\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{t^{\alpha+3}}{2\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} + \frac{(t-h\beta)^{\alpha+3}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}, \quad (12)$$

$$g_0 = \frac{t^\alpha}{\alpha}, \quad g_1 = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}. \quad (13)$$

$h = \frac{t}{N}$ ,  $N = 1, 2, \dots$ ,  $\lambda_0, \lambda_1$  - неизвестные параметры.

Основными результатами настоящей работы является определения оптимальных коэффициентов квадратурной формулы (1) и вычисления нормы функционала погрешности (2) с оптимальными коэффициентами в пространстве  $L_2^{(2)}(0, t)$ .

## Литература

1. Шадиметов Х.М., Далиев Б.С. Экстремальная функция квадратурных формул для приближенного решения обобщенного интегрального уравнения Абея. // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2019,  $\epsilon 2$  (20), с. 88-95.
2. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М., 1974, 808 с.
3. Соболев С.Л., Васкевич В.Л. Кубатурные формулы. Новосибирск из-во им СОРАН 1996, 488 с.
4. Шадиметов Х.М. Оптимальные решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах Соболева. -Т.: "Фан ва технологиялар" 2019, 229 с.
5. Шадиметов Х.М., Далиев Б.С. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул для приближенного решения общего интегрального уравнения Абея. // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2020,  $\epsilon 2$  (26), с. 24-31.

## О ПОСТРОЕНИИ ДИСКРЕТНОГО АНАЛОГА $D_3^h[\beta]$ ОДНОГО ОПЕРАТОРА

<sup>1</sup>Жалолов Ик.И.

<sup>1</sup> *Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта, Узбекистан*  
e-mail: o\_jalolov@mail.ru

С.Л.Соболев рассмотрел проблему построения оптимальных решетчатых формул над пространством  $L_2^{(m)}(R^n)$  и нахождение оптимальных коэффициентов свчл к решению дискретной задачи типа Винера - Хопфа (см. [1]). В работе рассматривается построение оператора  $D_3[h\beta]$ , которая удовлетворяет равенству

$$D_3[\beta] * \nu_3[\beta] = \delta[\beta]. \quad (1)$$

Здесь

$$\nu_3[\beta] = F^{-1} \left\{ [1 + y^2]^3 \right\}_{x=h\beta}(x), \quad (2)$$

где  $h = \frac{1}{N}$ ,  $N = 2, 3, \dots$ ,  $[\beta] = h\beta$ .

**Теорема 1.** *Оператор  $D_3[k]$  удовлетворяющий равенству (1) определяется формулой*

$$D_3[k] = B \cdot \begin{cases} c + \sum_{i=1}^2 \frac{A_i}{\lambda_i}, k = 0 \\ 1 + \sum_{i=1}^2 A_i, |k| = 1 \\ \sum_{i=1}^2 A_i \lambda_i^{|k|-1}, |k| \geq 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$B = \frac{4}{a_1\pi}, a_1 = 16\pi^2 h^2 sh2\pi h - 3 \left( \pi h ch2\pi h - \frac{1}{2} sh2\pi h \right), c = - \left( 6ch2\pi h + \frac{a_2}{a_1} \right),$$

$$a_2 = 6ch2\pi h \left( \pi h sh2\pi h - \frac{1}{2} sh2\pi h \right) - 3(sh2\pi h ch2\pi h - 2\pi h) - 8\pi^2 h^2 sh2\pi h,$$

$$A_i = \frac{\lambda_i^6 - 6b\lambda_i^5 + 3(b^2 + 1)\lambda_i^4 - 4b(2b^2 + 3)\lambda_i^3 + 3(4b^2 + 1)\lambda_i^2 - 6b\lambda_i + 1}{\lambda_i^2 - 1}. \quad (4)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{4} \left[ b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_2 - 8} + \sqrt{\left( b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_2 + 8} \right)^2 - 16} \right],$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{4} \left[ b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_2 - 8} - \sqrt{\left( b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_2 + 8} \right)^2 - 16} \right].$$

$\lambda_i$  - корни многочлена  $p_4(\lambda) = \lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda + 1$  и  $h$  - малый параметр.

### Литература

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул, М: Наука, 1974, 808с.

## НИЖНЯЯ ОЦЕНКА НОРМЫ ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ РЕШЕТЧАТЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ В ПРОСТРАНСТВЕ $H_p^\mu(\Omega)$

<sup>1</sup>Жалолов О.И., <sup>2</sup>Хаятов Х.У.

<sup>1</sup> Бухарский государственный университет, Узбекистан  
e-mail: o\_jalolov@mail.ru

<sup>1</sup> Бухарский государственный университет, Узбекистан  
e-mail: wera00@mail.ru

С. Л. Соболев в работе [1] дал алгоритм построения кубатурных формул, названных им формулами с регулярным пограничным слоем и оценил сверху с выделением главного члена норму функционала ошибки в пространстве  $U_2^m(\Omega)$ . Рассмотрим кубатурную формулу вида:

$$\int_{\Omega} f(x) dx \approx \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} f(x^{(\lambda)}). \quad (1)$$

Обобщенная функция

$$\ell(f) = \int_{\Omega} f(x) dx - \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} f(x^{(\lambda)}), \quad (2)$$

называется функционалом погрешности кубатурной формулы (1).

В работе [2] была получена верхняя оценка нормы функционала погрешности с регулярным в смысле С.Л. Соболева пограничным слоем в пространствах  $H_p^\mu(\Omega)$ . В настоящей работе получим оценку с низу для произвольного функционала погрешности решетчатых кубатурных формул в пространствах  $H_p^\mu(\Omega)$ .

**Теорема 1.** Пусть, тогда для любого функционала погрешности решетчатых кубатурных формул в пространствах  $H_p^\mu(\Omega)$  справедлива следующая оценка

$$\|\ell(x)/H_p^{\mu*}(\Omega)\| \geq (\text{mes}\Omega)^{\frac{1}{q}} \left\{ \int_{\Omega_0} \left| \sum_{\gamma \neq 0} \frac{e^{2\pi i(\gamma, x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)} \right|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} [1 + o(1)]. \quad (3)$$

Доказательство основано на следующую лемму.

**Лемма.** Имеет место следующее равенство

$$-C(h) = \int_{\Omega_0} \left| \sum_{\gamma \neq 0} \frac{e^{2\pi i(\gamma, x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)} \right|^q dx. \quad (4)$$

Из теоремы 1 и результатов работы [2] следует:

**Теорема 2.** Если, тогда кубатурная формула с регулярным смысле С. Л. Соболева пограничным слоем является асимптотически оптимальной в пространстве  $H_p^\mu(\Omega)$ .

### Литература

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. - 808с.
2. Шарипов Т.Х. Верхняя оценка норма функционала ошибки кубатурных формул с регулярным в смысле С.Л.Соболева пограничным слоем в пространствах . ДАН СССР, 202, no 1 (1972) 51-53.

## MATHCAD НЕ ТОЛЬКО ПРОГРАММА, А ИСПОЛНИТЕЛЬ АЛГОРИТМОВ

<sup>1</sup> Имомов А., <sup>2</sup>Тошбоев С.М., <sup>3</sup>Хасанов С.С.

*Наманганский государственный университет, Узбекистан*

<sup>1</sup>e-mail: imomov50@bk.ru,

<sup>2</sup>e-mail: afsona77@list.ru,

<sup>3</sup>e-mail: shs\_93@mail.ru

Алгоритм - это формальное описание способа решения задачи путем разбиения его на конечную последовательность элементарных операций- модулей, каждый из которых выполняет одно или несколько действий, которое по заранее определенным критериям не имеет смысла детализировать. Алгоритм на выбранном языке программирования записывается с помощью команд описания данных, вычисления значений и управления последовательностью выполнения программы.

В настоящее время имеются математические программы, с помощью которых без составления программ можно решить обширный класс математических задач с помощью команд, как в калькуляторах. Их называют математическими системами. Правда, желающие могут и делать это с помощью внутреннего языка программирования математических систем. Вот небольшой список математических систем: Mathcad, Maple, Mathematica, MathLab, Scilab.

В математических системах решение задачи можно найти 4-мя способами: 1) на основе команд. 2) на основе алгоритма. 3) на основе внутреннего языка. 4) на основе интерактивного способа [1][2].

Именно, в математической системе Mathcad эти четыре способа решения задач выглядят наиболее ярко. Для задач методов вычислений важную роль играет второй способ решения задач, так как в этом способе задача решается только с помощью математического алгоритма решения задачи. Mathcad выступает в качестве исполнителя укрупненного алгоритма, а пользователь играет роль создателя алгоритма. Наши мысли, мы демонстрируем четырьмя примерами: 1-2) нахождение собственных значений матрицы методами Леве́ррье и интерполяции, где нет особых случаев; 3) нахождение корней нелинейной системы уравнений итерационным методом Ньютона; 4) объединенным алгоритмом решения задачи Коши методами Рунге-Кутты.

**Пример 1.** Метод Леве́ррье нахождения собственных значений [3]. Пусть дана матрица  $A = [a_{ij}]$ ,  $i, j = 1..n$ . Алгоритм метода: вычисляются 1) матрицы  $A^k$ ,  $k = 1..n$ . 2) следы:  $s_k = \text{trace}(A^k) = a_{11}^k + \dots + a_{nn}^k$ ; 3) коэффициенты:  $p_k = (s_k - p_1 s_{k-1} - \dots - p_{k-1} s_1)/k$ ,  $p_1 = s_1$  вековое уравнения  $D(\lambda) = |A - \lambda E| = (-1)^n (\lambda^n - \sum_{i=1}^n p_i \lambda^i) = 0$ ; 4) решается вековое уравнение. Этапы вычислений трудоемкие. Mathcad упрощает задачу. С помощью внутренней функции  $r1 := \text{eigenvals}(A)$  проверяем наш результат. После знака // приведём объяснения.

$ORIGIN := 1$   $n := 3$   $A := \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$   $k = 1..n$   $s_i := \text{tr}(A^i)$   $s = [957423]$   $p_1 := s_1$  //матрицы, следы

$k := 2..n$   $p_k := \frac{1}{k}(s_k - \sum_{i=1}^{k-1} p_i s_{k-i})$   $p = \begin{bmatrix} 9 \\ -12 \\ 6 \end{bmatrix}$   $q := - \begin{bmatrix} p_3 \\ p_2 \\ p_1 \end{bmatrix}$   $q = \begin{bmatrix} -6 \\ 12 \\ -9 \end{bmatrix}$  //часть коэф.  
 $D(\lambda) = \det(A - \lambda E)$

$P := \text{stack}(q, 1) P^T = [-6 \ 12 \ -9 \ 1] //$  все коэффициенты

$r := \text{polyroots}(P) r = \begin{bmatrix} 0.746 + 0.493i \\ 0.746 - 0.493i \\ 7.508 \end{bmatrix} r1 := \text{eigenvals}(A) r1 = \begin{bmatrix} 0.746 + 0.493i \\ 0.746 - 0.493i \\ 7.508 \end{bmatrix} //$  ответ

**Пример 2.** Метод интерполяции для собственных значений [3]. Идея метода:  $D(i) = |A - i * E| = (-1)^n * (i^n - \sum_{j=1}^n p_j i^{n-j}) = d_i, i = 1..n$ . Это даст нам алгоритм:

$ORIGIN := 1n := 3E := \text{identity}(n) A := \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} i = 1..nj := 1..n D_i := |A - i * E| d_i := (-1)^n * D_i$

$d = \begin{bmatrix} -2 \\ -10 \\ -24 \end{bmatrix} M_{i,j} := i^{n-j} M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix} b_i := i^n - d_i b = \begin{bmatrix} 3 \\ 18 \\ 51 \end{bmatrix} //$  СЛАУ: матрица, правая часть

$p := M^{-1} * b p = \begin{bmatrix} 9 \\ -12 \\ 6 \end{bmatrix} p1 = - \begin{bmatrix} p_3 \\ p_2 \\ p_1 \end{bmatrix} q := \text{stack}(p1, 1) q^T = [-6 \ 12 \ -9 \ 1] //$  Решение СЛАУ

$r := \text{polyroots}(q) r = \begin{bmatrix} 0.746 + 0.493i \\ 0.746 - 0.493i \\ 7.508 \end{bmatrix} r1 := \text{eigenvals}(A) r1 = \begin{bmatrix} 7.508 \\ 0.746 + 0.493i \\ 0.746 - 0.493i \end{bmatrix} //$  ответ, проверка

**Пример 3.** Решение нелинейной системы  $x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1^2 - x_2 = 0$  методом Ньютона.

$ORIGIN := 1g(x)^T := [x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1^2 - x_2 = 0] J(x) := \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -1 \end{bmatrix} //$  система уравнений

$x^{<1>} := [-1 \ 0]^T y^{<1>} := [-1 \ 0]^T //$  задание начальной итерации ( $x^{<1>} := [1 \ 0]^T$ )

$k := 1..5 x^{<k+1>} := x^{<k>} - (J(x^{<k>}))^{-1} f(x^{<k>}) //$  Построение итераций Ньютона

$x = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -0.833 & -0.788 & -0.786 & -0.786 \\ 0 & 1 & 0.667 & 0.619 & 0.618 & 0.618 \end{bmatrix} // x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.8333 & 0.7881 & 0.7861 & 0.7861 \\ 0 & 1 & 0.6667 & 0.6190 & 0.6180 & 0.6180 \end{bmatrix}$

$y^{<k+1>} := y^{<k>} - (J(y^{<1>}))^{-1} f(y^{<k>}) //$  Итерации упрощенного метода Ньютона

$y = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -0.833 & -0.788 & -0.786 & -0.786 \\ 0 & 1 & 0.667 & 0.619 & 0.618 & 0.618 \end{bmatrix} // y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.8333 & 0.7881 & 0.7861 & 0.7861 \\ 0 & 1 & 0.6667 & 0.6190 & 0.6180 & 0.6180 \end{bmatrix}$

Формула Ньютона  $x^{<k+1>} := x^{<k>} - (J(x^{<1>}))^{-1} f(x^{<k>})$  работает только в Mathcad.

**Пример 4.** Решение задачи Коши  $y' = \alpha x - \beta x^2, y(0) = 1$  4-мя методами Рунге-Кутты в Mathcad.

$a := 0 b := 1 n := 10 h := (b - a)/n i := 0..n x_i := a + ih //$  область задания ОДУ

$f(x, y) := \alpha x - \beta x^2 y_0 := 1 \alpha := 1 \beta := 0.1 yE_0 := y_0 //$  ОДУ

$yE_{i+1} := yE_1 + hf(x_i, yE_i) //$  метод Эйлера

$yYE_{i+1} := yR_i + hf(x_i + \frac{h}{2}, yE_i + \frac{h}{2}f(x_i, yE_i)) //$  Модифиц. мет. Эйлера

$yPE_{i+1} := yE_i + h(f(x_i, yE_i) + f(x_{i+1}, yE_{i+1}))/2 //$  метод прогноз- коррекции

$k1_i := hf(x_i, y_i)$   $k2_i := hf(x_i + h/2, y_i + k1_i/2)$  // коэфф. метода ПК  
 $k3_i := hf(x_i + h/2, y_i + k2_i/2)$   $k4_i := hf(x_i + h, y_i + k3_i)$  // коэфф. метода РК  
 $yRK_{i+1} := i_i + \frac{1}{6}(k1_i + 2k2_i + 2k3_i + k4_i)$  // метод Рунге-Кутты  
 $j := 0..n$   $C_{0,j} = x_j$   $C_{1,j} := E_j$   $C_{2,j} := YE_j$   $C_{3,j} := PK_j$  // вывод в таблицу

Выполняя вычисления приходим к следующей таблице:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	1.0099	1.0295	1.0586	1.097	1.1445	1.2009	1.266	1.3396	1.4215
1	1	1.005	1.0197	1.0441	1.0779	1.1209	1.1729	1.2336	1.303	1.3808	1.4668
2	1	1.005	1.0197	1.0441	1.0778	1.1208	1.1727	1.2335	1.3028	1.3806	1.4665
3	1	1.005	1.0197	1.0441	1.0779	1.1208	1.1728	1.2336	1.3029	1.3807	1.4667

## Литература

1. Имомов А. Методы вычислений. 1-часть. Н.:НамГУ, 2019.-120 с.
2. Имомов А. Методы вычислений. 2-часть. Н.:НамГУ, 2018.-120 с.
3. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.:Наука, 1966.-664 с.

## ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОПТИМАЛЬНЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ В ПРОСТРАНСТВЕ $W_{2,\sigma}^{(2,1)}$

Кулдошев Х.М.

Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада аль-Хоразмий, Ташкент, Узбекистан  
e-mail: hakimkhm1971@mail.ru

Рассмотрим следующую квадратурную формулу

$$\int_0^1 f(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_{\beta}f(x_{\beta}) \quad (1)$$

с функционалом погрешности

$$\ell_N(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta}\delta(x - x_{\beta}) \quad (2)$$

на пространстве  $W_{2,\sigma}^{(2,1)}(0, 1)$ . Здесь  $C_{\beta}$  – коэффициенты и  $x_{\beta}$  – узлы квадратурной формулы (1),  $\varepsilon_{[0,1]}(x)$  – индикатор отрезка  $[0, 1]$ ,  $\delta$  – дельта функция Дирака,  $\varphi$  – элемент гильбертова пространства  $W_{2,\sigma}^{(2,1)}(0, 1)$ , норма функций в котором задается формулой

$$\|f(x)|W_{2,\sigma}^{(2,1)}(0, 1)\| = \left\{ \int_0^1 (f''(x) + \sigma f'(x))^2 dx \right\}^{1/2}, \text{ где } \sigma > 0.$$

Погрешностью квадратурной формулы (1) называется разность

$$(\ell, f) = \int_0^1 f(x)dx - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta}f(x_{\beta}) = \int_0^1 \ell(x)f(x)dx.$$

Качество квадратурной формулы (1) оценивается при помощи нормы функционала погрешности

$$\|\ell|W_{2,\sigma}^{(2,1)*}\| = \sup_{\|\varphi|W_{2,\sigma}^{(2,1)}(0,1)\|=1} |(\ell, \varphi)|.$$

Норма функционала погрешности  $\ell$  зависит от коэффициентов  $C_\beta$  и узлов  $x_\beta$ . Выбор коэффициентов при фиксированных узлах представляет собою линейную задачу. Поэтому мы фиксируем узлы  $x_\beta$  и норму функционала погрешности минимизируем по коэффициентам, т.е. найдем

$$\|\mathring{\ell}|W_{2,\sigma}^{(2,1)*}\| = \inf_{C_\beta} \|\ell|W_{2,\sigma}^{(2,1)*}\|. \quad (3)$$

Если найдена  $\|\mathring{\ell}\|$ , то говорят, что функционал  $\mathring{\ell}$  соответствует оптимальной квадратурной формуле в  $W_{2,\sigma}^{(2,1)}$ . Таким образом, мы получим следующую задачу.

**Задача 1.** *Найти такие значения коэффициентов  $C_\beta$ , чтобы выполнялось равенство (3).*

В настоящей работе решена Задача 1, т.е. в пространстве  $W_{2,\sigma}^{(2,1)}$  построена оптимальная квадратурная формула вида (1). Для оптимальных коэффициентов получена система линейных алгебраических уравнений. Исследована существование и единственность решения этой системы. Наконец, получены явные формулы для оптимальных коэффициентов. В частности, из результатов этой работы при  $\sigma = 1$  получим известные.

Следует отметить, что получена оптимальная квадратурная формула точна для  $e^{-\sigma x}$  и 1.

## РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ИГРЫ ДВУХ ЛИЦ

Маматов А.Р.

Высшее военное авиационное училище Республики Узбекистан

e-mail: akmm1964@rambler.ru

Как известно [1], задачу о непустоте множества планов задачи линейного программирования, можно решить с помощью специальной задачи линейного программирования (задача первой фазы). Аналогичная задача, возникающая в игровых задачах со связанными переменными исследована в работе [2]. В данной работе используя результаты [2,3], предложен алгоритм решения одной линейной игры двух лиц (игроков)- задача перевода траектории динамической системы, управляемой двумя игроками из множества в терминальное множество.

Пусть на фиксированном отрезке времени  $T = [0, t^*]$ , поведение системы, управляемой двумя игроками (участниками), описывается дифференциальным уравнением [3-5]:

$$\dot{x} = Ax + bu + dv, \quad x(0) = D\omega. \quad (1)$$

Здесь  $x = x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))'$  - вектор состояния системы в момент  $t$ ;  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$ , - значения управляющих воздействий первого и второго игроков соответственно в момент  $t$ ;  $A$ ,  $D$  - заданные соответственно  $n \times n$  и  $n \times r$  постоянные матрицы;  $b$ ,  $d$  - заданные  $n$  - векторы;  $\omega$  - заданный  $r$  - вектор; (штрих)' - знак транспонирования.

Совокупность  $z(\cdot) = (u(\cdot), \omega)$  из кусочно-постоянной функции  $u(\cdot) = (u(t), t \in T)$ , непрерывной справа и вектора  $\omega$ , удовлетворяющей неравенствам  $f_* \leq u(t) \leq f^*$ ,  $t \in T$ ;  $\omega_* \leq \omega \leq \omega^*$ , называется управлением первого игрока ( $f_*$ ,  $f^*$  - заданные числа.)

Импульсная функция [6,7]  $v(\cdot) = (v(t), t \in T)$  с множеством квантования  $\tau = \{t_1, t_2, \dots, t_l\}$ ,  $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_l < t_{l+1} = t^*$  ( $l \geq m$ ), удовлетворяющей неравенствам  $g_*(t) \leq v(t) \leq$



$g^*(t), t \in T$ , называется управлением второго игрока ( $g_*(t), g^*(t), t \in T$ , заданные импульсные функции с множеством квантования  $\tau$ .)

Согласно теории дифференциальных уравнений каждой паре  $\{u, v\}$  управлений игроков соответствует единственное непрерывное решение  $x(\cdot) = (x(t), t \in T)$  уравнения (1) - траектория динамической системы.

Пусть  $H$  – заданная постоянная  $m \times n$  матрица,  $g$  - заданный  $m$  вектор. Введем в рассмотрение множества

$$M_0 = \{x \in R^n \mid x = D\omega, \omega_* \leq \omega \leq \omega^*\}, M = \{x \in R^n \mid Hx = g\}.$$

Рассмотрим следующую задачу (игру). Два игрока, выбирают управление  $z(\cdot) = (u(\cdot), \omega)$  и  $v(\cdot)$  поочередно, сначала первый игрок выбирает  $z(\cdot) = (u(\cdot), \omega)$ , затем, зная  $z(\cdot) = (u(\cdot), \omega)$ , второй игрок выбирает  $v(\cdot)$ .

Цель первого игрока заключается выбором управление  $z^0(\cdot) = (u(\cdot), \omega)$ , не допустить попадание траектории системы (1) в момент  $t^*$  в множество  $M$ , а цель второго игрока - выбором управление  $v^0(\cdot)$ , перевести траектории системы (1) из множество  $M_0$  в множество  $M$  при  $t^*$ .

Эта задача исследована с помощью специальной негладкой задачи оптимизации. Используя связь между этими задачами, разработан алгоритм решения рассматриваемой задачи. Алгоритм основан на сравнение значений в специальных управлений игроков задачи, двойственной к специальной негладкой задачи оптимизации.

## Литература

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. - М.: Изд-во БГУ, 1981.
2. Маматов А.Р. Алгоритм решения одной игры двух лиц с передачей информации //ЖВМиМФ, 2006, Т.46, №10, с. 1784-1789.
3. Маматов А.Р. Алгоритм решения модульной максиминной задачи управления//СамДУ илимий ахборотномаси, 2017, 1(101)-сон, Табиий фанлар, 12-20 б.
4. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. - М.:Наука,1985. 520 с.
5. Маматов А.Р. Принцип максимума в одной максиминной задаче управления//Узбекский математический журнал,2007,№3,стр. 53-61.
6. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А. И. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 1-2. - Мн.: Университетское, 1984. 214. С. 207 с.
7. Гневко С.В., Исраилов И.И. Построение гарантирующего управления в линейной дифференциальной игре//Актуальные задачи теории динамических управления. - Мн.:Наука и техника, 1989. С.203 - 212.

## ПРОТИВОПОТОЧНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ИЗ ДВУХ УРАВНЕНИЙ

<sup>1</sup>Неъматова Д.Э., <sup>2</sup>Амиркулов С.С., <sup>3</sup>Хужаев Ж.И.

<sup>1</sup> Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,

e-mail: nematova\_dilfuza@mail.ru

<sup>2</sup> Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,

e-mail: amirqulovsiroj@gmail.com

<sup>3</sup> Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,

e-mail: jamolhoja@mail.ru

Исследуем следующую противоположную разностную схему

$$\begin{cases} (u_1)_j^{\kappa+1} = (u_1)_j^\kappa - a_1 \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ (u_1)_j^\kappa - (u_1)_{j-1}^\kappa \right], & j = 1, \dots, J; \\ (u_2)_j^{\kappa+1} = (u_2)_j^\kappa - a_2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ (u_2)_j^\kappa - (u_2)_{j+1}^\kappa \right], & j = 0, \dots, J-1, \end{cases} \quad \kappa = 0, \dots, K-1. \quad (1)$$

Начальные условия для (1) задаётся следующим образом:

$$(u_1)_j^0 = (u_{10})_j, \quad (u_2)_j^0 = (u_{20})_j; \quad j = 0, \dots, J. \quad (2)$$

Граничные условия для (1) задаётся следующим способом:

$$(u_1)_0^\kappa = r (u_2)_0^\kappa, \quad (u_2)_J^\kappa = s (u_1)_J^\kappa, \quad \kappa = 1, \dots, K; \quad (3)$$

Здесь  $a_1 > 0$ ,  $-a_2 < 0$ ,  $s$  и  $r$  - вещественные постоянные.

Предположим, что шаги разностной сетки удовлетворяют условию Куранта-Фридрихса-Леви (КФЛ)

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max |a_1, a_2| \leq 1.$$

Доказана следующая теорема

**Теорема 1.** Пусть  $T > 0$ . Если шаги разностной сетки удовлетворяют условию КФЛ  $\frac{\Delta t}{\Delta x} \max(a_1, a_2) \leq 1$  и параметры граничных условий (3)  $r, s$  подчиняются неравенству  $|rs| < 1$ , тогда численное решение  $\mathbf{u}_j^\kappa = \left( (u_1)_j^\kappa, (u_2)_j^\kappa \right)^T$  разностной начально краевой задачи (1)-(3) экспоненциально устойчиво в  $L^2$ -норме.

## Литература

1. Alov R.D., Eshkuvatov Z.K., Davlatov Sh.O., Nik Long N.M.A., Sufficient condition of stability of finite element method for symmetric t-hyperbolic systems with constant coefficients, Computers and Mathematics with Applications, Vol. 68, 2014, pp.1194-1204.
2. Alov R.D., Davlatov Sh.O., Eshkuvatov Z. K., Nik Long N.M.A. Uniqueness solution of the finite elements scheme for symmetric hyperbolic systems with variable coefficients. Malaysian Journal of Mathematical Sciences (MJMS), 10(S), 2016, pp. 49-60.
3. Alov R.D., Khudoyberganov M. U., Blokhin A.M. Construction and research of adequate computational models for quasilinear hyperbolic systems. Numerical Algebra, Control and Optimization. Vol. 8(3) 2018. pp. 287-299.
4. Alov R. D., Eshkuvatov Z. K., Khudoyberganov M. U. , Nematova D. E. The Difference Splitting Scheme for Hyperbolic Systems with Variable Coefficients. Mathematics and Statistics. Vol. 7(3), 2019, pp. 82-89 DOI: 10.13189/ms.2019.070305.

## КВАДРАТ НОРМЫ ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ ОДНОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ С ПРОИЗВОДНЫМИ

<sup>1</sup>Нуралиев Ф.А., <sup>2</sup>Расулов Р.Г., <sup>2</sup>Мирзакабиллов Р.Н.

<sup>1</sup> Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан  
e-mail: nuraliyevf@mail.ru

<sup>2</sup> Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан  
e-mail: r.rasulov1990@mail.ru

Рассмотрим квадратурную формулу с производными следующего вида

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_\beta \varphi[\beta] + \sum_{\beta=0}^N A_\beta \varphi^{(m-1)}[\beta] \quad (1)$$

с функционалом погрешности

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta \delta(x - h\beta) - (-1)^{m-1} \sum_{\beta=0}^N A_\beta \delta^{(m-1)}(x - h\beta), \quad (2)$$

здесь  $C_0 = C_N = h \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m-2} d_k \frac{q_k - q_k^N}{q_k - 1} \right)$ ,  $C_\beta = h \left( 1 + \sum_{k=1}^{m-2} d_k (q_k^\beta + q_k^{N-\beta}) \right)$ ,  $\beta = \overline{1, N-1}$ ,  $d_k$  – известные,  $q_k$  – корни полинома  $E_{2m-4}(q)$ , причем  $|q_k| < 1$ ,  $A_\beta$  – коэффициенты квадратурной формулы (1),  $\varepsilon_{[0,1]}(x)$  – индикатор области  $[0, 1]$ ,  $\delta$  – известная дельта-функция Дирака,  $[\beta] = h\beta$ ,  $h = 1/N$ ,  $N = 1, 2, 3, \dots$ , функция  $\varphi$  принадлежит пространству  $L_2^{(m)}(0, 1)$ . Норма функций в этом пространстве определяется следующим образом

$$\|\varphi\|_{L_2^{(m)}(0, 1)} = \left[ \int_0^1 (\varphi^{(m)}(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Погрешностью квадратурной формулы (1) называется разность

$$(\ell, \varphi) = \int_0^1 \varphi(x) dx - \sum_{\beta=0}^N C_\beta \varphi(h\beta) - \sum_{\beta=0}^N A_\beta \varphi^{(m-1)}(h\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) \varphi(x) dx.$$

Следует отметить, что погрешность формулы (1) оценивается сверху нормой функционала погрешности в сопряженном пространстве  $L_2^{(m)*}(0, 1)$ . В связи с этим в настоящей работе вычислен квадрат нормы функционала погрешности при этом используется экстремальная функция квадратурной формулы.

Функция  $\psi_\ell$  называется экстремальной функцией функционала  $\ell$  [1], если

$$(\ell, \psi_\ell) = \|\ell\|_{L_2^{(m)*}(0, 1)} \cdot \|\psi_\ell\|_{L_2^{(m)}(0, 1)}.$$

Так как пространство  $L_2^{(m)}$  является гильбертовым, то по теореме Рисса квадрат нормы функционала погрешности вычисляется по формуле

$$\|\ell\|_{L_2^{(m)*}(0, 1)}^2 = (\ell, \psi_\ell).$$

Основными результатами настоящей работы являются следующие теоремы.

**Теорема 1.** *Экстремальная функция  $\psi_\ell$  функционала погрешности (2) в пространстве  $L_2^{(m)}(0, 1)$  имеет вид:*

$$\psi_\ell(x) = (-1)^m \ell(x) * G_m(x) + P_{m-1}(x),$$

где  $G_m(x) = \frac{x^{2m-1} \text{sign} x}{2 \cdot (2m-1)!}$ ,  $P_{m-1}(x)$  – многочлен степени  $m-1$ .

**Теорема 2.** *Квадрат нормы функционала погрешности (2) квадратурных формул вида (1) на пространстве  $L_2^{(m)}(0, 1)$  имеет вид:*

$$\begin{aligned} \|\ell(x)\|_{L_2^{(m)*}(0, 1)}^2 = & (-1)^m \left[ \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N A_\beta A_\gamma (-1)^{m-1} \frac{|h\beta - h\gamma|}{2} + 2 \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N A_\beta C_\gamma \frac{(h\gamma - h\beta)^m \text{sign}(h\gamma - h\beta)}{2m!} - \right. \\ & - 2 \sum_{\beta=0}^N A_\beta (-1)^{m-1} \int_0^1 \frac{(x - h\beta)^m \text{sign}(x - h\beta)}{2m!} dx - 2 \sum_{\beta=0}^N C_\beta \int_0^1 \frac{(x - h\beta)^{2m-1} \text{sign}(x - h\beta)}{2(2m-1)!} dx + \\ & \left. + \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_\beta C_\gamma \frac{(h\beta - h\gamma)^{2m-1} \text{sign}(h\beta - h\gamma)}{2(2m-1)!} + \int_0^1 \int_0^1 \frac{(x-y)^{2m-1}}{2(2m-1)!} dx dy \right]. \end{aligned}$$

## Литература

1. *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. -М.: Наука, 1974, 808 стр.

### ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АДАМСА-БАШФОРТА-МОУЛТОНА К ЧИСЛЕННОМУ ИССЛЕДОВАНИЮ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНЫХ ДРОБНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Паровик Р.И.

<sup>1</sup> Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, г.  
Петропавловск-Камчатский, Россия

<sup>2</sup> Институт космических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, с.  
Паратунка, Россия  
e-mail: romanparovik@gmail.com

В работе проводится численный анализ класса математических моделей линейных дробных осцилляторов (ЛДО), который представляет собой задачу Коши для дифференциального уравнения с производными дробных порядков в смысле Герасимова-Капуто. В качестве инструментов численного анализа рассмотрен метод, основанный на явной нелокальной конечно-разностной схеме (ЯНКРС) [1] и метод Адамса-Башфорта-Моултона (АБМ) [2]. Проведен анализ погрешностей методов, показано, что метод АБМ является более точным и сходится быстрее к точному решению, чем метод ЯНКРС. Рассмотрены конкретные математические модели дробных линейных осцилляторов: дробный аналог гармонического осциллятора, дробный осциллятор Матье и Эйри. С помощью метода АБМ при различных значениях параметров, входящих в модельное уравнение, были построены осциллограммы и фазовые траектории. Проведена интерпретация результатов моделирования. Введем следующие ключевые определения.

**Определение 1.** *Дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка  $\alpha$  [3]:*

$$I_{0t}^{\alpha} x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{x(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}, \alpha > 0, t > 0, \quad (9)$$

и имеет следующие свойства:  $I_{0t}^0 x(\tau) = x(t)$ ,  $I_{0t}^{\alpha} I_0^{\beta} x(\tau) = I_{0t}^{\alpha+\beta} x(\tau)$ ,

$$I_{0t}^{\alpha} I_0^{\beta} x(\tau) = I_0^{\beta} I_{0t}^{\alpha} x(\tau).$$

**Определение 2.** *Дробная производная Герасимова-Капуто порядка  $\alpha$  имеет вид [3]:*

$$\partial_{0t}^{\alpha} x(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{x^{(m)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}}, 0 \leq m-1 < \alpha < m, \\ \frac{d^m x(t)}{dt^m}, m \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (10)$$

**Задача.** *Рассмотрим следующую задачу Коши:*

$$\partial_{0t}^{\beta} x(\tau) + \lambda \partial_{0t}^{\gamma} x(\tau) + \omega(t) x(t) = f(t), x(0) = \alpha_1, \dot{x}(0) = \alpha_2, \quad (11)$$

где  $x(t) \in C^2[0, T]$  – функция решения (смещения);  $t \in [0, T]$  – координата, отвечающая за время,  $T > 0$  – константа, время моделирования;  $\omega(t)$  – функция, отвечающая за частоту свободных колебаний и определяет тип ЛДО;  $\lambda$  – коэффициент трения;  $f(t)$  – функция, отвечающая за внешнее воздействие;  $\alpha_1, \alpha_2$  – заданные константы, определяющие начальное условие, операторы дробного дифференцирования понимаются в смысле Герасимова-Капуто порядков  $1 < \beta < 2$  и  $0 < \gamma < 1$ .

Задача Коши (3) описывает широкий класс ЛДО и в случае  $\beta = 2$  и  $\gamma = 1$  переходит в класс известных линейных осцилляторов [1].

Далее в работе мы исследуем задачу Коши (3) численно, с помощью ЯНКРС [1] и с помощью дробного аналога метода АБМ [2]. Проведены сравнения результатов моделирования, показано, что метод АБМ сходится быстрее к точному решению, хотя не всегда с одинаковым порядком.

## Литература

1. *Parovik R.I.* Mathematical model of a wide class memory oscillators, Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical modeling and programming, vol. 11. no. 2, 2018, pp. 108-122. doi: <http://dx.doi.org/10.14529/mmp180209>.
2. *Garrappa R.* Numerical Solution of Fractional Differential Equations: A Survey and a Software Tutorial, Mathematics, vol. 6. no. 16, 2018, doi: <http://dx.doi.org/10.3390/math6020016>
3. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, 2006. 523 p.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЭРЕДИТАРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ РИККАТИ С МОДИФИКАЦИЕЙ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ТИПА ГЕРАСИМОВА-КАПУТО

<sup>1,2</sup> Твёрдый Д.А.

<sup>1</sup> *Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, г. Нальчик, Россия;*

<sup>2</sup> *КамГУ имени Витуса Беринга, г. Петропавловск-Камчатский, Россия;  
e-mail: [dimsolid95@gmail.com](mailto:dimsolid95@gmail.com)*

В данной работе исследуется задача Коши (1) для дифференциального уравнения Риккати с непостоянными коэффициентами:

$$\partial_{0t}^{\gamma(t-\tau)} u(\tau) + a(t)u^2(t) + b(t)u(t) + c(t) = 0, \quad u(0) = u_0, \quad (1)$$

где  $u(t) \in C[0, T]$  – функция решения,  $t \in [0, T], T > 0$  – время моделирования,  $u_0$  – заданная константа,  $a(t), b(t), c(t)$  – заданные функции.

Модифицированный дробно-дифференциальный оператор типа Герасимова – Капуто в (1) имеет вид:

$$\partial_{0t}^{\gamma(t-\tau)} u(\tau) = \int_0^t \frac{1}{\Gamma(1 - \gamma(t - \tau))} \frac{\dot{u}(\tau)}{(t - \tau)^{\gamma(t-\tau)}} d\tau, \quad 0 < \gamma(t - \tau) < 1. \quad (2)$$

В работе также было проведено сопоставление результатов с ранее полученными в [2,3] с учетом производной Герасимова-Капуто дробного переменного порядка [4]:

$$\partial_{0t}^{\gamma(t)} u(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1 - \gamma(t))} \int_0^t \frac{\dot{u}(\tau)}{(t - \tau)^{\gamma(t)}} d\tau, \quad 0 < \gamma(t) < 1,$$

Аппроксимация дробной производной (2) дается соотношением:

$$\partial_{0t}^{\gamma(t-\tau)} u(\tau) \approx \sum_{i=1}^k \sigma_{\gamma_{k-i}, \tau} \omega_{i, \gamma_{k-i}, \tau} (u_{k-i+1} - u_{k-i}), \quad k = 1, \dots, N, \quad (3)$$

$$\sigma_{\gamma_{k-i}, h} = \frac{h^{-\gamma_{k-i}}}{\Gamma(2 - \gamma_{k-i})}, \quad \omega_{i, \gamma_{k-i}} = i^{1-\gamma_{k-i}} - (i-1)^{1-\gamma_{k-i}}.$$

где  $N$  – количество узлов сетки численного решения, а  $h = \frac{T}{N}$  – шаг дискретизации.

Для численного решения с учетом аппроксимации (3) использовался модифицированный метод Ньютона по аналогии с работами [2,3], который был реализован в среде компьютерной математики Maple. Метод был исследован на тестовых примерах.

### Литература

1. Sweilam N.H., Khader M.M., Mahdy A.M.S. Numerical studies for solving fractional Riccati differential equation, Applications and Applied Mathematics, Vol. 7(2), 2012, pp.595–608.
2. Твердый Д.А. Задача Коши для уравнения Риккати с непостоянными коэффициентами и учетом переменной степенной памяти, Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки, 2018, no 3(23), С. 148-157.
3. Твердый Д.А. Задача Коши для уравнения Риккати с модифицированной дробной производной Герасимова-Капуто переменного порядка, Проблемы вычислительной и прикладной математики, 2020, 3(27), С. 90-103.
4. Parovik R.I. Numerical analysis some oscillation equations with fractional order derivaives, Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences, Vol. 9, no 2, 2014, pp. 1–6.

## УЧИНЧИ ТАРТИБЛИ ТЎЛА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛИ ТЕНГЛАМА ИНТЕГРАЛЛОВЧИ КЎПАЙТУВЧИСИНИ АНИҚЛАШ.І.

<sup>1</sup> Ш.Уликов, <sup>2</sup> Э.Турсунова

<sup>1</sup> Фаргона давлат университети, Ўзбекистон,  
e-mail: sh\_ulikov@mail.ru

<sup>2</sup> Фаргона давлат университети, Ўзбекистон,  
e-mail: Ergashoy96@mail.ru

Тартибини пасайтириш мумкин бўлган тенгламаларнинг яна бир тури *тўлиқ дифференциал тенгламалардир*. Бизга

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (1)$$

кўринишдаги учинчи тартибли дифференциал тенглама берилган бўлсин.

**Таъриф.** Агар шундай  $(x, y, y', y'') = 0$  функция мавжуд бўлиб, қаралаётган соҳада

$$F(x, y, y', y'') = \frac{d}{dx} K(x, y, y', y'') \quad (2)$$

тенглик ўринли бўлса, (1) тенглама *тўлиқ дифференциалли дейилади*.

Агар (1) тенглама тўлиқ дифференциалли бўлса, (2) тенгликка асосан, у

$$\frac{d}{dx} K(x, y, y', y'') = 0$$

кўринишда ёзилади. Буни интеграллаб

$$K(x, y, y', y'') = C_1 x + C_2$$

кўринишдаги иккинчи тартибли дифференциал тенгламага эга бўламиз.

Баъзида берилган (1) тенглама тўлиқ дифференциалли бўлмай, уни қандайдир  $\mu(x, y, y', y'')$  функцияга кўпайтиришдан ҳосил бўлган тенглама тўлиқ дифференциалли бўлади. Бундай ҳолларда  $\mu(x, y, y', y'')$  функция *интегралловчи кўпайтувчи* дейилади.

Эслатиб ўтамизки, ҳар қандай дифференциал тенглама учун ҳам интегралловчи кўпайтувчи мавжуд бўлавермайди.

Қуйида учинчи тартибли дифференциал тенгламаларни интегралловчи кўпайтувчидан фойдаланиб, интеграллашга доир мисол келтирамиз:

Мисол.  $y''' + \frac{y''(1+4xy)}{x^2y} + \frac{3y'y''}{y} + \frac{4y'^2}{xy} + \frac{2y'}{x^2} + \frac{e^x}{x^2y} = 0$  тенгламанинг ечими топилин:

## Maple дастури

Берилган тенгламани аниқлаш учун берилган буйруқларни кетма-кетликда бажариши керак:

```
>restart; with(DEtools);
PDEtools [declare] (y(x), prime=x);
```

Иккинчи тартибли тўла дифференциалли тенгламани Maple дастурида қуйидаги тартибда ёзилади:

$$\begin{aligned} > ODE3 := \frac{d^3}{dx^3}y(x) + \frac{d^2}{dx^2}y(x) \cdot \left( \frac{(1 + 4 \cdot x \cdot y(x))}{x^2 \cdot y(x)} \right) + \\ + \frac{3}{y(x)} \cdot \frac{d}{dx}y(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2}y(x) + \frac{4}{x \cdot y(x)} \cdot \left( \frac{d}{dx}y(x) \right)^2 + \frac{2}{x^2} \cdot \frac{d}{dx}y(x) + \frac{e^x}{x^2 \cdot y(x)}; \end{aligned}$$

Тенгламанинг кўриниши

$$ODE3 := y''' + \frac{y''(1 + 4xy)}{x^2y} + \frac{3y'y''}{y} + \frac{4y'^2}{xy} + \frac{2y'}{x^2} + \frac{e^x}{x^2y},$$

каби бўлади. Бу тенгламанинг интегралловчи кўпайтувчиларини топиш учун **intfactor** (интегралловчи кўпайтувчини аниқлаш) буйруғини киритиш [2.756]:

$$> mu := intfactor(ODE2); \quad \mu := x^3y, \quad x^2y$$

Интегралловчи кўпайтувчиларни алоҳида ифодалаш: >mu1:=mu[1]; mu2:=mu[2];

$$\mu1 := x^3y$$

$$\mu2 := x^2y$$

Берилган тенгламани биринчи интегралловчи кўпайтувчига кўпайтириш ва турини аниқлаш:

```
>odeadvisor(mu[1]*ODE3);
[[_3rd_order, _exact, _nonlinear]]
>R1:=frint(mu[1]*ODE3,y(x));
R1 := y'^2x^3 + y''x^3y + y'x^2y + xy' - y + \frac{(x \ln(e)-1)e^x}{\ln(e)^2} + _C1 = 0
```

а) Ҳосил бўлган R1 тенгламанинг интегралловчи кўпайтувчиларини топиш:

```
>muR1:=intfactor(R1);
```

$$muR1 := \frac{1}{x^2}$$

б) биринчи интегралловчи кўпайтувчи muR1чрдамида R1 тенгламани тартибини пасайтириш ва ечимини топиш:

```
>R11:=frint(muR1*R1,y(x));
R11 := \frac{y}{x} + y'xy - \frac{C1}{x} + \frac{e^x}{\ln(e)^2x} + _C2 = 0
>solve(R11,y(x));
```

$$\frac{1}{2}\sqrt{-2x^4 - 4\_C2 \cdot x^4 + 4\_C1}, \quad -\frac{1}{2}\sqrt{-2x^4 - 4\_C2 \cdot x^2 + 4\_C1}.$$

Берилган тенгламани иккинчи интегралловчи кўпайтувчига кўпайтириш ва тартибини пасайтириш:

```
>R2.:=frint(mu[2]*ODE3,y(x));
```

$$R11 := \frac{y}{x} + y'xy - \frac{C1}{x} + \frac{e^x}{\ln(e)^2x} + _C2 = 0$$

а) Ҳосил бўлган  $R2$  тенгламанинг интегралловчи кўпайтувчиларини топиш:

$\text{>muR2:=intfactor}(R2);$

$$\text{muR2} := 1$$

б) иккинчи интегралловчи кўпайтувчи  $\text{muR2}$  ёрдамида  $R2$  тенгламани тартибини пайсайтириш ва ечимини топиш:

$\text{>R22} := \text{firint}(\text{muR2} * R2, y(x));$

$$R22 := y'x^2y + y + x\_C1 + \frac{e^x}{\ln(e)^2} + \_C2 = 0$$

$\text{>solve}(R22, y(x));$

$$\frac{1}{2}\sqrt{-2x^4 - 4\_C1 \cdot x^2 - 4\_C2}, \quad -\frac{1}{2}\sqrt{-2x^4 - 4\_C1 \cdot x^2 - 4\_C2}.$$

### Адабиётлар

1. Салохитдинов М.С., Насришдинов Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар -Тошкент: Ўқитувчи, 1982, 448 б. 2.
2. O'rinov A.Q, Mirzakarimov E.M. Oddiy differensial tenglamalar Maple tizimida. - Toshkent:Navro'z, 2013, 204b.

## ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ КУБАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ТИПА ЭРМИТА

<sup>1</sup>Шадиметов Х.М., <sup>2</sup>Нуралиев Ф.А.

<sup>1</sup> Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта, Ташкент, Узбекистан.

e-mail: kholmatshadimetov@mail.ru

<sup>2</sup> Институт математики и.м. В.И.Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан.

e-mail: nuraliyevf@mail.ru

В настоящей работе будет найдена экстремальная функция функционала погрешности кубатурной формулы с производными первого порядка вида

$$\int_{\Omega_0} \varphi(x) dx \cong \sum_{k=1}^N \left( C_k \varphi(x^{(k)}) + C_k^{(')} D\varphi(x_k) \right), \quad (1)$$

где точки  $x^{(k)} \in \Omega_0$  и параметры  $C_k, C_k^{(')}$  называют соответственно узлами и коэффициентами кубатурной формулы.

Разность

$$\int_{\Omega_0} \varphi(x) dx - \sum_{k=1}^N \left( C_k \varphi(x^{(k)}) + C_k^{(')} D\varphi(x_k) \right)$$

называется погрешностью кубатурной формулы (1).

С другой стороны

$$\begin{aligned} (\ell, \varphi) &= \int_{\Omega_0} \varphi(x) dx - \sum_{k=1}^N \left( C_k \varphi(x^{(k)}) + C_k^{(')} D\varphi(x_k) \right) \\ &= \int_{\Omega_0} \left[ \left( \mathcal{X}_{\Omega_0} - \sum_{k=1}^N \left( C_k \delta(x - x^{(k)}) - C_k^{(')} \delta'(x - x^{(k)}) \right) \right) * \Phi_0(H^{-1}x) \right] \varphi(x) dx, \end{aligned}$$



где

$$\chi_{\Omega_0}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_0, \\ 0, & x \notin \Omega_0, \end{cases}$$

$\delta(x)$  – известная дельта функция Дирака,

$$\Phi_0(H^{-1}x) = \sum_{\beta} \delta(x - H\beta), \quad \beta = (\beta_1, \beta_2),$$

$\beta_i$  – целые числа, т.е.  $\beta_i \in Z$ .

$$\ell(x) = \left( \chi_{\Omega_0}(x) - \sum_{k=1}^N \left( C_k \delta(x - x^{(k)}) - C_k^{(\prime)} \delta'(x - x^{(k)}) \right) \right) * \Phi_0(H^{-1}x) \quad (2)$$

– функционал погрешности кубатурной формулы. Пространство  $\widetilde{L}_2^{(m)*}(H)$  будет состоят из всех периодических функционалов (2), которые ортогональны единице:

$$(\ell, 1) = 0. \quad (3)$$

Неизвестными параметрами кубатурной формулы является узлы  $x^{(k)}$  и коэффициенты  $C_k, C_k^{(\prime)}$ .

Оптимальной кубатурной формулой называют такую кубатурную формулу погрешность которой при заданном числе узлов  $N$  имеет наименьшую норму в  $\widetilde{L}_2^{(m)*}(H)$ .

Если узлы  $x^{(k)}$  являются точками решетки, т.е. расположены в точках вида  $x^{(\gamma)} = hH\gamma$ , тогда такую кубатурную формулу называют решетчатой. Здесь  $h$  – малый положительный параметр,  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2), \gamma_i \in Z, i = 1, 2$ .

В основном решетчатыми кубатурными формулами занимались С.Л.Соболев и его ученики [1]-[5].

Для нахождения в явном виде нормы функционала погрешности  $\ell$  в пространстве  $\widetilde{L}_2^{(m)*}(H)$  будем использовать понятие его экстремальной функции [4].

Функцию  $\psi_\ell$  из  $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$  называют экстремальной для данного функционала погрешности  $\ell$ , если выполняется равенство

$$(\ell, \psi_\ell) = \|\ell\|_{\widetilde{L}_2^{(m)*}(H)} \cdot \|\psi_\ell\|_{\widetilde{L}_2^{(m)}(H)}.$$

Пространство  $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$  гильбертово, скалярное произведение в нем задается формулой

$$(\varphi, \psi)_m = \int_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha \varphi(x) D^\alpha \psi(x) dx.$$

По теореме Рисса любой линейный непрерывный функционал  $\ell$  в гильбертовом пространстве представляется в виде скалярного произведения

$$(\ell, \varphi) = (\psi_\ell, \varphi)_m \quad (4)$$

для любого  $\varphi$  из  $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$ . Здесь  $\psi_\ell$  – функция из  $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$ , определено однозначно по функционалу  $\ell$  и является экстремальной для него. Кроме того,  $\psi_\ell$  – является элементом Рисса и имеет место равенство

$$\|\ell\|_{\widetilde{L}_2^{(m)*}(H)} = \|\psi_\ell\|_{\widetilde{L}_2^{(m)'}(H)}.$$

Интегрируя по частям выражение в правой части формулы (4) и пользуясь периодичностью функций  $\varphi$  и  $\psi_\ell$ , получим

$$(\ell, \varphi) = (-1)^m \int_{\Omega_0} \Delta^m \psi_\ell(x) \varphi(x) dx.$$

Таким образом, функция  $\psi_\ell$  является обобщенным решением уравнения

$$\Delta^m \psi_\ell(x) = (-1)^m \ell(x),$$

здесь

$$\Delta^m = \left( \frac{d^2}{dx_1^2} + \frac{d^2}{dx_2^2} \right)^m.$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** *Экстремальная функция функционала погрешности  $\ell$  определяемой формулой (2) в пространстве  $L_2^{(m)}(H)$  имеет вид*

$$\psi_\ell(x) = - \sum_{k=1}^N (C_k B_{2m}(x - x^{(k)}) - C_k^{(\prime)} B'_{2m}(x - x^{(k)})) - d_0.$$

Здесь

$$B_{2m}(x - x^{(k)}) = \sum_{\beta \neq 0} \frac{e^{-2\pi i H^{*-1} \beta (x - x^{(k)})}}{|2\pi H^{*-1} \beta|^{2m}},$$

$$B'_{2m}(x - x^{(k)}) = - \sum_{\beta \neq 0} \frac{2\pi i H^{*-1} \beta e^{-2\pi i H^{*-1} \beta (x - x^{(k)})}}{|2\pi H^{*-1} \beta|^{2m}},$$

$d_0$  - неизвестная.

## Литература

1. Носков М.В. Кубатурные формулы для приближенного интегрирования периодических функций трех переменных, ЖВМ и МФ, No.10, 1988, 1583-1586.
2. Половинкин В.И. Весовые кубатурные формулы в периодическом случае, Мат.заметки, Т.3, No.3, 1968, 319-326.
3. Рамазанов И.О. Универсальная оптимальность решетчатых кубатурных формул, Докл.РАН, Т.324. No.5, 1992, 933-937.
4. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул, М.: Наука, 1974, 808.
5. Соболев С.Л., Васкевич В.Л. Кубатурные формулы, Новосибирск: Из-во ИМ СО РАН, 1996, 484.

## ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СХЕМЫ

<sup>1</sup>Эшпулатов Б.Э., <sup>2</sup>Убайдуллаев М.Ш.

<sup>1</sup> Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразми, ул. Шохрух Мирзо 47А, Самарканд, Узбекистан, e-mail: barat50@bk.ru

<sup>2</sup> Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразми, ул. Шохрух Мирзо 47А, Самарканд, Узбекистан, e-mail: malikkhan2002.mu@gmail.com

В данной сообщении излагается построения схемы приближенного вычисления определенных интегралов от функции  $y = f(x)$  [1-2].

Для интегрирования от функции  $f(x)$  справедливо приближенное равенство

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{P-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{ni}(t(x)) dx, \quad (1)$$

где  $t(x) = \frac{x-x_{i,0}}{h}$ ,  $h$  - шаг интерполяции,  $P = 2^k$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $P_{ni}(x)$  - аппроксимирующий полином степени  $n$  вида

$$P_{ni}(x) = \frac{P_{ni}^{forw}(x) + P_{ni}^{back}(x)}{2}, \quad (2)$$

где  $P_{ni}^{forw}(x)$ ,  $P_{ni}^{back}(x)$  - полином Ньютона для интерполирования вперед и назад соответственно,  $i$  - номер подынтервала. Степень  $n$  полинома выбирается одинаковой для всех подынтервалов и минимальной при выполнении условия  $|f(x) - P_{ni}(x)| \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  - априори заданная граница погрешности аппроксимации функции  $f(x)$ .

Перейдем в правой части (1) к интегрированию по переменной  $t$  и получим

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{ni}(t(x))dx = h \int_0^n P_{ni}(t)dt, \quad (3)$$

Подстановка

$$P_{ni}(t(x)) = \sum_{j=0}^n B_{i,j}t^j \quad (4)$$

в правую часть (3) и непосредственное вычисление интеграла повлечет

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{ni}(t(x))dx = h \sum_{j=0}^n \frac{1}{j+1} B_{i,j}n^{j+1}, \quad (5)$$

при этом аппроксимация первообразной функции  $f(x)$  на  $i$  - подынтервале имеет вид

$$\tilde{P}_{ni}(t(x)) = h \sum_{j=0}^n \frac{1}{j+1} B_{i,j}t^{j+1}. \quad (6)$$

Полином в правой части может быть вычислен по схеме Горнера

$$\tilde{P}_{ni}(n) = \left( \dots \left( \left( \frac{B_{i,n}}{n+1}n + \frac{B_{i,n-1}}{n} \right) n + \frac{B_{i,n-2}}{n-1} \right) n + \dots + \frac{B_{i,0}}{1} \right) n. \quad (7)$$

Приближенное равенство (6) с учетом соотношении (1) запишется в виде

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^{P-1} \sum_{j=0}^n \frac{1}{j+1} B_{i,j}n^{j+1}. \quad (8)$$

Схемы (7) и (8) помимо прочего ориентированы на приближение интегралов от функций из библиотек стандартных часто используемых функций, например, при решении задач моделирования квантовых объектов [3]. В таком случае коэффициенты  $\frac{B_{i,n}}{n+1}$ ,  $\frac{B_{i,n-1}}{n}$ ,  $\frac{B_{i,n-2}}{n-1}$ , ...,  $\frac{B_{i,0}}{1}$  помещаются в память компьютера с целью дальнейшего считывания при необходимости, тогда временная сложность приближенного вычисления интегралов примет вид  $t(1) = P(n+1)(t_y + t_c)$ .

Отметим, что схемы (7), (8), (5) построены для наименьшей степени  $n$  аппроксимирующего полинома, при которой подынтегральная функция аппроксимируется с априори

заданной точностью. Такой степени полинома на практике бывает достаточно, чтобы абсолютная погрешность приближенного вычисления интеграла составляла величины порядка  $10^{-20}$  [4-5].

Схемы (7), (8), (5) по построению обладают инвариантностью относительно размера отрезка интегрирования, а также относительно вида подынтегральной функции, в предположении ее непрерывности и ограниченности на отрезке  $[a, b]$ .

Равномерную сходимость на отрезке  $[a, b]$  последовательности  $\sum_{i=0}^{2^k-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{(k),ni}(x)dx$  к интегралу  $\int_a^b f(x)dx$  при  $k \rightarrow \infty$ , где  $P_{(k)ni}(x) = P_{ni}(x)$  устанавливает, что последовательность  $\sum_{i=0}^{2^k-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{(k),ni}(x)dx$  равномерно сходится на отрезке  $[a, b]$  к интегралу  $\int_a^b f(x)dx$  при  $k \rightarrow \infty$ .

## Литература

1. Аксайская Л. Н. Разработка и исследование параллельных схем цифровой обработки сигналов на основе минимизации временной сложности вычисления функций, Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. - Таганрог: ТТИ ЮФУ, - 2008.
2. Ромм Я.Е., Фирсова С.А. Минимизация временной сложности вычисления функций с приложением к цифровой обработке сигналов, - Таганрог: Изд-во Таганрог гос. пед. ин-та, 2008. - С. 125.
3. Ромм Я.Е., Голиков А.Н. Идентификация экстремальных закономерностей решений нестационарного уравнения Шредингера для исходно гауссова волнового пакета в бесконечно глубокой потенциальной яме при отсутствии внешних полей, ТГПИ. - Таганрог, 2009. - С.137. Деп. В ВИНТИ 05.-6.09, е 346-В2009.
4. Ромм Я.Е., Голиков А.Н. Распараллеливаемые кусочно-полиномиальные схемы аппроксимации функций, производных и вычисления определенных интегралов с повышенной точностью, ТГПИ. - Таганрог, 2010. - С. 139. Деп. В ВИНТИ 27.04.2010, е 230-В2010.
5. Ромм Я.Е., Голиков А.Н. Кусочно-полиномиальная схема вычисления функций и определенных интегралов с повышенной точностью, Известия ЮФУ. Технические науки. Тематический выпуск: Методы и средства адаптивного управления в электроэнергетике. - 2011. - 2. - С.38 - 44.

## 2. COMPUTING TECHNOLOGY

### A SIMPLE COMPUTATIONAL TECHNOLOGY FOR DEVELOPING REGRESSION MODELS IN HIGH DIMENSIONAL SMALL SAMPLE CASES FOR DRUG DESIGN

<sup>1</sup>Adilova Fatima, <sup>1</sup>Davronov Rifkat

<sup>1</sup> *Institute of Mathematics Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan,*  
e-mail: fatadilova@gmail.com, rifqat@gmail.com

Today, machine ensembles are widely used in machine learning. The basic ensemble algorithms generate results on one or different data sets from the original data set. The productivity of the ensemble depends on two main reasons: (1) the effectiveness of the ensemble algorithms, and (2) the independence of the results of the basic regression algorithms [1]. A reliable comparison of four different ensemble algorithms, one feature selection algorithm, and seven basic regression algorithms for each ensemble on 15 data sets in the original and reduced feature space was carried out in [2]. Following these recommendations, we developed the computing technologies that investigated properties of ensembles in the tasks of regression analysis on the data used in drug design. Since the initial data sample was small in terms of volume and variety of elements, its preliminary processing was done. The original 150 polymer structures obtained from [3] were accounted 3205 descriptors using DRAGON and PADEL software.

On the our in-house programs in the initial and reduced space of features, we combined various basic regression and ensemble algorithms. A total of 1106 regression models were obtained in the reduced space by various basic regression algorithms. Of these, 20 models were selected that showed the best values of generally accepted statistics in the training, test, and external (validation) samples:  $R_{training}^2 = 0.94$ ,  $RMSE_{training}^2 = 0.007$ ,  $R_{test}^2 = 0.93$ ,  $RMSE_{test}^2 = 0.007$ ,  $R_{external}^2 = 0.92$ ,  $RMSE_{external}^2 = 0.006$ .

Ensemble algorithms were applied to the selected 20 models, the best of which gave the following results:  $R_{training}^2 = 0.96$ ,  $RMSE_{training}^2 = 0.005$ ,  $R_{test}^2 = 0.97$ ,  $RMSE_{test}^2 = 0.004$ ,  $R_{external}^2 = 0.94$ ,  $RMSE_{external}^2 = 0.005$ .

Thus, on the computing technology developed by us, we were able to obtain results that are superior to what we previously obtained on the same data using standard methods by an average of 7% for all statistical indicators.

### References

1. *Brown G., Wyatt J.L., Tino P.* Managing diversity in regression ensembles. *Journal of Machine Learning Research*, Vol. 6, 2005, pp. 1621-1650.
2. *Mehmet Fatih Amasyali, Okan Ersoy* A comparative review of regression ensembles on drug design datasets. *Turk J Elec Eng Comp Sci*(2013) 21: 586-602; *Uzbek Journal of the Problems of Informatics and Energetics* 2016, v.1 ,p.3-13(authorized translation in Russian by Fatima Adilova).
3. Scientific Polymer Products, Inc. 2018.<http://scientificpolymer.com/technical-library/refractive-index-of-polymers-by-index/>

## MATHEMATICAL FOUNDATIONS OF AUTOMATICALLY SYLLABLING OF KARAKALPAK WORDS

<sup>1</sup>Aripov Mersaid, <sup>2</sup>Norov Abdisait, <sup>3</sup>Jorabekov Timur

<sup>1</sup>*National University of Uzbekistan (Tashkent city, Uzbekistan),*  
e-mail: mirsaidaripov@mail.ru

<sup>2</sup>*Karshi State University (Karshi city, Uzbekistan),*  
e-mail: nam\_71@mail.ru

<sup>3</sup>*Karakalpak State University (Nukus city, Karakalpakstan),*  
e-mail: timurjorabekov16@gmail.com

The problem of automatically word syllabling has already been positively resolved in many foreign countries, in particular, this can be seen on the following sites dedicated to the automatic syllabling of Russian or English words online: slogi.su, www.wordsmyth.net, rifma.poncy.ru, enjoy-eng.ru, perenoslov.ru, etc. [1].

However, scientific research on the automatic syllabling of words has not yet been carried out in Karakalpakstan, therefore, this work may fill some of this gap.

The Karakalpak language is one of the languages of the Turkic family, the language of the Karakalpaks. The Karakalpak language is spoken mainly in Karakalpakstan (north-west of Uzbekistan), as well as in the Khorezm and Fergana regions of Uzbekistan, in the Tashauz region of Turkmenistan, in some regions of Kazakhstan, the Astrakhan region of the Russian Federation and Afghanistan in the places of residence of the Karakalpaks.

At present, the Karakalpak alphabet is based on Cyrillic and Latin (adopted in 2016). In the modern Karakalpak language, the vowel system consists of 11 phonemes, but in the alphabet based on the Latin alphabet there are 9 vowels:  $a, \bar{a}, i, \bar{i}, o, \bar{o}, u, \bar{u}, e$  [2].

The rules for dividing words into syllables in the Karakalpak language are common to all Turkic languages, as in the Uzbek language and consists of 6 main types of syllables, i.e. open and closed syllables:

- 1) V is an open syllable, for example, the first syllable in the word "e-ki"(two);
- 2) CV is open syllable, for example, the second syllable in the word "e-ki"(two);
- 3) VC is a closed syllable, for example, the first syllable in the word "on-líq"(decimal);
- 4) CVC is closed syllable, for example, the second syllable in the word "on-líq"(decimal);
- 5) VCC is closed syllable, for example, "ald"(front);
- 6) CVCC is a closed syllable, for example, "tórt"(four).

Any natural language contains monosyllabic and polysyllabic words. And we can write the following expression as a general case for monosyllabic words:  $W_{ms} = CVCC$  (where  $C$  is consonant,  $V$  is vowel).

In this case, considering any polyllabic word ( $W_{ps}$ ) as a concatenation of one or more monosyllabic words ( $W_{ms}$ ), we can write the following:

$$W_{ps} = CVCC_{(1)} + CVCC_{(2)} + \dots + CVCC_{(k)} = \sum_{i=1}^k CVCC_{(i)}$$

Based on the linguistic model of splitting polysyllabic words into syllables for the Turkic languages, it is theoretically possible to write the following formula [3]:

$$b_{i+1} = \left\lceil \frac{\sigma_i}{2} \right\rceil + H \left( \ln \left( \frac{2\delta_i}{7} \right) \right) \cdot \frac{(-1)^{\delta_i} + 2\delta_i - 5}{4},$$

where  $\sigma_i = V_i + V_{i+1}, \sigma_i \in N; \delta_i = V_{i-1} - V_i, \delta_i \in N; H(x)$  is Heaviside function;  $b_{i+1}$  ( $i = \overline{0, m-1}$ ) is initial of each subsequent syllables from the second (total number of syllables  $m$ ).

But practically the distance between two adjacent vowels in polysyllabic words does not exceed three letters:  $1 \leq \delta_i \leq 4$ . According to this, we can write the following:

$$b_{i+1} = \frac{\sigma_i}{2} + \left\{ \frac{\sigma_i}{2} \right\} + \left[ \frac{\delta_i}{4} \right], \quad i = \overline{0, m-1}.$$

### References

1. *Aripov M., Norov A.M.* O'zbek tili fonologiyasidagi supersegmental vositalar va ularni avtomatlashtirishning algoritmik asoslari // TUIT bulletin, 2019, No3, pp. 104-113.
2. *Dáwletov A.* Házirgi qaraqalpaq tili. Fonetika. Nókis, 2005.
3. *Norov A.M.* The numeral modeling of separating Uzbek words into syllables / VI International Conference on Computer Processing of Turkic Languages "TurkLang-2018". Tashkent: 2018, pp. 43-48.

### DATA PREPROCESSING ON INPUT

<sup>1</sup>*Madrahimov Sh.F., Makharov K.T., Lolaev M.Y.*

<sup>1</sup> *Faculty of Mathematics, National University of Uzbekistan (NUUZ), 100174, NUUZ  
University street 4, Tashkent, Uzbekistan.,  
e-mail: mshavkat@yandex.ru*

Many factors affect the success of Machine Learning on a given task. First of all, we need quality data. Data preprocessing is a factor that directly affects the quality of the intellectual analysis process, because solving problems with the initial unprocessed sample does not give the expected result, can lead to erroneous conclusions[1]. This can be caused by a number of errors, such as the repetition of data, the impossible value of features, missing values and so on. Such data can occur for a variety of reasons, such as entering data, using different formats or units of measurement, incorrectly deleting recurring value records and so on [2]. The results of the algorithms used after detection of errors in the initial sample, logically impossible values of features in the description of objects and data preprocessing by removing such objects from the sample gives more reliable results.

In this note proposes to define a range of possible values for each pair of quantitative features. Object's wrong data can be identified on entering by the values of a pair of features, that do not fall into the appropriate ranges. Numerical results revealing that proposed method is very effective, simple and high accurate.

### References

1. *Ram E., Hong H.* Data cleaning: problems and current approaches. IEEE Bulletin of the Technical Committee on Data Engineering, vol. 23, no. 4, 2000.
2. *Choi B., Lee D., Hong E., Kim S., Kim W.* A Taxonomy of Dirty Data. Journal of Data Mining and Knowledge Discovery, the Kluwer Academic-Publishers, 2003.

## INTRODUCTION OF SEARCH - BASED MODELS IN AUTOMATIC MACHINE SYSTEMS

<sup>1</sup>Muminov B.B., <sup>2</sup>Bekmurodov U.B.

<sup>1</sup> TUIT named after Muhammad al Khwarizmi Tashkent, Uzbekistan

<sup>2</sup> TUIT named after Muhammad al Khwarizmi Tashkent, Uzbekistan ,

e-mail: ulugbek\_bekmurodov@mail.ru

Twenty years of intensive drawing in the field of classroom learning have resulted in a new generation of research methods, including Support Vector Machines (SVMs), Boosted decision trees, and regularized logistic regression, neural networks and random forests methods. Many of these methods, including the base vector method described in this chapter, have been used successfully to solve data retrieval problems, especially when classifying texts.

The base vector method represents a type of wide-range classifier: its purpose is to find the separating surfaces between classes that are as far apart as possible from all points in the set (perhaps excluding some points as omissions or noise) [1,2].

Base vector method: for linearly divisible classes. If the textbook has two data classes that allow linear separation, then there is a large number of linear classifiers that can separate this information. It is intuitively clear that the dividing surface passing through the middle of the dividing line between the two classes is better than the dividing surface lying very close to the samples of one or two classes. Other methods, such as the simple Bayesian method, find the best linear separator using a certain criterion.

In particular, the base vector method seeks a separating surface away from any point in the data. This distance from the surface and the nearest point of the data is called the margin.

In the base vector method, it is assumed that the data affecting the state of the function separator can be fully defined (usually small) by a small set. These points are called support vectors (in a vector set, a point can be thought of as a vector between the origin and the point). Other data points do not affect the selection of the separating surface [3].

It seems a good idea to maximize the gap, as the points lying near the dividing surface lead to great uncertainty; With a 50% probability, the classifier can make either of the two decisions. Reduces the uncertainty of large-scale classification decisions. This creates a certain reserve of reliability: a small measurement error or a slight change in the document does not lead to incorrect classification. Another intuitive justification of the base vector method is shown. Throughout the structure, the SVM classifier requires a wide gap around the separating surface. If an attempt is made to draw a wide line between classes, then the range of angles at which this can be done is much smaller than that for hyperlinks. As a result, the model's memory capacity decreases and the model's ability to accurately generalize test data can be expected to increase.

The wide-gap aspiration model reduces the memory capacity: the range of angles at which a wide dividing line can be placed between two sets is smaller than that for a dividing hyper plane. Here is a formal algebraic definition of the base vector method. The displacement hyperplane  $b$  is given by the displacement parametric (with the point of intersection on the  $x$  axis)  $\vec{w}$  with the normal vector to the separating hyperplane. According to the machine learning methods in the chapter, this vector is usually called the weight vector.

The parameter  $b$  is used to select a single desired hyperplane among all hyperlinks perpendicular to the normal vector. Since the separating hyperplane is perpendicular to the normal vector, all points  $\vec{x}$  in the hyperplane are satisfied by the equation  $\vec{w}^T \vec{x} = b$ . Now suppose that each element has a set  $D = \{(\vec{x}, y_i)\}$  consisting of  $\vec{x}$  points and corresponding symbols of  $y_i$  sign. In the base vector method, the two classes are always called +1 and -1 (not 1 and 0), while the shift parameter (intercept term) is always denoted by the letter  $b$  ( $\vec{w}$  is not added to the



vector). As a result, mathematical expressions become clearer. In this case, the linear classifier is defined by the following formula [2]

$$f(\vec{x}) = \text{sing}(\vec{w}^T \vec{x} + b) \quad (1)$$

A value of 1 indicates one class and a value of +1 indicates another class. The classification of points is not in doubt if it lies far from the separating surface. For a given unit of data and a separator of hyperplanes  $(\vec{w}, b)$ , the functional margin of the first sample relative to the hyperplane  $\vec{x}_i$  is said to be  $\vec{y}_i(\vec{w}^T \vec{x} + b)$ . In this case, the functional range of the data unit relative to the dividing surface is greater than the functional range of any point in the data unit with a minimum functional range.

## References

1. *Anh, Vo Ngoc, Owen de Kretser, and Alistair Moffat.* VecBætor-space ranking with effective early termination, 2001. In Proc. SIGIR, pp. 35-42. ACM Press.
2. *Arroso, Luiz Andr e, Jeffrey Dean, and Urs Hylzle.* Web search for a planet: The Google cluster architecture. 2003. IEEE Micro 23 (2): 22-28. DOI: dx.doi.org/10.1109/MM.2003.1196112.
3. *Mo'minov B.B.* Ma'lumotlarni izlash tizimi. -T.: Fan va texnologiya. 2016. -210 b.
4. *Mo'minov B.B.* Ma'lumotlarni izlash usullari. -T.: Fan va texnologiya. 2016. -276 b.

## WI-FI BASED STUDENT ATTENDANCE RECORDING SYSTEM USING MACHINE LEARNING CLASSIFICATION ALGORITHM

<sup>1</sup>Anvar Narzullaev, <sup>2</sup>Muminov Zahridin, <sup>3</sup>Narzullaev Mavlutdin

<sup>1</sup> Faculty of Science and Technology, Universiti Sains Islam Malaysia, Nilai, Malaysia.

<sup>2</sup> Uzbek-Israel Faculty of High Technology, National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan ,

<sup>3</sup> Faculty of Applied Mathematics and Intelligent Technologies, National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan ,  
e-mail: anvarbek@gmail.com

Wi-Fi became a crucial part of our daily life. Wireless access points (AP) that connect users to Internet services are available everywhere. This is especially true for higher education institutions where access to wireless internet is a pivotal part of teaching and learning process. Students and staff use Wi-Fi to check their timetables, read or send emails, communicate through various instant messaging apps, download/upload lecture notes, submit reports and many more. Every campus building is covered and surrounded by hundreds of APs.

By design, every AP advertises its presence in certain area by periodically transmitting special beacon frames. Each beacon frame contains information about AP it has been originated from. At any given location users' mobile devices can sense multiple Wi-Fi signals originated from different APs and identify them according to their MAC addresses. Since every AP has a limited coverage, every location (lecture hall, laboratory or meeting room) will have a somewhat unique pattern of APs that cover this particular area. Another parameter that is extracted from beacon frames measurement is a Received Signal Strength Indication (RSSI). It is an estimated measure of wireless signal power level that a mobile device is receiving from an AP. RSSI from a particular AP may vary from one location to another due to many factors including the distance between an AP and a mobile device, indoor environment characteristics, signal attenuation and fluctuations, i.e. even if two areas are covered by the same APs their signal levels will be different.

In this research we will use the facts above to confirm the presence or absence of the students certain location by comparing their signal patterns against the signals collected by lecturer's

device. We created a special mobile application that can periodically sample Wi-Fi beacon signals from surrounding APs and transmit data to the cloud server for further processing.

In machine learning, classification refers to a predictive modelling problem where a class label is predicted for a given example of input data. The best example of classification is a spam filter that classifies incoming emails as "spam" or "not spam".

From a modelling perspective, classification requires a training dataset with many examples of inputs and outputs from which to learn. A model will use the dataset to learn how to best map examples of input data to specific class labels. In our case, we have only two class labels (binary classification), i.e. "potential contact" and "no contact".

There are many popular classification algorithms such as Logistic Regression (LR), k-Nearest Neighbours (k-NN), Support Vector Machine (SVM), and Decision Tree (DT).

In this research we will use the Machine Learning based Logistic Regression classification algorithm to detect the student's presence or absence in a given

**Acknowledgments** This work has been supported by USIM research grant PPPI/FST/0118/051000/15218.

## O'zMU sirtqi ta'lim axborot tizimida o'quv kurslarini yaratish

<sup>1</sup> Qahhorov A.O', <sup>2</sup> Rangova G.O'.

<sup>1</sup> O'zMU, Toshkent, Talabalar shaharchasi, O'zbekiston,

e-mail: qahhorov1abdusalim@gmail.com

<sup>2</sup> Navoiy shahar, O'zbekiston,

e-mail: rangova@bk.ru

Mamlakatimizda sirtqi ta'limning to'xtatilganiga asosiy sabab, bu ta'lim "sifati ta'minlanmaganligi" deb aytilgani bizga ma'lum. Muayyan sohalarida kadrlarning yetishmasligi, salohiyatli yoshlarning ta'lim olishiga yetarlicha shart-sharoit yaratish maqsadida sirtqi, kechki va maxsus sirtqi ta'lim qayta tiklandi. Bu tahsinga loyiq qaror bo'lib, xorijiy davlatlarda shunga o'xshash ta'lim turlari mavjud. Xo'sh endi yuqorida ta'kidlangan ta'lim turlari bo'yicha qabul e'lon qilingandan so'ng, ta'lim sifatini qanday qilib ko'tarish mumkin. Buning uchun nimalarga e'tibor berishimiz kerak? Muammoni hal qilish yo'llaridan bittasi bu talabalarining bo'sh vaqtlarida ilm olishlariga sharoit yaratish, doimiy professor-o'qituvchilar tomonidan nazorat qilib borish va kerakli maslahatlarni berib borish lozim. Bu ishni bajarish uchun masofaviy ta'limni yo'lga qo'yuvchi axborot tizimini yaratish maqsadga muvofiqdir.

So'ngi vaqtlarda ta'lim xizmatlari bozorida ta'lim muassasalari talabalarni o'qitishning turli shakllarini o'z ichiga olgan turli xil o'quv dasturlarini taklif qilmoqda. Paydo bo'lganiga ko'p bo'lmagan masofaviy o'qitish shakli asta-sekin keng tarqalmoqda va ta'lim xizmatlaridan foydalanuvchilar orasida unga bo'lgan talab oshib bormoqda. Ta'lim muassasalari masofaviy o'qitish shakli bilan bir qatorda, kunduzgi o'quv shaklini ham taklif etishmoqda. Yuqoridagi o'qitish shakllarining har biri o'ziga xos xususiyatlarga ega. Sirtqi o'quv jarayonini tashkil qilish uchun axborot tizimida talabalar odatda guruhlariga bo'linadilar va o'quv dasturini ishlab chiqish bo'yicha keyingi ishlar guruhlariga bo'lingan holda amalga oshiriladi. Shunday qilib, o'quv rejalarini rejalashtirish, bitta guruhga kiruvchi barcha talabalar uchun o'quv kurslarining boshlanish va tugash sanalarini anglatadi. Shu sababli, kunduzgi o'quv jarayonida o'quv kursini o'zlashtirish davri ta'lim muassasasi tomonidan ishlab chiqilgan o'quv rejasida va jadvaliga to'liq bog'liqdir. Masofadan o'qitish jarayoni ta'lim oluvchilarga kursning boshlanishi va oxirini rejalashtirish uchun katta imkoniyat yaratadi. Masofaviy ta'limning boshlanishi dars o'tish uchun yetarli miqdordagi talabalar to'plami bilan belgilanadi va ta'lim muassasasining o'quv rejasida tartibga solinmaydi. Shunday qilib, masofaviy ta'lim o'quv jarayoniga katta moslashuvchanlikni olib keladi.

Axborot tizimida ta'lim oluvchilarning kursni o'zlashtirish ko'rsatkichi, o'quv kursi boshlanishida talabalarning tayyorgarlik darajasi teng bo'lgandagina eng samarali hisoblanadi. Ammo turli darajadagi bilimlarga ega bo'lgan talabalar guruhida kursni o'zlashtirish samaradorligini pasayishiga olib kelishi mumkin. Turli darajadagi bilimlar kursga tayyorgarlik darajasi yuqori bo'lgan o'quvchilarni oldinga siljishiga va o'z navbatida tayyorgarlik darajasi past bo'lgan o'quvchilarga ushbu fanning asoslarini o'zlashtirishga to'sqinlik qiladi. Talabalarning turli darajadagi o'zlashtirish ko'rsatkichlari hisobga olingan masofaviy ta'lim jarayonida esa, ta'lim oluvchining boshlang'ich va oxirgi o'zlashtirish ko'rsatkichini hisoblash imkoniyatini beradi. Shunday qilib, masofadan turib o'qitish ta'lim oluvchini o'qitishga individual yondoshishni ta'minlaydi, bu esa uni yanada samaraliroq qiladi.

Kunduzgi o'quv jarayonida barcha talabalar kursni o'zlashtirishda yagona yo'nalish bo'ylab harakatlanadilar. Buning sababi shundaki, talabalarni kurs davomida harakatning turli traektoriyalari bo'yicha taqsimlash murakkab protsedura bo'lib, kurs davomida foydalaniladigan resurslar miqdorini yanada ko'paytirishni talab qiladi va shuningdek o'qituvchiga yuklamaning ortib ketishi tufayli buni amalda iloji yo'q. Taklif qilinayotgan tizimda o'qituvchiga turli traektoriyalarda o'quv jarayonlarini tashkil qilish va o'tkazish uchun ta'lim muassasi qo'shimcha mablag'larini jalb qilmasdan talabalar uchun kursni o'zlashtirishni bir nechta yo'nalishlarini yaratishga imkon beradi. Bunda o'quv jarayonida o'quv materiallari mashg'ulotlarga bo'linadi. Mashg'ulot singari tashkiliy o'quv qismlarining masofaviy o'quv jarayonida bo'lmasligi materiallarni ularga ko'ra ajratish imkoniyatini istisno qiladi, bu esa o'quv materiallarini bo'lish uchun boshqacha asoslarni talab qiladi. Kursni o'zlashtirish samaradorligini oshirish uchun, talabalar tomonidan kursning muayyan tematik bo'limlarini qanchalik o'zlashtirganiga qarab kurs o'qituvchisi kunduzgi o'quv jarayoni materiallarini o'zlashtirish yo'nalishini sozlashi mumkin. Masofaviy ta'limda talabaning kursni o'zlashtirishga o'qituvchi bilan to'g'ridan-to'g'ri muloqatda bo'lmaganligi murakkablik tug'diradi. Ushbu muhim vazifani bajarish uchun o'qituvchidan o'quv kursining materiallariga muvofiq talabani individual harakatlanishga yo'naltiradigan masofaviy kursning batafsil tuzilishini ishlab chiqish talab etiladi.

Kunduzgi o'quv jarayonida talabalar ishini tashkillashtirish darslar jadvali va juftlik davomida o'qituvchilar tomonidan amalga oshiriladi. Masofaviy o'qitish jarayonida o'qituvchi kabi tashkiliy elementning yo'qligi talabani mustaqil ravishda o'qishga majbur qiladi. Darsning tuzilishiga qarab talaba metodik materialni o'rganish vaqtini mustaqil ravishda belgilaydi. Shunday qilib, talabaning dars davomida o'zlashtirish tezligi talabaning tashkillashtirish qobiliyatiga bog'liq. Kunduzgi o'quv jarayoniga ajratilgan vaqt doirasida talabalar asosiy ishlarni bajaradilar. Natijada, talabalarning bo'sh vaqtlarida qo'shimcha materiallarni mustaqil o'rganishga istak kamayadi. O'z navbatida, masofaviy ta'lim jarayoni ko'proq talabalarning kurs materiallarini mustaqil o'rganishini nazarda tutadi. Masofaviy ta'limda o'quv materiali talaba tomonidan ko'p marta takrorlanishi mumkin. Talaba ta'lim muassasasining resurslarini jalb qilmasdan masofaviy ta'limning o'quv materiallarini bir necha marotaba o'tish imkoniyatiga ega. Kunduzgi ta'lim jarayonida ko'pincha o'quv mashg'ulotlarini tashkil etishning murakkabligi va mashg'ulotlarni o'tkazish uchun cheklangan resurslar tufayli talabaga bir darsning materialini bir necha marta o'zlashtirishga imkon bermaydi.

Kunduzgi ta'lim jarayoni mashg'uloti ishtirokchilarining bir joyda bo'lishi va mashg'ulotlarda real vaqtda muloqot qilishini anglatadi. Kunduzgi ta'lim shaklida talaba va o'qituvchi o'quv tadbirlari o'tkaziladigan joyga etib kelish uchun ma'lum vaqt sarflashlari kerak. Mavjud ta'lim olish joyidan uzoq masofada joylashganlik mashg'ulot ishtirokchilari uchun maqbul emas. Shunday qilib, kunduzgi ta'lim mashg'uloti ishtirokchilarining masofadan turib ta'lim olishini cheklaydi. Masofaviy o'qitish jarayoni o'quvchilarning geografik joylashuvidan qat'iy nazar, bir-biri bilan aloqa o'rnatishi bilan tavsiflanadi. Bu turli mintaqalarda va hatto mamlakatlarda

istiqomat qiluvchi talabalarni o'quv jarayoniga jalb qilish imkonini beradi.

Masofaviy ta'limda o'qituvchi va talabaning bir-biridan olisda bo'lganligi va informatsion texnologiyalar orqali aloqa qilganliklari uchun, ta'lim olayotgan talabani to'liq identifikatsiyalash imkoniyati mavjud emas. Shuning uchun masofaviy ta'lim bilan, kursni o'tayotgan talaba va tizimda ro'yxatdan o'tgan talaba bitta shaxs ekanligiga to'liq ishonch hosil qilish mumkin emas. Kunduzgi ta'lim mashg'ulot ishtirokchilarining bevosita aloqasi talabaning shaxsini aniq identifikatsiyalash imkonini beradi.

Boshqa tomondan, talabaning kunduzgi ta'lim mashg'ulotlarida o'qituvchi bilan bevosita aloqasi talabaning shaxsiy bahosini istisno qilmaydi. Talabaning kursni o'zlashtirish uchun bahosini hisoblashda, nafaqat uning kursni o'zlashtirish ko'rsatkichi, balki o'qituvchi tomonidan talabaning shaxsiy bahosi ham hisobga olinadi. Talabaning o'qituvchi bilan bevosita aloqasi ko'pincha talabaga uning bilimiga mos keladigan ob'ektiv baho olishiga to'sqinlik qiladi. Masofaviy o'qitish jarayonida mashg'ulot ishtirokchilarining bevosita uchrashuvining yo'qligi kursni o'zlashtirish uchun yakuniy natijani belgilashda o'qituvchining sub'ektiv fikri ta'sirini kamaytirishga imkon beradi.

Ta'lim jarayonida guruhda ishlash imkoniyati nuqtai nazaridan qaraladigan bo'lsa, kunduzgi ta'lim jarayoni talabalarining amaliy topshiriqlari bo'yicha kamroq resurs sarflab birgalikdagi guruh ishlarini tashkil etishga imkon beradi. Shunday qilib, o'qituvchiga guruhdagi talabalar bilan birgalikda bajarilgan vazifalarni tahlil qilish, ishning mavjud afzalliklari va kamchiliklari haqida sharhlar berish imkoniyatini beradi. Masofaviy ta'lim jarayonida esa, yuqoridagi kabi guruh ishlarini birgalikda tahlil qilish murakkab jarayon hisoblanadi. O'z navbatida, o'qituvchi har bir talabaning ishini alohida tahlil qiladi, bu esa o'qituvchining ish yuklamasini oshib ketishiga olib keladi. Hozirgi kunda axborot tizimining kredit modul tizimiga asoslangan o'quv rejalar hisobini yuritish qismtizimni yaratish ustida ish olib borilmoqda. Bunda ASP.NET MVC texnologiyalari hamda SQL SERVER 2012 berilganlar bazasini boshqarish tizimidan foydalanilmoqda.

## Adabiyotlar

1. *Aloev R.D. Muxamedieva D.T. va bosh.* Oliy ta'lim muassasalarida elektron ta'lim muhitini yaratish(monografiya), "EXTREMUM-PRESS Toshkent.2011y.220b.
2. *Panyukova S.V.* Ispolzovaniye informatsionnix i kommunikatsionnix texnologiy v obrazovanii [Tekst]: ucheb. posobiye dlya vuzov / S.V. Panyukova M.: Izdatelskiy sentr "Akademiya 2010. - 224 s.
3. *Traynev V. A.* Noviye informatsionniye kommunikatsionniye texnologii v obrazovanii [Tekst] / V.A. Traynev M.: Dashkov i K, 2009. - 320 s.

## CLASSIFICATION OF PADDY LEAF DISEASE USING CUBIC SUPPORT VECTOR MACHINE (SVM)

Syamila Hayatun

Paddy is as crucial since rice is the most staple food for the majority of the world's population. However, the production of paddy is slow and less productive since many factors affect the growth of the paddy. In Malaysia, pests and diseases are two major factors affecting rice productions. This was not the only effect on the quantity, but also the quality of the paddy product that gets reduced because of the paddy disease. Realizing this problem, this study is an effort to detect, identify and accurately quantify the first symptom of the disease based on paddy leaf. There are three objectives have been setups that are to implement image processing techniques for detection and classifying paddy leaf diseases, evaluate the classification performance using accuracy, precision, and misclassification and develop GUI for paddy leaf disease. In the study, 105 samples of paddy leaves images with leaf blight, brown spot, and

leaf smut diseases are used. The image shadow is removed and the color image is converted to grayscale image for simplicity purposes. Then, Otsu's thresholding is applied to convert the grayscale image into a binary image. In order to extract the features, the area, perimeter, homogeneity, correlation, energy, and contrast of the diseases' region are calculated. The Gray-Level Co-occurrence Matrix (GLCM) is used to calculate homogeneity, correlation, energy, and contrast. Cubic Support Vector Machine (SVM) is used to classify the paddy disease. In order to measure the performance of the proposed method, the accuracy, precision and misclassification are calculated. At the end of this study, Graphical User Interface (GUI) is developed to incorporate the processes and methods for end user to use the end product. The implementation of the methods in this study is done using MATLAB R2020a. The result shows the percentage of accuracy for bacterial leaf blight, brown spot, and leaf smut are 91.43%, 85.71%, and 88.57% respectively. For the precision of bacterial leaf blight, brown spot, and leaf smut, the percentages are 91.43%, 71.79% and 81.81% each. Meanwhile, the misclassification for bacterial leaf blight, brown spot, and leaf smut are 8.57%, 14.29%, and 11.43 % respectively. Therefore the average of the accuracy, precision, and misclassification are 88.57%, 81.68%, and 11.43% each showing that the propose method gives a better prediction for the paddy leaf disease.

## МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ КАЧЕСТВА ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

<sup>1</sup>Ажмухамедов Искандар Маратович, <sup>2</sup>Ёркулов Бехзод Абдугаффарович

<sup>1</sup>*Астраханский государственный университет, Россия,*

e-mail: aim\_agtu@mail.ru

<sup>2</sup>*Навоийский государственный педагогический институт, Узбекистан*

e-mail: byorkulov@gmail.com

Тенденция к цифровизации всех сфер жизни общества, бесспорно, стала предпосылкой к внедрению электронных технологий в сферу образования. И если на заре новой технической революции «цифра» проникла в систему высшего образования, то 2020-е годы ознаменованы цифровизацией средней школы как некое дополнение к традиционному. После 2018 года в высших учебных заведениях укрепилась парадигма активного внедрения онлайн-курсов, в том числе появились практики замещения (на альтернативной или безальтернативной основе) традиционных по форме обучения дисциплин - дистанционными. Эти практики вызвали острые дискуссии, поскольку не все дисциплины оказались содержательно и методически адаптируемы к онлайн-формату. Однако никто не рассматривал вариант полного перехода «в цифру» как единственно верный. Проблемы, вызванные пандемией коронавирусной инфекции, затронули все сферы общественной жизни, в том числе и образование. Если ранее к дистанционному проведению образовательного процесса тяготели преимущественно высшие учебные учреждения, заинтересованные в охвате аудитории и реализации проектов непрерывного и доступного образования, то вынужденная самоизоляция привела к тому, что слабо востребованные школой дистанционные технологии стали насущной необходимостью. Массовый переход всех школ к онлайн-обучению ярко проявил проблему оценки качества образовательных информационных систем, актуальность которой упускалась в «мирное время», т.к. увеличение нагрузки на эти системы привело к возникновению различных негативных последствий, например, нерассчитанные на одновременное пребывание большого количества пользователей образовательные порталы не справлялись с нагрузкой и возникали ошибки, в результате чего учащиеся не могли получить задание. Проблема оценка качества любой информационной системы, в том числе образовательной (ОИС), заключается в отсутствии единого определения термина

«качество ИС» - ни в государственных стандартах республики Узбекистан и стран СНГ, ни в международных нормативно-правовых актах, в результате чего каждый ученый в своих научных трудах работах, посвященных управлению качеством ИС, интерпретирует его по-своему. Однако по результатам анализа работ по данной тематике было выявлено, что качество является интегральным совокупным показателем. Однако единый взгляд на набор показателей для оценки качества ОИС, отсутствует, а имеющиеся подходы недостаточно полно учитывают специфические особенности задачи оценки качества ОИС, прежде всего наличие субъективной неопределенности, связанной с необходимостью широкого использования экспертной информации. В связи с этим была предпринята попытка самостоятельно, опираясь на полученные из различных источников данные сформулировать понятие «качество ОИС» и его составные элементы. В результате был сформулирован критерий «качество ОИС», который характеризуется следующими параметрами: эргономичность, экономичность, системность, надежность, безопасность, функциональность. В свою очередь, каждый из них может характеризоваться дополнительными параметрами. С точки зрения требований к образовательной составляющей, для ОИС выдвигаются требования к качеству инфраструктуры, качеству рабочих программ, качеству знаний и безопасности образовательного контента. Это дает возможность определять термин «качество ОИС» как совокупный критерий, составные элементы которого не представляется возможным оценить количественно. Их величину чаще всего определяют эксперты, опираясь на субъективный анализ процесса функционирования системы и оценивая ее вербально, т.е. качественными оценками. Однако некоторые параметры все же могут быть оценены количественным образом. Так для процедуры объединения имеющихся данных об уровне качества ОИС необходимо использовать такой математический аппарат, который позволит совокупно использовать количественную и качественную разрозненную характеризующую предметную область информацию. Эту задачу позволяет решить нечеткое когнитивное моделирование, которое помимо всего прочего дает возможность использовать нечеткие, неполные и противоречивые данные. Анализ литературы показал [5], что в рамках решения слабоформализуемых задач целесообразнее использовать нечеткие когнитивные карты для оценки влияния и причинно-следственных связей между параметрами предметной области. Основой когнитивной карты выступает ее модель с набором нечетких продукционных правил, имеющие форму вида «IF-THEN». Условной частью таких правил является выражение операции нечеткой логики над лингвистической оценкой параметра. Например:

$$\text{IF } (M_1 \text{ is } B_1) \text{ AND } (M_2 \text{ IS } B_2) \text{ THEN } (Y \text{ IS } A)$$

где  $M_1$  и  $M_2$  - входные переменные,  $Y$  - результирующая переменная,  $B_1$ ,  $B_2$  и  $A$  - качественные лингвистические оценки.

Условная часть нечеткого продукционного правила определяет условия его применимости, а результирующая часть - принадлежность переменной  $Y$  к качественным лингвистическим оценкам. При этом ребра графа отражают влияние условной части правила на результирующую переменную. В рамках решения задачи объединения данных о необходимом уровне качества ОИС и оценки ее качества лежит совокупный критерий оценки качества, который сформулирован на основе международных стандартов серии ISO 9000 и различных групп показателей качества, которые могут быть сформулированы ЛПР.

$$Quality = (\alpha_1 \cdot Safety + \alpha_2 \cdot Eco + \alpha_3 \cdot Sist + \alpha_4 \cdot Sec + \alpha_5 \cdot Rel + \alpha_6 \cdot Func + \alpha_7 \cdot Know + \alpha_8 \cdot Inf + \alpha_9 \cdot Prog) \cdot Law$$

где соответственно  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9 \in [0, 1]$  коэффициенты влияния эргономичность (*Safety*), экономичность (*Eco*), системность (*Sist*), надежность (*Rel*), безопасность (*Sec*), функциональность (*Func*), качество знаний (*Know*), инфраструктура (*Inf*),

качество учебных программ (*Prog*), соответствие требованиям контента ОИС закону о возрастной маркировке ( $Law \in [0; 1]$ ) на уровень качества образовательной информационной системы (*Quality*).

Использование для решения поставленной задачи аддитивной свертки связано с тем, что снижение показателя по одному критерию компенсируется ростом оценки других показателей. В этом случае, компенсация одного показателя другим зависит от значения  $\alpha_i$ . Применение мультипликативной свертки в рамках данной задачи используется для учета требований законодательства, т.к. высокий показатель остальных критериев качества не может компенсировать нелегальный контент, который приводит к обнулению уровня качества ОИС. Для объединения данных о необходимом уровне качества ОИС разработан алгоритм №1:

1. Задать необходимый уровень показателей «пригодность к ремонту» и «безотказность» и рассчитать показатель надежности ОИС;
2. Задать необходимый уровень сервисов и вычислить показатель ИБ;
3. Задать необходимый уровень экономичности использования ОИС;
4. Задать необходимый уровень системности ОИС;
5. Задать необходимый уровень эргономичности ОИС;
6. Задать необходимый уровень функциональности ОИС;
7. Задать необходимый уровень качества знаний ОИС;
8. Задать необходимый уровень инфраструктуры ОИС;
9. Задать необходимый уровень качества учебных программ ОИС;
10. Вычислить необходимый уровень качества ОИС.

Таким образом была разработана методика определения качества образовательных информационных систем, в основе которой лежит функциональный граф и совокупный критерий качества. Формула для его расчета представляет собой аддитивную и мультипликативную свертки параметров, которые характеризуют совокупный критерий. Реализация методики позволяет повысить эффективность процесса управления качеством образовательных информационных систем и образовательного процесса в целом.

## Литература

1. *Eppler M., Wittig D.* Conceptualizing information quality: A review of information quality frameworks from the last ten years. In: Proceedings of the 2000 Conference on Information Quality. Klein, B. D. & Rossin, D. F. (eds.); Boston: M.I.T. 2000, p. 83–91.
2. *Rao, P.P.B.* Ranking generalized fuzzy numbers using area, mode, spreads and weight / P.P.B. Rao, N.R. Shankar // International Journal of Applied Science and Engineering. – 2012, №10. – Vol. 1, P. 41–57.
3. *Ажмухамедов, И.М.* Методология моделирования плохо формализуемых слабо структурированных социотехнических систем / И. М. Ажмухамедов, О. М. Проталинский // Вестник АГТУ. Сер. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. №1. С. 144–154.
4. *Ажмухамедов, И.М.* Информационная безопасность. Системный анализ и нечеткое когнитивное моделирование: монография / И.М. Ажмухамедов. Москва: Изд-во LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG. Астрахань, 2012. 385 с.
5. *Кузнецов, О.П.* Когнитивное моделирование слабо структурированных ситуаций: [Электронный ресурс]. / О. П. Кузнецов // Режим доступа: <http://posp.raai.org/data/posp2005/Kuznetsov/kuznetsov.html> (дата обращения 28.12.2016г.).
6. *Международный стандарт ISO 9000-2015.* Системы менеджмента качества. [Электронный ресурс]. Режим доступа - <http://iso-management.com/wp-content/uploads/2018/09/ISO-9000-2015.pdf>.

## НЕКОТОРЫЕ ПРАКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПЕРЕХОДА ВУЗА К ДИСТАНЦИОННОМУ ОБУЧЕНИЮ НА ПРИМЕРЕ ФЕРГАНСКОГО ФИЛИАЛА ТУИТ ВО ВРЕМЯ ПАНДЕМИИ COVID-19

<sup>1</sup>Кушматов О., <sup>2</sup>Умаров Ш. А.

<sup>1</sup> Ферганский филиал Ташкентского университета информационных технологий,  
Узбекистан

e-mail: orifk@gmail.com

<sup>2</sup> Ферганский филиал Ташкентского университета информационных технологий,  
Узбекистан

e-mail: sh.umarov81@mail.ru

Основной целью использования массовых открытых онлайн-курсов (МООС, Massive open online courses) является изучение и применение в учебном процессе передовых педагогических и методических разработок в преподавании естественных наук. Эта сфера деятельности получила развитие в передовых вузах развитых стран. Целью организации учебной деятельности студентов на основе популярных открытых онлайн-курсов является повышение качества образования за счет эффективного использования современных информационных и телекоммуникационных технологий и эффективного использования зарубежного опыта. Популярные открытые онлайн-курсы появились в начале нынешнего века, в 2010 году, как продолжение открытых учебных курсов, размещенных отдельно в Интернете. Термин MOOS был придуман в 2010 году Университетом Принца Эдуарда (UEPI, Канада) профессором Дэвидом Кормьером, который назвал онлайн-курсы MOOS "открытым, общедоступным, распространяемым, непрерывным обучением".

Дистанционные образовательные технологии существуют давно и их успешно используют в ведущих вузах и различных курсах повышения квалификации. Разработаны стандарты спецификации для дистанционного обучения, так называемый **SCORM** (англ. *Sharable Content Object Reference Model*). Разработаны и используются соответствующие платформы дистанционного обучения в том числе с открытым кодом (1,2,3). То есть это раздел в области образования который успешно развивался.

Наряду с этим существовало образование с традиционными методами преподавания. Ферганский филиал ТУИТ ничем не отличался от других вузов.

Но пандемия COVID-19, и самоизоляция заставили пересмотреть традиционные методы обучения и в спешном порядке адаптировать весь учебный процесс к дистанционному обучению.

Надо отметить специализация ВУЗА и наличие хорошо оборудованного технического центра и высококвалифицированного персонала позволило в короткий срок наладить дистанционное обучение.

За основу была взята **Moodle** (*Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment* (модульная объектно-ориентированная динамическая обучающая среда)). Загружена на сервера технического центра ВУЗА и адаптирована к учебному процессу.

Теперь по содержанию. Размещение текстовой информации (лекции, лабораторные, практические занятия) не вызвало больших проблем. Но для создания мультимедиа контента в обучении требуется большие трудозатраты. И в лучшем случае получается "говорящая голова". Для восполнения этого пробела преподаватель должен быть как агрегатор мультимедиа файлов по своему предмету или второй путь создание своей студии при институте. Качественный мультимедиа контент требует написание сценария, работы оператора, режиссера, актёров. Или все это должен делать преподаватель. Если мы не имеем в штате таких ораторов например, как Роберт Сапольский. Один из путей решения проблемы иметь в штате технического центра хотя бы одного оператора.



Второй путь курсы, предлагаемые МООС, как правило, из высшего учебного заведения, отбираются специальной рабочей группой на основе государственного стандарта образования, новой типовой учебной программой, основанной на зарубежном опыте, и формируются руководством института. Рабочая группа подбирает курсы, предлагаемые МООС, а затем выбранные курсы утверждаются учебно-методическим советом.

Как было указано выше, в Ферганском филиале ТУИТ была создана рабочая группа, а ссылки на курсы MOOS были организованы в образовательной информационной системе Moodle (<http://moodle.fbtuit.uz/>). Рабочая группа подготовила ряд видеороликов о работе в образовательной информационной системе Moodle.

Образовательная информационная система Moodle филиала обеспечивает методическую помощь преподавателям в решении проблем, возникающих при изучении MOOS студентами. Через образовательную информационную систему Moodle, теоретические, учебно-лабораторные и практические занятия, текущие, промежуточные и итоговые оценки можно проводить консультации с педагогическим персоналом на основе прямых встреч педагогического персонала со студентом.

Несмотря на завершение учебного года прошло без существенных сбоев необходимо отметить:

- Требование подготовки преподавательского состава и студентов к дистанционному обучению.
- Сбор и систематизация мультимедиа файлов по каждому предмету
- Недостаточная доступность по охвату территорий и скорости интернет

## Литература

1. *Юревич А. В.* Информационно-коммуникационная система образования. 2011.
2. *Анисимов А.М.* Работа в системе дистанционного обучения Moodle. Учебное пособие. 2-е изд.- Харьков, ХНА-ГХ, 2009. - 292 стр.
3. *Ишков А.Д.* Особенности реализации дополнительного профессионального образования в исследовательских университетах. - Москва, 2011. -216 стр.
4. *Donald Clark* Plan B: MOOCs: taxonomy of 8 types of MOOC, 2013, URL: <http://do-naldclarkplanb.blogspot.co.uk/2013/04/moocs-taxonomy-of-8-types-of-mooc.html> (02. 10. 2015)

## ТЕХНОЛОГИЯ DATA MINING В LMS

**Примова М.Х.**

*Национальный Университет Узбекистана, Узбекистан*

e-mail: primova.mastura@mail.ru

В последнее время LMS стремительно развивается во всем мире, и основная задача - своевременно предоставлять качественную информацию студентам. Большие объемы данных в LMS хранятся на серверах в большом объеме дискового пространства. База данных LMS содержит структурированные и неструктурированные данные, которые сложно обработать традиционными статистическими методами.

То есть хранение информации в LMS и быстрый поиск этой информации и ее надо во время представить (студенты, учителям, администрации). Эту проблему невозможно решить без анализа большого количества данных, генерируемых пользователями LMS (студенты, преподаватели, администрация). Технология Data Mining помогает быстро искать и извлекать данные из базы данных.

Технологии Data Mining начали развиваться в середине 20 века, и только в начале этого века эти технологии начали использоваться в образовании. Одним из основоположников

использования технологии Data Mining в образовании является Райан Бейкер, профессор Колумбийского университета [1].

Эти технологии называются EDM (Educational Data Mining). За этот период в связи с ростом использования информационных технологий в образовании резко увеличился объем обрабатываемых данных, и на сегодняшний день алгоритмы обработки данных совершенствуются. Технология EDM основана на шаблонах и концепциях поведения студентов [2].

### Литература

1. *Baker R.S.* 1. Educational data mining: An advance for intelligent systems in education. IEEE Intelligent Systems, 2014. 29 (3). P. 78-82.
2. *Bishop Ch.* Pattern Recognition and Machine Learning. Series: Information Science and Statistics. 2006. Т. XX. 740 p.

## ПРОЦЕССЫ ПРИМЕНЕНИЯ КВАНТОВОГО ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА В ОПТИМИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ

<sup>1</sup>Тоиров Шухрат Абдуганиевич, <sup>2</sup> Нармурадов Улугбек Зиядуллаевич

<sup>1</sup> Самаркандский филиал ТУИТ, Узбекистан  
e-mail: tashuxrat@mail.ru

<sup>2</sup> Самаркандский филиал ТУИТ, Республика Узбекистан  
e-mail: narmuradov\_ulugbek@mail.ru

Квантово-генетический алгоритм является результатом комбинации квантовых вычислений и генетических алгоритмов, нового алгоритма эволюции вероятности [1]. В 1996 году Нараянан и Мур впервые предложили квантово-генетический алгоритм, и он успешно использовался для решения проблемы TSP. Квантово-генетический алгоритм - это, по сути, генетический алгоритм, который может применяться в области, где может применяться традиционный генетический алгоритм. Эффективность квантово-генетического алгоритма намного лучше, чем традиционного генетического алгоритма. Квантово-генетический алгоритм характеризуется незначительностью населения, скоростью слияния, большими возможностями и надежностью глобальной оптимизации. Вектор квантового состояния вводится в генетическом алгоритме для выражения генетического кода, а ворота квантовой логики используются для эволюции хромосом. Вы можете достичь лучших результатов с помощью этих инструментов. Однако есть некоторые проблемы с традиционным квантово-генетическим алгоритмом [3, 4]. Например, он основан на таблице поиска при определении направления угла поворота. Кроме того, постоянный угол поворота отрицательно влияет на быстрый поиск и приближение [5]. Чтобы решить вышеупомянутую проблему, эта статья улучшает квантово-генетический алгоритм с гибким эволюционным процессом. Квантовые мутации и операции квантовой катастрофы также введены для улучшения работы алгоритма.

### Литература

1. *Shi F., Wang H., Yu L., and Hu F.* Analyze of 30 Cases of MATLAB Intelligent Algorithms, B eihang University Press, Beijing, China, 2010.
2. *Narayanan A. and Moore M.* YQuantum-inspired genetic algorithms, Y in Proceedings of the IEEE International Conference on Evolutionary Computation (ICEC '96), pp. 61-66, Nagoya, Japan, May 1996. View at: Google Scholar
3. *van Meter R., Nemoto K., and Munro W.J.,* YCommunication links for distributed quantum computation, Y IEEE Transactions on Computers, vol. 56, no. 12, pp. 1643-1653, 2007. View at: Publisher Site | Google Scholar

## ОБЛАЧНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В МЕДИЦИНСКИХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

Хасанов С. С.

НамГУ, Наманган, Узбекистан  
e-mail: saidjalolhasanov@gmail.com

*Облачные вычисления поддерживают мобильные и совместные приложения и сервисы. Увеличение объема хранения, высокая автоматизация, гибкость и снижение затрат - вот несколько преимуществ облачных вычислений. Использование облачных вычислений может улучшить предоставление медицинских услуг пациентам. В этой теме были представлены категории и модели обслуживания облачных вычислений, их технологический интеллект, разнообразные приложения в сфере медицинских услуг и здравоохранения и биометрическая аутентификация для обеспечения информационной безопасности. Были также представлены вопросы, связанные с конфиденциальностью, безопасностью, барьерами для приложений в сфере здравоохранения.*

### Управление данными

Облачное хранилище - это служба хранения данных, которая может включать долгосрочное хранение и архивирование информации, такой как клинические данные, медицинские изображения и отсканированные документы. Облачное хранилище может быть частным, общедоступным или гибридным.

Поставщики услуг предоставляют и поддерживают облако в удаленном центре обработки данных, в то время как пользователи получают удаленный доступ к программному обеспечению и услугам через Интернет, используя Интернет или другие мобильные устройства. Облачные сервисы обеспечивают возможность системам использовать данные и веб-сервисы из других систем, особенно из других облаков, которые часто принимают форму гибридного облака. Потому что медицинские данные хранятся во многих разных системах, и нет двух одинаковых систем. Облачные сервисы способствуют без потерь при переводе и гарантируют более высокий уровень качества и точности данных [2].

Облачные платформы позволяют в режиме реального времени сотрудничать между поставщиками, что обеспечивает более гибкое управление данными медицинскими организациями. Использование облачных сервисов способствует более быстрому управлению данными в связи с пациентами и более эффективному мониторингу хронических заболеваний.

### Доступ к данным

Когда информация о пациенте хранится в облаке, медицинские работники могут получить доступ к результатам лабораторных и рентгенологических исследований, а также к любым другим соответствующим результатам анализов в течение любого периода времени и в любом месте. Для медицинских сестер на дому облако работает в их пользу, предоставляя им немедленный доступ к данным в реальном времени, позволяя им документировать посещения и составлять график обновлений в реальном времени, освобождая их от трудоемкой ежедневной процедуры синхронизации. Облачные вычисления предоставляют информацию, которая является более доступной для поставщика и поддерживает пользователей, благодаря чему отделение неотложной помощи, отделение интенсивной терапии, различные отделения медицинского ухода, вспомогательные отделения, такие как лаборатории и радиология, и другие отделы, такие как например, прикрепленный дом престарелых и т. д., имеют доступ к тому же типу и количеству информации. Этот доступ

в режиме реального времени и легкодоступная информация приводят к более быстрому реагированию на информационные запросы, улучшенной координации ухода, лучшему принятию решений и более высокому качеству ухода за пациентами [3].

### **Обмен данными**

В медицинской информатике облачные ресурсы можно разделить на вычислительные, хранилища и данные. Вычислительное облако состоит из таких ресурсов, как оборудование, программное обеспечение, центральный процессор (ЦП) и операционная система; в то время как облачное хранилище предоставляет базу данных и жесткий диск большой емкости для хранения цифровых изображений из отделений радиологии, расположенных в разных местах. Вся информация, хранящаяся в облаке данных, такая как цифровые изображения и информация о пациенте, может быть легко найдена. Услуги, предоставляемые облачными ресурсами, должны быть высоконадежными, масштабируемыми и доступными из любого места. В области медицины цифровые изображения производятся во все увеличивающемся объеме для диагностики и полезных рутинных оздоровительных целей. Из этих изображений некоторые могут быть использованы другими рентгенологами или другими поставщиками из других больниц [4].

Облачный брокер был применен для оптимизации использования ресурсов в облаке по целевому запросу. Брокер называется набором функций, таких как предоставление возможности обнаружения ресурсов в распределенной вычислительной среде, выбор подходящих ресурсов и отправка выбранного ресурса пользователям и т. д. Например, может использоваться брокер интеграции для разнородных источников информации. объединять данные из различных автономных учреждений и разрешать доступ к брокеру ресурсов только врачам, радиологам и фармацевтам; посредник соглашения об уровне обслуживания ведет переговоры между поставщиком ресурсов и пользователем. Пользователь может отправить запрос на обслуживание брокеру из любого места. Затем виртуальные машины будут виртуально подключены к одной физической машине в распределенной среде для удовлетворения принятого запроса на обслуживание [4].

ImageZone - это облачная платформа для обмена медицинскими изображениями, разработанная для предоставления цифровой альтернативы традиционным методам обмена рентгенологическими изображениями на печатных пленках и компакт-дисках. Платформа позволяет медицинским работникам в реальном времени получать безопасный доступ к медицинским изображениям пациентов, таким как рентгеновские снимки, маммограммы, МРТ, УЗИ и КТ, и обмениваться ими.

### **Снижение рабочей нагрузки и экономия затрат**

Пользователи в частном облаке имеют наибольшее количество контроля; Наибольшие сбережения и ресурсные возможности достигаются с помощью публичного облака. Для планов здравоохранения и организаций, предоставляющих медицинские услуги, гибкая гибридная модель предлагает лучшее из частного облака и публичного облака. Плательщики могут использовать облачные сервисы для всего: от обработки претензий до координации обслуживания [5].

Требования по срокам для продвинутых клинических приложений наряду с ростом запросов на доступ к данным со стороны рынков медицинского страхования и организаций, обеспечивающих медицинское обслуживание, обеспечили тенденцию к совместному размещению центров обработки данных из-за возросших затрат на строительство и безопасность персонала центров обработки данных, особенно если больницы разрабатывают

свои владеть дата-центрами. Пропускная способность интернета обеспечивается партнером по коллокации, что позволяет сэкономить на стоимости интернет-протокола. Ежегодные расходы на оборудование и услуги интернет-провайдера также снижаются. Нет необходимости обновлять оборудование для хранения данных; затраты на архивное хранение снижаются [3]. Резервное копирование критических файлов пациентов и других важных данных становится менее затратным и гораздо менее сложным для обслуживания, что снижает общую стоимость документации. Облачные вычисления значительно сокращают расходы на здравоохранение, сохраняя при этом неизменно более высокое качество обслуживания пациентов.

Избавившись от бремени управления аппаратным обеспечением, хранилищем и обслуживанием, ИТ-отделы, использующие облачные вычисления, могут сосредоточиться исключительно на приложениях и обслуживании своих конечных пользователей. Таким образом, бремя ИТ-персонала устраняется, и определенный ИТ-персонал может быть перераспределен в другие области [3].

### **Беспроводная технология для облачных вычислений в ЭМК и Телемедицину**

Беспроводные устройства могут предоставлять данные в реальном времени в облачную среду для практики доказательной медицины среди более широкого круга лиц. Облачные вычисления ускоряют эффективную связь между поставщиками первичной медицинской помощи и уходом на дому [1]. Беспроводная сеть датчиков площади тела - это новая технология, использующая беспроводные датчики для мониторинга состояния здоровья пациентов в режиме реального времени. Это полезно при реализации мобильного здравоохранения (мобильное здравоохранение). Беспроводная сеть датчиков площади тела для мониторинга состояния здоровья состоит из нескольких сенсорных узлов, которые могут измерять и сообщать о физиологическом состоянии пользователя. Беспроводная сеть датчиков площади тела использовался для сбора и отправки данных на облачный сервер. Сенсорные параметры подавались в механизм нейронной сети, работающий как облачный сервис, который объединял информацию от нескольких разрозненных датчиков, чтобы определить, находится ли пациент в состоянии опасности. Объединение мобильных вычислений и облачных ресурсов является одним из популярных направлений исследований [6]. Медицинские провайдеры, администраторы и внешние заинтересованные стороны использовали облачные вычисления для телемедицины.

Многие организации здравоохранения обратились к облачным электронным медицинским картам (ЭМК) или системам управления циклом дохода, потому что поставщики предлагают постоянные обновления, исправления безопасности и предсказуемую модель операционных расходов [5]. С точки зрения медика исполнительной власти, облачные вычисления организовано могут предложить решение на часто упорное сопротивление к широкому распространению ОГО, как и планировались. Однако многие руководители и эксперты здравоохранения считают, что облачные сервисы могут улучшить отношение к принятию ЭМК, а также улучшить платформу для обмена информацией о пациентах.

### **Облачные сервисы в аварийном восстановлении**

Для пользователя Облака, который передал обработку своих данных на аутсорсинг поставщику облачных услуг, важно, чтобы обе стороны имели представление о плане аварийного восстановления поставщика облачных услуг.

Эми можно хранить на компакт-диске и загружать на компьютер. Если Эми работает в облаке, то к ней можно получить доступ с компьютера в любом другом географическом местоположении. Например, в разгар катастрофических событий многие поставщики

медицинских услуг могут продолжать жизненно важный уход за пациентами и поддерживать необходимую коммуникацию с помощью облака ЭМК. Удивительно, но во время урагана врачи все еще могли использовать облако ЭМК для выставления счетов, написания и передачи рецептов, проверки списков лекарств пациента и консультаций с пациентом обо всех его медицинских состояниях.

### **Биометрическая аутентификация**

Аутентификация - это процесс надежного определения личности человека или определения подлинности чего-либо. Отсутствие системы управления идентификацией может привести к рискам и скрытым затратам, отрицательно влияя на реализацию любых облачных сервисов. Аутентификация и управление удостоверениями были очень важны в облаке [7]. Сложность возрастает по мере того, как компания принимает несколько облачных решений, в которых пользователи должны использовать разные удостоверения для выполнения своей повседневной работы. Увеличение количества учетных записей пользователей и паролей увеличит сложность и стоимость, если компания будет использовать несколько облачных провайдеров [7].

Как правило, существует три метода аутентификации: владение, знание и биометрия. Владение может представлять собой определенный физический объект, например ключи или карточку с магнитной полосой. Знания относятся к секретным знаниям, таким как пароли, ответы на вопросы и т. Д. Биометрия относится к автоматизированным методам проверки или идентификации личности живого человека на основе физиологических или поведенческих характеристик. В отличие от владения или знаний, биометрия использует измеримые черты человека, которые трудно разделить, украсть, подделать или изменить. Биометрия включает в себя распознавание лица, отпечатка пальца, подписи, голоса, радужной оболочки, сетчатки глаза и ДНК.

Некоторые методы аутентификации, используемые в медицинских приложениях и здравоохранении: фотография, пароль (персональный идентификационный номер, PIN-код), дата рождения, имя, страховая карточка, карточка или номер социального страхования, идентификационная карточка, браслеты, штрих-код и радиочастотная идентификация. Личные данные и информация о здоровье пациентов в ЭМК должны быть защищены; однако иногда имели место утечки данных, кража личных данных, а также мошенничество. Биометрия - это лучший метод защиты информации при предоставлении авторизованному персоналу доступа к ней.

Преимущества биометрии в здравоохранении - защита информации о пациентах с помощью точной аутентификации, устранение затрат на обслуживание пароля, уменьшение мошенничества в бизнес-приложениях и рабочих процессах в больницах, таких как системы проверки страховки. Идентификация для безопасности также помогает избежать ненужных или дублирующих тестов или процедур, что предотвращает получение пациентом ненужных тестов или процедур, предотвращая необоснованные риски и расходы [8].

Биометрические методы, например сканирование отпечатков пальцев и сканирование вен на ладони, использовались в больницах и системах здравоохранения для уменьшения числа случаев мошенничества со страховыми картами, выявления пациентов и привязки данных пациентов в различных учреждениях здравоохранения. Это исключает ненужные повторные клинические лабораторные исследования. Таким образом, пожизненная ЭМК проходит везде, куда направляется пациент, и они больше не привязаны к одному центру оценки [9]. Иногда один биометрический метод имеет ограничения, такие как данные

датчика шума, различимость или неуниверсальность. Мультимодальный биометрический метод может применяться с использованием нескольких биометрических признаков. После подходящей нормализации баллов было выполнено мультимодальное биометрическое слияние на уровне совпадающих баллов с использованием взвешенных баллов [10].

### **Некоторые барьеры облачных вычислений и SWOT-анализ**

Хотя облачные вычисления предлагают многочисленные преимущества, некоторым людям требуется время, чтобы принять их, особенно тем, у кого нет знаний и опыта в облачных вычислениях. 10 основных препятствий на пути доверия пользователей к облачному подходу: доступность услуг, блокировка данных, конфиденциальность и слышимость данных, узкие места при передаче данных, непредсказуемость производительности, масштабируемое хранилище, ошибки в крупномасштабных распределенных системах, быстрое масштабирование, судьба репутации совместное использование и лицензирование программного обеспечения. Юрисдикция данных, функциональная совместимость данных и некоторые правовые вопросы также являются потенциальными серьезными проблемами. Страх перед вендором действительно вызывает беспокойство. Каждый поставщик услуг хранения имеет свой собственный интерфейс прикладного программирования (API). В некоторых ситуациях пользователь может также захотеть определить метаданные, связанные с набором данных, такие как информация об устаревании или параметры безопасности. Отсутствие общего API создало бы проблемы, если бы поставщик услуг хранения внезапно закрыл свои двери.

SWOT-анализ (сильные и слабые стороны, возможности, угрозы) - это хорошо известная методология стратегического планирования, используемая организациями для определения и устранения как положительных, так и отрицательных факторов.

*Облачные вычисления облегчают удобный доступ по требованию к общему пулу виртуальных вычислительных ресурсов, включая сети, серверы, хранилища, приложения и службы. Гибкость и сдерживание затрат являются двумя важными факторами при использовании облачных вычислительных систем. Пользователи динамически масштабируют хранилища и платят только за то, что они используют. Облачные вычисления способны обеспечить быструю эластичность и повсеместный доступ к ресурсам здравоохранения. Облачные вычисления обеспечивают быстрое управление данными о пациентах, обеспечивают поставщикам услуг и пациентам быстрый и легкий доступ к медицинским и медицинским данным, облегчают безопасный обмен данными, снижают рабочую нагрузку и значительно экономят затраты. Беспроводная технология может использоваться для сбора и отправки данных на облачный сервер; облачные вычисления могут улучшить ЭМИ и телемедицину. Во время стихийных бедствий врачи могут использовать облако ЭМК для выставления счетов, написания и передачи рецептов, а также оценки списков лекарств и состояния пациентов. В области медицинских услуг и здравоохранения облачные вычисления должны поддерживать соответствие некоторым актам для обеспечения безопасности данных и защиты конфиденциальности. Биометрические методы, например, распознавание отпечатков пальцев и сканирование ладонных вен, могут повысить аутентификацию и информационную безопасность. Хотя облачные вычисления обладают большим потенциалом, существуют барьеры, ограничивающие их применение и расширение. Государственные инвестиции и политика помогают устранить некоторые барьеры. Ожидается, что достижения науки и техники позволят преодолеть эти барьеры.*

## Литература

1. *Edward G.J.* Cloud computing: innovating the business of health care, *Healthcare Financial Management*, 2011, 130-131
2. *Mueller C. and Pantos G.* In the Cloud: Health Care Delivery in the Digital Age, *Benefits Magazine*, 2012, 34-36.
3. *Rajendran J.* What CFOs should know before venturing into the cloud, *Healthcare Financial Management*, Май, 2013, 40-43.
4. *Nordin M. I., Abdullah A. and Hassan M. I.* Goal-Based Request Cloud Resource Broker in Medical Application, *Proceedings of World Academy of Science: Engineering & Technology*, no. 74, 2011, 770-774.
5. *Melnik T.* Health Care Moving to the Clouds, *Managed Care Outlook*, vol. 25, no. 12, 2012, 3-8.
6. *Bourouis A., Feham M. and Bouchachia A.* A New Architecture of a Ubiquitous Health Monitoring System: A Prototype of Cloud Mobile Health Monitoring System, *International Journal of Computer Science Issues*, vol. 9, no 2, 2012, 434-438.
7. *Granneman J.* Meeting Mandates in the Cloud, *Information Security*, Ноябрь 2010, стр.33-41.
8. *Hoffherr G.* Biometrics in Healthcare II An Introduction, Internal Report, Politec, Inc., 2007, 119.
9. *Czernowalow M.* SA pilots biometrics in healthcare, *ITWEB*, Июнь, 2005, стр.113.
10. *Al-Hijaili S.J., Abdulaziz M.* Biometrics in health care security system, iris-face fusion system, *International Journal of Academic Research*, vol. 3. no. 1, 2011, стр.11-19.

## TA'LIM SAMARADORLIGINI OSHIRISHDA AXBOROT TEKNOLOGIYALAR

**Gadoyeva R.A.**

*Abu Ali ibn Sino nomidagi yosh biologlar va kimyogarlar ixtisoslashtirilgan  
maktab-internatining oliy toifali fizika fani o'qituvchisi, Toshkent, O'zbekiston*  
e-mail: ruxsoraahatovna@gmail.com

Umumiy o'rta ta'lim davlat ta'lim standartining asosiy prinsiplari: o'quvchi shaxsi, uning intilishlari, qobiliyati va qiziqishlari ustuvorligi; umumiy o'rta ta'lim mazmunining insonparvarligi; davlat ta'lim standartining ta'lim sohasidagi davlat va jamiyat talablariga, shaxs ehtiyojiga mosligi; umumiy o'rta ta'limning mazmuni, shakli, vositalari va usullarini tanlashda innovatsiya texnologiyalariga asoslanilganligi; o'quvchilarda fanlarni o'rganish va ta'lim olishni davom ettirish uchun tayanch va fanlarga oid umumiy kompetensiyalarni rivojlantirishning ta'minlanganligi; rivojlangan xorijiy mamlakatlarning ta'lim sohasida me'yorlarni belgilash tajribasidan milliy xususiyatlarni hisobga olgan holda foydalanishni o'z ichiga oladi. O'quvchilar uchun fizika, kimyo va boshqa tabiiy fanlarni o'zlashtirish nisbatan murakkab hisoblanadi. Ularni bu fanlarni o'rganishga bo'lgan motivatsiyasining yo'qligi, ya'ni kam kuch sarflab yaxshi baho olishga bo'lgan istaklari sabab ularni bu fanni o'rganishga undash ancha qiyinchilik keltirib chiqaradi. Biz o'quvchilarimizni o'rta maktabni fizika, kimyo va boshqa tabiiy fanlardan tegishli bilim va amaliy ko'nikmalarga ega bo'lishlariga erishmoqchi bo'lsak, fan bo'yicha olib boriladigan darslarni yanada rang-barang va qiziqarli bo'lishini ta'minlashimiz kerak. Bu borada o'quvchilarga fanga tegishli bo'lgan bilimlarni berishda axborot texnologiyalaridan keng foydalanish juda muhimdir. Mening darslarni tashkil etishda axborot texnologiyalaridan keng foydalanish borasidagi ishlarimga O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Prezident, ijod va ixtisoslashtirilgan maktablarni rivojlantirish Agentligining Prezident maktabida tashkil etilgan "Darslarda virtual laboratoriya va amaliy ishlardan foydalanish" mavzusidasi seminar treningi katta yordam berdi. Bu seminarda chet ellarda fizika fanini o'qitishda foydalanilayotgan kompyuter resurslari tahlili, fizika faniga oid bo'lgan (simulyatorlar, animatsiya va video roliklar, virtual laboratoriya ishlari va fizik jarayonlarni modellashtirish imkoniyatini beruvchi) dasturiy ta'minotlar bazasi haqida ma'lumotlar berildi. Seminardan so'ng men seminarda berilgan virtual tajriba va laboratoriya



ishlarini to'g'ridan-to'g'ri onlayn rejimda bajarish mumkin bo'lgan Phet Colorado, Crocodile Physic, Interaktive Physic va Skrach kabi o'qitish dasturlaridan foydalanishni o'rgandim va ularni darslar jarayonida qo'lladim. Bu dasturlar fizik jarayonlarni modellashtirish va fizikaning mPxxanika, elektr zanjirlar, optika va to'liq hodisalari bo'limlariga oid tajribalar yaratish, fizik hodisalarni kuzatish, tajribalar o'tkazish va turli murakkablik darajasidagi jarayonlarni modellashtirish imkoniyatini beradi. Darslar davomida shuni kuzatdimki, o'quvchilarga fizikaviy qonun va hodisalarni virtual kuzatish laboratoriya sharoitida kuzatishga nisbatan katta qulayliklarga ega ekan. Bu dasturlarda virtual tajribalarda laboratoriya sharoitida ko'z ilg'amas holatlarni ko'rish, tajribani o'tkazish sharoitlarini o'zgartirish, kattaliklar orasidagi bog'liqliklar grafigini kuzatish mumkin. Bundan tashqari elektr bobiga doir tajriba va laboratoriya ishlarini o'tkazish, o'quvchilar sxemalarni tuzish va elektr tarmog'iga ulash, undan foydalanib tajriba natijalarini olish ishlarini bema'lol mustaqil ish sifatida topshirishlari mumkin. Elektr qurilmalar, lampochka va elektr isitgich asboblari quvvatning nominal qiymatida yorqinlashadi, agar ulardagi quvvat ishchi qiymatidan ortib ketse kuyadi. Kuygan asbobni osongina ekrandagi boshqa asbob bilan hech qanday xarajat yoki talofatlarsiz almashtirish mumkin. Masalan, o'tkazgichlarni ketma-ket va parallel ulash laboratoriya ishini Crocodile Physic dasturida bajarish kerak bo'lsa, o'quvchilar dastur panelida mavjud elektr qurilmalar: lampa, ampermetr, voltmeter, tok manbai va kalitdan iborat elektr sxemalarni osonlik bilan o'zlari hosil qiladilar va unda laboratoriya ishida talab qilingan kattaliklar tok kuchi va kuchlanish orasidagi bog'liqlikni tekshirib ko'rishlari mumkin bo'ladi. O'quvchilar laboratoriya ishini bajarishda yig'ilgan elektr zanjirini ruxsat etilgan tok manbaiga o'qituvchi ishtirokisiz ulashi, kerakli o'lchov chegarasidagi ampermetr va voltmetrni tanlashlari, lampalarni almashtirishlari mumkin bo'ladi. O'quvchilarning o'zlari bajargan tajribalari ularning ko'rilayotgan hodisa yoki qonuniyatni to'g'ri tushunish va yaqqol tasavvur qilish imkonini beradi. Natijada o'tilayotgan mavzuga doir bilimlar o'quvchilar xotirasida uzoq muddatga muhrlanadi. Ushbu dasturdan foydalanish o'quvchilarning fanni o'zlashtirishini osonlashtirish bilan birga, ularning fanga bo'lgan qiziqishini ham oshiradi. Fan bo'yicha nazariy olgan bilimlarini turli vaziyatlarga qo'llash imkoniyatini beradi, demakki ularda olingan bilimlarini hayotda qo'llash malakasini hosil qiladi. Xulosa qilib aytganda, ta'lim jarayoniga faol ta'lim metodlari, o'qitishning turli usullari qo'llanilishi bilan birga axborot texnologiyalaridan foydalanish o'rta ta'lim davlat ta'lim standartining asosiy prinsiplari nazarda tutgan vazifalarni bajarish imkonini beradi. O'quvchi shaxsi, uning intilishlari, qobiliyati va qiziqishlari e'tiborga olingan holda davlat va jamiyat talablariga mos shaxsni tarbiyalash vazifasi bajariladi. Innovatsiya texnologiyalariga asoslanilgan ta'lim o'quvchilarda fanlarni o'rganish va ta'lim olishni davom ettirish uchun tayanch va fanlarga oid umumiy kompetensiyalarni rivojlantirishni ta'minlaydi. O'quvchilar murakkab deb biladigan fanlariga nisbatan qiziqishini uyg'otishga va bu fanlarni o'zlashtirish sifatini oshishiga o'z ta'sirini ko'rsatadi. O'quvchilarningning doimo faol, izlanuvchan, ijodkor bo'lishiga sharoit yaratiladi.

Maqolada yuqorida ta'kidlangan ishlar bo'yicha tajriba natijalari taqdim etiladi va olingan natijalar asoslab beriladi.

### Adabiyotlar

1. Tadjibayeva X.H., Usmanova Sh.P. Fizika va astronomiya o'qitish nazariyasi va metodikasi.-T.:2018.
2. Karlibayeva G.E. Fizika o'qitish metodikasi fanining samaradorligini oshirish yo'llari.-T.:2014, 80 bet.
3. <http://vakhid.zn.uz>

### 3. INFORMATION SECURITY AND ENGINEERING TECHNOLOGY

#### DEVELOPMENT OF METHODS FOR THE GENERATION OF S-BOXES FOR BINARY AND TERNARY NUMBER SYSTEMS

<sup>1</sup>Abdullaev T.R., <sup>2</sup>Juraev G.U.

<sup>1</sup> *Ministry of Defense of the Republic of Uzbekistan,*  
e-mail: timurar@yandex.com

<sup>2</sup> *National University of Uzbekistan, Uzbekistan,*  
e-mail: gjuraev@mail.ru

The article develops a method for generating S-boxes consisting of 256 and 729 elements, respectively, for binary and ternary number systems. The correlation coefficients, avalanche effect, and non-linearity (Hamming distance) of the resulting S-box are estimated. It also describes a computational experiment to find coefficients of the algebraic normal form of output functions of S-blocks consisting of 729 values and an estimation of its algebraic degree of non-linearity. The resulting S-blocks can then be used as cryptographic primitives in block encryption algorithms.

When designing the S-block, it must be taken into account that the desired replacement tables meet the following conditions [1,2,3]:

- severe avalanche effect;
- the criterion of independence of bits;
- the requirement of non-linearity from the input values.

The essence of the method for finding the best S-block is as follows (Fig. 1):

1. first, a random replacement table is generated, in this case consisting of 256 values from 0 to 255;
2. for the generated S-box, correlation coefficients and avalanche effect are determined;
3. two randomly selected elements are swapped in the S-box;
4. correlation coefficients and avalanche effect will be found;
5. if the correlation and avalanche effect coefficients for the new S-box become worse, then the rearranged elements of the S-box return to their original positions;
6. if the correlation and avalanche effect coefficients have a satisfactory value, that is, they correspond to a strong S-box, then the obtained S-box is taken as the sought S-box and the generation of the S-box ends, otherwise return to step 3.

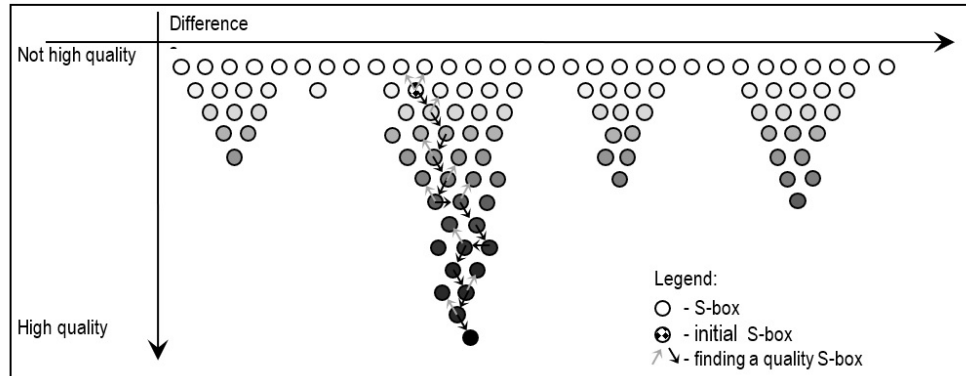


Fig. 1. Schematic representation of the search method for a quality S-box in the conditional distribution space.

### References

1. *Shannon C.E.* Communication Theory of Secrecy Systems, Bell Syst. Tech. Journal, Vol.28, 1949.
2. *Petrov I.O.* Nekotoryye otsenki kachestva algoritmov shifrovaniya // Setevoy zhurnal "NovaInfo.Ru", 2017, 10 fevralya. -no 59-2. P. 58-68.
3. *Sokolov, A.V.* Novyye metody nelineynykh preobrazovaniy sovremennykh shifrov. Saarbrücken (Germany): Lap Lambert Academic Publishing. ВГҮ 2015. ВГҮ 100 p.

### SELECTION OF THE OPTIMAL TYPE OF THE GAMMING FUNCTION FOR SYMMETRIC ENCRYPTION ALGORITHMS

<sup>1</sup>Abdullaev T.R., <sup>2</sup>Juraev G.U.

<sup>1</sup> Ministry of Defense of the Republic of Uzbekistan,  
e-mail: timurar@yandex.com

<sup>2</sup> National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,  
e-mail: gjuraev@mail.ru

In practice, in various branches of knowledge, there is often a need for ternary logic. Therefore, the possibility of using ternary logic and ternary number system in scientific literature has been discussed for a long time. It uses a ternary number system with the simplest elements equal to 0, 1, 2, called trites [1]. A set of six trites form a trite [2,3].

In this paper, we consider the construction of optimal gamma functions, which can then be effectively used as constituent elements in symmetric encryption algorithms based on ternary logic.

In ternary logic, there are  $[3^{3^2} = 19683]$  transform functions. Of these functions, only 12 functions can be used as gamma functions in encryption algorithms. All these gamma functions can be broken down into two types:

the first type, when two functions are required for direct and inverse conversion;

the second type of functions, when the same function is used for forward and backward conversion.

An assessment of the features of the above-mentioned gamma functions is made, the choice is made the most preferable for use as a cryptographic primitive in the encryption algorithm.

To implement the idea of using ternary logic in encryption algorithms, a block encryption algorithm was developed using the simplest transforming functions: gamma, S-block Substitution table, P-block permutation table, and polynomial arithmetic [4]. In the encryption algorithm, the encryption process is as follows:

gamma is implemented in the preliminary transformation;

followed by seven rounds of repeating four functions: substitution table S-box, P-box permutation table, polynomial arithmetic and gamma;

the final transformation implements polynomial arithmetic and gamma.

As a result of the analysis of the data obtained, the following conclusions can be drawn:

the number of unchanged trites after each transformation function is in the range from 43 to 81, which is a good indicator, otherwise each transformation function changes almost 66% of the input values, that is, approximately 120 trit, with an ideal value of 120 trit;

at the output, each trit is guaranteed to change its value several times, that is, there is not a single trit that changes less than 11 times;

taking into account the random formation of the input block, the second type of gamma function is preferable;

already in the second round, all the trites will change their values and positions, that is, an avalanche effect is achieved;

the selection of seven rounds of encryption is enough with a margin to successfully resist various types of cryptanalysis.

## References

1. *Lukasevich YA.* O printsipe protivorechiya u Aristotelya. Kriticheskoye issledovaniye: per. s pol'sk. B.T. Dombrovskogo / YA. Lukasevich. - M.-SPb.: BkTsentr gumanitarnykh initsiativBh, 2012. bGYS 256.
2. *David C. Rine.* Computer Science and Multiple-Valued Logic. 1st Edition. Theory and Applications / North Holland. 1st January 1977. P: 562. ISBN: 9781483257921 (355-394)
3. *Jeff Connelly.* Ternary Computing Testbed. 3-Trit Computer Architecture / California Polytechnic State University of San Luis Obispo. August 29th, 2008. P: 192.
4. *Petrov I.O.* Nekotoryye otsenki kachestva algoritmov shifrovaniya // Setevoy zhurnal BkNovaInfo.RuBh, 2017, 10 fevralya. -bHII59-2. bGYS.58-68. URL: <https://novainfo.ru/article/11211>. (date of the application: 02.05.2018).

## ABOUT THE CHI-SQUARE CRITERION APPLICATION FOR THE DECRYPTION PROBLEM AUTOMATION PROCESS

<sup>1</sup>Akbarov D.E., <sup>2</sup>Umarov Sh.A.

<sup>1</sup> *Kokand Pedagogical Institute*),  
e-mail: sht00357@gmail.com

<sup>2</sup> *Fergana branch of the Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi*),  
e-mail: sh.umarov81@mail.ru

**Introduction.** The foundations of the mathematical model of the chi-square application are proposed for the criterion for the process of automating the solution of the decryption problem.

The results of processes that depend on random factors are characterized by distributions of random variables. Such processes include: the task of decrypting crypto analysis [1,2], isolating or transforming particles during their independent development (evolution) [3,4], in adequate modeling and investigation of the spread of infectious (viral) diseases, optimizing the increase in the efficiency of selection and planning yield, observation and stable management of socio-economic processes, etc. Such processes refer to branching to random processes. They are investigated as a class of Markov chain problems and have applications for solving real applied problems [4].

**Formulation of the problem.** All possible results of some independently conducted experiment may be expressed by the number of  $k$ -cases:  $y_1, y_2, \dots, y_k$ . It is assumed that this experiment is carried out independently  $n$  times, where  $n > k$  and  $n$  are sufficiently large and a multiple of the number  $k$ . The problem of distribution of quantities  $y_1, y_2, \dots, y_k$ . How much deviates from the uniform distribution of these values. For this, the following notation is introduced: -  $p_s$  the likelihood that the result of the experiment will be  $y_s$ ; -  $Y_s$  amount of what the experiment results is  $y_s$ ;

Then, taking into account the introduced notation, the so-called "Chi-square" formula for the distribution of random variables is expressed

$$V = \sum_{s=1}^k \frac{(Y_s - np_s)^2}{np_s} \quad (1)$$

In the case of the origin of the process, all sorts of expected results  $y_1, y_2, \dots, y_k$  having the same probability of  $p_1 = p_2 = \dots = p_k = \frac{1}{k}$  manifestation, these results can accordingly occur in different quantities of  $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \dots, \bar{Y}_k$ . Then there is a place

$$V = \sum_{s=1}^k \frac{(\bar{Y}_s - \frac{n}{k})^2}{\frac{n}{k}} = \frac{k}{n} \sum_{s=1}^k \left(\bar{Y}_s - \frac{n}{k}\right)^2 \neq 0.$$

This formula expresses the standard deviation of the uniform distribution of  $Y_1 = Y_2 = \dots = Y_k = \frac{n}{k}$  from the non-uniform  $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \dots, \bar{Y}_k$  distribution of the observed numbers. Here  $\sum_{s=1}^k \bar{Y}_s = n$  and the relations

$$\bar{Y}_{s_i} = \frac{n}{k_i} \neq \frac{n}{k_j} = \bar{Y}_{s_j} \quad 1 \leq s_1, s_2 \leq k (1 \leq k_1, k_2 \leq k),$$

may hold for some pairs.

The problem of crypto analysis is considered: automation to distinguish semantic texts from non-semantic ones in the process of decrypting encrypted text by selecting an unknown key. In the proposed semantic text, based on the properties of the language according to the words, the symbols of the alphabet and their combination in two, three, etc. letters are unevenly distributed. On the other hand, words, sentences, paragraphs of texts on a selected topic are almost similar, i.e. the frequency of alphabetic characters and their combination in two, three, etc. the letters are almost the same. These and other considerations enable the scientific approach of substantiating the algorithm to distinguish between semantic text and random text in the process of decryption automation with the choice of a key with a known encryption algorithm.

**The solution of the problem.** The values of the Chi-square formula of criterion (1) are relative to the symbols of the alphabet and their combination in two, three, etc. The letters in different texts are different, as they are distributed separately. Choosing from a large volume

of texts in a sufficiently large number of  $T$  related to one topic,  $V_1, V_2, \dots, V_\gamma, \gamma = 1, 2, \dots, T$ . respectively, are calculated.

After calculating the arithmetic mean value  $\frac{V_1+V_2+\dots+V_T}{T} = V_e$ , this value  $V_1, V_2, \dots, V_\gamma, \gamma = 1, 2, \dots, T$ . takes as a reference on this topic. When the decryption key is unknown, choosing a possible key decrypts the encrypted text and, according to formula (1),  $V_d$  is calculated accordingly. If the comparison  $|V_e - V_d| < \delta$  is satisfied, then the decrypted text is accepted as the intended plaintext.

The choice of the topic of the proposed plaintext is carried out taking into account: the features of the channel of the information and communication network, the address of the sender and the receiver and their area of interest, information of different observations and experiments.

Naturally, any plaintext is composed in some language, which has a limited number of characters of the letters of the alphabet. It is noted that text information exchanged in the global information and communication network is formed by ASCII characters encoded by numbers 0,1,2,3, ..., 255; one byte. For example, the symbols of the Uzbek language alphabet form 32-35 letters, respectively, taking into account punctuation marks and other specifics, this number will slightly increase. Similar features can also be approved for Russian, English, and other languages. As noted above, in semantic texts, the symbols of the alphabet and their associations in accordance with words, sentences, paragraphs have certain different distributions. For a single text, based on the features of the language in which this text is compiled, determining the frequency of association in two, three, etc. letters, their distribution tables are formed. After, the values of the standard deviation of these distributions are calculated relative to the uniform:  $V_{(1)}$ - one,  $V_{(2)}$ - two,  $V_{(3)}$ - three, etc. unions with letters of the alphabet.

Compared to reference values:  $V_{(e1)}$ - one,  $V_{(e2)}$ - two,  $V_{(e3)}$ - three etc, letter associations:  $|V_{(e1)} - V_{(1)}| < \delta_1, |V_{(e2)} - V_{(2)}| < \delta_2, |V_{(e3)} - V_{(3)}| < \delta_3, \delta_i$ - fairly small numbers.

Further, the appendices of the above justifications are presented with respect to texts exchanged on the global information and communication network, formed by ASCII characters in a certain language.

**Conclusion.** The results obtained allow the mathematical justification of the model of the algorithm and the automation of determining the alleged plaintexts in the process of decryption with a choice of key. The intensive exchange of information on the global information and communication network, encrypted information may contain sensitive information that can negatively affect the social, economic and political interests of various kinds of entities. Practical application of the results will undoubtedly be a useful way to prevent such aspirations.

Similarly, to the "Chi-square" criterion, you can use other criteria for assessing the deviation of individual characters, combining in two, three, etc. the alphabetical characters of the intended text are relatively evenly distributed. In this case, it is necessary to take into account the features of the applied method as the "Chi-square" criteria.

## References

1. Akbarov D.E, Umarov Sh.A. The Application of Logical Operations and Tabular Transformations in the Base Accents of HashFunction Algorithms. Computer Reviews Journal Vol 6 (2020) ISSN: 2581-6640. Page 11-18.
2. Savola, Reijo M., and Petri Heinonen. "A visualization and modeling tool for security metrics and measurements management." 2011 Information Security for South Africa. IEEE, 2011.
3. Агібалов Г. П., Панкратова И. А. Элементы теории статистических аналогов дискретных функций с применением в крипто анализе итеративных блочных шифров //ПДМ. 2010. с 3(9). 51-68.
4. Акбаров Д.Е. Ахборот хавфсизлигини таъминлашнинг криптографик усуллари ва уларнинг кулланиши. Тошкент. "Ўзбекистон маркаси"нашричти, 2009 й. 432 бет.
5. Акбаров Д.Е. ва бошқалар. Криптотахлил масалаларига тизимли ҳадошув асослари ва уларни ечиш усуллари. Фаргона. "Фаргона 2014 й. 144 бет.

6. *Мифтахова Л. Х.* Применение нечеткой логики при проектировании локальных сетей с криптографической защитой информации // Вестник Казанского технологического университета. - 2016. - Т. 19. - с. 8.
7. *Нагаев С.В., Мухамеджанова Р.* Переходные явления в ветвящихся случайных процессах с дискретным временем. Сб. "Предельные теоремы и статистич. выводы" Ташкент.: "Фан". 1968. стр.: 83-89.
8. *Севастьянов Б.А.* Ветвящиеся процессы. М.: "Наука". 1971. 436 с.
9. *Сирожидинов С.Х., Маматов М.М.* Э?тимоллар назарияси ва математик статистика. Тошкент.: "Укитувчи". 1980. 256 бет.
10. *Харрис Т.Е.* Теория ветвящихся случайных процессов. М.: "Мир". 1966. 436 с.

## APPLYING THE O'ZDST 1106: 2009 HASH ALGORITHM AND THE O'ZDST 1092: 2009 SIGNATURE ALGORITHM IN ACTIVE DIRECTORY CERTIFICATE SERVICES

<sup>1</sup>Alaev Ruhillo

<sup>1</sup> National University of Uzbekistan, Uzbekistan  
e-mail: mr.ruhillo@gmail.com

The paper provides a method for applying the O'zDSt 1106: 2009 hashing algorithm and the O'zDSt 1092: 2009 signature algorithm in AD CS (Active Directory Certificate Services) on Windows Server. The architecture of a Key Storage provider is proposed, and the mechanism of integrating Key Storage provider with ADCS is provided. A solution to the problem of not recognizing the O'zDSt1092: 2009 algorithm by the operating system and the problem of using digital certificates generated using the O'zDSt 1092: 2009 algorithm is proposed. A method for secure storage and use of cryptographic keys is proposed. The description of the implementation of the functions of the key store provider interface is given.

**Keywords:** digital signature, Cryptography Next Generation API, GNG signature provider, GNG hash provider, GNG cipher provider, key storage provider, Active Directory Certificate Services, digital certificate, O'zDSt1092:2009, O'zDSt1006:2009, O'zDSt1005:2009.

### Introduction

Electronic digital signature technology is widely used to ensure the integrity and identification of the owner of an electronic document. Presently in Uzbekistan, tools and methods that allow using digital signature algorithm O'zDSt1092:2009 do not provide document signing, signature validation and key management, through standard interfaces such as CryptoAPI, Cryptography Next Generation API [1] and PKCS [14-18]. This raises the problem of using the O'zDSt1092: 2009 algorithm in information systems, such as not recognizing the O'zDSt1092: 2009 algorithm by the operating system, working with digital certificates generated using the O'zDSt 1092: 2009 algorithm.

In Windows, cryptographic providers are used to work with digital certificates, signing an electronic document, checking the digital signature. Starting with Windows Vista, Microsoft is offering a new Cryptography Next Generation API (CNG API) [1] to perform cryptography operations for applications. CNG also offers a mechanism for implementing a new cryptographic algorithm in the operating system. For each algorithm, a separate cryptographic provider is developed, which is registered in the system for a certain class of algorithms. To manage cryptographic keys of digital signature algorithm, the tools, that supports this algorithm, are required. Only a some digital signature algorithms support such tools. These tools can be hardware or software. Some hardware key management implementations only provide key management capabilities, signature and signature verification is done in software. Key management tools allow you to automate the process of using keys in information systems, such as

generating, storing, exporting, importing, destroying keys, encryption and decryption with a key, and managing access to keys. Public Key Infrastructure (PKI) provides cryptographic key management [19].

To manage keys the key storage providers are used in CNG. In Windows, for interaction with key storage providers there is an Active Directory certification service, which by default works with signature algorithms such as RSA, Diffie Hellman (DH), Elliptic Curve Diffie Hellman (ECDH) and Elliptic Curve Digital Signature Algorithm (ECDSA) [1]. Only a key storage provider is not sufficient to perform cryptographic operations. The CNG provides the following types of providers for this purpose: hash provider, cipher provider, asymmetric encryption provider, random number generator provider, secret agreement provider, signature provider, key derivation provider. Application programs interact with CNG providers through CNG routers that provide CNG APIs. The CNG API is divided into two groups:

*BCrypt API* - CNG Cryptographic Primitive Functions for cryptographic operations such as hashing, signing and signature verification, random number generation, encryption, asymmetric encryption, key derivation;

*NCrypt API* - CNG Key Storage Functions for working with cryptographic keys and CNG SSL Provider Functions.

Each type of algorithm has its own type of CNG router. Several CNG providers can be implemented for each algorithm. A review of Microsoft's next-generation providers and the analysis of their supporting algorithms, types of providers were discussed in [2]. Windows default CNG providers do not support signature algorithm O'zDSt1092:2009[2]. The design and implementation of the key storage provider, which provides management keys' life cycle, were discussed in [3]. But the detailed description and integration with the Active Directory certification service has not been discussed. K. Lee and others [4] analyzed the possible vulnerabilities of the CNG library. The structures, functionality, and security issues of CNG have been discussed in [5,6]. Cryptographic modules are not only developed as a cryptographic provider. The design and implementation of such elliptic curve cryptographic electronic signature systems were discussed in [7,8,9,10]. But such cryptographic modules are not compatible with CNG, and therefore such solutions are not suitable for new custom algorithms. The development of a cryptographic provider for the hashing algorithm and the encryption algorithm was considered in the work [11]. It proposes a method of applying the symmetric algorithm O'zDSt 1105: 2009, and the hashing algorithm O'zDSt 1106: 2009 to ensure the confidentiality of electronic documents in MS Office. The authors of [12] discussed the development of a cryptographic provider that supports the CryptoAPI interface. They gave a detailed review of the cryptographic transformations of the encryption algorithm O'zDSt1005:2009, presented the architecture and modules of the CryptoAPI provider that they developed.

### System architecture

Applications for working with cryptographic keys use the key storage provider, for symmetric encryption they use the cipher provider, for hashing data they use the hash provider, for signing and verifying the signature they use the signature provider, etc. In turn, the key storage provider uses the signature provider to generate, export and import keys, sign and verify the signature, the cipher provider to encrypt data, and the hash provider to hash data. Therefore, a key storage provider and a custom algorithm provider were developed to integrate with ADCS. The custom algorithm provider implements 3 interfaces: hash interface for algorithm O'zDSt1006:2009, signature interface for algorithm O'zDSt1092:2009 and cipher interface for algorithm O'zDSt1005:2009. The architecture of the developed system consists of 3 main parts (Pic. 1): ARH Primitive Provider бГY the custom algorithm provider, ARH Key Storage Provider бГY the key storage provider, Provider extension бГY the extension module



of provider, PKCS #11 - a module that implements the functions of the PKCS #11 interface and cryptographic algorithms.

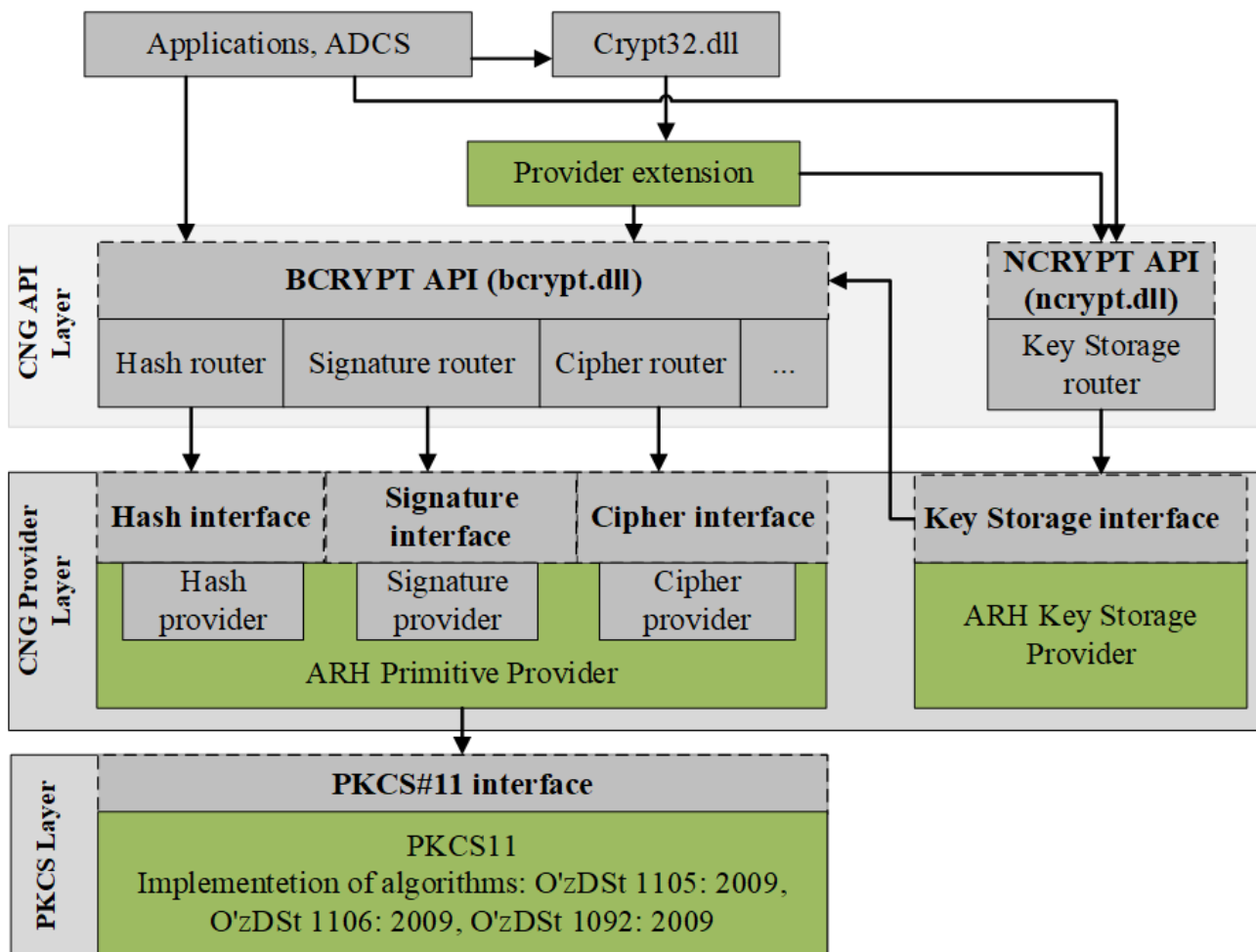


Fig.1. The system architecture

### Main parameters

The following constants are defined for the algorithms:

ARH Primitive Provider - the name of the custom algorithm provider

ARH Key Storage Provider - the name of the key storage provider

O'zDSt 1092:2009 Alg1 - the name of the 1st algorithm of the O'zDSt 1092:2009 standard

O'zDSt 1092:2009 Alg2 - the name of the 2nd algorithm of the O'zDSt 1092:2009 standard

O'zDSt 1006:2009 Alg1 - the name of the 1st algorithm of the O'zDSt 1006:2009 standard

O'zDSt 1006:2009 Alg2 - the name of the 2nd algorithm of the O'zDSt 1006:2009 standard

O'zDSt 1005:2009 Alg1 - the name of the algorithm of the O'zDSt 1005:2009 standard

O'zDSt 1106:2009 Alg1/1092:2009 Alg1 - the name of the double algorithms O'zDSt 1092:2009 Alg1 and O'zDSt 1106:2009 Alg1

O'zDSt 1106:2009 Alg2/1092:2009 Alg2 - the name of the double algorithms O'zDSt 1092:2009 Alg2 and O'zDSt 1106:2009 Alg2

1.2.860.3.15.1.1.1.1 - the OID of the 1st algorithm of the O'zDSt 1092:2009 standard for sign

1.2.860.3.15.1.1.1.1 - the OID of test parameters of the first algorithm of the O'zDSt 1092:2009 standard for sign

1.2.860.3.15.1.1.2.1 - the OID of the 2nd algorithm of the O'zDSt 1092:2009 standard for sign

1.2.860.3.15.1.1.2.1.1 - the OID of test parameters of the second algorithm of the O'zDst 1092:2009 standard for sign

1.2.860.3.15.1.3.1 - the OID of the 1st algorithm of the O'zDst 1006:2009 standard

1.2.860.3.15.1.3.1.1 - the OID of test parameters of the first algorithm of the O'zDst 1006:2009

1.2.860.3.15.1.3.2 - the OID of the 2nd algorithm of the O'zDst 1006:2009 standard

1.2.860.3.15.1.3.2.1 - the OID of test parameters of the second algorithm of the O'zDst 1006:2009

1.2.860.3.15.1.1.1.2.2.1 the OID of the double algorithm O'zDst 1106:2009 Alg1/1092:2009 Alg1

1.2.860.3.15.1.1.1.2.2.2 the OID of the double algorithm O'zDst 1106:2009 Alg2/1092:2009 Alg2

The OIDs of algorithms and parameters are registered with the operating system.

### **Implementing Key storage provider interface functions**

The following functions are implemented according to the requirement for the key storage provider interface:

- *GetKeyStorageInterface* function
- Key storage provider interface functions:
  - *OpenProvider*
  - *OpenKey*
  - *CreatePersistedKey*
  - *GetProviderProperty*
  - *GetKeyProperty*
  - *SetProviderProperty*
  - *SetKeyProperty*
  - *FinalizeKey*
  - *DeleteKey*
  - *FreeProvider*
  - *FreeKey*
  - *FreeBuffer*
  - *Encrypt*
  - *Decrypt*
  - *IsAlgSupported*
  - *EnumAlgorithms*
  - *EnumKeys*
  - *ImportKey*
  - *ExportKey*
  - *SignHash*
  - *VerifySignature*
  - *PromptUser*
  - *NotifyChangeKey*
  - *SecretAgreement*

- *DeriveKey*
- *FreeSecret*
- *KeyDerivation*

### ***GetKeyStorageInterface* function**

The *GetKeyStorageInterface* function is used by the CNG router to get the address of the Key storage provider interface functions. The function takes the name of the key storage provider as an input parameter. An object of the `NCRYPT_KEY_STORAGE_FUNCTION_TABLE` structure is returned as an output parameter, which stores the addresses of the key storage provider interface functions. Later, the GNG router uses it to call interface functions of the Key storage provider.

The *OpenProvider* function is called by the CNG router when an application establishes a connection to the key storage provider. The function takes the name of the key storage provider as an input parameter and returns the handle of the provider. This handle serves as an identifier for the current connection. Also, this handle is used as an input parameter in many interface functions. The function initializes a provider object of type `ALPKSP_PROVIDER` and returns provider object addresses as handle of the provider.

*ALPKSP\_PROVIDER* struct:

```
typedef struct _ALPKSP_PROVIDER
{
    ALP_OBJECT_HEADER Header; //the size of the object and magic number
    DWORD dwFlags;
    LPWSTR pszName; // the name of the provider
    BCRYPT_ALG_HANDLE hAlgorithm; //the handle of the ARH Key Storage Provider
    LPWSTR pszContext; //context
} ALPKSP_PROVIDER
typedef struct _ALP_OBJECT_HEADER
{
    DWORD cbLength; // the size of the object
    DWORD dwMagic; // magic number
}
ALP_OBJECT_HEADER
```

The *CreatePersistedKey* function is called by the CNG router when generation of a key pair is required. It takes as input parameters the handle of the provider, the name of the algorithm, the name of the key, the type of key { `AT_KEYEXCHANGE` the key is a key exchange key, `AT_SIGNATURE` the key is a signature key, 0}, as well as a flag indicating the key of the current user or the local computer. The function initializes a key object of type `ALPKSP_KEY`. The function will not generate key pairs, it starts the key generation process. Typically, after calling the *CreatePersistedKey* function, the *SetKeyProperty* function is used to specify the length of the key, and the value of other parameters. The key generation process ends with a call to the *FinalizeKey* function. To generate the key pair, the *CreatePersistedKey* function uses the ARH Primitive Provider through the signature interface and calls the *GenerateKeyPair* function.

Syntax of the *ALPKSP\_KEY* struct:

```
typedef struct _ALPKSP_KEY
{
    ALP_OBJECT_HEADER Header;
    PALPKSP_PROVIDER hAlgorithn;
    ALG_ID AlgId; // ALGORITHM IDENTIFIER CALG_UZ_ASYMM1_SIGN CALG_UZ_ASYMM2_SIGN
    DWORD dwKeyBitLen;
    BOOL isFinished; // whether the key is finalized
    // handle to key objects.
```

```

BCRYPT_KEY_HANDLE hPublicKey; // the handle of public key
BCRYPT_KEY_HANDLE hPrivateKey; // the handle of private key
DWORD dwExportPolicy; // the export policy flag
DWORD dwFlags; // {NCRYPT_MACHINE_KEY_FLAG, NCRYPT_OVERWRITE_KEY_FLAG}
LPWSTR pszKeyName; // the name of the key (key file)
DWORD dwKeyUsagePolicy; // the key usage policy
DWORD dwLegacyKeySpec; // the type of the key {AT_KEYEXCHANGE, AT_SIGNATURE, 0}
//encrypted private key blob
PBYTE pbPrivateKey;
DWORD cbPrivateKey;
//hash value of pin
PBYTE pbPinHash;
DWORD cbPinHash;
// handle to cryptography providers needed to perform operations with the key.
BCRYPT_ALG_HANDLE hBCryptProvider;
// security descriptor to be set on the private key file.
DWORD dwSecurityFlags;
PBYTE pbSecurityDescr;
DWORD cbSecurityDescr;
NCRYPT_UI_POLICY_BLOB *pkeyUIPolicy;
LIST_ENTRY PropertyList; // list of properties.
} ALPKSP_KEY;

```

The FinalizeKey function is called by the CNG router when an application needs to complete the key pair generation process. The function takes as input parameters the handle of the provider, the handle of the key. The function calls the signature interface functions of the ARH Primitive Provider the FinalizeKeyPair and the ExportKey, sequentially. The function encrypts the key blob and stores it on disk. If a pin is specified, then the key is encrypted using the formula (1):

$$Ke = E(Kp, Kb), \quad (1)$$

$Kp$  is the encryption key,  $Kb$  is the generated private key,  $E$  is the `ObjIdDst1105:2009` encryption algorithm.

The encryption key  $Kp$  calculated using the formula (2).

$$Kp = H(H(H(pin))), \quad (2)$$

$pin$  is pin value,  $H$  is the `ObjIdDst1106:2009` hash function.

If the pin code is not specified, then the private key is encrypted using the `CryptProtectData` function.

The "system" and "hidden" attributes are set for the key file. Permission to the key file is assigned to the System account and the Administrators group. If it is a user key, then the permission is additionally assigned to the current user.

The `GetProviderProperty` function is used by the CNG router when an application needs to determine the value of the key storage provider properties.

The `GetKeyProperty` function is used by the CNG router when an application needs to determine the value of the key properties. The function takes the handle of the key, property name as input parameters and returns the attribute value as an output parameter. The `SetProviderProperty` function is used by the CNG router when an application needs to set the value of the key storage provider properties.

The `SetKeyProperty` function is used by the CNG router when the value of the key attributes needs to be set. The function accepts the handle of the key, the attribute name, the new value of the attribute as input parameters.

The OpenKey function is called by the CNG router when an application opens an existing key. The function accepts as input parameters the handle of the provider, the key name, the key type, a flag indicating whether the key is for the current user or the local computer. The function initializes the key object of the ALPKSP\_KEY type from the key file.

The DeleteKey function takes the handle of the key as an input parameter, deletes the key file, and also destroys the key object.

The FreeProvider function is called by the CNG router when an application closes the current connection to the key storage provider. The function takes the handle of the provider as an input parameter, frees the memory occupied by the provider object, which was created when calling the OpenProvider function.

The FreeKey function takes the handle of the key as an input parameter and destroys the key object.

The FreeBuffer function takes a buffer address as an input parameter and frees memory.

The Encrypt function encrypts a block of data. The function uses the ARH Primitive Provider.

The Decrypt function decrypts the data block. The function uses the ARH Primitive Provider.

The ImportKey function imports the key that is exported by the ExportKey function. The function takes a key blob, a key blob type {BCRYPT\_PUBLIC\_KEY\_BLOB - public key blob, BCRYPT\_PRIVATE\_KEY\_BLOB - private key blob} as input parameters, and returns the handle of the key. If the key blob type is BCRYPT\_PRIVATE\_KEY\_BLOB, then it saves the key to a file. The function initializes a key object of type ALPKSP\_KEY.

The ExportKey function exports the key. The function takes as input parameters, the handle of the key, the key blob type, and returns the key blob through the pbOutput output parameter. The public key blob consists of the key identifier, key version, OID of the key, algorithm parameter values, and public key parameters. The private key blob consists of the key identifier, key version, OID of the key, algorithm parameter values, public/private key.

The SignHash function is used by the CNG router when an application needs to sign data. The function takes the handle of the key, a hash value as input parameters, and returns the generated signature. The function uses the ARH Primitive Provider.

The VerifySignature function is called by the CNG router when the signature needs to be verified. The function takes as input parameters the handle of the key, a hash value, the signature to be verified, and returns the verification result. The function uses the ARH Primitive Provider.

The ARH Primitive Provider is registered to the hash, signature and cipher interface.

The ARH Key Storage Provider is registered to the key storage provider interface.

### **Implementation of integration functions**

The Provider extension has been developed to work with digital certificates. It implements the following callback functions:

The function PFN\_CRYPT\_EXPORT\_PUBLIC\_KEY\_INFO\_EX2\_FUNC encodes and exports the public key blob. The function takes the handle of the key, an encoding type X509\_ASN\_ENCODING, PKCS\_7\_ASN\_ENCODING, the public key as input parameters, and returns an object of type CERT\_PUBLIC\_KEY\_INFO, which contains information about the public key. The function uses the ARH Key Storage Provider.

The function PFN\_IMPORT\_PUBLIC\_KEY\_INFO\_EX2\_FUNC decodes the public key algorithm identifier and imports the key. The function uses the ARH Primitive Provider.

The function PFN\_CRYPT\_SIGN\_AND\_ENCODE\_HASH\_FUNC signs and encodes the hash value. The function takes the handle of the key, encoding type, signature algorithm identifier, signature parameters, OID of the double algorithm, hash algorithm identifier, hash

value as input parameters and returns the generated signature. The function uses the ARH Primitive Provider.

The function `PFN_CRYPT_VERIFY_ENCODED_SIGNATURE_FUNC` decodes the signature and verifies the signature. The function takes as input parameters the type of encoding, the address of an object of type `CERT_PUBLIC_KEY_INFO`, which contains the public key, the OID of the signature algorithm, the identifier of the signature algorithm, signature parameters, the identifier of the hash algorithm, hash value, the signature to be verified, and returns the verification result. The function uses the ARH Primitive Provider.

## Conclusion

The architecture of the custom algorithm provider and key storage provider was provided. The description of the key storage provider interface functions was discussed. The implementation of the key storage provider interface functions was presented. The ARH Primitive Provider has been developed which implements the signature interface, the hash interface and the cipher interface, and also supports the O'zDst 1105:2009, O'zDst 1106:2009 and O'zDst 1092:2009 algorithms. The ARH Key Storage Provider has been developed, which implements the key storage provider interface. The ARH Key Storage Provider provides secure storage, use, export and import of national signate algorithm keys. The ARH Key Storage Provider supports storage, export/import of signature keys in PKCS7 and PKCS8 formats, as well as generation of PKCS10 requests for a digital certificate via the CertEnroll API. The description and implementation of the ADCS integration functions were provided.

The developed system solves the problem of not recognizing digital certificates generated based on the O'zDst 1106: 2009 and O'zDst 1092: 2009 algorithms. The methods suggested here can be used to apply other algorithms that are not supported by the operating system by default.

## References

1. *Abhishek Singh*. Identifying Malicious Code Through Reverse Engineering (1st. ed.). Springer Publishing Company, Incorporated. 2009. <https://doi.org/10.1007/9780387894683>
2. *Y. Ahmad*. A study on algorithms supported by CNG of Windows Operating System. International Journal of Modern Engineering Research (IJMER). Vol.2, Issue.1, pp276280, JanFeb 2012.
3. *Z. Lina*. Design and Implementation of KSP on the Next Generation Cryptography API. International Conference on Medical Physics and Biomedical Engineering (ICMPBE), vol. 33, pp. 16401646, Sep. 2012,
4. *K. Lee, Y. Lee, J. Park, I. You, K. Yim*. Security Issues on the CNG Cryptography Library (Cryptography API: Next Generation). Proceedings of International Conference on Innovative Mobile and Internet Services in Ubiquitous Computing (IMIS), pp. 709713, Jul. 2013, DOI <https://doi.org/10.1109/IMIS.2013.128>.
5. *K. Lee, H. Lee, Y. Lee and K. Yim*. Analysis on the Key Storage Mechanism of the CNG Library. 10th International Conference on Innovative Mobile and Internet Services in Ubiquitous Computing (IMIS), pp. 499502, Fukuoka, 2016, DOI <https://doi.org/10.1109/IMIS.2016.103>.
6. *K. Lee, I. Oh, S. Lee, K. Yim*. Vulnerability Analysis on the CNG Crypto Library. The Journal of Korean Institute of Communications and Information Sciences. Vol.42 No.04, pp. 838847, DOI <https://doi.org/10.1109/IMIS.2015.34>.
7. *Akhalique, k.Singh, S.Sood*. Implementation of elliptic curve digital signature algorithm. International journal of computer applications, vol.2, May 2010.
8. *Abidi, Abdessalem & Bouallegue, Belgacem & Kahri, Fatma*. Implementation of elliptic curve digital signature algorithm (ECDSA). GSCIT 2014 Global Summit on Computer and Information Technology, 2014.
9. *Temitope O.S. Olorunfemi, B.K. Alese, S.O. Falaki and O. Fajuyigbe*. . Implementation of Elliptic Curve Digital Signature Algorithms. Journal of Software Engineering, 2007, DOI: <http://dx.doi.org/10.3923/jse.2007.1.12>.
10. *Bin Chen, Wenliang Wu, and Yao Zhang*. The Design and Implementation of Digital Signature System Based on Elliptic Curve the 2012 International Conference on Cybernetics and Informatics, Vo1.l63, pp. 20412047, 2014, DOI: [http://dx.doi.org/10.1007/9781461438724\\_260](http://dx.doi.org/10.1007/9781461438724_260).

11. *Mersaid Aripov and Ruhillo Alaev*. Research of the application of the new cryptographic algorithms: applying the cipher algorithm Обл'ЄzDSt1105:2009 for MS office document encryption. In Proceedings of the 5th International Conference on Engineering and MIS (ICEMIS бГ'Є19). Association for Computing Machinery, New York, NY, USA.2019. <https://doi.org/10.1145/3330431.3330434>
12. *Nurullaev, M. and Alov, r.d.* SOFTWARE, ALGORITHMS AND METHODS OF DATA ENCRYPTION BASED ON NATIONAL STANDARDS. IIUM Engineering Journal. 21, 1 (Jan. 2020), 142–166.
13. *Sean Turner, Russ Housley*. Implementing Email Security and Tokens: Current Standards, Tools, and Practices. Wiley Publishing, Inc. 2008. бГ'Y 314 CF.
14. *B. Kaliski*. RFC2315: PKCS #7: Cryptographic Message Syntax Version 1.5. RFC Editor, USA, 1998. Pp. 32. DOI:<https://doi.org/10.17487/RFC2315>
15. *B. Kaliski*. RFC5208: PKCS #8: PrivateKey Information Syntax Specification Version 1.2. RFC Editor, USA, 2008. Pp. 8.
16. *M. Nystrom, B. Kaliski*. RFC2986: PKCS #10: Certification Request Syntax Specification Version 1.7. RSA Security, 2000. Pp. 14.
17. PKCS #11: Cryptographic Token Interface. Base Specification Version 2.40. OASIS Standard, 2015. Pp. 149.
18. *Moriarty, et al.* PKCS#12: Personal Information Exchange Syntax Standard (Version 1.1), RSA Laboratories, 2014. Pp. 29.
19. *Buchmann, J. A., Karatsiolis, E., & Wiesmaier, A.* Introduction to public key infrastructures. Introduction to Public Key Infrastructures (pp. 1бГ'Y187), 2013. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/9783642-406577>

## COMPLEXITY OF TESTING CRYPTOGRAPHIC FUNCTIONS ON LINEAR AND CYCLIC INPUT ERRORS

<sup>1</sup>Alisher Ikramov

<sup>1</sup> *Department of Mathematics, National University of Uzbekistan, Uzbekistan*  
e-mail: ikramov.alisher@list.ru

### Introduction

Electronic devices, especially those implementing cryptographic functions, are widely used nowadays. The reliability of these devices is considered to be one of the key requirements. Many companies use different approaches to check their products for the presence of any errors. While stochastic methods are quite popular, testing approach is the only one that provides us with the exact answer on whether any error from a specified class is present in the device.

Researchers investigate different approaches to testing devices for errors. Romanov constructed algorithms to design devices in a way that requires the lowest complexity of testing. The most common input errors are discussed by Kudryavtsev et al., including inverse errors, conjunction, and constant errors. Complexity of testing for all mentioned input errors is fully investigated. Other types of input errors were studied by a group of scientists, for example, Morozov introduced local linear faults, Romanov estimated complexity of testing for input shifts, and for permutations of inputs, Lyubich considered inversion faults over different bases.

In this article we will consider two types of input errors and investigate complexity of testing for these types and specific class of functions — cryptographic.

### Definitions

We use the same definitions as ones introduced in Kudryavtsev et al..

An input *error* is a map  $\varphi: E_2^n \rightarrow Q$ , where  $Q \subseteq E_2^n$ , and there exists  $\tilde{\alpha}$  in  $E_2^n$  such that  $\varphi(\tilde{\alpha}) \neq \tilde{\alpha}$ . In some articles errors are also called *faults*.

$T \subseteq E_2^n$  is called a *test* for  $\Phi = \{\varphi - \text{error}\}$  and function  $f$ , if for any  $\varphi$  in  $\Phi$  given that  $f(\varphi) \neq f$  there exists  $\tilde{\alpha}$  in  $T$  such that  $f(\varphi(\tilde{\alpha})) \neq f(\tilde{\alpha})$ .

*Complexity* of testing function  $f$  on errors from the class  $\Phi$  is the smallest  $|T|$ , where  $T$  is a test for  $\Phi$  and  $f$ . Notation:  $L(f, \Phi)$ .

Complexity of testing a class of functions  $N$  on errors from the class  $\Phi$  is  $L(N, \Phi) = \max_{f \in N} L(f, \Phi)$ .

The definition of cryptographic function as one introduced in :

A vector-valued function with  $n + m$  inputs and  $n$  outputs is called *cryptographic*, if for any  $\tilde{k}$  in  $E_2^m$  function  $f(\cdot, \tilde{k})$  is bijective on  $E_2^n$ .

### Results

We consider complexity of testing cryptographic functions for two types of input errors: cyclic shifts and linear errors.

#### Cyclic shifts of inputs

We consider a type of input errors called cyclic shifts. Let  $\Gamma_n$  be a group of cyclic shifts on  $X^n$ . For each  $f \in P_2(n)$  we denote  $\varphi_f = \{c \in \Gamma_n : \exists \tilde{\alpha} \in E_2^n f(\tilde{\alpha}) \neq f(c(\tilde{\alpha}))\}$ .

Romanov demonstrated that the complexity of testing for the presence of such errors in a function with  $n$  inputs was not greater than  $\lceil \log_2 n \rceil$ .

We show that it is not the case for cryptographic functions where the complexity of testing is constant under a specific condition.

**Theorem** *Let  $m < n$ . Then  $1 \leq L(Cr(n, m), \Gamma_{n+m}) \leq 2$ .*

*Proof.* Let  $F \in Cr(n, m)$  be any cryptographic function. We will construct a test with only two vectors that is sufficient for testing for this type of error.

1. First, we take  $\tilde{\alpha} = (1, 0, \dots, 0)$ , that consists of a single ‘1’ that is followed by  $n + m - 1$  zeros. It is obvious that any cyclic shift of no more than  $n - 1$  positions to the right is tested by this vector, as the function with the remaining zero key-component must be bijective.

2. Second, we take  $\tilde{\beta} = (0, \dots, 0, \overset{n}{1}, 0, \dots, 0)$ , that consists of  $n - 1$  zeros followed by one ‘1’ and  $m$  zeros. This vector is testing for any cyclic shift of  $m + 1$  to  $n + m - 1$  positions to the right.

As  $m < n$ , then  $m + 1 \leq n$ ; hence,  $\{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\}$  is a test for any cyclic shift from 1 to  $n + m - 1$  positions to the right.

Thus, two vectors are enough for the test.  $\square$

#### Linear errors

In this section we will consider linear errors that are different from introduced by Morozov. We introduce more general approach to linear errors.

Let  $A$  be a square boolean matrix of size  $k \times k$ , and  $\tilde{b}$  be a boolean vector of size  $k$ . The error is called linear if it can be expressed as

$$\varphi(\tilde{x}) = A \cdot \tilde{x} + \tilde{b}. \quad (12)$$

where either  $A$  is an identity matrix or  $\tilde{b}$  has non-zero components. The class of all linear errors is denoted as  $L_2$ .

#### Theorem

$$L(n, L_2) = 2^n$$

*Proof.* Let’s consider a boolean function  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n$ . We take into consideration only boolean matrices with rank  $n - 1$ . For such matrix  $A$  there are only two vectors  $\tilde{0}, \tilde{a}$  in  $E_2^n$  for which  $A \cdot \tilde{a} = \tilde{0}$ . If any non-zero vector  $\tilde{a}$  is not included in the test, then we construct corresponding boolean matrix  $A$  with rank  $n - 1$  for which there is no difference between  $f(\tilde{x})$  and  $f(A \cdot \tilde{x})$  on this set. So, this set cannot be a test for linear errors.

Thus,  $L(n, L_2) \geq 2^n - 1$ . Now, for any considered matrix  $A$  above with rank  $n - 1$  there exists non-zero  $\tilde{b} \in E_2^n$  such that for any  $\tilde{x}$  we have  $A \cdot \tilde{x} \neq \tilde{b}$ . The error  $A \cdot \tilde{x} + \tilde{b}$  is not determined by any vector from the subset  $E_2^n \setminus \tilde{0}$ , but  $f(\tilde{0}) \neq f(A \cdot \tilde{0} + \tilde{b})$ . Therefore, test must include  $\tilde{0}$  as well.



We get  $L(n, L_2) = 2^n$ .  $\square$

Now, we consider only non-degenerate matrices  $A$  in linear errors and zero-valued  $\tilde{b}$ . The resulting subclass of linear errors is called non-degenerate linear errors and denoted as  $DL_2$ .

**Theorem** *Let  $m \leq n$ . Then*

$$L(Cr(n, m), DL_2) \leq (n + m)^2 - n + 1.$$

*Proof.* Let  $F$  be an arbitrary cryptographic function from  $Cr(n, m)$ . We consider a non-zero vector  $\tilde{\alpha} \in E_2^{n+m}$ . Let us count the number of errors that are not tested by this vector. We find the first index  $i$  such that  $\alpha_i = 1$ . All boolean vectors of the length  $n + m$  can be divided into two sets:

- 1) the dot product with  $\tilde{\alpha}$  gives 0;
- 2) the dot product with  $\tilde{\alpha}$  gives 1.

It is obvious, that for any  $\tilde{\beta}$  in the set 1 there exists a vector  $\tilde{\gamma}$  in the set 2 such that  $\gamma_j = \beta_j$  for  $j \neq i$  and  $\gamma_i = \bar{\beta}_i$ . This fact demonstrates that both sets have the same number of vectors. We then eliminate zero vector from the set 1.

For each  $\tilde{k} \in E_2^m$  there exists only one  $\tilde{t} \in E_2^n$  such that  $F(\tilde{\alpha}) = F(\tilde{t}, \tilde{k})$ , so, we need to count how many matrices that transform  $\tilde{\alpha}$  into the vector  $(\tilde{t}, \tilde{k})$ . We estimate the upper bound of this number. To do that, we take into consideration a vector  $(\tilde{t}, \tilde{k})$  with the number of zeros being equal to the number of ones. If  $n + m$  is odd we add an extra input. Then the number of matrices that transforms the current vector into the vector  $(\tilde{t}, \tilde{k})$  is not greater than:

$$\left\{ (2^{n+m-1} - 1)(2^{n+m-1} - 2^1)(2^{n+m-1} - 2^2) \cdot \dots \cdot (2^{n+m-1} - 2^{\frac{n+m-2}{2}}) \right\}^2 \lesssim O \left\{ \frac{2^{(n+m)^2}}{2^{n+m}} \right\}$$

There are only  $2^m$  such vectors, so the number of matrices is strictly less than  $2^{(n+m)^2-n}$ .

Pogosyan's lemma constructs the way of adding new vectors. After each vector added to the test the number of not covered errors is halved. Therefore, we need at most base-2 logarithm of the number of not tested matrices vectors to add to construct the test. Hence, the complexity of testing for this type of errors does not exceed  $(n + m)^2 - n + 1$  (here 1 corresponds to  $\tilde{\alpha}$ ).  $\square$

### Conclusion

In this section we compare our results with the existing results. For cyclic input errors, we reduced the complexity from logarithmic function of input size to the constant. For non-degenerate linear errors the upper bound could be estimated using Pogosyan's lemma as  $(n + m)^2$ . We reduced this value to  $(m + n)^2 - n$ . All these improvements are possible due to the definition of cryptographic functions.

**Acknowledgments** We wish to acknowledge the help of D. S. Romanov, V. B. Kudryavtsev, M. Bolonkin, and G. U. Juraev.

## PROBLEMS OF ENSURING THE CONFIDENTIALITY OF DATA OBJECTS OF INFORMATIZATION

<sup>1</sup>Juraev G.U., <sup>2</sup>Bozorov O.N.

<sup>1</sup> National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,

e-mail: gjuraev@mail.ru, e-mail: bozorov.obid@gmail.com

This paper deals with issues related to the protection of confidential data of objects of informatization. Previously, the problem of preventing leakage of confidential data from information

systems was solved mainly in three ways. Firstly, by the method of restricting the access rights of subjects to various information resources (role-based management, discretionary and mandatory access to resources), and secondly, through the use of software for controlling external devices (USB, CD-ROM, etc.) - at the level you can/this medium cannot be used, and, thirdly, due to data encryption. As practice shows, the above methods allow to ensure the protection of confidential information, only in the places of its storage (Data-at-Rest), and do not provide the possibility of control in the processes of information processing and transmission[1,2,3]. Currently, specialized technologies and solutions have appeared that can control data during processing and transmission (Data-in-Motion) through various channels: HTTP, SMTP, transferring data to removable devices, printing to local and network printers, etc. At the same time, the coverage of the channels should be as complete as possible so that the solution can be called complete. The task of analyzing the transmitted information is no less important. The system should only respond to confidential information and freely allow information that does not belong to this category.

The paper proposes the design of a national DLP (Data Loss Prevention) system for predicting and preventing leakage of confidential information. The main goal of creating a national DLP system is to ensure the protection of confidential data from internal threats - intentional and unintentional actions of employees aimed at transferring and removing confidential information outside the organization. The national DLP system must detect and prevent leaks of confidential information, as well as identify violators.

## References

1. *Shabtai, A., Elovici, Y., & Rokach, L.* A survey of data leakage detection and prevention solutions. In SpringerBriefs in Computer Science, 2012.
2. *Alneyadi, S., Sithirasanen, E., Muthukkumarasamy V.* A survey on data leakage prevention systems. Journal of Network and Computer Applications, <https://doi.org/10.1016/j.jnca.2016.01.008>, 2016.
3. *Guri M., Puzis R., Choo K. K. R., Rubinshtein S., Kedma G., Elovici Y.* Using malware for the greater good: Mitigating data leakage. Journal of Network and Computer Applications, <https://doi.org/10.1016/j.jnca.2019.07.006>, 2019.

## CREATING A DATABASE FOR STATE STRUCTURES

<sup>1</sup>Juraev G.U., <sup>2</sup>Khakimov M.H., <sup>3</sup>Djabborov A.Kh.

<sup>1</sup> *National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,*  
e-mail: gjuraev@mail.ru

<sup>2</sup> *National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,*  
e-mail: muftah@mail.ru

<sup>3</sup> *Samarkand state university,*  
e-mail: abbos.djabborov@mail.ru

Currently, traditional databases and distributed databases (blockchain technology) are used to store data [1,2].

Traditional databases are a centralized network that stores data in a structured manner and is managed by an administrator.

Blockchain is decentralized and does not have a centralized approach. However, there are private blockchains that can use some form of centralization. Blockchain data maintains integrity. Attackers can modify the data of traditional databases. Open blockchain offers transparency. Traditional databases are not transparent. Only the administrator decides which public can access the data. Blockchains or distributed ledgers are comparatively more difficult to implement and maintain. Traditional databases, which are old technology, are easy to implement and maintain. Databases are very fast and offer great scalability.

In a traditional database, a client can perform four functions on data: create, read, update, and delete (collectively referred to as CRUD commands).

The blockchain is for adding structure only. The user can only add additional data in the form of additional blocks. All previous data is permanently saved and cannot be changed. Thus, the only blockchain-related operations are read-only and write-only operations.

Blockchain technology is well suited for recording certain types of information for monetary or commercial transactions. However, traditional databases are better suited for other types of information. It is important for every organization to understand what it wants from a database and to assess the strengths and vulnerabilities of each type of database before choosing.

If privacy is the only goal and trust is not an issue, then from this point of view, blockchain-based database projects have no advantage over a centralized way of storing information. Hiding information in the blockchain requires a large amount of cryptographic encryption, which is fraught with high computational load on network nodes. This cannot be done more efficiently than simply hiding the information you want completely in a private, centralized database that doesn't even require an internet connection.

Based on the studies conducted, it can be argued that traditional databases are better suited for storing data in public sectors.

## References

1. *Boucher P., Nascimento S., Kritikos M.* How blockchain technology could change our lives.
2. *Wattenhofer R.* . The Science of the Blockchain. Createspace Independent Publishing Platform JИЧ2016. 124 p.

## ALGEBRAIC CRYPTANALYSIS OF SOME SYMMETRIC ENCRYPTION ALGORITHMS

<sup>1</sup>Nurullaev Mirkhon

<sup>1</sup> *Senior teacher, Department of Information communication technology, Bukhara Engineering Technological Institute, Bukhara, Uzbekistan,*  
e-mail: Mirxon@mail.ru

It is no secret that in the current pandemic, the demand for information and communication technologies has increased several times. This, in turn, leads to multiple increases in demand for information security. And these results can be achieved to a certain extent using cryptographic data protection algorithms. And the cryptographic strength of encryption algorithms is evaluated using cryptanalysis. Evaluating the cryptographic strength of data encryption algorithms is becoming one of the most pressing problems.

From this point of view, in this article, we will talk about the algebraic cryptanalysis of some symmetric encryption algorithms. Various aspects of algebraic cryptanalysis from other methods can be explained as follows. Although statistical cryptanalysis is a powerful tool for evaluating security, it often requires a lot of plaintext/ciphertext pairs, which is not always available in real life. While algebraic cryptanalysis only requires a pair of plaintext/ciphertext.

Any algebraic attack consists of two different stages:

1. Encryption is written as a system of lower-level polynomial equations on GF (2) or GF (2k), which is usually possible for any cryptographic encryption algorithm.
2. Restore the secret key by solving such a large system of polynomial equations.

These equations represent the state of each variable algorithm in the system. Then the variables corresponding to the state bits of the initial round are set according to the plaintext values, and similarly, the variables corresponding to the state bits of the last round are set according to the ciphertext values. We can use it to construct a system of polynomial equations

for one or more pairs of open and encrypted data. This approach has been repeatedly described in the existing literature, see, for example, [1-3].

The problem of solving such polynomial systems of multidimensional equations is called the MQ problem, which is generally known to be NP-hard. Currently, for a random system in which the number of equations is equal to the number of unknowns, there is no method faster than an exhaustive search for keys to solving such systems. On the other hand, equations derived from symmetric ciphers are redundant and sparse for most ciphers. This makes it easier to solve. This sparseness arises from the fact that due to hardware limitations and the need for lightweight algorithms, simple operations occur when defining cryptosystems. They are also overestimated due to non-linear operations.

Based on this, some TOY symmetric encryption algorithms using ElimLin are analyzed.

Assume that we have the following overdefined system of multivariate equations over GF(2) with 5 variables  $x_1; x_2; x_3; x_4; x_5$  and 6 equations [6]:

$$\begin{cases} x_1x_5 + x_2x_3 + x_3x_5 + x_5 + x_4 + x_2 + 1 = 0 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_5 + x_3x_5 + x_2 + x_4 + x_5 + 1 = 0 \\ x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 = 0 \\ x_1x_4 + x_1x_5 + x_2x_5 + x_1 = 0 \\ x_1x_4 + x_2x_3 + x_3 + 1 = 0 \\ x_1x_5 + x_2x_3 + x_3x_5 + x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

We perform Gaussian elimination on the system, and get:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + 1 = 0 \\ x_1x_2 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_5 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1x_3 + x_2x_4 + x_3 + 1 = 0 \\ x_1x_4 + x_2x_3 + x_3 + 1 = 0 \\ x_2x_5 + x_3x_5 + x_4 + 1 = 0 \\ x_1x_5 + x_2x_3 + x_3x_5 + x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

The linear equation we obtain is used for the substitution of the variable  $x_5 = x_1 + x_2 + x_3 + 1$ . Then, we perform Gaussian elimination on the system again. Hence, we have gathered 5 linear equations in 5 variables as follows, which can be simply solved by:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + 1 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_3 + 1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

leading to  $x_3 = x_4 = 1$  and  $x_1 = x_2 = x_5 = 0$ .

And the author pays attention to the analysis of symmetric encryption algorithms (especially S box) from O'z DSt 1105:2009, where the complete encryption algorithm is described in [4-5].

## References

1. *Alex Biryukov and Christophe De Canniere*. Block ciphers and systems of quadratic equations. In Thomas Johansson, editor, FSE 2003, volume 2887 of LNCS, Lund, Sweden, February 24-26, 2003, pages 274-289.

2. *Nicolas Courtois and Gregory V. Bard*. Algebraic cryptanalysis of the data encryption standard. In Steven D. Galbraith, editor, 11th IMA International Conference on Cryptography and Coding, volume 4887 of LNCS, December 18-20, 2007, pages 152-169.
3. *N. Courtois and J. Pieprzyk*. Cryptanalysis of Block Ciphers with Overdefined Systems of Equations. In Asiacrypt, volume 2501, Springer, 2002, pages 267-287.
4. *R.D. Alov, M.M. Nurullaev*. Cryptography Service Provider - Data Encryption, Proceedings of the 10th International Multi-Conference on Complexity, Informatics and Cybernetics, Orlando, Florida, USA, 2019, pages 127-131.
5. *R.D. Alov, M.M. Nurullaev*. Software, algorithms and methods of data encryption based on national standards, IIUM Engineering Journal, 21 (1), 2020, pages 142-166.
6. *N. Courtois, P. Sepehrdad, P. Susil, and S. Vaudenay*. ElimLin Algorithm Revisited. In FSE'12.

## ABOUT USING UNICODE TO HIDE INFORMATION IN A TEXT DOCUMENT

<sup>1</sup>Zaynalov N.R., <sup>1</sup>Narzullaev U.Kh., <sup>1</sup>Muhamadiev A.N., <sup>1</sup>Qilichev D.

<sup>1</sup>*Samarkand branch of the Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, Uzbekistan,*  
e-mail: nodirz@mail.ru

The secret transmission of information and the establishment of hidden relationships has been of interest since ancient times. Text documents are widely used in everyday practice. Steganography can be a vital means by which secret information is embedded in container information that can be observed for transmission, so the information cannot simply be recognized by others. Text steganography has low redundancy and is associated with language rules, which leads to limited text manipulation, so it is a pleasant task to properly hide a message in the text and see such concealment.

Steganography is the science of hiding data inside a coverage object to preserve an invisible secret message without compromising the integrity of the coverage object, so other people cannot recognize the presence of a secret message. A common feature of these methods and algorithms is that the hidden message is embedded in some harmless, non-attracting object, which is transported to the recipient openly [1].

Volume, safety, and reliability, which are the three main factors that influence steganography, are, in principle, conflicting factors. Volume is the relative number of bits of secret information that can be hidden in a container. Security is the ability to find out hidden information by the adversary. Reliability refers to the number of modifications that a stego environment can withstand before an adversary destroys hidden information [2]. An appropriate balance should be sought between the three aspects following specific requirements.

Some steganographic methods have been proposed in the last decade, but most of them use a covering medium such as images, video clips, and sounds. Despite this, text documents are currently the most common and necessary form of information and are always used as a means of coverage.

From the review of the works, we can conclude that most of the text steganography is based on the formats TXT, MS Word, PDF, PPT, etc. However, an attempt is made to improve the method of invisible characters between words with additional spaces for embedding data in an MS Word document. This article also discusses the existing algorithmic approaches to steganography in MS Word documents to hide additional information in it.

This paper presents a method for hiding data using non-visible character attributes from a Unicode table in MS Word.

This article introduces a new approach to text steganography by hiding a message in a set of Space characters of various Unicode codes, which we will denote as UniSpace. This method works with the ASCII character value, not bits. Based on this, it is suggested to embed ASCII

characters instead of binary data. This technology is implemented using the following sequence of codes "Thin space", "Hair space" and "Zero width space", which will be the basis for this approach.

Thus, this study proposes a new method using characters that have a single character within the Unicode encoding system (i.e. similar characters with different codes in the Unicode table) for embedding a secret message in an MS Word document. In the proposed version, you can hide a secret message in a Word document, using various variants consisting of three basic codes of spaces, which are designated as 0, 1, 2, respectively, and apply the ternary numeral system for numeric encoding of Latin letters.

The proposed concealment algorithm consists of six stages.

To implement this idea, the authors developed a software application in the VBA programming language, which is basic in MS Office applications.

### References

1. *Gutub, A., and M. Fattani.* A novel Arabic text steganography method using letter points and extensions. Proceedings of the WASET International Conference on Computer, Information and Systems Science and Engineering, May 25-27, 2007, Vienna, Austria, 2007. pp: 28-31.
2. *Chen, B., and G.W. Womell.* Quantization index modulation: A class of provably good methods for digital watermarking and information embedding. 2001, IEEE Trans. Inform. Theory, 47: 2001. pp.1423-1443.

## О МИНИМИЗАЦИИ РЕСУРСОВ ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЕ УГРОЗ ОТ ВРЕДОНОСНОГО ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

<sup>1</sup>Наврузов Э.Р., <sup>1</sup>Каримов А.А.

<sup>1</sup> *Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан*  
e-mail: erkinbek0989@gmail.com

Рассматривается защита компьютерных систем от вредоносного программного обеспечения. В качестве инструмента для обнаружения угроз используются решение задачи распознавания с непересекающимися классами по прецедентам. Минимизация ресурсов производится за счет селекции обучающих выборок [2]. При селекции удаляются шумовые объекты и решается задача о минимальном покрытии выборки эталонами. Для вычисления обобщающей способности алгоритмов предлагается использовать меру их компактности, вычисляемую по числу удаляемых шумовых объектов и эталонов минимального покрытия [1].

### Литература

1. *N.A. Ignatev.* Structure Choice for Relations between Objects in Metric Classification Algorithms// Pattern Recognition and Image Analysis. 2018. V. 28. no 4. P. 590-597.
2. <http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets>

## ИНФОРМАЦИОННАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ В СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ ОБУЧЕНИЕМ MOODLE

Умарова Ш.Г.

*Университет мировой экономики и дипломатии, Узбекистан*  
e-mail: umshoira@gmail.com

В настоящее время в высших учебных заведениях при преподавании активно используются системы управления обучением (LMS-learning management systems). Система управления обучением представляет собой интерактивную среду обучения, которая облегчает

как преподавание, так и обучение. Одна из таких систем является Moodle, которая в последнее время набирает все большую популярность. Это система управления обучением с открытым исходным кодом, которая дает возможность создавать самостоятельные учебные курсы, имеет возможность проведения оценивания, дискуссионных форумов, опросов и многих других элементов. Так как, система имеет открытый исходный код и, следовательно, имеет очень низкую стоимость для реализации. Кроме того, система может быть загружена и размещена в сети организации, поэтому данные, хранящиеся в нем, относительно безопасны. Но, при установке системы Moodle на сервер через Интернет, пользователи столкнутся со всеми опасностями, которым подвергаются веб - сайты. В первую очередь — это атаки на веб - сайты, которые учащаются с каждым днем. Такие атаки могут принести вполне ощутимые потери владельцу сайта. Например, угроза персональным данным студентов или угроза интеллектуальной собственности преподавателей. В смысле безопасности система Moodle является достаточно защищенной и безопасной от различных угроз, спама и хакерских атак. Она сконструирована так, чтобы оставаться очень безопасной. Рассмотрим некоторые элементы безопасности системы.

### Политика безопасности сайта

В разделе «Политика безопасности сайта» рассматривается не малое количество настроек безопасности, на которые следует обратить внимание администратору. К каждому из этих пунктов имеется исчерпывающие пояснения, благодаря которым можно отредактировать их на свое усмотрение. Сначала можно установить настройки для пользователей в системе, далее ограничения для пользователей при работе с системой и загрузке файлов на сайт[1]:

### Политика безопасности сайта

Защищать логины <small>protectusernames</small>	<input checked="" type="checkbox"/> Значение по умолчанию: Да
	При включенном параметре форма восстановления пароля не будет отображать никаких подсказок, которые позволили бы угадать логины или адреса электронной почты учетных записей.
Принуждать пользователей входить в систему <small>forcelogin</small>	<input type="checkbox"/> Значение по умолчанию: Нет
	Обычно главная страница сайта и список курсов (но не сами курсы) доступны до входа пользователя в систему. Если Вы хотите заставить пользователей входить в систему, прежде чем совершить ЛЮБОЕ действие, включите этот параметр.
Необходимо войти в систему для просмотра профилей <small>forceloginforprofiles</small>	<input checked="" type="checkbox"/> Значение по умолчанию: Да
	При включенном параметре пользователи должны будут зайти под реальной учетной записью (а не гостем), чтобы просмотреть профиль любого пользователя. Если отключить этот параметр, то может

### Политика паролей

Политика паролей устанавливает сложность пароля для пользователей. По умолчанию это довольно сложное сочетание знаков и символов - для удобства пользователей его можно немного упростить:

Политика паролей passwordpolicy	<input checked="" type="checkbox"/> Значение по умолчанию: Да
	Включение этого параметра заставит систему Moodle проверять пароли пользователей на соответствие политике сложности паролей. Политика паролей определяется указанными ниже параметрами (они будут проигнорированы, если этот параметр не отмечен).
Длина пароля minpasswordlength	<input type="text" value="8"/> Значение по умолчанию: 8
	Пароль должен состоять по меньшей мере из такого числа символов.
Цифр minpassworddigits	<input type="text" value="1"/> Значение по умолчанию: 1
	В пароле должно быть как минимум столько цифр.
Букв в нижнем регистре minpasswordlower	<input type="text" value="1"/> Значение по умолчанию: 1
	В пароле должно быть как минимум столько букв в нижнем регистре.
Букв в верхнем регистре minpasswordupper	<input type="text" value="1"/> Значение по умолчанию: 1

## Управление доступом на основе ролей

Управление доступом на основе ролей является одним из усовершенствованных механизмов контроля доступа, в которой сеть предоставляет пользователям разрешения в зависимости от их роли в системе. В управление доступом на основе ролей права и разрешения назначаются ролям, а не отдельным пользователям. Пользователи получают эти права и разрешения, поскольку им назначено членство в соответствующих ролях. Эта простая идея значительно облегчает администрирование авторизаций и повышает безопасность информационной системы. Роли ограничивают возможность внутренних нарушений безопасности со стороны лиц, которые не должны иметь доступа к определенным данным и приложениям. Кроме того, поскольку привилегии не назначаются вручную, менее вероятно, что администратор допустит ошибку и непреднамеренно предоставит пользователю доступ к информации, для которой был запрещен. Рассмотрим роли в Moodle:



Роль 	Описание	Краткое название	Редактировать
<u>Управляющий</u>	Управляющие имеют доступ к курсу и могут изменять его. Они, как правило, не участвуют в курсах.	manager	  
Создатель курса	Создатели курсов могут создавать новые курсы.	coursecreator	   
Учитель	Учителя могут делать в курсе всё, в том числе изменять элементы курса и оценивать студентов.	editingteacher	   
Ассистент (без права редактирования)	Ассистент может преподавать в курсах и выставлять оценки, но он не может изменять содержание курса.	teacher	   
Студент	Обычно студенты обладают меньшим набором прав в рамках курса.	student	   
Гость	Обычно гости имеют минимальный набор прав и не могут нигде вводить текст.	guest	  
Аутентифицированный пользователь	Все пользователи, вошедшие в систему	user	  
Аутентифицированный пользователь на главной странице	Все пользователи, вошедшие на главную страницу.	frontpage	  

Система Moodle предусматривает пять ролей: администратор, создатель курсов, преподаватель, студент, гость. Каждая из ролей имеет определенный ограниченный набор прав на доступ к системе, чтобы обеспечить высокий уровень надежности и распределить функции пользователей согласно их потребностям. Например, чтобы преподаватели не имели возможности изменять настройки самой системы, чтобы студенты не могли изменять содержимое курсов и их настройки, чтобы гости могли просматривать только общую информацию системы, то есть все права каждой роли очень точно разграничены [2]. Управление общими возможностями ролей может быть выполнено администратором. Администратор сайта может создать дополнительные роли. Система позволяет системному администратору редактировать любую из более чем 350 различных функций, связанных с любой ролью. Существенной частью системы ролей является возможность назначения пользователю нескольких ролей (в одно и тоже время, в одном и том же контексте). Возможности каждой роли сливаются для получения действующего набора возможностей. В частности пользователь вполне может иметь роли Учителя и Ученика в одном курсе.

### Регистрация пользователей

По умолчанию в Moodle включен только один вид регистрации - ручная. Т.е. администратор системы сам, в ручном режиме, регистрирует пользователей на сайте. На большинстве небольших Moodle-сайтов это вполне оправданно - пользователей немного, и администратору не составит большого труда создать учетные записи для них вручную. В то же время эта мера очень эффективна в плане безопасности сайта. Регистрация нежелательных пользователей будет невозможна. А значит на сайте не будет пустых заброшенных аккаунтов и разнообразного спама. Чтобы не подвергать свой сайт дополнительному риску достаточно не разрешать в настройках самостоятельную регистрацию пользователей в системе и все будет нормально.

Хотя разработчики Moodle заботятся о безопасности своего продукта, тем не менее

любой веб-сайт является уязвимым, если владелец сайта не будет предпринимать соответствующих мер в обеспечении как аппаратной, так и программной безопасности. Весь процесс поддержки функционирования веб-сайта можно условно разделить на две глобальные составляющие: первое, администрирование системы управления обучением, которое выполняется внутри Moodle пользователями с правами «администратор», и второе, внешнее, общесистемное администрирование:- это техническая поддержка, нужна для того, чтобы, если в системе что-то не работает, быстро находить причину и устранять ее, защищать сервер от основных угроз безопасности; помогать с настройками системы, когда в этом есть необходимость.

Поэтому для эффективного функционирования системы управления обучением необходимо иметь специалистов в области сетевой безопасности, системных администраторов и программистов, которые профессионально разбираются как в обслуживании сервера, так и в серверном веб-программировании, умеют защищать сервер от основных угроз безопасности, понимают механизм аутентификации пользователей на сервере, могут грамотно настраивать параметры локальной сети и подключения к Интернету, обеспечивать комплексную безопасность сетевой инфраструктуры. Важной задачей является сбор и анализ данных, прогнозирование роста и развития нагрузок на сервере, отслеживание всех изменений и умение делать выводы и заключения по вопросам необходимости проведения аппаратных или программных модернизаций серверов.

### Литература

1. *Безопасность Moodle: Электронный ресурс*, URL : <https://moodlelearn.ru/mod/book/view.php?id=148>
2. *Электронный ресурс*, URL : [https://docs.moodle.org/35/en/Managing\\_oles](https://docs.moodle.org/35/en/Managing_oles)

### МОНИТОРИНГ РАДИОЧАСТОТНОГО СПЕКТРАНА ОСНОВЕ КОМПЛЕКСНАЯ АНТЕННАЯ СИСТЕМА

<sup>1</sup>Хотамов А., <sup>2</sup>Эшназаров Н.

<sup>1</sup> Самаркандский филиал ТУИТ, Узбекистан

e-mail: [xolida\\_primova@mail.ru](mailto:xolida_primova@mail.ru)

<sup>2</sup>Мининфоком, Самарканд

В мире проводятся научно-исследовательские работы по исследованию радиосвязи для спектрального преобразования радиосигналов, координации радиоэлектронных и высокочастотных устройств и определения сигналов. В том числе радиосигналы: телекоммуникаций, навигации, телеметрии, сигналы беспроводных технологий, радиоэлектронные сигналы и т.д. Также ведется разработка цифровых алгоритмов, внедрение новых систем для мониторинга и идентификации сигналов и улучшения систем обнаружения - это одна из самых важных задач.

Особое внимание уделяется развитию информационным технологиям, развитию навигации, местоположения РЭС и СВЧ, развитию телевидения и мобильной связи, обеспечению качественного мониторинга радиосвязи, навигации, телеметрии, технологий беспроводной связи и сигналов цифрового телевидения, предоставляющих пользователям различные телевизионные и радиопрограммы.

Настоящая статья посвящена разнообразию измерительных антенн, входящих в измерительные комплексы, используемые для мониторинга радиоэфира. Однако до сих пор ищутся решения создания универсальной антенны, позволяющей проводить измерения в очень широкой полосе частот при минимальных погрешностях. Одним из возможных решений такой задачи может быть создание антенной системы, состоящей из нескольких

антенн, работающих в определенных частотных диапазонах, однако совместно перекрывающих весь исследуемый диапазон радиоэфира. Разработка методов радиомониторинга для обнаружения и идентификации радиосигналов, в диапазоне частот излучаемые радиочастотными устройствами и высокочастотных устройствами;

В данной статье было приведено описание разработанной электронно-механической антенной системы, которую можно использовать в составе современного измерительного оборудования для проведения радиомониторинговых исследований.

Достоинством разработки является то, что она значительно упрощает измерительные работы, так как в процессе измерений приходится часто менять высоту подвеса измерительных антенн, их ориентацию в горизонтальной плоскости и поляризацию.

Комплексная система радиомониторинга представляет собой антенный комплекс с горизонтальной и вертикальной поляризациями. Созданный на основе двух измерительных антенн, измеряющий в реальном времени. Первое антенное устройство перекрывает диапазон 80-1300 МГц, второе антенное устройство перекрывает диапазон 1000-12000 МГц, включая измерение радиочастотного спектра от 80 до 12000 МГц. Предлагаемые методы и алгоритмы помогают увеличить скорость обнаружения и распознавание радиосигналов и управления радиочастотной полосой пропускания.

Антенный комплекс позволяет удвоить скорость радиомониторинга. В итоге удваивается скорость обнаружения незаконно используемых радиоэлектронных средств и высокочастотных устройств

## Литература

1. *Клименко Н.Н.* Радиостанции УКВ диапазона (состояние, перспективы развития и особенности применения режима скачкообразного изменения частоты), *Зарубежная радиоэлектроника*, NО 7,8, 1990.
2. *Дятлов А.П.* Модели радиосистем первичной обработки информации, *Методическое руководство по курсовому проектированию*. -Таганрог: ТРТИ, 1990.
3. *Дятлов А.П., Кулбикаяли Б.Х.* Рабочие модели электромагнитной обстановки при проведении радиомониторинга. *Ростов-на-Дону: Вестник РГУПС*, е 1, 1999,
4. *Пономарев Ж.И., Манкевич Т.Л.* Моделирование радиотрасс мобильных систем связи, *Зарубежная радиоэлектроника*, е8, 1999.
5. *Кольчугин Ю.И.* Расчетный метод определения уровней электромагнитного поля, создаваемого базовыми станциями сотовой радиосвязи, *Электросвязь*, е3, 1999.
6. *Primova Holida, Yalgashev Olimjon, Lola Safarova* Solution of the multi-criterial routing problem in telecommunication networks // International conference on information Science and communications technologies ICISCT 2019, Applications, Trends, Opportunities. 2019, 4-6 november.

## 4. COMPUTATIONAL ALGEBRA AND THEORY OF FUNCTIONS

### THE DESCRIPTION OF PRO-SOLVABLE LIE ALGEBRAS WITH MAXIMAL PRO-NILPOTENT IDEALS $\mathfrak{m}_0$ AND $\mathfrak{m}_2$

<sup>1</sup>Abdurasulov K.K., <sup>2</sup>Solijanova G.O.

<sup>1</sup> V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan

e-mail: abdurusulov0505@mail.ru

<sup>2</sup> National University of Uzbekistan, Uzbekistan,

e-mail: gulhayo.solijanova@mail.ru

In finite-dimensional Lie algebras, the nilradical and its derivations are used to construct solvable Lie algebras [3], [4]. But in infinite-dimensional Lie algebras, there is no definite method for constructing solvable Lie algebras. In this paper, some infinite dimensional solvable Lie algebras are described and the method in finite dimensional Lie algebras has been extended to infinity. For a Lie algebra  $L$  we define the *lower central* and the *derived series* as follow

$$L^1 = L, L^{k+1} = [L^k, L], k \geq 1, \quad L^{[1]} = L, L^{[s+1]} = [L^{[s]}, L^{[s]}], s \geq 1,$$

respectively.

**Definition 1.** [2] A Lie algebra  $L$  is said to be *pro-solvable* (respectively, *pro-nilpotent*) if  $\bigcap_{i=1}^{\infty} L^{[i]} = 0$  and  $L/L^{[i]} < \infty$  (respectively,  $\bigcap_{i=1}^{\infty} L^i = 0$  and  $L/L^i < \infty$ ) for any  $i \geq 1$ .

Let  $\mathfrak{m}_0$  and  $\mathfrak{m}_2$  are pro-nilpotent Lie algebras which their multiplication tables are given by the followings [1],[2]:

$$\mathfrak{m}_0 : \{ [e_i, e_1] = e_{i+1}, i \geq 2, \quad \text{and} \quad \mathfrak{m}_2 : \begin{cases} [e_1, e_i] = e_{i+1}, & i \geq 2, \\ [e_2, e_j] = e_{j+2}, & j \geq 3. \end{cases}$$

Now, we present the description of derivations of the above algebras:

**Proposition 1.** The spaces of derivations of the algebras  $\mathfrak{m}_0$  and  $\mathfrak{m}_2$  are the following

$$Der(\mathfrak{m}_0) : \begin{cases} d(e_1) = \sum_{i=1}^t \alpha_i e_i, \\ d(e_k) = ((k-2)\alpha_1 + \beta_2)e_k + \sum_{i=3}^t \beta_i e_{i+k-2}, \quad \text{where } k \geq 2, \end{cases}$$

$$Der(\mathfrak{m}_2) : \begin{cases} d(e_1) = \alpha_1 e_1 + \sum_{i=3}^n \alpha_i e_i, & d(e_2) = 2\alpha_1 e_2 + \sum_{i=3}^n \beta_i e_i, \\ d(e_i) = i\alpha_1 e_i + \beta_3 e_{i+1} + \sum_{j=i+2}^{n+i-2} (\beta_{j-i+2} - \alpha_{j-i+1})e_j - \alpha_n e_{n+i-1}, & i \geq 3. \end{cases}$$

The following theorems describe the multiplication tables of the pro-solvable Lie algebras with maximal pro-nilpotent ideals  $\mathfrak{m}_0$  and  $\mathfrak{m}_2$ .

**Theorem 1.** Let  $M_0$  be a pro-solvable Lie algebra with maximal pro-nilpotent ideal  $\mathfrak{m}_0$ . Then it admits a basis  $\{x, y, e_1, e_2, \dots\}$  such that the multiplication table of  $M_0$  in this basis has the following form

$$M_0(\beta) : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & i \geq 2, \\ [x, e_1] = -e_1, \\ [x, e_i] = (1-i)e_i - \sum_{k=3}^t \beta_k e_{t+i-2}, \\ [y, e_i] = -e_i, & i \geq 2, \end{cases}$$

where  $\beta = (\beta_3, \beta_4, \dots, \beta_t)$ .

**Theorem 2.** Let  $M_2$  be pro-solvable Lie algebra with maximal pro-nilpotent ideal  $\mathfrak{m}_2$ . Then it admits a basis  $\{x, e_1, e_2, \dots\}$  such that the multiplication table of  $M_2$  in this basis has the following form

$$M_2(\gamma) : \begin{cases} [e_1, e_i] = e_{i+1}, & i \geq 2, \\ [e_2, e_j] = e_{j+2}, & j \geq 3, \\ [x, e_1] = -e_1, \\ [x, e_i] = -ie_i - \sum_{j=4}^{n+1} \gamma_j e_{j+i-2}, & i \geq 2, \end{cases}$$

where  $\gamma = (\gamma_4, \gamma_5, \dots, \gamma_{n+1})$ .

## References

1. Khakimdjanoval K. and Khakimdjanoval Yu. Sur une classe d'algèbres de Lie de dimension infinie, Comm. Algebra, 29, no. 1, 2001, 177-191.
2. Millionshchikov D.V. Naturally graded Lie algebras of slow growth, Mat. Sb., 210:6, 2019, 111-160.
3. Mubarakzjanov G.M. On solvable Lie algebras, Izv. Vys'sh. Uchebn. Zaved. Matematika, no 1 (32), 1963, 114-123.
4. Ndogmo J.C., Winternitz P. Solvable Lie algebras with abelian nilradicals, J. Phys., A 27 (2), 1994, 405-423.

ПН»

## APPLICATIONS OF OPERATORS TO CLASSES OF ANALYTIC FUNCTIONS

<sup>1</sup>Ajab Bai Akbarally

<sup>1</sup> Department of Mathematics, Faculty of Computer and Mathematical Sciences, Universiti Teknologi MARA, 40450 Shah Alam, Selangor, Malaysia,  
e-mail: ajab@tmsk.uitm.edu.my

The study of operators plays a vital role in geometric function theory. There has been a vast development in this area recently. Many authors apply existing operators such as the Ruscheweyh Operator, Salagean Operator, Carlson-Schaffer Operator, Owa-Srivastava Fractional Differential Operator, Noor Integral Operator, Dziok-Srivastava Operator, Sivastava-Attiya Operator, Al-Oboudi and Al-Amoudi Multiplier Fractional Differential Operator and other operators on previously known classes, namely starlike, convex and close-to-convex classes. The authors then introduce new classes of analytic and univalent functions and study the properties of these classes. Subsequently, inspired by the operators mentioned above, many researchers define new operators and study their geometric properties. In this session, discussion will be on two classes of bi-univalent functions defined using the Komatu Integral Operator.

## FUZZY DECISION MAKING WITH MISSING INFORMATION

<sup>1</sup>Mohamad D., <sup>2</sup>Zainuddin N.S.

<sup>1</sup> Faculty of Computer and Mathematical Sciences, Universiti Teknologi MARA, Malaysia ,  
e-mail: daud@tmsk.uitm.edu.my

<sup>2</sup> Faculty of Computer and Mathematical Sciences, Universiti Teknologi MARA, Malaysia,  
e-mail: nursyafiqah95@gmail.com

Since its introduction by Zadeh in 1965, fuzzy set theory has been an important tool to solve decision making problems with ambiguity and subjectivity. Missing information in the evaluation process of fuzzy decision making has become a critical issue as it may lead to an

incorrect or biased decision taken by an organization. The ambiguity in the evaluation was initially escalated by the different background of the decision makers, which will lead to diverse perception in the evaluation process. This is further aggravated by the occurrence of missing information which may be among others due to inefficiency of handling the information or may also due to the negligence of the decision makers themselves. This talk will discuss on how to handle this issue focusing on a well-known pairwise decision making method, fuzzy analytic hierarchy process (FAHP) by using another pairwise method namely fuzzy DEMATEL. An imputation approach is used where the missing information is replaced by some plausible and reasonable values. A step by step approach will be given to illustrate the process of approximating the missing numerical information. A case study of a supply chain problem with some missing information is presented and solved using the proposed approach.

## AN ANALYTICAL DESCRIPTION OF THE SETS OF MANDELBROT AND JULIA FOR SOME MULTI-DIMENSIONAL CUBIC MAPPINGS

<sup>1</sup>Ganikhodzhaev R.N., <sup>2</sup>Seytov Sh.J.

<sup>1</sup>National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,  
e-mail: rganikhodzhaev@gmail.com

<sup>2</sup>National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,  
e-mail: sh-seytov@mail.ru

The present paper is devoted to the investigation of the multi-dimensional case of some cubic mappings. We investigated the properties of the sets of Mandelbrot and Julia for the two-dimensional case of the mapping on the plane to itself. The sets of Mandelbrot and Julia help to define asymptotical behavior of the trajectories of certain mappings. The analytical solutions of the equations for finding fixed points and the computer simulations for describing the sets of Mandelbrot and Julia are the main results of this paper.

The study of dynamics of the mapping

$$z \rightarrow z^3 + c$$

on the complex plane to itself and its various generalizations are devoted hundreds of papers beginning the classical researches of G. Julia, P. Fatou, B. Mandelbrot, Feigenbaum [3], J. Yorke, R. L. Devaney [2], and A. N. Sharkovsky [1]. In the present time, the theory of one-dimensional mapping is the most learned part of the general theory of dynamical systems. This paper is devoted one of the possible generalizations cases of the cubic mapping on  $R^2$  to itself.

Let  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n, c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in R^n, I = 1, 2, \dots, n$  and  $\pi : I \rightarrow I$  some permutations. We learn this

$$x_k = x_{\pi(k)}^3 + c_{\pi(k)}, k = \overline{1, n} \quad (13)$$

on  $R^n$  to itself is **multi - dimensional case** of the cubic mapping. There is learned of this problem for some quadratic mappings in [1]. In this paper we investigate for cubic mappings. First we learn when  $n = 2$ . In this case mapping (11) is

$$F_{c_1 c_2} : \begin{cases} x' = y^3 + c_1, \\ y' = x^3 + c_2. \end{cases} \quad (14)$$

where  $(x, y) \in R^2$  and  $(c_1, c_2) \in R^2$ .

**Definition 1.** The filled Julia set  $K(F_{c_1 c_2})$  of a mapping (22) is defined as the set of all points  $(x, y)$ , that have bounded orbit with respect to mapping (22).

$$K(F_{c_1 c_2}) = \{(x, y) : F_{c_1 c_2}^n(x, y) \not\rightarrow \infty \text{ as } n \rightarrow \infty\}$$

**Definition 2.** The Julia set is the common boundary of the filled Julia set

$$J(F_{c_1c_2}) = \partial K(F_{c_1c_2}).$$

**Definition 3.** The Mandelbrot set  $M_{F_{c_1c_2}}$  for the mapping (22) is the set of all points  $(c_1, c_2)$  on the parameter plane, which the orbits of the all critical points are bounded.

**Theorem 1.** If the mapping (22) has fixed points that  $(x_1^*, y_1^*), (x_2^*, y_2^*), \dots, (x_n^*, y_n^*)$  and let the points having a maximum and minimum coordinate abscissa of them  $(x_{max}^*, y_{max}^*)$  and  $(x_{min}^*, y_{min}^*)$  then filled Julia set consists of rectangle that vertices  $(x_{max}^*, y_{max}^*)$  and  $(x_{min}^*, y_{min}^*)$ .

**Theorem 2.** The orbits of all points on the filled Julia set tend to an attractive fixed point or periodic cycle with period two. It means the orbits of all points on the filled Julia set are regular.

## References

1. *Ganikhodzhayev R.N., Narziyev N.B., Seytov Sh.J.* Multi-dimensional case of the problem of Von Neumann - Ulam. Uzbek Mathematical Journal Vol. 3, Issue 1, 11-23 (2015).
2. *Devaney R. L.* A First Course In Chaotic Dynamical Systems: Theory And Experiment. Boston, (1992).
3. *Feigenbaum M.J.* Qualitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations. J. Stat. Phys. Vol. 19, Issue 1, 25-52 (1978).

## ON THE DIFFERENCE BETWEEN ATOM-BOND CONNECTIVITY INDEX AND RANDIĆ INDEX OF TREES

<sup>1</sup>Hasni Roslan, <sup>2</sup>Wan Zuki Wan Nor Nadia Nabila, <sup>3</sup>Du Zhibin

<sup>1,2</sup> Faculty of Ocean Engineering Technology and Informatics, Universiti Malaysia Terengganu, 21030 Kuala Nerus, Terengganu, Malaysia,  
e-mail: hroslan@umt.edu.my, nadiazuki96.nz@gmail.com

<sup>3</sup> School of Mathematics and Statistics, Zhaoqing University, Zhaoqing, Guangdong, 526061, P.R. China,  
e-mail: zhibindu@126.com

Let  $G$  be a simple graph with vertex set  $V(G)$  and edge set  $E(G)$ . The atom-bond connectivity and Randić index of graph  $G$  are defined as  $ABC(G) = \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{\frac{d_u + d_v - 2}{d_u d_v}}$  and  $R(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{d_u d_v}}$ , respectively, where the summation extends over all edges  $uv$  of  $G$ , and  $d_u$  denotes the degree of vertex  $u$  in  $G$ . Recently, Ali and Du [On the difference between atom-bond connectivity index and Randić index of binary and chemical trees, Int. J. Quantum Chem. (2017) e25446] characterized the first three maximum trees with respect to  $ABC - R$  values among all  $n$ -vertex chemical trees. In this paper, we determine more  $n$ -vertex chemical trees with maximum  $ABC - R$  values, and characterize the corresponding extremal graphs. We also obtain an upper bound for  $ABC - R$  index of such trees with fixed number of pendant vertices.

## References

1. *Ali A. and Du Z.* On the difference between atom-bond connectivity index and Randić index of binary and chemical trees, Int. J. Quantum Chem., 117, 2017, e25446.
2. *Das K.C. and Trinajstić N.* Comparison between the first geometric-arithmetic index and atom-bond connectivity index, Chem. Phys. Lett., 497, 2010, 149-151.
3. *West D.B.* Introduction to Graph Theory, Prentice-Hall, Upper Saddle River, 2001.

## ON WEIGHTED APPROXIMATION OF (CO)CONVEX FUNCTIONS WITH POLYNOMIALS OF VARYING DEGREES

<sup>1,2</sup>Malik Saad Al-Muhja, <sup>1</sup>Habibulla Akhadkulov and <sup>1</sup>Nazihah Ahmad

<sup>1</sup> *Department of Mathematics and statistics, School of Quantitative Sciences, College of Arts and Sciences, Universiti Utara Malaysia, Malaysia,*

e-mail: habibulla@uum.edu.my (H.A), nazihah@uum.edu.my (N.A)

<sup>2</sup> *Department of Mathematics and Computer Application, College of Sciences, University of Al-Muthanna, Iraq,*

e-mail: malik@mu.edu.iq

The errors of weighted approximation by varying degrees polynomials are obtained. We show that if  $f$  is (co)convex function, then weighted approximations by different degrees of polynomials are

$$m^\sigma \mathcal{E}_m^{(2)}(f, w_{\alpha,\beta}, Y_s)_p \geq c(\sigma, s, m) \sup \left\{ n^\sigma \mathbb{E}_n(f)_{\alpha,\beta,p}, n \in \mathbb{N} \right\} \quad (1)$$

where  $\sigma, n, m \in \mathbb{N}$  and  $n < m$ .

### References

1. *Al-Muhja, M., Akhadkulov, H., and Ahmad, N.* Derivation of new degrees for best (co)convex and unconstrained polynomial approximation in  $L_p^{(\alpha,\beta)}$  space: I. International Journal of Psychosocial Rehabilitation, 24, (2020), 2866-2886.
2. *Al-Muhja, M., Akhadkulov, H., and Ahmad, N.* Equivalence of weighted DT-moduli of (co)convex function. International Journal of Mathematics and Computer Science. (to appear), 16, no. 1, (2020), 1-16.
3. *Al-Muhja, M., Akhadkulov, H., and Ahmad, N.* Estimates for constrained approximation in  $L_{p,r}^{(\alpha,\beta)}$  space: Piecewise polynomial. International Journal of Mathematics and Computer Science. (to appear), 16, no. 1, (2020), 1-18.

## ON SPECTRUM AND THRESHOLD ANALYSIS FOR DISCRETE SCHRÖDINGER OPERATOR

<sup>1</sup> Muminov Z., <sup>2</sup> Alladustov Sh., <sup>3</sup>Lakaev Sh.

<sup>1,2</sup> *Uzbek-Israel Joint Faculty, National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,*

e-mails: <sup>1</sup>zimuminov@gmail.com, <sup>2</sup>sh.alladustov@gmail.com

<sup>3</sup> *Tashkent Institute of Irrigation, Tashkent, Uzbekistan,*

e-mail: <sup>3</sup>shlakaev@mail.ru

We consider a family of the discrete Schrödinger operators  $H_{\lambda\mu}$ , depending on two parameters, in the  $d$ -dimensional lattice with a potential constructed via the delta function and the shift operator. The one-particle Hamiltonian  $H_{\lambda\mu}$  in the momentum representation is given as

$$H_{\lambda\mu} = H_0 - V,$$

where  $H_0$  is the non-perturbed operator, which acts on  $L^2(\mathbb{T}^d)$  as a multiplication operator by the function  $\epsilon(\cdot)$

$$(H_0 f)(p) = \epsilon(p) f(p), \quad f \in L^2(\mathbb{T}^d),$$

where

$$\epsilon(p) = \sum_{j=1}^d (1 - \cos p_j), \quad p \in \mathbb{T}^d.$$

The perturbation  $V$  is the two-dimensional integral operator of the form

$$(Vf)(p) = (V_{x_0} f)(p) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} (\mu + \lambda(e^{i(x_0,p)} + e^{i(-x_0,p)} + e^{-i(x_0,s)} + e^{i(x_0,s)})) f(s) ds, \quad f \in L^2(\mathbb{T}^d).$$



We derive explicitly the existence of eigenvalues, threshold eigenvalues and threshold resonances and their dependence on the parameters of the operator and dimension of the lattice. The results are generalization of the results of the work [1], where we considered the problem only for dimension  $d = 3$  and with the perturbation  $V$  defined as

$$(Vf)(p) = (V_{x_0}f)(p) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} (\mu + \lambda(e^{i(x_0,p)} + e^{-i(x_0,s)})) f(s) ds, \quad f \in L^2(\mathbb{T}^d).$$

## References

1. *Muminov Z.E., Alladustov Sh. U., and Lakaev Sh. S.* Threshold Analysis of the Three Dimensional Lattice Schrödinger Operator with Non-local Potential, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2020, Vol. 41, No. 6, pp. 1094-1102.

## WEIGHTED REGULARITY NOTIONS IN $\mathbb{C}^n$

<sup>1</sup>Narzillaev Nurbek

<sup>1</sup>National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

e-mail: n.narzillaev@nuu.uz

Let  $K \subset \mathbb{C}^n$  be a compact set and  $\psi(z)$  some bounded function on  $K$ . Without loss of generality, we can assume that  $\psi(z) \geq 0$ ,  $z \in K$ . Consider the following generalization of the Lelong class

$$\mathcal{L}_\alpha := \{u(z) \in psh(\mathbb{C}^n) : u(z) \leq C_u + \alpha \ln^+ |z|, z \in \mathbb{C}^n\}, \quad \alpha > 0.$$

It is clear that if  $v(z) \in \mathcal{L}$ , then  $c \cdot v(z) \in \mathcal{L}_\alpha$ , where  $0 < c \leq \alpha$ . Put

$$\mathcal{L}_\alpha(K, \psi) := \{u(z) \in \mathcal{L}_\alpha, u(z)|_K \leq \psi(z)\}.$$

**Definition 1.** The function  $V_\alpha^*(z, K, \psi) = \overline{\lim}_{w \rightarrow z} V_\alpha(w, K, \psi)$  is called  $\alpha$ -extremal function of  $K$  with respect to  $\psi(z)$ , where

$$V_\alpha(z, K, \psi) := \sup\{u(z) : u(z) \in \mathcal{L}_\alpha(K, \psi)\}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

We list the properties of  $\alpha$ -extremal function:

- 1°. If  $\alpha_1 \leq \alpha_2$ , then  $V_{\alpha_1}^*(z, K, \psi) \leq V_{\alpha_2}^*(z, K, \psi)$ .
- 2°. If  $\psi_1 \leq \psi_2, \forall z \in K$ , then  $V_{\alpha}^*(z, K, \psi_1) \leq V_{\alpha}^*(z, K, \psi_2)$ .
- 3°.  $V_{\alpha}^*(z, K, \psi) = \alpha V^*(z, K, \frac{\psi}{\alpha})$  in particular,  $V_{\alpha}^*(z, K) = \alpha V^*(z, K)$ .
- 4°.  $V_{\alpha}^*(z, K, \psi + c) = c + V_{\alpha}^*(z, K, \psi), \forall c \in \mathbb{R}$ .

Consider a following set of numbers,

$$\Lambda = \{\alpha > 0 : V_\alpha(z, K, \psi)|_K \geq \psi(z)\}.$$

a) The set  $\Lambda$  may be empty. For example, let  $K = \{|z| \leq 1\} \subset \mathbb{C}$  and  $\psi(z) = 1 - |z|^2$ , then by the maximum principle and the property 3° we have

$$V_\alpha(z, K, \psi) = V_\alpha(z, K) = \alpha V(z, K) = \alpha \ln^+ |z|.$$

Therefore, for any  $\alpha > 0$ ,  $V_\alpha(z, K, \psi) < \psi(z), \forall z \in K \setminus \{1\}$ . So in this case  $\Lambda = \emptyset$ .

b) If  $\psi(z) \equiv c$ , where  $c$  is constant, then  $V_\alpha(z, K, c) = c + V_\alpha(z, K) = C + \alpha V(z, K)$ . As we know, the Green function  $V(z, K)$  is always positive. Therefore, for any  $\alpha > 0$  and  $z \in K$  the inequalities  $V_\alpha(z, K, c) \geq c$  hold. This means  $\Lambda = (0, +\infty)$ .

Let  $\Lambda \neq \emptyset$ . If  $\alpha \in \Lambda$ , then from the 1° property we easily get  $\alpha_1 \in \Lambda$ , where  $\alpha_1 > \alpha$ . Now the following proposition is holds

**Proposition 1.** If  $\alpha_j \in \Lambda$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}$  and  $\alpha_j \downarrow \alpha_0$  for  $j \rightarrow \infty$ , then  $\alpha_0 \in \Lambda$ .

According to the comments above, in this case we have  $\Lambda = [\alpha_0, +\infty)$ . Note that if  $\alpha \in [\alpha_0, +\infty)$ , then  $V_\alpha(z, K, \psi) = \psi(z)$ ,  $z \in K$ .

**Definition 2.** Let  $\alpha \in \Lambda$ . A compact set  $K$  is called globally  $(\alpha, \psi)$ -regular at point  $z^0 \in K$  if  $V_\alpha^*(z^0, K, \psi) = \psi(z^0)$ . It is called locally  $(\alpha, \psi)$ -regular at point  $z^0 \in K$  if  $V_\alpha^*(z^0, K \cap \bar{B}(z^0, r), \psi) = \psi(z^0)$  for any  $r > 0$ . A compact set  $K$  is globally  $(\alpha, \psi)$ -regular if it is globally  $(\alpha, \psi)$ -regular at every point of itself. A compact set  $K$  is locally  $(\alpha, \psi)$ -regular if it is locally  $(\alpha, \psi)$ -regular at every point of itself.

**Theorem 1.** Let  $\psi \in C(K)$ . A fixed point  $z^0 \in K \subset \mathbb{C}^n$  is locally  $(\alpha, \psi)$ -regular if and only if it is locally  $(1, 0)$ -regular.

It should be noted here that the continuity conditions for the function  $\psi(z)$  in the theorem are essential. In work [3] we give an example when the function  $\psi(z)$  is discontinuous. Theorem 1 may be false, i.e. some point  $z_0 \in K \subset \mathbb{C}$  may be a  $(1, \psi)$ -regular point, but not a  $(1, 0)$ -regular point.

## References

1. *A. Sadullaev*, Pluriregular compacts in  $\mathbb{P}^n$ , American Journal of Mathematics, Contemporary mathematics, Volume 662, 2016. p. 145–156.
2. *M.A. Alan*, Weighted regularity and two problems of Sadullaev on weighted regularity, Springer, Complex Analysis and its Synergies 5:8, 2019. <https://doi.org/10.1007/s40627-019-0026-4>
3. *H.X. Narzullaev*, О  $\psi$ -регулярных точках, Вестник НУУЗ, № 2/2, 2017. С. 173–176.

## THE MAGNETIC SUSCEPTIBILITY AT THE TRANSITION POINT OF BOSE CONDENSATION

<sup>1</sup> **Taylanov N. A.**, <sup>2</sup> **Urinov S.Kh.**

<sup>1</sup> *Jizzax State Pedagogical Institute, Jizzax, Uzbekistan,*

<sup>2</sup> *The Samarkand Branch of the Tashkent State University for Information Technologies, Samarkand, Uzbekistan,*

e-mail: mansanovich@mail.ru

As we know that the experimental realization of Bose-Einstein Condensation for Rb, and others neutral bosonic atoms has stimulated a new interest in the theoretical study of Bose gases. This type of particles are described only by the rules of quantum mechanics and occupy a discontinuous spectrum of energy state. Only special statistics can be applied to the energy distribution in such systems. From the standpoint of the mathematics of statistical physics, the essential general constraint of quantum statistics is that: the thermodynamical parameters of quantum systems are determined as sums over energy levels rather than integrals over phase space. One of the efficient methods for describing these systems is the semiclassical approximation. In this approximation the sums over the energy levels for the thermodynamical quantities are approximated directly by ordinary integrals weighted by an appropriate density of states.

The paper is devoted to the investigation of the dependence of the magnetic susceptibility on temperature in the vicinity and below of the transition point of Bose condensation. It has been

shown that below the transition point of Bose condensation susceptibility has microscopic order. Below the Bose condensation point the susceptibility proportional to the number condensate particles. In the article the thermodynamic properties of a gas of non-interacting bosons is considered. It was shown that the symmetrization of the wavefunction due to the indistinguishability of particles has important consequences on the behavior of the system.

I think that in the paper one of modern problem of the condensed matter physics ? the peculiarities of the magnetic susceptibility of the bose gas is considered. The nheoretical results, obtained in the work very important and interesting for the today?s science. I am recommend the work for the publication in some physical journal.

### References

1. *Landau L.D., Lifshits E.M.* Theoretical physics. Volume V. Statistical physics. Part 1. M .: Fizmatlit, 2001.616 p.
2. *Taylanov N.A.* *J. Mod. Phys. Appl.* 2 (2013), N. 1, 51-58 ISSN 2051-5480

### FUZZY TIME SERIES FORECASTING MODEL BASED ON INTUITIONISTIC FUZZY SETS AND ARITHMETIC RULES

<sup>1</sup>Nazirah Ramli, <sup>2</sup>Nik Muhammad Farhan Hakim Nik Badrul Alam, <sup>3</sup>Daud Mohamad

<sup>1</sup> *Faculty of Computer & Mathematical Sciences, Universiti Teknologi MARA Pahang, 26400, Bandar Jengka, Pahang, Malaysia,*  
e-mail: nazirahr@uitm.edu.my

<sup>2</sup> *Faculty of Computer & Mathematical Sciences, Universiti Teknologi MARA Pahang, 26400, Bandar Jengka, Pahang, Malaysia,*  
e-mail: farhanhakim@uitm.edu.my

<sup>3</sup> *Faculty of Computer & Mathematical Sciences, Universiti Teknologi MARA Malaysia, 40450, Shah Alam, Selangor, Malaysia,*  
e-mail: daud@tmsk.uitm.edu.my

Forecasting time series data using fuzzy time series has been explored by many researchers since 1993. Intuitionistic fuzzy sets are also considered in recent forecasting models, however the calculation in obtaining the forecasted results is complicated as the max-min composition is used in the forecasting procedure. Therefore, in this paper a forecasting model based on intuitionistic fuzzy sets using simple arithmetic rule is proposed. The proposed model used the frequency density-based method to partition the universe of discourse and used simplified arithmetic rule for calculating the fuzzy forecasted outputs. Two numerical examples are adopted to illustrate the forecasting model; the student enrollments at the University of Alabama and the Taiwan Stock Exchange Capitalization Weighted Stock Index (TAIEX) data. The performance of this model is evaluated using root mean square error. As compared to other previous models, the error calculated for our proposed model has the lowest error values, thus showing that this model outperforms some of the previous models.

## SOLVING BIPOLAR FULLY FUZZY SYLVESTER MATRIX EQUATION

<sup>1</sup>Neendha Cheah Soo Thape, <sup>2</sup>Nazihah Ahmad

<sup>1</sup> School of Quantitative Sciences, Universiti Utara Malaysia, 06010, Sintok, Kedah, Malaysia.,

e-mail: neendha\_cheah\_soo@ahsgs.uum.edu.my

<sup>2</sup> School of Quantitative Sciences, Universiti Utara Malaysia, 06010, Sintok, Kedah, Malaysia.,

e-mail: nazihah@uum.edu.my

A new method for solving bipolar fully fuzzy Sylvester matrix equation (BFFSE) is presented in this paper. This equation is normally used for controller in the field of control theory. It is an extension of triangular fuzzy number which considered two part of the membership functions, such as the membership function of  $[0,1]$ , indicates the element of somewhat satisfies the property or positive part, and for the membership function of  $[-1,0]$ , indicates the element of somewhat satisfies the implicit counter-property or negative part. This paper aims to solve BFFSE in the form of  $\tilde{A}\tilde{X} + \tilde{X}\tilde{B} = \tilde{C}$ . In obtaining the solution, BFFSE is converted into bipolar associated linear system, by utilizing Kronecker product and *Vec*-operator, whereby a crisp fuzzy linear is established. Finally, the solution is obtained by performing any crisp linear system method such as matrix inverse method. Two examples are provided in this paper to illustrate the constructed method.

### References

1. Douglas, B. The fundamentals of control theory: An intuitive approach from the creator of control system lectures on youtube., 2019.
2. Asari, S.S., & Amirfakhrian, M. Numerical solution of Sylvester matrix equations : Application to dynamical systems., Journal of Interpolation and Approximation in Scientific Computing, 2016(1), 2016, 1-13.
3. Daud, W.S.W., Ahmad, N., & Malkawi, G. Solving arbitrary fully fuzzy Sylvester matrix equations and its theoretical foundation., AIP Conference Proceedings, 2013(1), 2018.
4. Malkawi, G., Ahmad, N., & Ibrahim, H. Solving the fully fuzzy Sylvester matrix equation with triangular fuzzy number., Far East Journal of Mathematical Sciences, 98(1), 2015, 37-55.

## HERMITE-HADAMARD TYPE INEQUALITIES FOR COMPOSITE $m$ -CONVEX FUNCTIONS

<sup>1</sup>Nik Muhammad Farhan Hakim Nik Badrul Alam, <sup>2</sup>Ajab Bai Akbarally

<sup>1</sup> Department of Mathematics, Faculty of Computer and Mathematical Sciences, Universiti Teknologi MARA Pahang, 26400 Bandar Tun Abdul Razak Jengka, Pahang, Malaysia,

e-mail: farhanhakim@uitm.edu.my

<sup>2</sup> Department of Mathematics, Faculty of Computer and Mathematical Sciences, Universiti Teknologi MARA, 40450 Shah Alam, Selangor, Malaysia,

e-mail: ajab@tmsk.uitm.edu.my

The Hermite-Hadamard type inequality has been extended to some classes of convex functions and composite convex functions. In this paper, we refine the definition of composite- $\phi^{-1}$  convex function and definition of  $m$ -convex function to define the composite- $\phi^{-1}$   $m$ -convex functions. From the definition, we obtain some inequalities related to GA- $m$ -convexity, HA- $m$ -convexity,  $p$ - $m$ -convexity and LogExp  $m$ -convexity. Next,  $k$ -composite- $\phi^{-1}$   $m$ -convex function is defined. Some inequalities of Hermite-Hadamard type for composite- $\phi^{-1}$   $m$ -convex functions and  $k$ -composite- $\phi^{-1}$   $m$ -convex functions are obtained. From the inequalities obtained, we provide some applications for GG, AG, HA and HH convex functions.

## THE MATRIX BALL SECOND TYPE AND VOLUME ITS SKELETON

<sup>1</sup>Rakhmonov Uktam, <sup>2</sup>Abdullayev Jonibek, <sup>3</sup>Kuramboev Khamdam

<sup>1,3</sup>Tashkent state technical university (Tashkent, Uzbekistan),

e-mail: uktam\_rakhmonov@mail.ru

<sup>2</sup>National university of Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan),

e-mail: jonibek-abdullayev@mail.ru

The text of the abstract volume skeleton of matrix ball second type calculated. The full volume of these domains are necessary for finding kernels of integral formulas for these domains (kernels of Bergman, Cauchy-Szego, Poisson and e.a.).

The theory of functions of many complex variables, or multidimensional complex analysis, currently has a fairly rigorous theory (see [1-3]). At the same time, many questions of classical complex analysis still do not have unambiguous multidimensional analogues. In the works of E. Cartan, C. Siegel, Hua Lo-ken, I.I. Pyatetsky-Shapiro widely used the matrix approach to the presentation of the theory of multidimensional complex analysis (see [4-6]).

In 1935, E. Cartan proved that there are only six possible types of irreducible, homogeneous, bounded, symmetric domains, of which  $K_1, K_2, K_3$  and  $K_4$  are called classical domains:

$$K_1 = \left\{ Z \in \mathbb{C}[m \times k] : I^{(m)} - Z\bar{Z}' > 0 \right\},$$

$$K_2 = \left\{ Z \in \mathbb{C}[m \times m] : I^{(m)} - Z\bar{Z} > 0, \quad \forall Z' = Z \right\},$$

$$K_3 = \left\{ Z \in \mathbb{C}[m \times m] : I^{(m)} + Z\bar{Z} > 0, \quad \forall Z' = -Z \right\},$$

$$K_4 = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : |zz'|^2 + 1 - 2\bar{z}z' > 0, \quad |zz'| < 1 \right\}.$$

Here  $I^{(m)}$  is the identity matrix of order  $m$ ,  $\bar{Z}'$  is the complex conjugate of transposed matrix  $Z'$  (for a hermitian matrix  $H$  donates, as usual, that  $H$  is positive defined:  $H > 0$ ).

Dimensions of these domains are equal respectively:

$$mk, m(m+1)/2, m(m-1)/2, n.$$

All these domains are biholomorphically nonequivalent, therefore, complex analysis for them is constructed differently.

Consider the space  $m^2$  of complex variables, denoted by  $\mathbb{C}^{m^2}$ . In some questions, the points  $Z$  of this space can be conveniently represented as square  $[m \times m]$  - matrices, i.e. in the form  $Z = (z_{ij})_{i,j=1}^m$ . With this representation of points, the space  $\mathbb{C}^{m^2}$  will be denoted by  $\mathbb{C}[m \times m]$ . Direct product of  $\underbrace{\mathbb{C}[m \times m] \times \dots \times \mathbb{C}[m \times m]}_n$   $n$  copies of the spaces  $[m \times m]$  - matrix we denote

$\mathbb{C}^n[m \times m]$ .

Let  $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ - be a vector composed of  $Z_j$  square matrices of order  $m$ , considered over the field of complex numbers  $\mathbb{C}$ . We can assume that  $Z$ - is an element of the set  $\mathbb{C}^n[m \times m] \cong \mathbb{C}^{nm^2}$ .

Matrix «scalar» product:

$$\langle Z, W \rangle = Z_1 W_1^* + Z_2 W_2^* + \dots + Z_n W_n^*,$$

where  $W_j^*$  is the matrix conjugate and transposed for the matrix  $W_j$ .

Define the matrix ball  $B_{m,n}^{(2)}$  second type [7]:

$$B_{m,n}^{(2)} = \left\{ Z \in \mathbb{C}^n[m \times m] : I - \langle Z, Z \rangle > 0, \quad \forall Z'_\nu = Z_\nu, \quad \nu = 1, \dots, n \right\}$$

The skeleton (Shilov's boundary) of the matrix ball second type, we denote by

$$X_{m,n}^{(2)} = \{Z \in \mathbb{C}^n [m \times m] : \langle Z, Z \rangle = I, \quad Z'_\nu = Z_\nu, \nu = 1, 2, \dots, n\}.$$

The volume of the matrix ball second type is calculated using the following theorem.

**Theorem [10].** Let  $m \geq 2$  ?  $Z_\nu [m \times m]$  - be a symmetric matrix. Set

$$J(\lambda) = \int_{I - \langle Z, Z \rangle > 0} [\det(I - \langle Z, Z \rangle)]^\lambda \dot{Z},$$

where  $\dot{Z} = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{mn} dx_{ij} dy_{ij}, x_{ij} + iy_{ij} = z_{ij}$ . Then

$$J(\lambda) = \frac{\pi^{\frac{m(m+1)}{2}n}}{(\lambda + 1) \cdot \dots \cdot (\lambda + mn)} \cdot \frac{\Gamma(2\lambda + 3)\Gamma(2\lambda + 5) \cdot \dots \cdot \Gamma(2\lambda + 2mn - 1)}{\Gamma(2\lambda + mn + 2)\Gamma(2\lambda + mn + 3) \cdot \dots \cdot \Gamma(2\lambda + 2mn)}.$$

In particular, for  $\lambda = 0$  the volume of the matrix ball of the second type is obtained

$$V(B_{m,n}^{(2)}) = \frac{\pi^{\frac{m(m+1)}{2}n}}{m!} \cdot \frac{2!4! \dots (2mn - 3)!}{(mn + 1)!(mn + 2)! \dots (2mn - 1)!}. \quad (10)$$

From the obtained result (10) in particular  $n = 1$  we obtain well-known formulas for the found full volume classical domain of the second type matrix ball.

Now we calculate the volume of the skeleton  $X_{m,n}^{(2)}$  of the matrix ball of the second type  $B_{m,n}^{(2)}$ .

**Lemma.** The volume of the skeleton of the matrix ball of the second type is calculated with the following formulas:

$$V(X_{m,n}^{(2)}) = \frac{2^{\frac{mn(m+1)}{2}} \pi^{\frac{mn(m+3)}{4}}}{\left( \prod_{\nu=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{m-\nu+1}{2}\right) \right)^n}.$$

## References

1. V. S. Vladimirov, Methods of functions of several complex variables, Nauka, Moscow (1964) (in Russian)
2. W. Rudin, Function Theory in the Unit Ball of  $\mathbb{C}^n$ , New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, (1980) 436 p.
3. B. V. Shabat, Introduction to Complex Analysis Part II Functions of Several Variables, Moscow: Nauka, Physical and mathematical literature, 1985. 464 p. (Russian).
4. C. L. Siegel, Automorphic functions of several complex variables, Moscow, Inostrannaya Literatura, 1954 (in Russian)
5. I. I. Pjateckii-Sapiro, Geometry of classical domains and the theory of automorphic functions, Moscow, Fizmatgiz, 1961 (in Russian).
6. L. K. Hua, Harmonic analysis of functions of several complex variables, in classical domains, Moscow, IL, 1963 (in Russian)
7. G. Khudayberganov, B. B. Khidirov, U. S. Rakhmonov, Automorphisms of matrix balls, Acta NUUZ, 2010. no. 3. pp. 205-210.
8. G. Khudayberganov, U. S. Rakhmonov, Z. Q. Matyakubov, Integral formulas for some matrix domains, Contemporary Mathematics, AMS, Volume 662(2016), pp. 89-95.
9. G. Khudayberganov, U. S. Rakhmonov, The Bergman and Cauchy-Szegő kernels for matrix ball of the second type, Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 7:3(2014), pp. 305-310.
10. U. S. Rakhmonov, J. Sh. Abdullayev, On volumes of matrix ball of third type and generalized Lie balls, Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki 2019, vol. 29, issue 4, pp. 548-557.

## ON ABSOLUTE NILPOTENT ELEMENTS OF APPROXIMATION OF COMMUTATIVE ALGEBRA WITH EVOLUTION ALGEBRAS

<sup>1</sup>Rozikov Utkir, <sup>1</sup>Imomkulov Anvar

<sup>1</sup> *V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan,*  
e-mail: rozikovu@yandex.com, e-mail: aimomkulov@gmail.com

Let  $(A, \cdot)$  be an algebra over a field  $K$ . If it admits a basis  $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ , such that

$$\begin{aligned} e_i \cdot e_j &= 0, \text{ if } i \neq j \\ e_i \cdot e_i &= \sum_k a_{ik} e_k, \text{ for any } i \end{aligned}$$

then it is called an evolution algebra [7]. This basis is called a natural basis.

We note that to every evolution algebra corresponds a *square* matrix  $(a_{ik})$  of structural constants. This makes simpler the investigation of an evolution algebra compared to a general algebra. Because, a multiplication of a general algebra can be given by a *cubic* matrix.

Given a field  $K$ , any finite-dimensional algebra can be specified up to isomorphism by giving its dimension (say  $m$ ), and specifying  $m^3$  structure constants  $\gamma_{ij,k}$ , which are scalars. These structure constants determine the multiplication in  $\mathcal{A}$  via the following rule:

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^m \gamma_{ij,k} e_k,$$

where  $e_1, \dots, e_m$  form a basis of  $\mathcal{A}$ .

Thus the multiplication of a finite-dimensional algebra is given by a cubic matrix  $(\gamma_{ij,k})$ . This matrix also defines an evolution operator  $F : K^m \rightarrow K^m$  as

$$F : x'_k = \sum_{i,j} \gamma_{ij,k} x_i x_j, \quad k = 1, \dots, m.$$

The investigation of the algebra  $\mathcal{A}$  and the quadratic operator  $F$  is difficult, since they are determined by cubic matrices. While this investigation can be simplified by taking some values of  $\gamma_{ij,k}$  equal to zero. Non-linear functions, like  $F$ , mainly reduced to linear functions (linearization) by Jacobian to prove the local and some global results (see for example [1], [6]).

Jacobian of this operator is the following:

$$J_F(x) = \left( \sum_j \gamma_{pj,k} x_j + \sum_i \gamma_{ip,k} x_i \right)_{p,k=1}^n = \left( \sum_{i=1}^n (\gamma_{pi,k} + \gamma_{ip,k}) x_i \right)_{p,k=1}^n.$$

Since this is a square matrix we can define an evolution algebra with structural constants matrix  $J_F(x)$  ([5]). To do this, denote

$$\beta_{pk}(x) = \sum_i (\gamma_{pi,k} + \gamma_{ip,k}) x_i \tag{1}$$

and define an evolution algebra  $E_x = \langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n \rangle$  by multiplication

$$\tilde{e}_i \tilde{e}_j = 0, \quad \tilde{e}_i^2 = \sum_k \beta_{ik}(x) \tilde{e}_k.$$

Thus (1) is a relation between algebras  $\mathcal{A}$  and  $E_x$ . Similarly to the theory of dynamical systems we call  $E_x$  the *approximation* of  $\mathcal{A}$  at point  $x$  (see [2],[3],[4]).

**The main question** of this section is "What can we say about algebra  $\mathcal{A}$  with matrix of structural constants  $(\gamma_{pi,k})_{p,i,k=1}^n$  knowing properties of the evolution algebra  $E_x$  for some  $x \in \mathcal{A}$  with the relation (1)?"

The element  $x$  of an algebra  $A$  is called an *absolute nilpotent* if  $x^2 = 0$ .

**Theorem.** *Let  $\mathbb{R}^n$  be a commutative algebra over the field  $\mathbb{R}$  and  $E_{\hat{x}}$  be approximation of  $\mathbb{R}^n$  at  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  with  $\hat{x}_i \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Then algebra  $\mathbb{R}^n$  has **unique** absolute nilpotent if and only if algebra  $E_{\hat{x}}$  has **unique** absolute nilpotent.*

## References

1. *O. Galor*, Discrete dynamical systems. Springer, Berlin, 2007.
2. *A.N. Imomkulov*, Isomorphicity of two dimensional evolution algebras and evolution algebras corresponding to their idempotents, Uzbek Math. Jour. **2** (2018), 63-73.
3. *A.N. Imomkulov*, Classification of a family of three dimensional real evolution algebras, TWMS J. Pure Appl. Math., **10**(2) (2019).
4. *A.N. Imomkulov, U.A. Rozikov* Approximation of an algebra by evolution algebras, arXiv:1910.03708.
5. *U.A. Rozikov, M.V. Velasco*, A discrete-time dynamical system and an evolution algebra of mosquito population, J. Math. Biology. **78**(4) (2019), 1225-1244.
6. *U.A. Rozikov*, An introduction to mathematical billiards. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2019.
7. *J.P. Tian*, Evolution Algebras and Their Applications, Lecture Notes in Math., 1921, (Springer, Berlin, 2008.)

## ON THE SOLUTIONS OF THE DIOPHANTINE EQUATION $x^4 + y^4 = 2^k z^3$ FOR $k > 1$

<sup>1</sup>Shahrina Ismail, <sup>2</sup>Kamel Ariffin Mohd Atan

<sup>1</sup> *Faculty of Science and Technology, Universiti Sains Islam Malaysia, Negeri Sembilan, Malaysia*

e-mail: shahrinaismail@usim.edu.my

<sup>2</sup> *Institute for Mathematical Research, Universiti Putra Malaysia, Serdang, Selangor,*

e-mail: kamelariffin48@gmail.com

A Diophantine equation is a polynomial equation, usually in two or more unknowns, such that the integer solutions are sought or studied. In this paper, we are concerned with the existence, types and the cardinality of the integral solutions for Diophantine equation  $x^4 + y^4 = 2^k z^3$  for  $k > 1$ . The aim of this paper is to develop methods to be employed in determining all integer solutions to this equation. Results of the study indicate the existence of infinitely many solutions to this type of Diophantine equation for both cases,  $x = y$  and  $x \neq y$ . For the case when  $x = y$ , the form of solutions is given by  $(x, y, z) = (2^{k-1}n^3, 2^{k-1}n^3, 2^{k-1}n^4)$  while for the case when  $x \neq y$ , the form of solutions is given by  $(x, y, z) = (2^k un^2, 2^k vn^2, 2^k n^3)$  where  $u, v$  and  $n$  are any integers such that  $n = u^4 + v^4$ . The main result obtained is a formulation of a generalized method to find all the solutions for this type of Diophantine equation.



## A NON-LINEAR DISCRETE-TIME DYNAMICAL SYSTEM OF PLANKTONS

### Shoyimardonov Sobirjon

*V.I.Romanovskiy institute of mathematics, 81, Mirzo Ulug'bek str., 100125, Tashkent, Uzbekistan*

e-mail: shoyimardonov@inbox.ru

Planktons discrete-time dynamical system has the following operator form [1]:

$$V : \begin{cases} x'_1 = x_1 (1 - a_4 + a_1 x_6 - a_2 x_2 - a_3 x_3) \\ x'_2 = x_2 (1 - a_5 - a_6 + a_2 x_1) \\ x'_3 = x_3 (1 - a_8 - a_9 + a_3 x_1 + a_7 x_6) \\ x'_4 = x_4 (1 - a_{12} + a_{10} x_5 + a_{11} x_6) \\ x'_5 = x_5 + a_4 x_1 + a_5 x_2 + a_9 x_3 - a_{10} x_4 x_5 \\ x'_6 = x_6 (1 - a_1 x_1 - a_7 x_3 - a_{11} x_4) + a_6 x_2 + a_8 x_3 + a_{12} x_4 \end{cases}$$

Let

$$S^{m-1} = \{x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$$

be standard simplex and  $e_i = (\delta_{1i}, \dots, \delta_{mi}) \in S^{m-1}, i = 1, \dots, m$  be the vertices of the simplex  $S^{m-1}$ , where  $\delta_{ij}$  the Kronecker's symbol.

**Proposition 1.** *We have  $V(S^5) \subset S^5$  if the strictly positive parameters  $a_1, \dots, a_{12}$  verify the following conditions*

$$\begin{aligned} a_1 \leq 1, \quad a_6 \leq 1, \quad a_{10} \leq 1, \quad a_{12} \leq 1, \\ a_2 + a_4 \leq 1, \quad a_3 + a_4 \leq 1, \quad a_5 + a_6 \leq 1, \quad a_8 + a_9 \leq 1, \\ |a_7 - a_8| \leq 1, \quad |a_{11} - a_{12}| \leq 1. \end{aligned}$$

Moreover, under these conditions the operator  $V$  is a 4-Volterra QSO.

### Proposition 2.

- (1) *The following vertices  $e_1, e_2, e_3$  and  $e_4$  can not be fixed points for the operator  $V$*
- (2) *Vertices  $\{e_5, e_6\}$ , and any collection  $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_s}\} \subset \{e_1, \dots, e_4\}, (1 < s \leq 4)$  can not be a periodic orbit for the operator  $V$ .*

**Proposition 3.** *For an initial point  $\lambda^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}, x_5^{(0)}, x_6^{(0)}) \in S^5$  (except fixed points), with  $x_6^{(0)} = x_6^{(1)} = 0$ , the trajectory has the following limit*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V^{(n)}(\lambda^{(0)}) = (0, 0, 0, 0, 1, 0).$$

**Proposition 4.** *For an initial point  $\lambda^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}, x_5^{(0)}, x_6^{(0)}) \in S^5$  (except fixed points), with  $x_5^{(0)} = x_5^{(1)} = 0$ , the trajectory has the following limit*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V^{(n)}(\lambda^{(0)}) = \begin{cases} (0, 0, 0, 0, 0, 1) & \text{if } a_{11} \leq a_{12} \\ (0, 0, 0, 1 - \frac{a_{12}}{a_{11}}, 0, \frac{a_{12}}{a_{11}}) & \text{if } a_{11} > a_{12}. \end{cases}$$

**Proposition 5.** *For any initial point  $\lambda^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, 0, x_5^{(0)}, x_6^{(0)}) \in S^5$  (except fixed points), the trajectory has the following limit*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V^{(n)}(\lambda^{(0)}) = (0, 0, 0, 0, \bar{\lambda}, 1 - \bar{\lambda}),$$

where  $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(\lambda^{(0)})$ .

## References

1. Rozikov U.A., Shoyimardonov S.K., Varro R. Planktons discrete-time dynamical systems, In arXiv:2001.01182 [math.DS], 2020.

## СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ФЕРМИОНОВ В ИНВАРИАНТНОМ ПОДПРОСТРАНСТВЕ

<sup>1</sup>Абдуллаев Ж.И., <sup>2</sup>Тоштурдиев А.М.

<sup>1</sup> Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан,  
e-mail: jabdullaev@mail.ru

<sup>2</sup> Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан  
e-mail: atoshturdiyev@mail.ru

В работе рассматривается гамильтониан  $H = H_0 - V_2$  системы двух фермионов на трехмерной решетке  $\mathbb{Z}^3$  с потенциалом

$$\hat{v}(\mathbf{n}) = \hat{v}(n_1, n_2, n_3) = \begin{cases} \bar{v}(|n_1| + |n_2| + |n_3|), & \text{если } |n_1| + |n_2| \leq 1 \\ 0, & \text{если } |n_1| + |n_2| \geq 2. \end{cases} \quad (1)$$

Соответствующий оператор Шредингера  $H(\mathbf{k})$  системы двух фермионов имеет четыре инвариантных подпространств. Изучаются собственные функции и собственные значения оператора  $H(\mathbf{k})$ , так как собственные функции оператора  $H(\mathbf{k})$  трактуются как связанные состояния гамильтониана  $H$ , а собственные значения как энергии связанного состояния [1], [2]. Подпространство  $L_{123}^-(\mathbb{T}^3) := L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^-(\mathbb{T})$ , где  $L_2^-(\mathbb{T})$  – пространство, состоящий из нечетных функций на  $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ , является инвариантным относительно оператора  $H(\mathbf{k})$ . При этом сужение  $H_{123}^-(\mathbf{k})$  оператора  $H(\mathbf{k})$  действует на элемент  $f \in L_{123}^-(\mathbb{T}^3)$  по формуле

$$(H_{123}^-(\mathbf{k})f)(\mathbf{p}) = \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})f(\mathbf{p}) - \frac{1}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}(n+2) \int_{\mathbb{T}^3} \sin p_1 \sin p_2 \sin np_3 \sin q_1 \sin q_2 \sin nq_3 f(\mathbf{q}) d\mathbf{q},$$

где  $\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = 6 - 2 \cos \frac{k_1}{2} \cos q_1 - 2 \cos \frac{k_2}{2} \cos q_2 - 2 \cos \frac{k_3}{2} \cos q_3$ .

Теперь мы будем сформулировать основного результата работы. С этой целью мы введем следующие обозначения. Через  $\Lambda$  обозначим значение следующего интеграла:

$$\Lambda = \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\sin^2 p_1 \sin^2 p_2 dp_1 dp_2}{2 - \cos p_1 - \cos p_2}.$$

Компьютерное вычисление показывает, что  $\Lambda \approx 0,604694$ . Оператор  $H_{123}^-(\pi, \pi, \pi) = 6I - V_{123}^-$  имеет бесконечное число собственных значений  $z_n(\pi) = 6 - \bar{v}(n+2)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  им соответствуют собственные функции

$$f_n(p_1, p_2, p_3) = \sin p_1 \sin p_2 \sin np_3, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Теорема.** Пусть потенциал  $\hat{v}$  имеет вид (1) и  $\lambda \in (-\pi, \pi)$ .

a) Если  $\bar{v}(3) < \frac{2 \cos \frac{\lambda}{2}}{\Lambda}$ , тогда оператор  $H_{123}^-(\lambda, \lambda, \pi)$  не имеет собственных значений.

b) При некотором  $n \in \mathbb{N}$  выполняется соотношение  $\bar{v}(n+3) < \frac{2 \cos \frac{\lambda}{2}}{\Lambda} \leq \bar{v}(n+2)$ , тогда оператор  $H_{123}^-(\lambda, \lambda, \pi)$  имеет равно  $n$  различных невырожденных собственных значений  $z_1(\lambda) < z_2(\lambda) < \dots < z_n(\lambda) \leq 6 - 4 \cos \frac{\lambda}{2}$  соответствующими собственными функциями

$$f_m(p_1, p_2, p_3) = \frac{\sin p_1 \sin p_2 \sin mp_3}{6 - 2 \cos \frac{\lambda}{2} \cos p_1 - 2 \cos \frac{\lambda}{2} \cos p_2 - z_m(\lambda)} \in L_{123}^-(\mathbb{T}^3), \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

## Литература

1. Minlos R.A., Mogilner A.I. Some problems concerning spectra of lattice models. In Schrodinger operators: Standard and Nonstandard (eds. P.Exner, P.Seba). World. Scientific. Singapor. **1989**. 243-257.
2. Абдуллаев Ж.И. Связанные состояния системы двух фермионов на одномерной решетке. Теоретическая и математическая физика, Россия, Москва, Т. 147, N 1. **2006**, 36-47.

## НАХОЖДЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ЭНЕРГИИ В СВЯЗАННОМ СОСТОЯНИИ СИСТЕМЫ ДВУХ БОЗОНОВ

<sup>1</sup>Абдуллаев Ж.И., <sup>2</sup>Шотемиров Й.С., <sup>3</sup>Эргашова Ш.Х.

<sup>1</sup> Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан,  
e-mail: jabdullaev@mail.ru

<sup>2</sup> Навоиский государственный педагогический институт, Навои, Узбекистан,  
e-mail: shotemirov.y@mail.ru

<sup>3</sup> Навоиский государственный педагогический институт, Навои, Узбекистан,  
e-mail: ergashova1990@inbox.ru

Уравнение Шредингера – это основное уравнение квантовой теории. Исследование этого уравнения играет чрезвычайно важную роль в современной математической физике. Мы изучаем собственное значение и собственный элемент оператора Шредингера  $H(k)$  соответствующий оператор энергии  $H$  системы двух бозонов, т.е. элементов, удовлетворяющих уравнению Шредингера

$$H(k)f = \lambda f. \quad (1)$$

Каждый такой элемент  $f$ , отличный от нулевого, называется собственным элементом, а соответствующее значение  $\lambda$  – собственным значением оператора  $H(k)$ . При этом собственные элементы оператора  $H(k)$  трактуются как связанные состояния системы (оператора  $H$ ), а собственные значения  $\lambda$  – как энергии связанного состояния. Решения  $f$  уравнения (1), отвечающие какому-нибудь фиксированному собственному значению  $\lambda$ , образуют линейное множество, в силу непрерывности оператора  $H(k)$ , это множество замкнуто и, следовательно, представляет собой некоторое подпространство  $Ker(H(k) - \lambda I)$ , так называемое собственное подпространство, соответствующее собственному значению  $\lambda$ . Кратность собственного значения  $\lambda$  определяется как размерность подпространства  $\dim Ker(H(k) - \lambda I) = n$ , в частности, собственное значение называется простым, если  $n = 1$  и кратным при  $n \geq 2$ .

В работе рассматривается оператор энергии системы двух бозонов на трехмерной решетке  $\mathbb{Z}^3$ . Соответствующий оператор Шредингера  $H_1^+(2\lambda, \pi, \pi)$  ( $H_1^+(\pi, 2\lambda, \pi)$ ) этой системы имеет единственное связанное состояние  $f_1$  ( $f_1^+$ ) с энергией  $z_1(\lambda)$  ( $z_1^+(\lambda)$ ) в инвариантном подпространстве  $L_2^{+--}(\mathbb{T}^3)$ . Связанное состояние  $f_1$  и его энергии  $z_1(\lambda)$  вычисляются точно.

Связанные состояния оператора энергии  $H$  системы двух бозонов на двумерной решетке изучались в работе [1], а системы двух фермионов на двумерной решетке в работе [2]. Инвариантные подпространства оператора Шредингера  $H(k)$  системы двух произвольных частиц исследовались в [3].

Мы воспользуемся следующими обозначениями:  $\mathbb{Z}$  – множество целых чисел,  $\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  – декартова степень,  $\ell_2(\mathbb{Z}^3)$  – квадратично суммируемые функции, определенных на  $\mathbb{Z}^3$ ,

$$\begin{aligned} \ell_2((\mathbb{Z}^3)^2) &= \ell_2(\mathbb{Z}^3) \otimes \ell_2(\mathbb{Z}^3), \\ \ell_2((\mathbb{Z}^3)^2) \supset \ell_2^s((\mathbb{Z}^3)^2) &= \{f \in \ell_2((\mathbb{Z}^3)^2) : f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1)\}. \end{aligned}$$

Свободному оператору энергии  $\hat{H}_0$  системы двух бозонов на трехмерной решетке  $\mathbb{Z}^3$  обычно соответствует ограниченный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве  $\ell_2^s((\mathbb{Z}^3)^2)$  по формуле

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2m}\Delta_1 - \frac{1}{2m}\Delta_2.$$

Здесь  $m > 0$  означает массу бозона, который в дальнейшем мы считаем равным единице,  $\Delta_1 = \Delta \otimes I$  и  $\Delta_2 = I \otimes \Delta$ , где  $I$  – единичный оператор, решетчатый Лапласиан  $\Delta$  есть разностный оператор, описывающий перенос частицы с узла на соседний узел, т.е.

$$(\Delta\hat{\psi})(x) = \sum_{j=1}^3 [\hat{\psi}(x + e_j) + \hat{\psi}(x - e_j) - 2\hat{\psi}(x)], \quad \hat{\psi} \in \ell_2(\mathbb{Z}^3),$$

где  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1)$  – единичные орты в  $\mathbb{Z}^3$ . Полный гамильтониан  $\hat{H}$  действует в гильбертовом пространстве  $\ell_2^s(\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3)$  и состоит из суммы свободного гамильтониана  $\hat{H}_0$  и потенциала взаимодействия  $\hat{V}$  двух частиц

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V},$$

где

$$(\hat{V}\hat{\psi})(x, y) = \hat{v}(x - y)\hat{\psi}(x, y), \quad \hat{\psi} \in \ell_2^s(\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3).$$

Относительно потенциала  $\hat{v}$  предполагается, что  $(|x| = |x_1| + |x_2| + |x_3|, x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3)$

$$\hat{v}(x) = \begin{cases} \bar{v}(|x|), & \text{если } |x| \leq 2, \\ 0, & \text{если } |x| \geq 3 \end{cases} \quad (2)$$

Дополнительно мы предположим, что  $\bar{v}(2) > 0$ . При условии (2) гамильтониан  $\hat{H}$  является ограниченным и самосопряженным оператором в пространстве  $\ell_2^s(\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3)$ .

Переход в импульсное представление осуществляется с помощью преобразования Фурье

$$F : \ell_2^s(\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3) \rightarrow L_2^s(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{T}^3).$$

Гамильтониан  $H = F\hat{H}F^{-1} = H_0 - V$  в импульсном представлении коммутирует с группой унитарных операторов  $U_s, s \in \mathbb{Z}^3$  :

$$(U_s f)(k_1, k_2) = e^{-i(k_1+k_2, s)} f(k_1, k_2), \quad f \in L_2^s(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{T}^3).$$

Отсюда следует, что существуют разложения пространства  $L_2^s(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{T}^3)$  и операторов  $U_s, H$  в прямые интегралы [4]:

$$L_2^s(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{T}^3) = \int_{\mathbb{T}^3} \oplus L_2(F_k) dk, \quad U_s = \int_{\mathbb{T}^3} \oplus U_s(k) dk, \quad H = \int_{\mathbb{T}^3} \oplus \tilde{H}(k) dk.$$

Здесь

$$F(k) = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{T}^3 \times \mathbb{T}^3 : k_1 + k_2 = k\}, \quad k \in \mathbb{T}^3,$$

$U_s(k)$  - оператор умножения на функцию  $\exp(-i(s, k))$  в пространстве  $L_2(F_k)$ . Слой  $\tilde{H}(k)$  оператора  $H$  также действует в  $L_2(F_k)$  и унитарно эквивалентен оператору  $H(k) = H_0(k) + V$ , называемым оператором Шредингера на решетке, который действует в гильбертовом пространстве  $L_2^e(\mathbb{T}^3) = \{f \in L_2(\mathbb{T}^3) : f(-p) = f(p)\}$  по формуле:

$$(H(k)f)(p) = \varepsilon_k(p)f(p) + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{T}^3} v(p-s)f(s) ds.$$

Невозмущенный оператор  $H_0(k)$  есть оператор умножения на функцию

$$\varepsilon_k(p) = \varepsilon\left(\frac{k}{2} + p\right) + \varepsilon\left(\frac{k}{2} - p\right) = 6 - 2 \cos \frac{k_1}{2} \cos p_1 - 2 \cos \frac{k_2}{2} \cos p_2 - 2 \cos \frac{k_3}{2} \cos p_3.$$

Оператор возмущения  $V$  является интегральным оператором в  $L_2^e(\mathbb{T}^3)$ :

$$(Vf)(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{T}^3} v(p-s)f(s) ds.$$

Здесь  $v$  Фурье образ потенциала  $\hat{v}$ , т. е.

$$v(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} [\bar{v}(0) + 2\bar{v}(1) \sum_{j=1}^3 \cos p_j + 2\bar{v}(2) \sum_{j=1}^3 \cos 2p_j + 4\bar{v}(2) \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \cos p_i \cos p_j]. \quad (3)$$

Нетрудно проверить самосопряженность и ограниченность оператора Шредингера  $H(k)$ . Потенциал  $\hat{v}$  является сферически симметричным, поэтому его Фурье образ  $v(p_1, p_2, p_3) = (F\hat{v})(p_1, p_2, p_3)$  четны (см. (3)) по всем аргументам  $p_1, p_2, p_3 \in [-\pi, \pi]$ . Функция  $\varepsilon_k$  также обладает этим свойством. Поэтому

$$L_2^{+++}(\mathbb{T}^3) = \{f \in L_2^e(\mathbb{T}^3) : f(p_1, p_2, p_3) = f(-p_1, p_2, p_3) = f(p_1, -p_2, p_3) = f(p_1, p_2, -p_3)\}$$

подпространство является инвариантным относительно операторов  $V$  и  $H_0(k)$ . Пространство четных функций  $L_2^e(\mathbb{T}^3)$  можно представить в виде прямой суммы

$$L_2^e(\mathbb{T}^3) = L_2^{+++}(\mathbb{T}^3) \oplus L_2^{+--}(\mathbb{T}^3) \oplus L_2^{-+-}(\mathbb{T}^3) \oplus L_2^{--+}(\mathbb{T}^3).$$

Здесь подпространство  $L_2^{+++}(\mathbb{T}^3)$  определено выше, подпространство  $L_2^{+--}(\mathbb{T}^3)$  состоит из элементов  $f \in L_2^e(\mathbb{T}^3)$  таких, что они нечетны по аргументам  $p_2, p_3$  и четны по аргументу  $p_1$ .  $L_2^{-+-}(\mathbb{T}^3)$  подпространство функций, нечетны по  $p_1, p_3$  и четный по аргументу  $p_2$ .  $L_2^{--+}(\mathbb{T}^3)$  подпространство функций нечетны по  $p_1, p_2$  и четный по аргументу  $p_3$ .

**Лемма 1.** Подпространства  $L_2^{+--}(\mathbb{T}^3)$ ,  $L_2^{-+-}(\mathbb{T}^3)$ ,  $L_2^{--+}(\mathbb{T}^3)$  являются инвариантными относительно оператора  $H(k)$ .

Обозначим через  $H_\alpha^+(k)$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$  сужение оператора  $H(k)$  в инвариантном подпространстве  $L_\alpha^+$ , где  $L_1^+ = L_2^{+--}(\mathbb{T}^3)$ ,  $L_2^+ = L_2^{-+-}(\mathbb{T}^3)$ ,  $L_3^+ = L_2^{--+}(\mathbb{T}^3)$ , т.е.  $H_\alpha^+(k) = H(k)|_{L_\alpha^+}$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ .

Теперь приведем, как действует сужение  $V_\alpha^+$  оператора  $V$  в инвариантном подпространстве  $L_\alpha^+$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ :

$$(V_\alpha^+ f)(p) = \frac{\bar{v}(2)}{2\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} \sin p_\beta \sin s_\beta \sin p_\gamma \sin s_\gamma f(s) ds, \quad \{\alpha, \beta, \gamma\} = \{1, 2, 3\}.$$

**Теорема 1.** Оператор  $H_1^+(2\lambda, \pi, \pi)$ ,  $\lambda \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  имеет единственное собственное значение  $z_1(\lambda) = 6 + \sqrt{\bar{v}^2(2) + 4 \cos^2 \lambda}$  и ему соответствует собственная функция

$$f_1(p) = \frac{C \sin p_2 \sin p_3}{6 - 2 \cos \lambda \cos p_1 - z_1(\lambda)} \in L_2^{+--}(\mathbb{T}^3).$$

**Теорема 2.** а) Если  $\bar{v}(2) < \cos \lambda$ , тогда оператор  $H_1^+(\pi, 2\lambda, \pi)$  не имеет собственных значений вне существенного спектра  $[m(\beta), M(\beta)]$ , где  $m(\lambda) = 6 - 2 \cos \lambda$ ,  $M(\lambda) = 6 + 2 \cos \lambda$ .

б) Если  $\bar{v}(2) = \cos \lambda$ , тогда правый край  $M(\lambda) = 6 + 2 \cos \lambda$  существенного спектра оператора  $H_1^+(\pi, 2\lambda, \pi)$  является резонансом.

в) Если  $\bar{v}(2) > \cos \lambda$ , тогда оператор  $H_1^+(\pi, 2\lambda, \pi)$  имеет единственное простое собственное значение

$$z_1^+(\lambda) = 6 + \bar{v}(2) + \frac{1}{\bar{v}(2)} \cos^2 \lambda,$$

лежащее правее существенного спектра и ему соответствует собственная функция

$$f_1^+(p) = \frac{C \sin p_2 \sin p_3}{6 - 2 \cos \lambda \cos p_2 - z_1^+(\lambda)} \in L_2^{+--}(\mathbb{T}^3).$$

д) Оператор  $H_1^+(\pi, 2\lambda, \pi)$  не имеет вложенных собственных значений в интервале  $(m(\beta), M(\beta))$ .

Операторы  $H_1^+(\pi, 2\lambda, \pi)$  и  $H_1^+(\pi, \pi, 2\lambda)$  унитарно эквивалентны. Поэтому аналогичное утверждение имеет место для оператора  $H_1^+(\pi, \pi, 2\lambda)$ . При этом собственные значения операторов  $H_1^+(\pi, 2\lambda, \pi)$  и  $H_1^+(\pi, \pi, 2\lambda)$  совпадают, но собственные функции отличаются с заменой переменной  $p_2$  и  $p_3$ .

## Литература

1. Абдуллаев Ж.И., Кулиев К.Д. Связанные состояния системы двух бозонов на двумерной решетке. Теоретическая и математическая физика, Россия, Москва, Т. 186, N 2. **2016**, 272-292.
2. Абдуллаев Ж.И., Кулиев К.Д., Мамиров Б.У. Бесконечность числа связанных состояний системы двух фермионов на двумерной решетке. Узбекский Математический Журнал, Узбекистан, Ташкент, N 4. **2016**, 3-16.
3. Абдуллаев Ж.И., Файзиев М.Ш., Шотемиров Й.С. Инвариантные подпространства двухчастичного оператора Шредингера на решетке. Узбекский Математический Журнал, Узбекистан, Ташкент, N 3. **2009**, 3-10.
4. Рид М., Симон Б. Методы современной математической физики, Москва, Мир, Т.4. Анализ операторов, **1982**.

## СУЩЕСТВОВАНИЕ ИЗОМОРФИЗМА ДЛЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФАКТОРОВ

Болтаев Х.Х.

Ташкентский государственный транспортный университет, Узбекистан

e-mail: bkhabibzhan2020@mail.ru

Теория  $W^*$ -подалгебр, последнее время, интенсивно развивается. Обобщая понятие индекса для  $W^*$ -подалгебр, В. Джонс нашёл множество всех возможных значений индекса. Его основное достижение заключается в том, что при доказательстве основного результата он построил возрастающую последовательность факторов, обладающих уникальными свойствами, которые в точности являются алгебрами Гекке  $H_m(q)$  ( $m \in \mathbb{N}$ ). Кроме того, каждому пару  $W^*$ -алгебр  $N \subset M$  сопоставляя некоторый двудольный граф. В

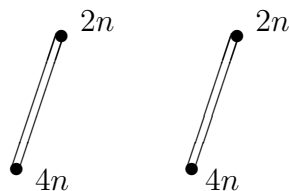
настоящей работе, с помощью множество примеров, для каждой пары  $N \subset M$  дана схема построение графов, а также параллельно изучая вещественный аналог  $W^*$ -подалгебр, найдены интересные свойства, отличающиеся от комплексного случая.

Пусть  $A$  - банахова  $*$ -алгебра над полем  $\mathbb{C}$ . Напомним, что алгебра  $A$  называется  $C^*$ -алгеброй, если  $\|aa^*\| = \|a\|^2$ , для любого  $a \in A$ . Дадим вещественный аналог определения  $C^*$ -алгебры. Вещественная банахова  $*$ -алгебра  $A$  называется *вещественной  $C^*$ -алгеброй*, если  $\|aa^*\| = \|a\|^2$  и элемент  $\mathbf{1} + aa^*$  обратим для любого  $a \in A$ . Это эквивалентно тому, что норму на  $A$  можно поднять на комплексификации  $A_c = A + iA$  алгебры  $A$  так, чтобы алгебра  $A_c$  являлась (комплексной)  $C^*$ -алгеброй (см. [1]). Пусть  $B(H)$  - алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в комплексном гильбертовом пространстве  $H$ . Слабо замкнутая  $*$ -подалгебра  $M$  в  $B(H)$ , содержащая единичный оператор  $\mathbf{1}$  называется  *$W^*$ -алгеброй*. Вещественная  $*$ -подалгебра  $R \subset B(H)$  с  $\mathbf{1}$  называется *вещественной  $W^*$ -алгеброй*, если она слабо замкнута и  $R \cap iR = \{0\}$ . Пусть  $A \subseteq B$  - конечномерные вещественные (соответственно, комплексные)  $C^*$ -алгебры. Тогда  $A \cong \bigoplus_{i=1}^k M_{n_i}(F)$  и  $B \cong \bigoplus_{j=1}^l M_{m_j}(F)$ , где  $F = \mathbb{R}$  или  $F = \mathbb{H}$  - тело кватернионов (соответственно,  $F = \mathbb{C}$ ). Положим  $\vec{n} = (n_1, \dots, n_k)$  и  $\vec{m} = (m_1, \dots, m_l)$ , и назовем их вектор-размерностями  $A$  и  $B$ , соответственно. Определим элементы  $\Lambda_{ij}$   $k \times l$ -матрицы  $\Lambda_A^B$  как:  $\Lambda_{ij}$  - число  $i$ -го слагаемого в представлении  $A$  в  $j$ -м слагаемом  $B$  (см. [2,3]).

**Теорема 1. [3]** Пусть  $N \subset M$  и  $N_1 \subset M_1$  - пары конечномерных  $C^*$ -алгебр, для которых имеются совпадающие графы. Тогда существует изоморфизм  $\theta : M \rightarrow M_1$  с  $\theta(N) = N_1$ .

**Замечание 1.** Теорема 1 неверна в вещественном случае, как показывает следующий пример.

**Пример 1.** Пусть  $P_1 = M_n(\mathbb{H}) \subset R_1 = M_{2n}(\mathbb{H})$  и  $P_2 = M_{2n}(\mathbb{R}) \subset R_2 = M_{4n}(\mathbb{R})$ ,  $n \geq 1$ . Рассмотрим графы этих пар:



Очевидно, что графы одинаковы. Однако, как известно [4], что вещественные факторы  $R_1$  и  $R_2$ , и вещественные подфакторы  $P_1$  и  $P_2$  не изоморфны, соответственно.

Теорема 1 обобщается следующим образом.

**Теорема 2. [3]** Пусть  $\mathbf{1} \in M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots$  и  $\mathbf{1} \in N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \dots$  - две цепи матричных алгебр, для которых графы совпадают. Тогда существует изоморфизм  $\varphi : \bigcup_k M_k \rightarrow \bigcup_k N_k$ , такой что  $\varphi(M_k) = N_k$ , для всех  $k$ .

Ясно что теорема 2 также неверна в вещественном случае, как показывает следующий пример.

**Пример 2.** Пусть  $\mathbf{1} \in M_2(\mathbb{R}) \subset M_4(\mathbb{R}) \subset M_8(\mathbb{R}) \subset M_{16}(\mathbb{R}) \subset \dots$  и  $\mathbf{1} \in \mathbb{H} \subset M_2(\mathbb{H}) \subset M_4(\mathbb{H}) \subset M_8(\mathbb{H}) \subset \dots$  - две цепи матричных алгебр.

Легко видеть, что цепи имеют одинаковый граф:



Тем не менее, теорема 2 неверна, так как алгебры  $M_{2n}(\mathbb{R})$  и  $M_n(\mathbb{H})$  не изоморфны (см. [4]).

**Замечание 2.** Все результаты в комплексном случае получены В.Джонсоном [2].

### Литература

1. Li Bing-Ren. Real operator algebras. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2003. 241p.
2. Jones V., Sunder V.S. Introduction to Subfactors, Lon. Mat. Soc., 234, (1997), 162.
3. Goldman F., Harpe P. de la. and Jones V. F. R. Coxeter graphs and towers of algebras, MSRI Publications, (Springer), New York, 1989, vol. 14.
4. Ayupov Sh.A., Rakhimov A.A., Usmanov Sh.M. Jordan, Real and Lie Structures in Operator Algebras. The Book: Kluwer Academic Publishers, MAIA, (1997), V.418, 235p.

## ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ ТОЧКИ И ИХ КОЛИЧЕСТВО НА СОВЕРШЕННЫХ ЭЛЛИПСОИДАХ

<sup>1</sup>Гуломов О.Х., <sup>2</sup>Шодиев С.Ю.

<sup>1</sup> Каршинский Государственный Университет, Карши, Узбекистан,  
e-mail: otabek10@mail.ru

<sup>2</sup> Каршинский Государственный Университет, Карши, Узбекистан,  
e-mail: shodiyevsyu@mail.ru

За последние годы был опубликован ряд работ, касающихся теории совершенных форм. Укажем на работы [5-14], где рассматривалась проблематика теории совершенных форм. Настоящая работа посвящается разработке алгоритма для отыскания целых точек на совершенных эллипсоидах.

**1. Введение.** Пусть  $f = f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j$  – положительная квадратичная форма (п.к.ф.) с вещественными коэффициентами  $a_{ij} = a_{ji}$  и  $m = m(f)$  – арифметический минимум, который достигается в  $2\sigma$  целочисленных точках  $\pm m_l = \pm (m_{1l}, \dots, m_{nl})$  ( $l = 1, \dots, \sigma$ ) называемых представлениями минимума  $m(f)$ .

П.к.ф.  $f$  называется совершенной [1], если она однозначно определяется своим минимумом  $m(f)$  и его представлениями  $m_l$ , то есть система уравнений

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} m_{il} m_{jl} = m \quad (l = 1, \dots, \sigma)$$

имеет единственное решение относительно коэффициентов  $a_{ij}$ .

Пусть  $f(x_1, \dots, x_n)$  – совершенная форма и  $f_k$  – положительное число. Тогда  $n$ -мерный эллипсоид

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_k \quad (1)$$

называют [2,4] совершенным эллипсоидом.

Необходимость в отыскании количества целочисленных точек  $r_k(f)$  на совершенных эллипсоидах (1) появляется при решении так называемой проблемы Ранкина-Соболева [3] об экстремумах дзета-функции Эшштейна  $Z(f, s) = \sum_{x \neq 0} \{f(x)\}^{-\frac{ns}{2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k(f)}{f_k^{\frac{ns}{2}}}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in Z^n \setminus 0$  где  $r_k(f)$  – количество целочисленных точек на  $f(x_1, \dots, x_n) = f_k$ .



В работе [2,4] был предложен алгоритм для отыскания всех целочисленных точек на совершенных эллипсоидах (1) и на основе этого алгоритма были вычислены все целочисленные точки и их количество на эллипсоидах, соответствующих первым двум совершенным формам Вороного

$$\varphi_0^n = \varphi_0^n(x_1, \dots, x_n) = k \quad (n \geq 2) \quad (2)$$

$$\varphi_1^n = \varphi_1^n(x_1, \dots, x_n) = k \quad (n \geq 4) \quad (3)$$

при  $k = 1, 2, \dots, 7$ . Здесь

$$\varphi_0^n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j, \quad \varphi_1^n = \varphi_0^n - x_1 x_2.$$

Мы предлагаем новый алгоритм для вычисления  $r_k(f)$  и на его основе вычисляем все целочисленные точки и их количество на совершенных эллипсоидах (2) и (3) при всех  $k = 1, 2, \dots, 8, 9$ . Заметим, что при реализации предлагаемого здесь алгоритма требуется меньше вычислений чем в [2]. Поэтому, с его помощью удастся вычислить все целые точки и для слоев  $k = 8, 9, \dots$ , что сделать было бы очень трудно с помощью алгоритма из работы [2].

Основными результатами является следующие предложения.

**Теорема 1.** При  $k = 8, 9$  количество  $r_k(\varphi_0^n)$  целочисленных точек на эллипсоиде (2) соответственно равны:

$$\begin{aligned} r_8(\varphi_0^n) &= \frac{n(n-1) \dots (n-15)}{(8!)^2} + \frac{2n(n-1) \dots (n-14)}{7!8!} + \frac{4}{5!6!} n(n-1) \dots (n-11) + \\ &+ \frac{7}{5(4!)^2} n(n-1) \dots (n-9) + \frac{14}{5(4!)^2} n(n-1) \dots (n-8) + \frac{n(n-1) \dots (n-7)}{5!} + \\ &+ \frac{28}{5!} n(n-1) \dots (n-5) + n(n-1) \dots (n-5) + n(n-1) \dots (n-4) + \\ &+ \frac{21}{4} n(n-1)(n-2)(n-3) + n(n-1)(n-2), \\ r_9(\varphi_0^n) &= \frac{n(n-1) \dots (n-13)}{(9!)^2} + \frac{2n(n-1) \dots (n-16)}{8!9!} + \frac{30}{6!8!} n(n-1) \dots (n-13) + \\ &+ \frac{31}{21(5!)^2} n(n-1) \dots (n-11) + \frac{352}{21(5!)^2} n(n-1) \dots (n-10) + \\ &+ \frac{1}{3 \cdot 6!} n(n-1) \dots (n-7) + \frac{22}{5!} n(n-1) \dots (n-6) + \frac{158}{3!6!} n(n-1) \dots (n-5) + \\ &+ n(n-1) \dots (n-4) + n(n-1)(n-2)(n-3) + 4n(n-1)(n-2) + n(n-1) + 2n. \end{aligned}$$

**Теорема 2.** При  $k = 8, 9$  количества  $r_k(\varphi_1^n)$  целочисленных точек на эллипсоиде (3)  $\varphi_1^n = x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = k$  соответственно равны:

$$\begin{aligned} r_8(\varphi_1^n) &= 2n + \frac{22}{4!} n(n-1)(n-2)(n-3) + \frac{32}{3!} n(n-1) \dots (n-4) + \\ &+ \frac{128}{3!4!} n(n-1) \dots (n-6) + \frac{256}{7!} n(n-1) \dots (n-7) + \\ &+ \frac{582}{8!} n(n-1) \dots (n-9) + \frac{8190}{12!} n(n-1) \dots (n-12) + \frac{69146}{18!} n(n-1) \dots (n-16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_9(\varphi_1^n) = & 2n(n-1) + 4n(n-1)(n-2) + 8n(n-1)(n-2)(n-3) + \\
& + \frac{40}{4!}n(n-1)\dots(n-5) + \frac{128}{5!}n(n-1)\dots(n-6) + \frac{512}{3!6!}n(n-1)\dots(n-8) + \\
& + \frac{1024}{9!}n(n-1)\dots(n-9) + \frac{3560}{10!}n(n-1)\dots(n-11) + \frac{32768}{14!}n(n-1)\dots(n-14) + \\
& + \frac{217944}{18!}n(n-1)\dots(n-17).
\end{aligned}$$

## Литература

1. Вороной Т.Ф. О некоторых свойствах положительных квадратичных форм. // Собр. соч. Т.2. Киев. Издательство АН УССР. 1952. С.171-238.
2. Абдурашиков Х.Х., Шушбаев С.Ш. О количестве целочисленных точек на совершенных эллипсоидах. // Узб. матем. журн.- Ташкент, №4, 1998.
3. Шушбаев С.Ш. К проблеме Ранкина-Соболева многомерной дзета-функции. Труды МИ АН СССР. -Москва, 1980. Т.152. С.22-235.
4. Шушбаев С.Ш., Гуломов О.Х. Усовершенствованный алгоритм Вороного.-Ташкент, 2000. 17с.-Деп. в ГФН-ТИГКНТ РУз 14.11.2000, №2745-00.
5. Anzin M.M. On the density of a lattice covering for  $n = 11$  and  $n = 14$ , Tr. Mat. Inst. Steklova 239 (2002), Diskret. Geom. i Geom. Chisel, 20-51.
6. Batut C., Martinet J. A catalogue of perfect lattices, <http://www.math.u-bordeaux.fr/~martinet/>.
7. Conway J.H., Sloane N.J.A. Sphere Packings, Lattices and Groups, third edition, volume 290 of Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, 1998.
8. Deza M., Dutour M. Cones of metrics, hemi-metrics and super-metrics, Annals of the European Academy of Sciences, 2003, 141-162.
9. Martinet J. Perfect lattices in Euclidean spaces, Springer, 2003 MR1957723 (2003m:11099).
10. Riener C. On extreme forms in dimension 8, Theorie des Nombres de Bordeaux, <http://www.math.u-bordeaux.fr/martinet/riener4.pdf>.
11. Shepherd-Barron N.I. Perfect forms and the moduli space of abelian varieties, Invent. Math. 163-1 (2006) 25-45. MR2208417 (2007e:14070).
12. C. Soule. Perfect forms and the Vandiver conjecture, J. Reine Angew. Math. 517 (1999) 209-221. MR1728540 (2000d:11102).
13. Dutour Sikiric M., Vallentin F., Schürmann A. Classification of eight-dimensional perfect forms, Electronic Research Inducement's of the AMS. 2007. 13, 21-32.
14. Dutour Sikiric M., Schürmann A., Vallentin F. Complexity and algorithms for computing Voronoi cells of lattices, Math. Comp. 2009. 78, 1713-1731.

## АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА СИСТЕМЫ ДВУХ БОЗОНОВ НА РЕШЕТКЕ

<sup>1</sup>Мамиров Б.У.

<sup>1</sup> Самаркандский государственный университет, Узбекистан

e-mail: berdiyov@mail.ru

Оператор энергии  $\hat{H}$  системы двух бозонов на трехмерной решетке  $\mathbf{Z}^3$  действует в гильбертовом пространстве  $\ell_2^{sym}(\mathbf{Z}^3 \times \mathbf{Z}^3) = \{f \in \ell_2(\mathbf{Z}^3 \times \mathbf{Z}^3) : f(x, y) = f(y, x)\}$  по формуле

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \hat{V}_2,$$

где свободный гамильтониан  $\hat{H}_0$  действует в  $\ell_2^{sym}(\mathbf{Z}^3 \times \mathbf{Z}^3)$ :

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2m}\Delta_1 - \frac{1}{2m}\Delta_2.$$

Здесь  $m$  означает массу бозонов, которая в дальнейшем считаем равным единице,  $\Delta_1 = \Delta \otimes I$  и  $\Delta_2 = I \otimes \Delta$ ,  $I$  – единичный оператор, решетчатый Лапласиан  $-\Delta$  есть разностный оператор, описывающий перенос частицы с узла на соседний узел, т.е.

$$(\Delta \hat{\psi})(x) = \sum_{j=1}^3 [\hat{\psi}(x + e_j) + \hat{\psi}(x - e_j) - 2\hat{\psi}(x)], \quad \hat{\psi} \in \ell_2(\mathbf{Z}^3),$$

где  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1)$  единичные орты в  $\mathbf{Z}^3$ . Взаимодействие двух частиц описывается оператором  $\hat{V}_2$ :

$$(\hat{V}_2 \hat{\psi})(x_1, x_2) = \hat{v}(x_1 - x_2) \hat{\psi}(x_1, x_2), \quad \hat{\psi} \in \ell_2^{sym}(\mathbf{Z}^3 \times \mathbf{Z}^3).$$

Пусть функции  $\hat{v}$  предполагается, что

$$\hat{v}(n, m, k) = \begin{cases} \bar{v}(n), & \text{если } m = k = 0 \\ \bar{v}(|n| + 1), & \text{если } |m| + |k| = 1 \\ 0, & \text{если } |m| + |n| \geq 2, \end{cases} \quad (1)$$

носитель которой принадлежит в трубе  $D = \{\mathbf{x} = (n, m, k) \in \mathbf{Z}^3 : n \in \mathbf{Z}, |m| + |k| \leq 1\}$ . Исследование связанных состояний оператора энергии  $\hat{H}$  сводится к изучению собственных значений семейства операторов  $H(k)$ ,  $k \in \mathbf{T}^3 = (-\pi, \pi]^3$  действующих в гильбертовом пространстве  $L_2^e(\mathbf{T}^3) := \{f \in L_2(\mathbf{T}^3) : f(-q) = f(q)\}$  по формуле (см. [1-2])

$$(H(k)f)(q) = \varepsilon_k(q)f(q) - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}^3} v(q-s)f(s) ds.$$

Невозмущенный оператор  $H_0(k)$  есть оператор умножения на функцию

$$\varepsilon_k(q) = 6 - 2 \cos \frac{k_1}{2} \cos q_1 - 2 \cos \frac{k_2}{2} \cos q_2 - 2 \cos \frac{k_3}{2} \cos q_3.$$

Оператор возмущения  $V$  – интегральный оператор в  $L_2^e(\mathbf{T}^3)$  с ядром

$$\frac{1}{2\pi} v(q-s) = \frac{1}{2\pi} (F\hat{v})(q-s)$$

и принадлежит классу Гильберта-Шмидта.

Обозначим через  $L_2^+(\mathbf{T}) = \{f \in L_2(\mathbf{T}) : f(p) = f(-p)\}$  и  $L_2^-(\mathbf{T}) = \{f \in L_2(\mathbf{T}) : f(-p) = -f(p)\}$  подпространства соответственно четных и нечетных функций. Имеет место разложение:

Имеет место разложение:

$$L_2^e(\mathbf{T}^3) = L_2^{+++}(\mathbf{T}^3) \oplus L_2^{+--}(\mathbf{T}^3) \oplus L_2^{-+-}(\mathbf{T}^3) \oplus L_2^{--+}(\mathbf{T}^3)$$

где

$$L_2^{+++}(\mathbf{T}^3) = L_2^+(\mathbf{T}) \otimes L_2^+(\mathbf{T}) \otimes L_2^+(\mathbf{T}), \quad L_2^{+--}(\mathbf{T}^3) = L_2^+(\mathbf{T}) \otimes L_2^-(\mathbf{T}) \otimes L_2^-(\mathbf{T})$$

и

$$L_2^{-+-}(\mathbf{T}^3) = L_2^-(\mathbf{T}) \otimes L_2^+(\mathbf{T}) \otimes L_2^-(\mathbf{T}), \quad L_2^{--+}(\mathbf{T}^3) = L_2^-(\mathbf{T}) \otimes L_2^-(\mathbf{T}) \otimes L_2^+(\mathbf{T}).$$

Система  $\{\varphi_n^-(q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nq\}_{n \in \mathbf{N}}$  ( $\{\varphi_0^+(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \varphi_n^+(q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nq\}_{n \in \mathbf{N}}$ ) образует ортонормированный базис в  $L_2^-(\mathbf{T})$  ( $L_2^+(\mathbf{T})$ ). Обозначим через  $L^-(n)$ ,  $n \in \mathbf{N}$  ( $L^+(n-1)$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ) одномерное подпространство, натянутое на вектор  $\varphi_n^-(q)$  ( $\varphi_n^+(q)$ ).

Известно, что пространства  $L_2^-(\mathbf{T})$  и  $L_2^+(\mathbf{T})$  разлагаются в прямые суммы

$$L_2^-(\mathbf{T}) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} L^-(n), L_2^+(\mathbf{T}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^+(n) \quad (2)$$

Разложение (2) порождает разложение

$$L_2^{+++}(\mathbf{T}^3) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \left\{ \bigoplus_{n=0}^{\infty} \{L^+(n) \otimes L^+(m) \otimes L_2^+(\mathbf{T})\} \right\} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{S}(n, m).$$

**Лемма.** Для любых  $n, m \in \mathbb{Z}_+$  подпространства  $\mathbb{S}(n, m)$  являются инвариантными относительно оператора  $H(\pi, \pi, k_3)$ .

Для каждого  $n, m \in \mathbb{Z}_+$  обозначим через

$$H^+(\pi, \pi, k_3)|_{(n,m)} = I_n \otimes I_m \otimes [4I + H_0(k_3) - V_{nm}^+],$$

сужение оператора  $H^+(\pi, \pi, k_3)$  в инвариантном подпространстве  $\mathbb{S}(n, m)$ .  $I_n$  – единичный оператор в  $L^+(n)$  есть одномерный двухчастичный оператор, действующий в  $L_2^+(\mathbf{T})$  по формуле

$$(H^{nm+}(k_3)f)(p) = (4 + \varepsilon_{k_3}(p))f(p) - (V_{nm}^+f)(p) \quad f \in L_2^+(\mathbf{T}). \quad (3)$$

Заметим, что  $V_{nm}^+ = 0$  если  $m \geq 2$ . Поэтому мы будем давать действия оператора  $V_{nm}^+$  на элемент  $f \in L_2^+(\mathbf{T})$  при  $m = 0$ .

$$(V_{nm}^+f)(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\bar{v}(n) + 2\bar{v}(n+1) \cos p \cos s] f(s) \, ds.$$

Изучение собственных значений оператора  $H^+(\pi, \pi, k_3)|_{(n,m)}$  в силу представление (3) сводится к изучению собственных значений оператора  $H^{nm+}(k_3)$  т.е. двумерная задача сводится к одномерной.

**Теорема.** Для любого  $n \in \mathbb{Z}_+$  существует  $\alpha_n > 0$  такое, что для каждого  $\gamma \in (0, \alpha_n)$  оператор  $H^{nm+}(\pi - 2\gamma)$  (при  $m = 0$ ) имеет два различных невырожденных собственных значений  $z_n^+(\pi - 2\gamma)$  и  $z_{n+1}^+(\pi - 2\gamma)$  имеющих асимптотики

$$z_n^+(\pi - 2\gamma) = 6 - \bar{v}(n) - \frac{2}{\bar{v}(n) - \bar{v}(n+1)} \gamma^2 + O(\gamma^4),$$

$$z_{n+1}^+(\pi - 2\gamma) = 6 - \bar{v}(n+1) - \frac{\bar{v}(n) - 3\bar{v}(n+1)}{\bar{v}(n+1)(\bar{v}(n) - \bar{v}(n+1))} \gamma^2 + O(\gamma^4), \quad \gamma \rightarrow 0,$$

соответствующее собственной функциям

$$f_n^+(p) = \frac{(b_1(n) + c_1(n) \cos p_3) \cos np_1}{6 - 2 \cos \gamma \cos p_3 - z_n^+(\pi - 2\gamma)} \in \mathbb{S}(n, 0),$$

$$f_{n+1}^+(p) = \frac{(b_2(n) + c_2(n) \cos p_3) \cos np_1}{6 - 2 \cos \gamma \cos p_3 - z_{n+1}^+(\pi - 2\gamma)} \in \mathbb{S}(n, 0),$$

где  $b_1(n), c_1(n), b_2(n), c_2(n)$  произвольные постоянные.

## Литература

1. Абдуллаев Ж.И., Мамиров Б.У. Асимптотика собственных значений двухчастичного дискретного оператора Шредингера. Теоретическая и математическая физика. 2013. Т. 176. N 3. 417-428.

2. Абдуллаев Ж.И. Собственные значения двухчастичного оператора Шредингера на двумерной решетке. УзМЖ. 2005. N 1, 3-11.
3. Abdullayev J.I., Mamirov B.U. Bound states of the system of two fermions on the three-dimensional lattice. Journal of Physics: Conference series 697 (2016) 012022.

## ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПУТЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЕЙСТВИЯ ГРУППЫ

$$O(n-2, p-1, K)$$

<sup>1</sup>Муминов К.К., <sup>2</sup>Гаффоров Р.А.

<sup>1</sup>Национальный университет Узбекистана, Узбекистан

e-mail: m.muminov@rambler.ru

<sup>2</sup>Ферганский государственный университет, Узбекистан

e-mail: gafforov.rahmatjon@mail.ru

Пусть  $X = K^n$  -  $n$ -мерное линейное пространство над полем  $K$ , где  $K$  есть поле действительных чисел  $R$ , либо поле комплексных чисел  $C$ . Через  $GL(n, K)$  обозначим группу всех обратимых линейных преобразований пространства  $X$ . Действие  $g \in GL(n, K)$  в  $K^n$  есть обычное умножение  $n \times n$  матрицы  $g$  на вектор - столбец  $\vec{x}$  (обозначение  $g\vec{x}$ ). Через  $I$  обозначается интервал  $(a, b)$  из  $R$ .  $I$ -путем в  $X$  называется вектор - функции  $\vec{x} : I \rightarrow K^n$ ,  $\vec{x}(t) = \{x_j\}_{j=1}^n$ , у которой все координатные отображения  $x_j : I \rightarrow K$  являются бесконечно дифференцируемыми функциями.

Для каждого  $I$ -пути  $\vec{x}(t) = \{x_j\}_{j=1}^n$  через  $M(\vec{x})(t)$  обозначим  $n \times n$ -матрицу  $(x_i^{(j-1)}(t))_{i,j=1}^n$ , где  $j$ -ый столбец имеет координаты  $x_i^{(j-1)}(t)$ ,  $x_i^{(0)}(t) = x_i(t)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ .  $I$ -путь называется сильно регулярным, если определитель  $\det M(\vec{x})(t)$  не равен нулю при всех  $t \in I$ .

Пусть  $G$  - подгруппа группы  $GL(n, K)$ . Два  $I$ -пути  $\vec{x}(t)$  и  $\vec{y}(t)$  называются эквивалентными, если существует такой элемент  $g \in G$ , что  $\vec{y}(t) = g\vec{x}(t)$  для всех чисел  $t \in I$ .

Рассмотрим псевдоортогональную группу

$$O(n, p, K) = \{g \in GL(n, K) : g^T J g = J\},$$

где  $g^T$  есть транспонированная матрица для  $g$ , а  $J = \{e_{ij}\}_{i,j=1}^n$ , есть  $n \times n$  матрица, у которой  $e_{jj} = 1$  при  $j = 1, \dots, p$ ,  $e_{jj} = -1$  при  $j = p+1, \dots, n$ ,  $e_{ik} = 0$  при  $i \neq k$ .

Псевдоортогональную группу  $O(n, p, K)$  можно определить также, используя следующее псевдоортогональное произведение двух векторов  $\vec{x}(t) = \{x_j\}_{j=1}^n$ ,  $\vec{y}(t) = \{y_j\}_{j=1}^n \in K^n$ ,

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - \dots - x_n y_n.$$

Известно (см., например [3]), что верно равенство  $O(n, p, K) = \{g \in GL(n, K) : \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle g\vec{x}, g\vec{y} \rangle\}$  для всех  $\vec{x}, \vec{y} \in K^n$ .

Следующая теорема дает эффективный метод для проверки  $O(n, p, K)$ -эквивалентности путей в пространстве  $K^n$  ([2], теорема 2).

**Теорема 1.** Два сильно регулярных  $I$ -пути  $\vec{x}(t)$  и  $\vec{y}(t)$  являются  $O(n, p, K)$ -эквивалентными в том и только в том случае, когда

$$\langle \vec{x}^{(j-1)}(t), \vec{x}^{(j-1)}(t) \rangle = \langle \vec{y}^{(j-1)}(t), \vec{y}^{(j-1)}(t) \rangle$$

для всех  $t \in I$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Заметим, что группа  $O(n, p, K)$  содержит подгруппу, изоморфную  $O(n-2, p-1, K)$ . Эта подгруппа выделяется условием сохранения координат  $x_1$  и  $x_n$ . Остальные координаты подвергаются произвольному псевдоортогональному преобразованию на  $O(n-2, p-1, K)$ .

Обозначим через  $\vec{e}_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$  координатный базис в  $R^n$ , где 1 стоит на  $i$ -ом месте  $i = 1, \dots, n$ . Положим

$$U_n = \{\alpha \vec{e}_1 : \alpha \in R\}$$

$$V_n = \text{Lin}(\{\vec{e}_i\}_{i=2}^{n-1}) = \left\{ \sum_{i=2}^{n-1} \alpha_i \vec{e}_i : \alpha_i \in R, i = 2, \dots, n-2 \right\}$$

$$W_n = \{\alpha \vec{e}_n : \alpha \in R\}$$

Пусть  $G = O(n-2, p-1, R)$  есть множество всех таких  $g = (g_{ij})_{i,j=1}^n \in GL(n, R)$  для которых

$g(U_n) = U_n$ ,  $g(V_n) = V_n$ ,  $g(W_n) = W_n$  и сужение  $g|_{V_n}$  на  $V_n$  есть элемент псевдоортогональной группы

$O(n-2, p-1, R)$ . Ясно, что  $G = O(n-2, p-1, R)$  есть подгруппа в  $GL(n, R)$ .

$I$ -путь  $\vec{x}(t) = \{x_j\}_{j=1}^n$  называют регулярным, если верно неравенство  $\det M_{n-2}(\vec{x}(t)) \neq 0$  для всех  $t \in I$ , где  $M_{n-2}(\vec{x}(t)) = (x_j^{(i)}(t))_{i=0,1,\dots,n-3, j=2,\dots,n-1}$ ,  $x_j^{(0)}(t) = x_j(t)$ ,  $j = 2, \dots, n-1$ .

Следующая теорема дает критерий эквивалентности регулярных путей относительно действия группы

$G = O(n-2, p-1, K)$  в пространстве  $K^n$ .

**Теорема 2.** Два регулярных  $I$ -пути  $\vec{x}(t)$  и  $\vec{y}(t)$  являются эквивалентными  $O(n-2, p-1, K)$ , тогда и только тогда, когда

$$x_1(t) = y_1(t), \quad x_n(t) = y_n(t)$$

и выполнены равенство

$$(x_2^{(k)}(t))^2 + (x_3^{(k)}(t))^2 + \dots + (x_p^{(k)}(t))^2 - (x_{p+1}^{(k)}(t))^2 - \dots - (x_{n-1}^{(k)}(t))^2 =$$

$$(y_2^{(k)}(t))^2 + (y_3^{(k)}(t))^2 + \dots + (y_p^{(k)}(t))^2 - (y_{p+1}^{(k)}(t))^2 - \dots - (y_{n-1}^{(k)}(t))^2$$

для всех  $t \in I$ ,  $k = 1, \dots, n-2$ .

## Литература

1. Weyl Hermann The Classical Groups: Their Invariants and Representation. Princeton University. 1997.
2. Арипов Р.Г., Хаджиев Дж. Полная система глобальных дифференциальных и интегральных кривой в евклидовой геометрии, Известия ВУЗов Математика, по 7, 2007, С.3-15.
3. Муминов К.К. Эквивалентность путей относительно действия симплектической группы, Известия ВУЗов Математика, по 7, 2002, С.27-38.
4. Муминов К.К. Эквивалентность кривых относительно действия симплектической группы, Известия ВУЗов Математика, по 6, 2009, С.31-36.
5. Муминов К.К., Чилин В.И. Эквивалентность путей в геометрии Галилея, Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры, Том 144, 2018, С.3-16.
6. Розенфельд Б.А. Неевклидовы пространства, М.: Наука, 1969.

**$(\alpha, \psi)$ -РЕГУЛЯРНЫЕ КОМПАКТЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ  $\mathbb{C}$ .**<sup>1</sup> Нарзиллаев Н.Х., <sup>2</sup>Эшдавлатова С.Э.<sup>1</sup> Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

e-mail: n.narzillaev@nuu.uz

<sup>2</sup> Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

e-mail: sevaraeshdavlatova@gmail.com

Пусть  $K \subset \mathbb{C}$  компактное множество и  $\psi(z)$  некоторая ограниченная функция на  $K$ . Фиксируем число  $\alpha > 0$  и определяем  $\alpha$ -экстремальные функции с ростом  $\alpha \ln^+ |z|$  [1]. Рассмотрим следующую обобщению класса Лелона в комплексной плоскости  $\mathbb{C}$

$$\mathcal{L}_\alpha(\mathbb{C}) := \{u(z) \in psh(\mathbb{C}) : u(z) \leq C_u + \alpha \ln^+ |z|, z \in \mathbb{C}\}.$$

Положим

$$\mathcal{L}_\alpha(K, \psi) := \{u(z) \in \mathcal{L}_\alpha(\mathbb{C}), u(z)|_K \leq \psi(z)\}.$$

**Определение 1.** Функция  $V_\alpha^*(z, K, \psi) = \overline{\lim}_{w \rightarrow z} V_\alpha(w, K, \psi)$  называется  $\alpha$ -экстремальной функцией Грина компакта  $K$  относительно  $\psi(z)$ , где

$$V_\alpha(z, K, \psi) := \sup\{u(z) : u(z) \in L_\alpha(K, \psi)\}, z \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим следующее множество чисел,

$$\Lambda_{z_0} = \{\alpha > 0 : \exists B(z_0, r) : V_\alpha^*(z_0, K \cap B, \psi) \geq \psi(z_0)\}.$$

**Определение 2.** Компакт  $K$  называется локально  $(\psi, \alpha)$ -регулярно в точке  $z_0 \in K$ , если существует такое число  $r > 0$ , что  $V_\alpha^*(z_0, K \cap \bar{B}(z_0, r), \psi) = \psi(z_0)$ .

**Определение 3.** Множество  $E \subset \mathbb{C}$  называется разреженным в точке  $z_0 \in \mathbb{C}$ , если либо  $z_0 \notin \bar{E}$ , либо существует окрестность  $U \ni z_0$  и такая функция  $u(z) \in sh(U)$ , что

$$\overline{\lim}_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in E \setminus \{z_0\}}} u(z) < u(z_0).$$

Таким образом, если множество  $E$  не является разреженным в точке  $z_0$ , то для любой субгармонической в окрестности  $z_0$  функции  $u(z)$  выполняются соотношения

$$\overline{\lim}_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in E \setminus \{z_0\}}} u(z) = \overline{\lim}_{z \rightarrow z_0} u(z) = u(z_0).$$

**Теорема 1.** Пусть  $\psi \in C(K)$ . Точка  $z_0 \in K$  является локально  $(\psi, \alpha)$ -иррегулярной точкой для  $K$ , тогда и только тогда, когда в точке  $z_0$  компакт  $K$  является разреженным.

Отметим, что в пространстве  $\mathbb{C}^n$  необходимое условие теоремы 1, вообще говоря, не верна [2].

**Литература**

1. Alan M.A. Weighted regularity and two problems of Sadullaev on weighted regularity, Springer, Complex Analysis and its Synergies 5:8, 2019. <https://doi.org/10.1007/s40627-019-0026-4>
2. Sadullaev A. Plurisubharmonic measures and capacities on complex manifolds. Usp. Mat. Nauk 36, No.4, 53-105. Engl. transl.: Russ. Math. Surv. 36, No.4, 61-119 (1981), Zb1.475.31006

## ПРОГНОСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИАГНОСТИКЕ БОЛЕЗНИ ОСТЕОДИСТРОФИИ У КОРОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЧЕТКОЕ МНОЖЕСТВО

<sup>1</sup>Примова Х.А., <sup>2</sup> Сафарова Л.У.

<sup>1</sup> Самаркандский филиала ТУИТ, Узбекистан

*e-mail: xolida\_primova@mail.ru*

<sup>2</sup> ТУИТ имени Мухаммада Аль-Хорезми, Республика Узбекистан

*e-mail: lola.safarova.81@inbox.ru*

### Введение

В настоящее время использование математических методов с использованием новых информационных и коммуникационных технологий является важной проблемой в прогнозировании и ветеринарной диагностике. Значительные результаты были достигнуты в улучшении систем компьютерной диагностики, улучшении качества превосходного лечения, улучшении раннего выявления видов и причин заболеваний, а также целевых методов лечения. В то же время существует необходимость в улучшении этих систем, которые позволяют проводить начальную диагностику склонности человека к болезням.

Результаты исследования показывают, что преимущество заболевания это нарушением обмена веществ в основном представляют собой углеводы и жиры и белки, преимущество заболевания это нарушений жиров, нарушений минеральных веществ вызванные дефицитом или избытком микроэлементов, обмен витаминов.

Возможное развитие процесса обусловлено длительным кормлением животных в выращенных районах с повышенной кислотностью. Кормлением животных с недостатком минералов (макро и микроэлементов) в рационе, менее 90-20г белка на 1 кг пищи и соотношением сахара и белка 0,8:1 нарушения синтеза, гиперкетонемия, кетонурия, кетонлактация, снижение количества гемоглобина, эритроцитов, общего белка, азота и мочевины в крови. Содержание в рационе наиболее концентрированного типа жирные и фосфорные кислоты, много крови (интоксикация), увеличение количества кетонов в клетках крови, вызывает нарушение образования желчи и выделительной функции печени и уменьшение запасов гликогена [2,3].

Превышение соотношения белка и сахара к белку в рационе коров от 0,7 до 0,79 и развитие дистрофических изменений в печени животных при отсутствии микроэлементов, таких как медь, кобальт, цинк, марганец, а также развиваются заболевания как эндогенный рахит, вторичная остеодистрофия, послеродовая гипокальциемия и нарушения обмена веществ [1,2].

Многие ученые посвятили свои исследования изучению кетоза, алиментарной и вторичной остеодистрофии у животных, нарушениям витаминного и минерального обмена и пришли к разным выводам об этиологии, механизмах развития, диагностике, лечении и профилактике вторичной остеодистрофии у молочных коров [2,3,6].

Хотя литературы о распространенности вторичной остеодистрофии у крупного рогатого скота, ее причинах, свойство развития, клинических признаках, диагностика, лечения и групповых профилактических мерах достаточно. Распространение заболевания у привезенных коров новых хозяйств в условиях республики, причины, особенности развития, клинические признаки, диагностика, лечения и меры групповой профилактики оказалось минимум данных [2].

Распространенность вторичной остеодистрофии среди привезенных и местных коров в хозяйствах крупного рогатого скота, экономический недостаток, причины, значение факторов питания в их происхождении, механизмы развития, раннее выявление, разработка и внедрение эффективных методов лечения и профилактики заболеваний является одной из



наиболее актуальных проблем, на сегодня перед ветеринарной наукой и практикой [2,4,5].

Основное заболевание диагностируется в соответствии с принятой клинической практикой. На основании предоставленной информации составляется список диагнозов, и мы присваиваем числовое значение каждому диагнозу. При установлении диагноза вторичной остеодистрофии мы учитываем следующие основные параметры, измеряемые в лаборатории:

$x_1$ -Температура °C

$x_2$ -Пульс, в одну минуту

$x_3$ -Дыхание, в одну минуту

$x_4$ -Руминация, в две минуты

$x_5$ - Число эритроцитов млн/мкл

$x_6$ -Гемоглобин, г/л методом (Гемометром Сали)

$x_7$ - Общий белок, г/л (методом Рефрактометрии)

$x_8$ - Общий кальций, ммоль/л (метод Вигев. Каракашова )

$x_9$ - Органический фосфор ммоль/л (метод Пульса В.Ф. Кромыслова, в модификации Л.А Кудряцева)

$x_{10}$ - Глюкоза, ммоль/л (цветная реакция с ортотолуидином )

$x_{11}$ - Резервная щелочь ( $CO_2$ ) об % (методом И.П Кондрахина)

$x_{12}$ -Медь ммоль/л

$x_{13}$ -Кобальт ммоль/л

$x_{14}$ - Марганец ммоль/л

$x_{15}$ - Цинк ммоль/л

$x_{16}$ - Количества инфузории в рубце 1000/мл

$x_{17}$ - Состояние рубцового жидкости ( Раметром) [2].

Рассматривается процесс построения нечетко-логической модели оценки и прогнозирования на основе исследованных данных. В общем случае требуется построение модели следующего вида, состоящей из выводов о нечетких правил [6-7]:

$$\bigcup_{p=1}^{k_j} \left( \bigcap_{i=1}^n x_i = a_{i,jp} - w_{jp} \right) \rightarrow y_j = v_{j,0} + v_{j,1}x_1 + \dots + v_{j,n}x_n. \quad (1)$$

$y_n$ -коэффициенты оценки и  $x_n$  -входные данные. Выводы нечетких правил в процессе построения модели.

$$V = (v_{1,0}, v_{2,0}, \dots, v_{m,0}, v_{1,1}, v_{2,1}, \dots, v_{m,1}, \dots, v_{1,n}, v_{2,n}, \dots, v_{m,n}, \dots, v_{1,n}, v_{2,n}, \dots, v_{m,n}),$$

$$i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$$

найти значения коэффициентов так, чтобы минимизировалось следующее выражение:

$$\sum_{r=\overline{1, M}} (y_r - y_r^f)^2 \rightarrow \min \quad (2)$$

где  $y_r^f$ - Вывод входных нечетких правил на базе знаний  $V$  входных данных  $r$ -строки ( $X_r$ )-выбора

На основании знаний исследования, из множества возможных, была выбрана следующая область признаков, которые регулярно представляли изучаемое явление:  $Y$ -распознавание болезни

На основе обработки экспертных данных получена логико-лингвистическая модель:

В процессе принятия решений вам часто приходится сталкиваться с проблемами, которые имеют многофакторный характер. В этом случае набор критериев обычно имеет

неравные значения характера. Модели прогнозирования используются для объединения набора показателей эффективности (конкретных целей) в единую оценку эффективности (общей цели). То есть модель прогнозирования представляет собой механизм для преобразования

### Вывод

Таким образом, нечеткая модель была создана с использованием теории нечетких множеств.

## Литература

1. Юнкеров, В.И. Математико-статистическая обработка данных медицинских исследований, 3-е изд., доп. - СПб.: ВМедА, 2011. - 318 с.
2. Эшбуриев С.Б. Этиопатогенез и профилактика вторичной остеодинтрофии коров, Кандидатская диссертация 2011, Самарканд, 122 с.
3. Лайшев К. А., Прокудин А. В., Спасивцев А. В. Прогностическое моделирование эпизоотической ситуации с применением нечетких множеств //Проблемы ветеринарной санитарии, гигиены и экологии. 2016. No3.- С.87-92. ISSN 2075-1818.
4. Лайшев К.А., Спасивцев А.В., Шалаев И.М. Нечеткие множества в эпизоотологическом прогнозировании //Актуальные проблемы инфекционной патологии и иммунологии животных, Всерос. науч.-исслед. ин-т экспер. ветеринарии. - М, 2006. -С. 88-89.
5. Заде Л.А Роль мягких вычислений и нечеткой логики в понимании, конструировании и развитии информационных интеллектуальных систем, Новости Искусственного Интеллекта. 2001.-No2-3. -С.7-11.
6. Primova H.A., Sakiyev T.R. and Nabiyeva S.S. Development of medical information systems// Journal of Physics: Conference Series. 1441 (2020) 012160 IOP Publishing doi:10.1088/1742-6596/1441/1/012160 (Scopus) <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1441/1/012160>

## ПОЛНОЕ ОПИСАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ МЕР ГИББСА ДЛЯ НС-МОДЕЛИ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ ПОРЯДКА ДВА

<sup>1</sup> Уктамалиева Дилобар Отабек кизи., Уктамалиев Икромжон Кахрамон  
угли.

<sup>1</sup> Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан,  
e-mail: uktamaliyevadilobar98@gmail.ru

<sup>2</sup> Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан,  
e-mail: ikromjon99ikromjon@mail.ru

В данной работе изучаются периодические меры Гиббса для НС модели с двумя состояниями на дереве Кэли. Известно, что на дереве Кэли произвольного порядка существуют ровно три  $G_k^{(2)}$ -периодические меры Гиббса. Найдены явные виды  $G_k^{(2)}$ -периодических (не трансляционно-инвариантных) мер Гиббса на дереве Кэли порядка два.

Дерево Кэли  $\tau^k = (V, L)$  порядка  $k \geq 1$  – бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно  $k + 1$  ребер. Здесь  $V$  есть множество вершин  $\tau^k$ ,  $L$  – множество его ребер. Пусть  $d(x, y)$ ,  $x, y \in V$  есть расстояние между вершинами  $x, y$ , т.е. количество ребер кратчайшей пути, соединяющей  $x$  и  $y$ . Если  $x$  и  $y$  являются вершинами ребра  $l \in L$ , то они называются *ближайшими соседями вершины* и обозначаются как  $l = \langle x, y \rangle$ .

Известно [1], что  $\tau^k$  можно представить как  $G_k$  – свободное произведение  $k + 1$  циклических групп второго порядка с образующими  $a_1, \dots, a_{k+1}$ , соответственно.

Для фиксированного  $x^0 \in V$  обозначим

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, V_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\}.$$

Для  $x \in W_n$  обозначим

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}.$$

Пусть  $\Phi = \{0, 1\}$  и  $\sigma \in \Phi^V$  – конфигурация, то есть  $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi : x \in V\}$ , где  $\sigma(x) = 1$  означает, что вершина  $x$  на дереве Кэли занята, а  $\sigma(x) = 0$  означает, что она свободная.

Конфигурация  $\sigma$  называется допустимой, если  $\sigma(x)\sigma(y) = 0$  для любых соседних  $\langle x, y \rangle$  из  $V$  и обозначим множество таких конфигураций через  $\Omega$ .

Гамильтониан НС-модели определяется по формуле

$$H(\sigma) = J \sum_{x \in V} \sigma(x), \quad \sigma \in \Omega, \quad J \in R.$$

Понятие меры Гиббса вводится стандартным образом (см. например, [2]-[3]). Известно [4], что каждой мере Гиббса для НС-модели на дереве Кэли можно сопоставлять совокупность величин  $z = \{z_x, x \in G_k\}$ , удовлетворяющих

$$z_x = \prod_{y \in S(x)} (1 + \lambda z_y)^{-1}, \quad (1)$$

где  $\lambda = e^{-J\beta} > 0$  – параметр и  $\beta = \frac{1}{T}$ ,  $T$  – температура.

Пусть  $\widehat{G}_k$  являясь подгруппой группы  $G_k$ .

**Определение 1.** Совокупность величин  $z = \{z_x, x \in G_k\}$  называется  $\widehat{G}_k$ -периодической, если  $z_{yx} = z_x$  для  $\forall x \in G_k, y \in \widehat{G}_k$ .

$G_k$ -периодические совокупности называются трансляционно-инвариантными.

**Определение 2.** Мера  $\mu$  называется  $\widehat{G}_k$ -периодической, если она соответствует  $\widehat{G}_k$ -периодической совокупности величин  $z$ .

Заметим, что мера  $\mu$  является трансляционно-инвариантной, если она соответствует  $G_k$ -периодической совокупности величин  $z$ .

Пусть  $G_k^{(2)}$  – подгруппа группы  $G_k$ , состоящая из слов четной длины в  $G_k$ , т.е.

$$G_k^{(2)} = \{x \in G_k : |x| - \text{четное число}\}.$$

Рассмотрим фактор-группу  $G_k/G_k^{(2)} = \{G_k^{(2)}, G_k \setminus G_k^{(2)}\}$ , где

$$G_k^{(2)} = \{x \in G_k : |x| - \text{четно}\}$$

$$G_k \setminus G_k^{(2)} = \{x \in G_k : |x| - \text{нечетно}\}.$$

**Теорема 1.** [5] Для любого нормального делителя  $\mathcal{G} \subset G_k$  всякая  $\mathcal{G}$ -периодическая мера Гиббса НС-модели является либо трансляционно-инвариантной, либо  $G_k^{(2)}$ -периодической мерой Гиббса.

Теперь дадим полное описание  $G_k^{(2)}$ -периодических мер Гиббса на дереве Кэли порядка два. Они соответствуют совокупности величин

$$z_x = \begin{cases} z_1, & \text{если } x \in G_k^{(2)}, \\ z_2, & \text{если } x \in G_k \setminus G_k^{(2)}. \end{cases}$$

Отсюда, в силу (1) имеем

$$\begin{cases} z_1 = \frac{1}{(1+\lambda z_2)^k} \\ z_2 = \frac{1}{(1+\lambda z_1)^k}. \end{cases} \quad (2)$$

Известна следующая теорема.

**Теорема 2.**[4] Для НС модели при

$$\lambda \leq \lambda_{cr}(k) = (k-1)^{-1} \left( \frac{k}{k-1} \right)^k.$$

существует ровно одна  $G_k^{(2)}$ -периодическая мера Гиббса  $\mu_0$ , которая совпадает с единственной трансляционно-инвариантной мерой Гиббса и при  $\lambda > \lambda_{cr}$  существуют ровно три  $G_k^{(2)}$ -периодические меры Гиббса  $\mu_0, \mu_1, \mu_2$ , где меры  $\mu_1$  и  $\mu_2$  являются  $G_k^{(2)}$ -периодическими (не трансляционно-инвариантными).

Следующая теорема дает полное описание всех  $G_k^{(2)}$ -периодических (не трансляционно-инвариантных) мер Гиббса при  $k = 2$ .

**Теорема 3.** Пусть  $k = 2$ . Тогда для НС-модели при  $\lambda \leq \lambda_{cr}(2) = 4$  существует ровно одна  $G_k^{(2)}$ -периодическая мера Гиббса  $\mu_0$ , которая совпадает с единственной трансляционно-инвариантной мерой Гиббса и при  $\lambda > 4$  существуют ровно три  $G_k^{(2)}$ -периодические меры Гиббса  $\mu_0, \mu_1$  и  $\mu_2$ , где меры  $\mu_1$  и  $\mu_2$  являются  $G_k^{(2)}$ -периодическими (не трансляционно-инвариантными) мерами Гиббса и соответствуют решениям  $(z_1, z_2)$  и  $(z_2, z_1)$  системы уравнения (2) при  $k = 2$ . Здесь

$$z_1 = \left( \frac{2}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}} \right)^2, \quad z_2 = \left( \frac{2}{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}} \right)^2.$$

**Замечание.** В работе [6] дан явный вид для  $\mu_0$  на дереве Кэли произвольного порядка и изучена крайность этой меры.

## Литература

1. Ганиходжаев Н.Н., Розиков У.А. Описание периодических крайних гиббсовских мер некоторых решеточных моделей на дереве Кэли, ТМФ, 111: 1, 1997, 109-117.
2. Георги Х.-О. Гиббсовские меры и фазовые переходы. Москва. "Мир" 1992. с.624.
3. Rozikov U. A. Gibbs Measures on Cayley Trees, World Sci., Singapore 2013.
4. Suhov Yu.M., Rozikov U.A. A hard-core model on a Cayley tree: an example of a loss network, Queueing Systems, 46, 2004, p. 197-212.
5. Розиков У. А., Хакимов Р. М. Условие единственности слабопериодической гиббсовской меры для модели жесткой сердцевины. Теор. Мат. Физ. — 2012. — 173, № 1. — С. 60–70.
6. Розиков У. А., Хакимов Р. М. Крайность трансляционно-инвариантной меры Гиббса для НС-модели на дереве Кэли. Бюллетень Института математики. — 2019. — № 2. — С. 17–22.

## 5. APPLIED MATHEMATICS AND STATISTICS

### TEAM FORMATION BASED ON EXPERTISE USING PREFERENCE SIMILARITY NETWORK CLUSTERING CONSENSUS GROUP DECISION MAKING MODEL

<sup>1</sup>Ahmad Salehin Nurul Fadhlila, <sup>2</sup>Kamis Nor Hanimah

<sup>1</sup> Faculty of Computer and Mathematical Sciences, Universiti Teknologi MARA (UiTM),  
Shah Alam, Selangor, Malaysia  
e-mail: adela.saipol@yahoo.com

<sup>2</sup> Faculty of Computer and Mathematical Sciences, Universiti Teknologi MARA (UiTM),  
Shah Alam, Selangor, Malaysia,  
e-mail: norhanimah@tmsk.uitm.edu.my

In recent years, the integration of notions from Social Network Analysis (SNA) into consensus group decision-making's area of study is rapidly increased. One of the feasible approaches is Preference Similarity Network Clustering Consensus Group Decision Making model. We utilized this approach in the formation of teams of lecturers based on their expertise. The lecturers are considered as experts in the university, which carry responsibilities and work tasks related to the teaching and learning, research, students' affair, administration and community. The utilized approach is able to measure the similarity of expertise between lecturers, visualize the lecturers' network, group the lecturers based on their similarity of expertise and measure the group consensus level. These results provide essential information to the university's top management on how to allocate work tasks based on the lecturers' expertise. This situation might help the lecturers to work together with colleagues, who have similar skills and knowledge. Indirectly, the quality of works is improved because it handles by the right person. This is the first effort of applying the Preference Similarity Network Clustering Consensus Group Decision Making model in real life situation. Generally, this technique can be used as an alternative tool in solving decision-making problems, such as in marketing, politics, education and many more.

### A ROBUST RIDGE REGRESSION APPROACH FOR THE COMBINED MULTICOLLINEARITY-OUTLIER PROBLEM

<sup>1</sup>Aliah Natasha Affindi, <sup>2</sup>Sanizah Ahmad

<sup>1</sup> Faculty of Computer and Mathematical Sciences, Universiti Teknologi MARA,  
e-mail: aliahnatashaaffindi@gmail.com

<sup>2</sup> Faculty of Computer and Mathematical Sciences, Universiti Teknologi MARA,  
e-mail: sanizah@tmsk.uitm.edu.my

The common method used for estimating parameters in linear regression model is ordinary least squares (OLS) since it gives the best parameter estimates when all assumptions are met. In reality, these assumptions are sometimes not adhered since the presence of combined multicollinearity and outliers often occur in regression data. When this is the case, analysing regression model may severely produce misleading results. To overcome this issue, various robust parameter estimates were injected into ridge regression method to produce robust ridge regression models. Therefore, the aim of this study is to investigate on the performance of selected robust ridge estimators which include S, M, MM and Least Trimmed Squares (LTS) estimators using simulation study. For the simulation design, Laplace and Cauchy distributions were used to introduce outliers in the simulated data of sample sizes  $n=25, 50$  and  $100$  with various level of multicollinearity ( $\rho = 0.50, 0.90, 0.95, 0.98, 0.99$ ). Root Mean Square Error and Bias are used as the criterion measure to examine the performance for the estimators. The

finding of this study indicates that Ridge LTS is the best robust ridge estimator in handling data containing both multicollinearity and outliers. Applications of the estimators to two benchmark real life datasets provide similar results.

## AN EVASION DIFFERENTIAL GAME OF ONE EVADER AGAINST TWO PURSUERS

<sup>1</sup>Alias Idham Arif, <sup>2</sup>Salleh Yusra, <sup>3</sup>Ibragimov Gafurjan

<sup>1</sup> *Mathematics Department Faculty of Science Universiti Putra Malaysia 43400 UPM Serdang Selangor Malaysia,*

e-mail: idham\_aa@upm.edu.my

<sup>2</sup> *Institute for Mathematical Research Universiti Putra Malaysia 43400 UPM Serdang Selangor Malaysia,*

e-mail: yusra.math@gmail.com

<sup>3</sup> *Department of Mathematics Faculty of Science Universiti Putra Malaysia 43400 UPM Serdang Selangor Malaysia,*

e-mail: ibragimov@upm.edu.my

The evasion differential game of one evader from two pursuers in plane  $R^2$  is studied with coordinate-wise integral constraints on the control functions of players. Evasion is said to be possible if the position of the evader does not coincide with the position of each of the pursuers at all times. A sufficient condition of evasion is obtained and an explicit strategy for the evader is constructed where the evader can move in the strip of any small width which contains a vertical  $\eta$ -axis.

**Problem.** *An evasion differential game of two pursuers  $P_1, P_2$  and one evader  $E$  in plane  $R^2$  with coordinate-wise integral constraints on controls of the players is considered. Positions of  $P_1, P_2$  and  $E$  are denoted by  $x_1, x_2$  and  $y$  respectively, and control parameters  $P_1, P_2$  and  $E$  are denoted by  $u_1, u_2$  and  $v$  respectively. Let  $x_1 = (x_{11}, x_{12}), x_2 = (x_{21}, x_{22}), y = (y_1, y_2), x_1^0 = (x_{11}(0), x_{12}(0)), x_2^0 = (x_{21}(0), x_{22}(0)), y_0 = (y_1(0), y_2(0)), u_1 = (u_{11}, u_{12}), u_2 = (u_{21}, u_{22}), v = (v_1, v_2)$ . The game is described by the following differential equations:*

$$\begin{aligned} P_1 : x_{11} &= u_{11}, & x_{11}(0) &= x_{11}^0, \\ x_{12} &= u_{12}, & x_{12}(0) &= x_{12}^0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} P_2 : x_{21} &= u_{21}, & x_{21}(0) &= x_{21}^0, \\ x_{22} &= u_{22}, & x_{22}(0) &= x_{22}^0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} E : y_1 &= v_1, & y_1(0) &= y_1^0, \\ y_2 &= v_2, & y_2(0) &= y_2^0, \end{aligned} \quad (3)$$

where  $x_1^0 \neq y_0, x_2^0 \neq y_0$  and  $x_1, x_2, y, x_1^0, x_2^0, y_0, u_1, u_2, v \in R^2$ . The problem of study is to find conditions for all initial positions  $x_1^0, x_2^0, y_0$  and parameters  $\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{21}, \rho_{22}, \sigma_1, \sigma_2$ , and construct admissible strategy for evader which guarantee evasion in the game (1)-(3).

The obtained result is as follows:

**Theorem 1.** *If  $\rho_1^2 \geq \rho_{11}^2 + \rho_{21}^2$  and  $\sigma_2^2 > \rho_{12}^2 + \rho_{22}^2$ , then evasion is possible.*

**THE EFFECT OF MARANGONI CONVECTION ON  $Cu-Al_2O_3$ -WATER  
HYBRID NANOFLUID OVER A STRETCHING SURFACE WITH  
CONVECTION BOUNDARY CONDITION**

<sup>1</sup>Ali Rehman, <sup>2</sup>Zabidin Salleh, <sup>3</sup>Taza Gul

<sup>1,2</sup> *Department of Mathematics, Faculty of Ocean Engineering Technology and Informatics,  
Universiti Malaysia Terengganu, 21030 Kuala Nerus, Terengganu, Malaysia.,*

e-mail: alirehmanhd8@gmail.com, zabidin@umt.edu.my

<sup>3</sup> *Department of Mathematics, City University of Science and Information Technology,  
Peshawar P/C, 25000, Pakistan.*

e-mail: tazagul@cusit.edu.pk

The purpose of this research paper is to study the analytical solution of unsteady  $Cu-Al_2O_3$ -water hybrid nanofluid in the presences of magnetic field over a stretching surface. By using similarity transformation, the major partial differential equation is converted to a set of nonlinear ordinary differential equation. The analytical method Optimal Homotopy Analysis Method (OHAM) is used to find the approximate analytical solution of the nonlinear ordinary differential equation. The BVPh 2.0 package function of mathematica is used to obtain the numerical results. The results of important parameter such as magnetic parameter, Prandtl number, Eckert number and Marangoni convection parameter for both velocity and temperature profiles are plotted and discussed. The BVPh 2.0 package is used to obtain the convergences of the problem up to 25 iteration. The skin friction coefficient and Nusselt number is explained in table form.

**CENTRAL LIMIT THEOREM FOR CIRCLE MAPS WITH A BREAK AND  
EXTERNAL NOISE**

**Aliyev Abdurakhmon**

*Uzbekistan Academy of Sciences, V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent,  
Uzbekistan*

e-mail: aliyev95.uz@mail.ru

Dynamical systems with external noise are investigated by several authors (see for instants [1]-[4]). The papers of [1], [2] considered heuristically a renormalization theory for weak Gaussian noise perturbing one dimensional maps at the accumulation of period doubling. The main result in those papers was that after appropriately rescaling space and time, the effective noise of this renormalized system satisfies some scaling relations. In work of O.Diaz-Espinosa and R.de la Llave, central limit theorem for critical circle dynamics with external weak noise is proved by using renormalization (see [4]).

Let  $T \in C^2(S^1)$  be circle map and  $(\xi_n)$  be a sequence of independent random variables (defined in some probability space  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ), with  $p > 2$  finite moments satisfying following conditions:

- $E\xi_n = 0$ ;
- $const \leq (E|\xi_n|^2)^{1/2} \leq (E|\xi_n|^p)^{1/p} \leq Const.$

We define the system

$$\bar{x}_n = T(\bar{x}_{n-1}) + \sigma_n \xi_n, \quad x_0 = x$$

$\sigma_n$  will be referred to as the "noise level" and

$$x_n = T(x_{n-1}), \quad x_0 = x.$$

The linearized effective noise is defined as

$$L_n(x) = \xi_n + \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k \prod_{j=k}^{n-1} T'(x_j), \quad x \in S^1.$$

Let  $\omega(x, \sigma)$  be the process defined by

$$\omega_n(x, \sigma_n) = \frac{\bar{x}_n - x_n}{\sigma_n \sqrt{\text{var}(L_n(x))}}. \quad (1)$$

In [4], authors proved central limit theorem for  $T$  is a critical point circle homeomorphism with golden mean rotation number and  $\xi_n$  satisfies above conditions.

In this paper we prove this theorem for  $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$ ,  $\varepsilon > 0$  circle homeomorphism with golden mean rotation number  $\rho = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  and a break point  $x_b$ .

**Theorem 1.** *Let  $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$ ,  $\varepsilon > 0$  circle homeomorphism with golden mean rotation number  $\rho = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  and a break point  $x_b$  and  $(\xi_n)$  be a sequence of independent random variables with  $p > 2$  finite moments satisfying following conditions:*

- $E\xi_n = 0$ ;
- $\text{const} \leq (E|\xi_n|^2)^{1/2} \leq (E|\xi_n|^p)^{1/p} \leq \text{Const}$ .

Then, for  $x = T^l(0)$ ,  $l \in N$  and any  $p > 2$ ,

There is a constant  $\gamma > 0$  such that if

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n n^\gamma = 0,$$

the process  $\omega_{q_n}(x, \sigma_{q_n})$  defined by (1) converge in distribution to the standard Gaussian.

There  $q_n$  is Fibonacci sequence.

## References

1. *B.Shraiman, C.E.Wayne, and P.C.Martin.* Scaling theory for noisy period-doubling transitions to chaos. Physical Review Letters, 46(14):935-939, 1981.
2. *J.Crutchfield, M.Nauenberg, and J.Rudnick.* Scaling for external noise at the onset of chaos. Physical Review Letters, 46(14):933-935, 1981.
3. *E. B. Vul, Y. G. Sinai, and K. M. Khanin.* Feigenbaum universality and the thermodynamic formalism. Russian Math. Surveys, 39(3):1-40, 1984. English Translation.
4. *O.Diaz-Espinosa and R.de la Llave.* Renormalization and central limit theorem for critical dynamical systems with weak external noise. JMD 1(3) 477-543 2007

## AN EFFICIENT ANALYTICAL APPROACH FOR NONLINEAR TIME-FRACTIONAL SWIFT-HOHENBERG EQUATION WITH CONFORMABLE OPERATOR

<sup>1</sup>Amryeen Rasha, <sup>1</sup>Harun Fatimah Noor, <sup>2</sup>Al-Smadi Mohammed, <sup>1</sup>Alias Azwani

<sup>1</sup> Pusat Pengajian Informatik & Matematik Gunaan, Universiti Malaysia Terengganu, 21030 Kuala Nerus, Terengganu, Malaysia,

e-mail: amryeenrasha86@gmail.com; fnoor\_hh@umt.edu.my; azwani.alias@umt.edu.my

<sup>2</sup> Department of Applied Science, Ajloun College, Al-Balqa Applied University, Ajloun 26816, Jordan,

e-mail: mhm.smadi@bau.edu.jo



The pivotal aim of this paper is to find the approximate solution for nonlinear time-fractional Swift-Hohenberg equations (FSHEs) with conformable fractional derivative using the conformable residual series method (CRSM). The proposed method is graceful amalgamations of conformable residual error functions and generalized Talyor series in the sense of conformable operator. The convergence analysis is considered to demonstrate the accuracy and efficiency of CRSM of the obtained approximate solutions for handling the FSHEs. Numerical simulation with graphical representation is also given to validate and illustrate the proposed method. The obtained results indicate that the CRS technique is effective, simple, and systematic for analyzing the behavior of nonlinear fractional partial differential equations arisen in many areas of physics and science.

In the present work, the approximate solution of the following nonlinear time-fractional Swift-Hohenberg equation (FSHE) with conformable fractional derivative is obtained using CRSM:

$$T_t^\alpha \omega(x, t) + \frac{\partial^4 \omega(x, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 \omega(x, t)}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial^3 \omega(x, t)}{\partial x^3} + (1 - \mu) \omega(x, t) - \gamma \omega^2(x, t) + \omega^3(x, t) = 0, \quad (1)$$

subject to the following initial condition

$$\omega(x, 0) = \omega_0(x), \quad (2)$$

where  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, 0 < \alpha \leq 1, \lambda, \gamma \in \mathbb{R}, \mu$  is a real bifurcation parameter,  $\omega_0(x)$  is given smooth function of  $x, \omega(x, t)$  is an unknown function that represents a scalar-valued function defined on the line or the plane. Here,  $T_t^\alpha$  denotes the time-conformable derivative of order  $\alpha$ . Also, we assume that the model (1) along with (2) has smooth unique solution over the domain of interest. Particularly, the FSHEs (1) and (2) for  $\alpha = 1$  reduces to the classic Swift-Hohenberg equation.

The CRSM is an effective analytical approach for obtaining fractional approximate solutions for different kinds of both linear and nonlinear fractional models arising in applied mathematics, engineering, and science without any hypothetical conditions over the proposed models [1-4].

Now, the definition of conformable fractional derivative is presented as follows:

**Definition 1.** [5] *Let  $f$  be  $n$ -differentiable at  $t > s$ , the conformable fractional derivative starting from  $s$  of a function  $f : [s, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  of order  $\alpha \in (n - 1, n], t > s$ , is defined by*

$$\frac{d^\alpha f}{dt^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f^{([\alpha]-1)}(t + \varepsilon(t - s)^{[\alpha]-\alpha}) - f^{([\alpha]-1)}(t)}{\varepsilon} \quad (3)$$

**Definition 2.** [6] *Let  $\partial^k \omega / \partial t^k$  and  $\partial^k \omega / \partial x^k, k = 1, 2, \dots, n - 1$ , be defined on  $I \times [s, \infty)$ , then the conformable time-fractional differential operator of order  $\alpha$  of a function  $\omega(x, t) : I \times [s, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  is defined by*

$$T_t^\alpha \omega(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\omega_t^{(n-1)}(x, t + \varepsilon(t - s)^{n-\alpha}) - \omega_t^{(n-1)}(x, t)}{\varepsilon}, \alpha \in (n - 1, n], t > s \geq 0. \quad (3)$$

**Theorem 1.** [7] *Let  $0 \leq n - 1 < \alpha \leq n$  and assume  $\omega(x, t) : I \times [t_0, t_0 + R^{1/\alpha}) \rightarrow \mathbb{R}$  can be expressed as the following multiple fractional PS about  $t = t_0$ :*

$$\omega(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k(x) (t - t_0)^{k\alpha}, \quad x \in I, t_0 \leq t < t_0 + R^{1/\alpha}.$$

*Let  $\omega(x, t)$  be continuous on  $I \times [t_0, t_0 + R^{1/\alpha})$  and  $\frac{\partial^{k\alpha} \omega(x, t)}{\partial t^{k\alpha}} = T_t^{k\alpha} \omega(x, t) \in C(t_0, t_0 + R^{1/\alpha})$ , for  $k = 1, 2, \dots$ , then the coefficients  $\omega_k(x)$  are given by  $\omega_k(x) = \frac{T_t^{k\alpha} \omega(x, t_0)}{\alpha^k (k)!}$ , where  $T_t^{k\alpha}$*

stands for sequential conformable time-fractional derivative of order  $k$  that is defined by  $T^{k\alpha}\omega(x, t) = \underbrace{T^\alpha \cdot T^\alpha \cdots T^\alpha}_{k\text{-times}} \omega(x, t)$ .

## References

1. *M. Al-Smadi, O. Abu Arqub, S. Hadid*. An attractive analytical technique for coupled system of fractional partial differential equations in shallow water waves with conformable derivative, *Communications in Theoretical Physics* 72(8), 2020, 085001.
2. *R. Amryeen, F.N. Harun, M. Al-Smadi, A. Alias*. Adaptation Of Residual Power Series Approach For Solving Time-Fractional Nonlinear Kline-Gordon Equations With Conformable Derivative, *Applied Mathematics and Information Sciences* 14(4), 2020, 563-575.
3. *M. Shqair, M. Al-Smadi, S. Momani, E. El-Zahar*. Adaptation of conformable residual power series scheme in solving nonlinear fractional quantum mechanics problems, *Applied Sciences* 10 (3), (2020), 890.
4. *O. Abu Arqub, M. Al-Smadi*. Fuzzy conformable fractional differential equations: novel extended approach and new numerical solutions, *Soft Computing* 24, (2020) 12501-12522.
5. *R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, M. Sababheh*. A new definition of fractional derivative, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 264, (2014) 65-70.
6. *T. Abdeljawad*. On conformable fractional calculus, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 279, (2015) 571-666.
7. *M. Al-Smadi, O. Abu Arqub, S. Momani*. Numerical computations of coupled fractional resonant Schrödinger equations arising in quantum mechanics under conformable fractional derivative sense, *Physica Scripta* 95(7), (2020) 075218.

## MATHEMATIC MODELING OF PROCESSES DESCRIBING BY DOUBLE NONLINEAR PARABOLIC EQUATION WITH CONVECTIVE TRANSFER AND DAMPING

<sup>1</sup>Aripov Mersaid, <sup>2</sup>Djabbarov Oybek, <sup>3</sup>Sadullaeva Shakhlo

<sup>1</sup> National university of Uzbekistan after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan,  
e-mail: mirsaidaripov@mail.ru

<sup>2</sup> Karshi State University, 180103, Uzbekistan, Karshi, Kuchabog St., 17,  
e-mail: oybekjabborov1987@mail.ru

<sup>3</sup> Tashkent University of Information Technologies, Yunus Abad, Amir Temur, 108, Tashkent,  
100084, Uzbekistan,  
e-mail: orif-sh@list.ru

**Abstract:** This paper discusses properties of mathematic modeling processes described by the Cauchy problem to the double nonlinear parabolic equation with convective transfer and damping

$$u_t = \operatorname{div}(u^{m-1} |\nabla u^k|^{p-2} \nabla u) - \operatorname{div}(v(t)u) - |\nabla u^m|^{p_1} u^{q_1}, \quad u(0, x) = u_0(x), \quad x \in R^N, \quad (1)$$

where  $m, k \geq 1, p \geq 2, n, p_1, q_1 \geq 0$  the given numerical parameters, characterizing nonlinear media the function  $v(t)$  is a speed of convective transfer,  $\nabla(\cdot) = \operatorname{grad}_x(\cdot)$ . These equations come from many fields such as physics, fluid mechanics et al. [1-4]. For instance, when  $q_1 = 0, m = 1, p = 2$ , (1) is the well-known Hamilton Jacobi equation. When  $p_1 = 0$  (1) is the well-known evolutionary p-Laplacian equation with the absorption term. When  $p = 2, p_1 = 0$  (1) is the well-known porous media equation with the absorption term.

Problem (1) for particular value of the numerical parameters  $m, k \geq 1, p \geq 2, n, p_1, q_1 \geq 0, v(t) = 0$  intensively studied by many authors (see for instance [1-4] and literature therein).

In this work we study the qualitative properties the following radial symmetric solution of the equation (1)

$$u(x, t) = (T + t)^{-\alpha} f(\xi), \quad \xi = \left| \int_0^t v(y) dy - x \right| (T + t)^{-\beta}, \quad T \geq 0, \quad \alpha, \beta > 0.$$

By a directly calculation, for  $f(\xi)$  we have

$$\xi^{1-N} \frac{d}{d\xi} (\xi^{N-1} f^{m-1} \left| \frac{df^k}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{df}{d\xi}) + \beta \xi \frac{df}{d\xi} + \alpha f - |f^m|^{p_1} f^{q_1} = 0, \quad (2)$$

$\alpha = (p - p_1)/p[(mp_1 + q_1 - (k(p - 2) + m)] + (k(p - 2) + m - 1)(p - p_1)$ ,  $\beta = [mp_1 + q_1 - (k(p - 2) + m)]/p[(mp_1 + q_1 - (k(p - 2) + m)] + (k(p - 2) + m - 1)(p - p_1)$ . In particular, the following theorems are proved.

**Theorem 1.** *Assume, that  $mp_1 + q_1 \geq k(p - 2) + m + (p - p_1)/N, k(p - 2) + m - 1 > 0, u_0(x) \leq u_+(0, x), x \in R^N$ . Then solution of the problem (1) globally solvable and for the weak solution of the problem (1) in  $Q$  the estimate  $u(t, x) \leq u_+(t, x)$ , holds.*

The case  $k(p - 2) + m - 1 = 0$  we will call a critical. In this case a behavior and an estimate of solution to the Cauchy problem changed. Consider the function

$$u_1(t, x) = (T + t)^{-\alpha} f_1(\xi), \quad f_1(\xi) = \exp\left(-\frac{(p - 1) |\xi|^{p/(p-1)}}{p^{1/(p-1)} k^{p-2}}\right), \quad k(p - 2) + m - 1 = 0$$

where  $\xi = |\eta| (T + t)^{-\beta}$ .

**Theorem 2.** *Assume, that  $u_0(x) \leq u_1(0, x), x \in R^N, k(p - 2) + m - 1 = 0, mp_1 + q_1 \geq 1 + (p - p_1)/N$  Then solution of the problem (1) globally solvable and for the solution of the problem (1) in the estimate  $u(t, x) \leq u_1(t, x)$  hold.*

**Corollary.** From the Theorem1 for the front (free boundary) the estimate

$$\left\{ \sum_1^N \left[ \int_0^t v(y) dy - x_i \right] \right\} \geq (a/b_1)^{(p-1)/p} (T + t)^\beta$$

hold.

In the work asymptotic of self-similar solution for both slowly and fast diffusion cases established. Based on qualitative properties of solutions the results of numerical calculations analyzed.

## References

1. Zhang Q., P. Shi. Global solutions and self-similar solutions of semi linear parabolic equations with nonlinear gradient terms, *Nonlinear Anal. T.M.A.*, 72, 2010, pp.2744-2752
2. Lihua Deng., Xianguang Shang. Doubly Degenerate Parabolic Equation with Time-Dependent Gradient Source and Initial Data Measures, *Journal of Function Spaces* 2020, Volume 2020, Article ID 1864087, 11 pages
3. Aripov M. The Fujita and Secondary Type Critical Exponents in Nonlinear Parabolic Equations and Systems *Differential Equations and Dynamical Systems* 2018, pp.9-24
4. Aripov M., Mukimov A., Mirzayev B. To Asymptotic of the Solution of the Heat Conduction Problem with Double Nonlinearity with Absorption at a Critical Parameter. *Mathematics and Statistics* 7(5): 205-217, 2019 <http://www.hrpub.org> DOI: 10.13189/ms.2019.070507

**UNIQUENESS AND EXISTENCE FOR INVERSE PROBLEM OF  
DETERMINING AN ORDER OF TIME-FRACTIONAL DERIVATIVE OF  
SUBDIFFUSION EQUATION**

<sup>1</sup>Ashurov R.R., <sup>2</sup>Fayziev Yu.E.

<sup>1</sup> *Institute of Mathematics, Academy of Science Of Uzbekistan, Mirzo Ulugbek str. 81, Tashkent  
100170,*

e-mail: ashurovr@gmail.com

<sup>2</sup> *National University of Uzbekistan, Students Town, Tashkent 700174, Uzbekistan,*

e-mail: fayziev.yusuf@mail.ru

In this paper we consider an inverse problem for determining the order of the Riemann-Liouville time fractional derivative in subdiffusion equations. Using the classical Fourier method, we prove the uniqueness and the existence theorem for this inverse problem. Information on inverse problems for fractional equations can be found in [1] - [4].

Let  $A(D) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha$  be a homogeneous symmetric elliptic differential expression with constant coefficients, i.e.  $A(\xi) > 0$ , for all  $\xi \neq 0$ , where  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$  - multi-index and  $D = (D_1, D_2, \dots, D_N)$ ,  $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ . We define by  $C^m(\mathbb{T}^N)$  a class of  $2\pi$ -periodic on each variable  $x_j$  functions  $v(x)$  from  $C^m(\mathbb{R}^N)$ . Let  $A$  stand for the operator, defined on  $C^m(\mathbb{T}^N)$  and acting as  $Av(x) = A(D)v(x)$ .

Let  $\rho \in (0, 1)$  be a constant number. Consider the initial-boundary value problem

$$\partial_t^\rho u(x, t) + Au(x, t) = f(x, t), \quad x \in \mathbb{T}^N, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \partial_t^{\rho-1} u(x, t) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{T}^N, \quad (2)$$

with extra condition

$$U(\rho; t_0) \equiv \int_{\mathbb{T}^N} u(x, t_0) dx = d_0, \quad t_0 \geq T_0, \quad (3)$$

where  $T_0$  is defined later,  $\partial_t^\rho f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\rho)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\xi)}{(t-\xi)^\rho} d\xi$  - Riemann - Liouville fractional derivative (see.[5]).

The initial-boundary value problem (1) - (2) together with extra condition (3) is called *an inverse problem*.

**Definition 1.** A pair  $\{u(x, t), \rho\}$  of the function  $u(x, t)$  and the parameter  $\rho$  with the properties  $\rho \in (0, 1)$ ,  $\partial_t^\rho u(x, t), Au(x, t) \in C(\mathbb{T}^N \times (0, \infty))$ ,  $\partial_t^{\rho-1} u(x, t) \in C(\mathbb{T}^N \times [0, \infty))$  and satisfying all the conditions of problem (1) - (3) in the classical sense is called **the solution of inverse problem (1) - (3)**. Function  $u(x, t)$  with these properties is called **the solution of forward problem (1) - (2)**.

It is not hard to see that the closure  $\hat{A}$  of operator  $A$  in  $L_2(\mathbb{T}^N)$  is selfadjoint and it has a complete (in  $L_2(\mathbb{T}^N)$ ) set of eigenfunctions  $\{\theta e^{inx}\}$ ,  $\theta = \theta(N) = (2\pi)^{-N/2}$ , and corresponding eigenvalues  $A(n)$ . Therefore, by virtue of J. von Niemann theorem, for any  $\tau > 0$  one can introduce the power of operator  $\hat{A}$  as  $\hat{A}^\tau g(x) = \sum_{A(n) < \lambda} A^\tau(n) g_n e^{inx}$ , where  $g_n$  are Fourier coefficients:

$$g_n = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{T}^N} g(x) e^{-inx} dx.$$

The domain of definition of this operator is defined from the condition  $\hat{A}^\tau g(x) \in L_2(\mathbb{T}^N)$  and

has the form

$$D(\hat{A}^\tau) = \{g \in L_2(\mathbb{T}^N) : \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} A^{2\tau}(n) |g_n|^2 < \infty\}.$$

We describe the proposed method, based on the classical Fourier method, for finding the order of fractional differentiation when the following conditions are satisfied

$$f_0 = \text{constant}, \quad \varphi_0^2 + f_0^2 \neq 0, \quad (4)$$

in the opposite case, the method becomes technically cumbersome. Let us define the parameter  $T_0$  in (3) as

$$T_0 = \begin{cases} 2, & \varphi_0 \cdot f_0 \geq 0, \\ \max \left\{ 5, 4 \frac{|\varphi_0|}{|f_0|} \right\}, & \varphi_0 \cdot f_0 < 0. \end{cases}$$

**Theorem 1.** *Let conditions (4) be satisfied,  $\tau > \frac{N}{2m}$  and*

(a)  $\varphi \in D(\hat{A}^\tau)$ ;

(b)  $f(x, t) \in D(\hat{A}^\tau)$  for any  $t \in [0, T]$ ;

(c)  $F(t) = \hat{A}^\tau f(x, t)$  be continuous in the norm of space  $L_2(\mathbb{T}^N)$  for all  $t \in [0, T]$ .

Then the inverse problem (1) - (3) has a unique solution  $\{u(x, t), \rho\}$  if and only if  $\min\{f_0, \varphi_0 + t_0 f_0\} < d_0 < \max\{f_0, \varphi_0 + t_0 f_0\}$ .

## References

1. Li, Z., Liu, Y., Yamamoto, M. Inverse problems of determining parameters of the fractional partial differential equations, Handbook of fractional calculus with applications. V.2. DeGruyter. pp. 431- 442, (2019).
2. Ashurov R., Umarov S., Determination of the order of fractional derivative for subdiffusion equations, arXiv:submit/3190665 [math-ph] (22 May 2020).
3. Li Z. , Zhang Zh., Unique determination of fractional order and source term in a fractional diffusion equation from sparse boundary data, arXiv:2003, 10927v1 [math.AP] (24 Mar 2020)
4. Ashurov R., Fayziev Yu., Determination of fractional order and source term in a fractional subdiffusion equation, arxiv.org/submit/3264960 (8 Jul 2020).
5. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogozin S.V., Mittag-Leffler functions, related topics and applications. Springer (2014)

## NONEXISTENCE OF GLOBAL SOLUTIONS FOR A CLASS OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL SYSTEMS

<sup>1</sup>Bouchra Azzaoui, <sup>2</sup>Brahim Tellab

<sup>1</sup> Laboratory of Applied Mathematics, Kasdi Merbah University, B.P. 511, Ouargla, 30000, Algeria

E-mail: bouchraa740@gmail.com

<sup>2</sup> Laboratory of Applied Mathematics, Kasdi Merbah University, B.P. 511, Ouargla, 30000, Algeria

E-mail: brahimentel@yahoo.fr

The aim of this work is the search for the sufficient conditions of nonexistence of global solutions for the following nonlinear fractional differential system:

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_1} u + (-\Delta)^{\beta_1/2} u = |u|^{p_1} |v|^{q_1} + f(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N, \\ \mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_2} v + (-\Delta)^{\beta_2/2} v = |u|^{p_2} |v|^{q_2} + g(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N, \\ u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \neq 0, & x \in \mathbb{R}^N, \\ v(0, x) = v_0(x) \geq 0, \neq 0, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (5)$$

where  $N \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq \beta_i \leq 2$ ,  $p_i, q_i$  ( $i = 1, 2$ ) are real constants such that  $p_1, q_2 > 1$ ,  $q_1, p_2 \geq 0$  and  $\mathbf{D}_{0t}^{\alpha_i}$  ( $i = 1, 2$ ) denotes the standard Caputo fractional derivative of order  $\alpha_i \in (0, 1)$ .  $(-\Delta)^{\frac{\beta_i}{2}}$  ( $i = 1, 2$ ) is the  $\frac{\beta_i}{2}$ -fractional power of the Laplacien  $(-\Delta)$  defined by

$$(-\Delta)^{\frac{\beta_i}{2}} u(x, t) = \mathfrak{F}^{-1} \left( |\zeta|^{\beta_i} \mathfrak{F}(u)(\zeta) \right) (x, t),$$

where  $\mathfrak{F}$  denotes the Fourier transform and  $\mathfrak{F}^{-1}$  its inverse.  $f$  and  $g$  are given functions satisfying some hypotheses which will be presented later. Our nonexistence result is obtained by using variational formulations and test functions methods.

The obtained result is formulated as follows.

**Theorem 1.** Let  $u_0, v_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ . Assume that

(H1):  $1 \leq N \leq \max \left\{ \beta_1 |p'_1 - \frac{1}{\alpha_1}|, \beta_2 |q'_2 - \frac{1}{\alpha_2}| \right\}$  where  $p'_1 = \frac{p_1}{p_1-1}$  and  $q'_2 = \frac{q_2}{q_2-1}$ ;

(H2):  $\int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N} f(t, x) dt dx > 0$  and  $\int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N} g(t, x) dt dx > 0$

holds. Then problem (1) does not admit global nontrivial solution.

## References

1. *K. Hayakawa*, On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations, Proc. Japan Acad., 49, 1973, 503-505.
2. *B. Rebiai, S. Rouar, and K. Haouam*, Critical exponents for a nonlinear reaction-diffusion system with fractional derivatives, Global Journal of Pure and Applied Mathematics, 12(6), 2016, 5343-5351.
3. *I. Podlubny*, Fractional differential equations, Academic Press, New York London Tokyo Toronto, 1999.

## MATHEMATICAL DESCRIPTION OF THE FLUID FLOW OUTSIDE AND INSIDE A POROUS MEDIUM BASED ON AN INTERPENETRATING MODEL

**Dalabaev U.**

*University of World Economy and Diplomacy, 700007, Buyuk Ipak Yuli street, 54, Tashkent, Uzbekistan),*

e-mail: udalabaev@mail.ru

When a liquid or gas flows in a combined region, (i.e., the region where the solution is sought consists of a porous zone and a free zone) is modeled by different equations. There are various models for describing the flow in a porous medium (Darcy, Brinkman, Forchheimer models). In the zone free of porous media, the Navier-Stokes equations are used. In the Darcy model, it is believed that the inertia of the flow is small, and in the case of highly porous media and in large Reynolds numbers, the results of this model give large errors. At the interface between the porous medium and the isotropic region, the condition Beavers and Joseph [1-4] is set.

Here an equation is proposed, proceeding from the interpenetrating model, describing the flows of multiphase media [5-8]

Formulas in the text are numbered as follows

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^2 \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \sum_{k=1}^2 \left( \frac{1}{3} \delta_j^k + 1 \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \left( f \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)$$

$$\mu \sum_{k=1}^2 \left(1 - \frac{5}{3} \delta_j^k\right) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(f \frac{\partial u_{3-j}}{\partial x_{3-k}}\right) - K u_j + \rho g_j,$$

$$\sum_{k=1}^2 \frac{\partial f u_k}{\partial x_k} = 0.$$

Here,  $u_j^i$   $j$ -th component of the flow velocity,  $p$  – pressure,  $f$  – volume concentration,  $\delta_i^j$  – is the Kronecker symbol,  $\mu$  – fluid viscosity,  $K$  – interaction coefficient.

If the equations are converted into the integral form of representation, then on their basis it is possible to study flows both inside and outside porous media, since when we obtain the Navier - Stokes equations for an incompressible fluid. Moreover, this equation is suitable for the entire area under consideration. The system of equations was solved by the control volume method.

One of the advantages is that it eliminates the need to set an interfacial boundary condition. The influence of the parameters of a porous medium on the characteristic of a flow in a flat tube partially filled with a porous medium is investigated. The influence of the roughness of the pipe on the nature of the flow was also investigated.

## References

1. *G. S. Beavers, D. D. Joseph*, Boundary conditions at a naturally permeable wall, *J. Fluid Mech.*, 30 (1967), 197-207.
2. *Dayle Jogie, Balswaroop Bhatt*. Flow of immiscible fluids in a naturally permeable channel, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, Volume 78 No. 3 2012, 435-449.
3. *Kirill Tsiberkin, Ekaterina Kolchanova, Tatyana Lyubimova*. Verification of the boundary condition at the porous medium-fluid interface, *EPJ Web of Conferences*, 114,02124(2016), DOI: 10.1051/epjconf/201611402125.
4. *Matthias Ehrhardt*. An Introduction to Fluid-Porous Interface Coupling, Preprint BUW-AMNA-OPAP 10/15, October 2010, <http://www.math.uni-wuppertal.de>
5. *Rahmatullin H.A.* Osnobi gidrodinamiki vzaimopronikayushih sjimaemih cred //PMM, 1956, v.20, vip.2, 184-190
6. *Fayzullaev D. F.* Laminarnoy dvijeniyy mnogofaznyh sred v truboprovodah. Tashkent, Fan, 1966, 220
7. *Nigamulin R.I.* Dinamika-mnogofaznyh-sred-chast-1. M., Hayka, 1987, 464
8. *Dalabaev U.* Numerical investigation of the character of the lift on a cylindrical particle in poiseuille flow of a plane channel, *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. T. 84, e6, Minsk. 2011,1288-1292

## TOURNAMENTS OF VOLTERRA TYPE TRANSVERSAL OPERATORS ACTING IN THE SIMPLEX $S^{m-1}$

<sup>1</sup>Eshmatova Dilfuza, <sup>2</sup>Ganikhodzhaev Rasul

<sup>1</sup> *Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan,*  
e-mail: 24dil@mail.ru

<sup>2</sup> *National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,*  
e-mail: rasulgani@hotmail.com

Consider a simplex  $S^{m-1}$  acting in  $\mathbb{R}^m$ , which is defined by the relation

$$S^{m-1} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_m) : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\}. \quad (1)$$

It is clear that  $S^{m-1}$  is a compact, convex subset of  $\mathbb{R}^m$ .

It is known [1, 3], a Volterra type quadratic stochastic operator (q.s.o) on  $S^{m-1}$  can always be presented in the form of

$$x'_k = x_k \left( 1 + \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i \right), \quad k = \overline{1, m}, \quad (2)$$

where

$$a_{ki} = -a_{ik}, \quad |a_{ki}| \leq 1. \quad (3)$$

There is a one-to-one correspondence between Volterra-q.s.o. and skew-symmetric matrices  $A = (a_{ij})_{k,i=\overline{1,m}}$  with coefficients  $a_{ki}$  satisfying conditions (3).

For smooth mappings, **transversality**, i.e. “**system roughness**”, is an important characteristic.

**Definition 1.** A skew-symmetric matrix  $A$  is called *transversal* if any its major minor of even order is positive.

**Definition 2.** A Volterra operator  $V$  is called *transversal* if its skew-symmetric matrix  $A$  is transversal.

Transversal Volterra operators form an open subset in the set of all operators of Volterra type ([3]). As we know ([2, 3]), **a connected component** means the maximum connected open subset.

**Theorem 1.** *The number of connected components of the set of transversal operators is finite and equal to  $m!$ .*

We denote a tournament with  $m$  vertices by  $T_m$ .

**Theorem 2.** *Let the transversal Volterra operators  $V_0$  and  $V_1$  belong to the same connected component. Then the corresponding tournaments are isomorphic to each other.*

**Theorem 3.** *Let  $V'(z_\alpha)$  be the derivative of the operator  $V$  at a fixed point  $z_\alpha \in X$ , and  $\delta(V'(z_\alpha))$  be its spectrum. Then*

- 1)  $1 \in \delta(V'(z_\alpha))$ ;
- 2)  $\delta(V'(z_\alpha))$  has  $|\alpha| - 1$  complex numbers by the modulus greater than 1 and  $m - |\alpha|$  real numbers different from 1.

## References

1. Sarymsakov T.A., Ganikhodzhaev N.N. On some probabilistic problems in the theory of quadratic operators, Springer Proceeding in Physics, 67, 1992, p. 143 - 149.
2. Ganikhodzhaev R.N., Éshmamatova D.B. Quadratic automorphisms of a simplex and the asymptotic behavior of their trajectories, Vladikavkaz. Mat. Zh. 8(2), 2006, p.12-28.
3. Ganikhodzhaev R.N., Tadzhieva M.A., and Eshmamatova D.B. Dynamical properties of quadratic homeomorphisms of a finite-dimensional simplex, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 245, No. 3, March, 2020, p. 398-402.



## ANALYTICAL METHOD FOR DETERMINING THE SECTION OF A POLYHEDRON

Ganikhodzhaev R.N., Shodiyev O.N.

*National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*

e-mail: rganikhodzhaev@gmail.com, oybekshodiyev1993@gmail.com

On Cartesian coordinates given an equation of a plane is

$$T = \{(x, y, z) : ax + by + cz + d = 0\} \text{ where } a^2 + b^2 + c^2 \neq 0.$$

Then the sets

$$T(\geq) = \{(x, y, z) : ax + by + cz + d \geq 0\}, \quad T(>) = \{(x, y, z) : ax + by + cz + d > 0\}$$

are called closed and open half-spaces respectively. If the intersection of finite closed half-spaces is bounded and the intersection of corresponding interval half-spaces is not empty the intersection of these closed half-spaces are called convex bubble. For example, a triangular pyramid is the intersection of four closed half-spaces, a cube is the intersection of six closed half-spaces.

Now, let

$$T_0 = \{(x, y, z) : a_0x + b_0y + c_0z + d = 0\}, \quad a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 \neq 0$$

an equation of a plane.

By  $f_0(A)$  we denote the value of corresponding linear function  $f_0(x, y, z) = a_0x + b_0y + c_0z + d$  at the point  $A(x, y, z)$ . Let  $AB$  be any edge of a polyhedron. Then the points A and B are vertices.

**Definition 1.** If the inequality  $f(A) \cdot f(B) < 0$  holds for an edge  $AB$  of a polyhedron, the edge  $AB$  is called special edge for the plane  $T_0$ .

**Theorem 1.** If the number of special edges is equal to  $k$ , the intersection of the polyhedron and the plane  $T_0$  is a convex  $k$ -angle.

**Theorem 2.** The intersection of a triangular pyramid with an arbitrary plane that does not pass through the vertices of the pyramid is either empty space, either a triangular or rectangular.

Now, let us take a cube as a polyhedron. Two adjacent and non-parallel edges of a cube are called transverse lines edges.

**Theorem 3.** If the section of the cube with the plane intersecting the three transverse lines edges is a convex hexagon, and conversely, if the section of the cube with the plane intersects the hexagon, the plane intersects any three transverse lines edges of the cube.

If we take three arbitrary points from the three sides of one side of the cube and draw a plane through them, we get a triangle in the cross section.

**Theorem 4.** If the section of the cube is rectangular, it is definitely a trapezoid.

Thus, a section of a cube with a plane that does not pass through its ends can have the following conditions:

- 1) The section of a cube with a plane is an empty set;
- 2) A triangle is formed in the section. In this case, the triangle is definitely an acute angle;
- 3) A rectangle is formed in the section. This rectangle is definitely a trapezoid;
- 4) A pentagon is formed in the section. In this case, the two pairs of sides of the pentagon must be parallel;
- 5) Finally, a hexagon is formed in the section. In this case, the opposite sides of the hexagon are parallel to each other. This means that according to the method of mathematical induction, when  $n$  sides are cut in a plane, at most  $n$  angles are formed in the section.

## References

1. *Alexandrov, A.D.* Alexandrov Convex polyhedra, Nauka, 2013.
2. *Shukin M.V.* Shukin The course of the lectures on analytical geometry and linear algebra, Minsk, 2007.
3. *Veselov A.P.* Veselov E.V. Troitsky Lectures on analytical geometry, Moscow, 2002.

**ON SUFFICIENT SOLVABILITY CONDITIONS FOR NEUMANN TYPE PROBLEMS FOR POLYHARMONIC EQUATION IN A BALL**

<sup>1</sup>Karachik Valery, <sup>2</sup>Turmetov Batirkhan

<sup>1</sup> *Department of Mathematical Analysis, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia,*  
e-mail: karachik@susu.ru

<sup>2</sup> *Department of Mathematics, A. Yasawi International Kazakh-Turkish University, Kazakhstan,*  
e-mail: turmetovbh@mail.ru

The classical problems for the polyharmonic equation are the Dirichlet and Neumann problems. It is established that all problems of this type are Fredholm and their solvability for homogeneous boundary conditions is guaranteed by the orthogonality of the right-hand sides to all solutions of the homogeneous adjoint equation. The class of problems considered in this paper is a natural generalization of the classical formulation of the Neumann problem proposed for the polyharmonic equation by A.V. Bitsadze [1]. In [2], necessary and sufficient solvability conditions for the Neumann problem for biharmonic equation in a ball are obtained. In [3], using the Neumann integer triangle [4], a set of necessary solvability conditions for the Neumann type problems is derived. In the present paper, we prove that this set of solvability conditions is also a set of sufficient solvability conditions of the Neumann type problems.

Let  $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$  be the unit ball in  $\mathbb{R}^n$ , and  $\partial S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$  be the unit sphere, where  $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ . In  $S$  consider the following class of Neumann type boundary value problems  $\mathcal{N}_k$  for inhomogeneous polyharmonic equation

$$\Delta^m u = f(x), \quad x \in S;$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k} \Big|_{\partial S} = \varphi_1(s), \quad \frac{\partial^{k+1} u}{\partial \nu^{k+1}} \Big|_{\partial S} = \varphi_2(s), \dots, \frac{\partial^{k+m-1} u}{\partial \nu^{k+m-1}} \Big|_{\partial S} = \varphi_m(s), \quad s \in \partial S,$$

where  $\frac{\partial}{\partial \nu}$  is outwards normal to  $\partial S$ , functions  $\varphi_i(s)$  for  $i = 1, \dots, m$  are defined on  $\partial S$ , and  $f(x)$  is a polynomial. Let  $\Lambda = \sum_{i=1}^n x_i D_{x_i}$  and  $(a, b)_m = a(a+b) \dots (a+mb-b)$ . The following statement is based on the results from [5, 6].

**Theorem.** *Let  $k \leq m$  and  $\varphi_i \in C^{2m-i-1}(\partial S)$ ,  $i = 1, \dots, m$  then the necessary and sufficient solvability conditions for the problem  $\mathcal{N}_k$  are  $N_{k,l} = [(k-l+1)/2]$ th conditions of the form*

$$\int_{\partial S} H_l(x) \left( p_1^{(m-\lambda)} \varphi_{\delta_\lambda+1}(x) + \dots + p_{m-\lambda}^{(m-\lambda)} \varphi_{m-\sigma_\lambda}(x) \right) ds_x = \int_S \frac{(1-|x|^2)^{m-1}}{(2m-2)!!} H_l(x) \hat{f}(x) dx$$

for every  $l = 0, 1, \dots, k-1$ , where  $\lambda = [(k-l)/2], \dots, k-l-1$ ,  $\delta_\lambda = 2\lambda - k + l + 1$ ,  $\sigma_\lambda = k - l - \lambda - 1$ ,  $H_l(x)$  is arbitrary homogeneous harmonic polynomial of degree  $l$ , coefficients  $p_j^{(i)}$  are elements of the Neumann integer triangle [4],  $\hat{f}(x) = (\Lambda, -1)_{i+k-1} / (\Lambda - l, -2)_m f(x)$ . Solution of the problem  $\mathcal{N}_k$  exists and unique up to  $m$ -harmonic polynomials of degree  $k-1$ .

This research is financially supported by a grant from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan, Grant No. AP08855810 and by the Government of the Russian Federation, Resolution no. 211 of March 16, 2013, and Agreement no. 02.A03.21.0011.

## References

1. *Bitsadze A.V.* On the Neumann problem for harmonic functions, Dokl. Akad. Nauk, 311:1, 1990, 11–13.
2. *Turmetov B.Kh., Ashurov R.R.* On solvability of the Neumann boundary value problem for a non-homogeneous biharmonic equation in a ball, British J. Math. Comput. Sci. 4, 2014, 557–571.
3. *Karachik V.V.* Class of Neumann-Type Problems for the Polyharmonic Equation in a Ball, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 60:1, 2020, 144–162.
4. *Karachik V.V.* On the Arithmetic Triangle Arising from the Solvability Conditions for the Neumann Problem, Math. Notes, 96:2, 2014, 217–227.
5. *Karachik V.V.* Integral identities on a sphere for normal derivatives of polyharmonic functions, Siberian Electronic Mathematical Reports, 14, 2017, 533–551.
6. *Karachik V.V.* On the mean value property for polyharmonic functions in the ball, Siberian Advances in Mathematics, 24(3), 2014, 169–182.

## THE PROBLEM OF PURSUIT MIXED CONSTRAINTS

**Kuchkarova Sarvinoz**

*National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,*

e-mail: kuchkarova11@yandex.ru

In this work, we study a differential game of many pursuers and one evader, the motions of all players are simple. A geometric constraint imposed on one part of the control parameters of the players, the rest is an integral constraint. Sufficient conditions for multiple prosecution were given.

We study a pursuit differential game of  $m$  pursuers  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  and one evader  $E$  which is described by the following differential equations

$$\dot{x}_i = u_i, \quad x_i(0) = x_{0i}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1)$$

$$\dot{y} = v, \quad y(0) = y_0,$$

where  $x_i, y, u_i, v \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_{0i} \neq y_0$ ,  $P_i$  – control parameter of the pursuer  $u_i = (u_{1i}, \dots, u_{ni})$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , and  $-v = (v_1, \dots, v_n)$  is that of the evader  $E$ .

Assume controls of the pursuers and evader is defined as the measurable function  $u_i(t) = (u_{1i}(t), \dots, u_{ni}(t))$ ,  $v(t) = (v_1(t), \dots, v_n(t))$ ,  $t \geq 0$  subjected to constraints:

$$\sum_{j=1}^k |u_{ji}(t)|^2 \leq \rho_{1i}^2, \quad t \geq 0, \quad \int_0^\infty \sum_{j=k+1}^n |u_{ji}(t)|^2 dt \leq \rho_{2i}^2, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^k |v_j(t)|^2 dt \leq \sigma_1^2, \quad t \geq 0, \quad \int_0^\infty \sum_{j=k+1}^n |v_j(t)|^2 dt \leq \sigma_2^2, \quad (3)$$

where  $\rho_{1i}, \rho_{2i}, \sigma_1, \sigma_2$  – positive numbers.

**Theorem 1.** *If*

$$\sigma_1 < \rho_{1i}, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sigma_2 < \rho_{2i}, \quad i = 1, \dots, m$$

*happen keeps d.*

**Assume** *There are sets  $Q_j \subset Q$ ,  $j = 1, \dots, d$  satisfying condition  $Q_i \cap Q_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$  for set  $Q = \{i : \sigma_1 < \rho_{1i}, i \in \{1, \dots, m\}\}$  and  $d \leq m$ , let it satisfy*

$$S = \left\{ (\sigma_1, \sigma_2) : \sigma_2^2 < \sum_{i \in Q_j} \rho_{2i}^2, \quad j = 1, \dots, d \right\} \neq \emptyset$$

**Theorem 2.** *If assume is performed, then in game (1) - (3) 1 multiple pursuit comes from any starting position.*

### References

1. Kuchkarov A. Ibragimov G., Khaskestari M., "On a linear differential game of optimal approach of many pursuers with one evader," *Journal of Dynamical and Control Systems*, Vol. 19(1), 2013, 1-15pp.
2. Tukhtasinov M., Kuchkarova S. "Multiple pursuit problems with different constraints in the coordinates of control parameters," *Abstracts of Uzbek-Israel joint international conference STEM, 2019*, 138p.

## APPLICATION OF EXTENDED ROTHE'S METHOD FOR NONLINEAR PARABOLIC VARIATIONAL INEQUALITIES IN NONCYLINDRICAL DOMAINS

<sup>1</sup>Gulchehra Kulieva, <sup>2</sup>Komil Kuliev

<sup>1</sup> Samarkand branch of Tashkent University of Informational Technology, Samarkand, Uzbekistan,

e-mail: kulievag@mail.ru;

<sup>2</sup> Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan,

e-mail: komilkuliev@gmail.com.

Let us consider in  $\mathbb{R}^{N+1}$  the domain  $Q$  defined by  $Q = \{(x, t) : x \in \Omega_t, 0 < t < T\}$ , where  $(0, T)$  is a finite interval,  $\Omega_t \in C^{0,1}(\mathbb{R}^N)$  and for every  $t, s \in (0, T)$ ,  $t < s$ , it is  $\emptyset \neq \Omega_0 \subset \Omega_t \subset \Omega_s \subset \Omega_T$ . Let  $t \in [0, T]$  and  $p > 1$ , let  $V_t = W_0^{k,p}(\Omega_t)$  and let  $V_t^*$  be its dual space. We denote by  $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$  the duality between  $V_t^*$  and  $V_t$ , and  $(\cdot, \cdot)_t$  denotes the inner product in  $L_2(\Omega_t)$ .

We will solve the parabolic variational inequality

$$u(t) \in K_t : \left( \frac{du(t)}{dt}, v - u(t) \right)_t + \langle Au(t), v - u(t) \rangle_t \geq (f(t), v - u(t))_t \quad \text{for all } v \in K_t \quad (1)$$

and for  $t \in (0, T)$ , where  $K_t$  is a closed convex subset of the space  $V_t \cap L_2(\Omega_t)$ .  $A$  is a nonlinear differential operator of order  $2k$  ( $k \in \mathbb{Z}_+$ ) in the form:  $(Au)(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (a_\alpha(x, \delta_k u))$  for  $x \in \Omega_T$ , where  $\delta_k u = \{\partial^\beta u\}_{|\beta| \leq k}$  and the function  $f$  is defined in  $Q$ . Together with (1) we consider the initial condition  $u(0) = 0$ .

**Assumptions.** The coefficients of the operator  $A$  satisfy the following conditions:

(A1) The *Carathéodory condition*, (A2) The *growth condition*, (A3) The *monotonicity condition*, (A4) The *coercivity condition*, (A5) The *symmetry condition*,

(A6) The function  $f(t)$  satisfies the following condition: there exists a function  $F \in C(I, L_2(\Omega_T)) \cap V^1(I, L_2(\Omega_T))$  such that  $F(x, t) = f(x, t)$  for all  $(x, t) \in Q$ .

(A7) The sets  $K_t$  ( $t \in (0, T)$ ) satisfy the following condition: if we denote by  $\bar{K}_t$  ( $t \in [0, T]$ ) the set of all elements of  $K_t$  extended by zero to the whole domain  $\Omega_T$ .

**Extended Rothe's method.** Divide the interval  $I = [0, T]$  into  $n$  subintervals  $I_1, I_2, \dots, I_n$  ( $I_j = [t_{j-1}, t_j]$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ) of the length  $h = \frac{T}{n}$ . According to the initial condition we put  $z_0(x) = 0$ ,  $x \in \Omega_T$ , for  $t_0 = 0$  and successively for  $j = 1, 2, \dots, n$  define functions  $z_j(x)$  as the solutions of the following variational inequalities:

$$z_j \in K_{t_j} : \left( \frac{z_j}{h}, v - z_j \right)_{t_j} + \langle Az_j, v - z_j \rangle_{t_j} \geq (f_j + \frac{z_{j-1}}{h}, v - z_j)_{t_j} \quad \text{for all } v \in K_{t_j}. \quad (2)$$

We obtain these problems if we in (1) replace the derivative  $\frac{\partial u}{\partial t}$  by the differential quotient  $\frac{z_j - z_{j-1}}{h}$  in the points  $t = t_j$  and put  $z_{j-1} = 0$  on  $\Omega_{t_j} \setminus \Omega_{t_{j-1}}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . The operator

$A + \frac{1}{h}I : K_t \rightarrow (V_t \cap L_2(\Omega_t))^* = V_t + L_2(\Omega_t)$  is bounded, continuous, strictly monotone and coercive. Hence, due to [1, Theorem 43.2] there exists a unique solution  $z_j \in K_{t_j}$  of (2).

Now we construct a function  $u_n(x, t)$ , called *Rothe's function*, and defined on  $\Omega_T \times I$  by putting  $u_n(x, t) = z_{j-1}(x) + \frac{t-t_{j-1}}{h}(z_j(x) - z_{j-1}(x))$  for  $t \in I_j, j = 1, 2, \dots, n$ , and  $x \in \Omega_T$ . In this way we get a sequence  $\{u_n(x, t)\}_{n=1}^\infty$  which is called *Rothe's sequence* of approximate solutions of the problem (1).

**Definition.** A function  $u(t)$  is called a *weak solution* of the problem (1) if the following conditions are fulfilled: 1)  $u \in K_Q$ , 2)  $u \in AC(I, L_2(\Omega_T))$ , 3)  $u' \in L_2(I, L_2(\Omega_T))$ , 4)  $u(0) = 0$ ,

$$\int_0^T \langle Au(t), v(t) - u(t) \rangle_T dt + \int_0^T \langle u'(t), v(t) - u(t) \rangle_T dt \geq \int_0^T \langle f, v(t) - u(t) \rangle_T dt \quad \text{for all } v \in K_Q.$$

**Theorem.** Assume that the assumptions (A1)-(A7) hold. Then there exists exactly one solution of the problem (1) in the sense of the definition, i.e. exactly one function which is a weak (strong) limit of the sequence of Rothe's functions  $u_n(t)$  in the space  $L_2(I, V_T \cap L_2(\Omega_T))$  ( $C(I, L_2(\Omega_T))$ ).

## References

1. Kufner A. and Fučík S. Nonlinear differential equations, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 1980.
2. Kulieva G.. Some special problems in elliptic and parabolic variational inequalities, Licentiate thesis / Lulea University of Technology, ISSN 1402-1757; 2006:77, p.105.
3. Rektorys K. The Method of Discretization in Time and Partial Differential Equations, D. Reidel Publishing Company, 1982.

## EFFICIENT SOLVER FOR THE INCOMPRESSIBLE NAVIER-STOKES EQUATIONS: ON NUMERICAL CHALLENGES IN SOLVING LID-DRIVEN CAVITY PROBLEM

<sup>1</sup>Loy Kak Choon, <sup>2</sup>Chris Cantwell, <sup>2</sup>Spencer J. Sherwin, <sup>3</sup>Yves Bourgault

<sup>1</sup>Faculty of Ocean Engineering Technology and Informatics, Universiti Malaysia Terengganu, 21030 Kuala Nerus, Terengganu, Malaysia

e-mail: kakchoon@umt.edu.my

<sup>2</sup>Department of Aeronautics, Faculty of Engineering, Imperial College London, South Kensington Campus, London SW7 2AZ, United Kingdom,

<sup>3</sup>Department of Mathematics and Statistics, University of Ottawa, STEM Complex, 150 Louis-Pasteur Pvt, Ottawa, ON, Canada

Navier-Stokes equations (NSEs) have been widely used to model flows and it has many great success to reproduce many observed results in fluid dynamics. The computation of lid-driven cavity in particular, has been conducted by many but it still remains one of the most challenging test problem until today. Due to this reason, lid-driven cavity has been used for numerical benchmarking and model validation purposes. As an example, a good numerical solver should be able to reproduce periodic 2D-lid driven flows in terms of Strouhal number of about 0.44-0.45 at Reynolds number 8500. However, by just increasing the Reynolds numbers, the practicability of the same numerical solver depends on its overall efficiency and robustness. For a fixed space discretization, we observed that numerical stabilization and high-order time-integration method are crucial to compute high Reynolds flows. These features are required to capture interesting vortices and flow instabilities of various scales. In the framework of finite element methods, we will first address numerical challenges when computing 2D lid-driven cavity problem. Next, we will showcase several flow computations using the mentioned numerical improvements which could be applicable to other flow problems as well.

## FTSE BURSA MALAYSIA KLCI PERFORMANCE PREDICTION USING COMBINATION OF PRINCIPAL COMPONENT ANALYSIS AND ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS

<sup>1</sup>Mohd Dom Rosma

<sup>1</sup>*Universiti Teknologi MARA, Malaysia*

e-mail: <sup>1</sup>rosma@tmsk.uitm.edu.my

Knowing the FTSE Bursa Malaysia KLCI performance is very important to investors. However, the prediction of KLCI performance is not simple since it involves many technical indicators which must be collected on daily basis. In this paper, a prediction tool combining a dimension reduction technique, Principal Component Analysis (PCA) and Artificial Neural Network (ANN) is developed and used to predict the daily performance of FTSE Bursa Malaysia KLCI. From a total of sixteen technical indicators, four have been extracted by PCA which include ROC, MACD, High/Low and Bull-Bear. Data on the four chosen technical indicators are fed into ANN for performance prediction. The data was divided into training data set (70%) and testing data set (30%). The prediction ability of the combined PCA-ANN using four technical indicators are recorded and compared with the prediction ability of the standard ANN using all sixteen technical indicators. The prediction errors are measured using Root Mean Square Error (RMSE). The PCA-ANN combination method based on four technical indicators is found to have high prediction accuracy as reflected by a very small RMSE value of 0.49518 while the standard ANN method based on sixteen technical indicators also produced high prediction accuracy as reflected by RMSE value of 0.40528. Therefore, using the chosen four technical indicators is found to be sufficient since it gives similar high prediction accuracy of FTSE Bursa Malaysia KLCI performance. The advantage of using a dimension reduction method such as PCA is found to be significant since the prediction accuracy had not been compromised despite a smaller number of technical indicators used in the prediction process by ANN following dimension reduction done by PCA. Hence, the proposed combined PCA-ANN method provides a good alternative for prediction of FTSE Bursa Malaysia KLCI performance.

## EXISTENCE CONDITIONS OF PERIODIC SOLUTIONS OF SECOND-ORDER NEUTRAL DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PIECEWISE CONSTANT ARGUMENTS

<sup>1</sup>Muminov M.I. , <sup>2</sup> Jumaev Z.Z.

<sup>1</sup> *Department of Mathematical Sciences, Faculty of Science, Universiti Teknologi Malaysia,  
Malaysia*

e-mail: mukhiddin@utm.my

<sup>2</sup> *Department of Mathematics and Information Communication, Samarkand State University,  
Uzbekistan*

e-mail: zafarlangar@mail.ru

In this note we describe all conditions for the solvability of periodical solutions of second-order neutral delay-differential equations with piecewise constant arguments of the form

$$x''(t) + p(t)x''(t-1) = q(t)x([t]) + f(t), \quad (1)$$

where  $[\cdot]$  denotes the greatest integer function,  $p$ ,  $q$  and  $f$  are periodic functions. We give explicit formula for the 2-periodic solutions of the equation for the case when  $p(t)$ ,  $q(t)$  and  $f(t)$  are 2-periodic continuous functions.

Note that in the paper [1] was investigated the equation (1) for the case when  $p$  and  $q$  are nonzero real or complex constants, and  $f(t)$  is complex valued periodic function. The existence problem reduced the problem to a system of algebraic equations. It was given explicit formula for the solutions of the equation and constructed counter examples to some previous findings concerning uniqueness of solution.

A solution of (1) is defined in [2] as follows

**Definition** A function  $x$  is called a solution of (1) if the following conditions are satisfied:

- (i)  $x$  and  $x'$  are continuous on  $\mathbf{R}$ ;
- (ii) the second-order derivative of  $x(t)$  exists everywhere, with possible exception at points  $t = n, n \in \mathbf{Z}$ , where one-sided second-order derivatives of  $x(t)$  exist;
- (iii)  $x$  satisfies (1) on each interval  $(n, n + 1)$  with integer  $n \in \mathbf{Z}$ .

We introduce the following functions

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \int_0^t \int_0^{t_1} \frac{f(s) - p(s)f(s+1)}{1 - p(s)p(s+1)} ds dt_1, \\
 a_{00}(t) &= \int_0^t \int_0^{t_1} \frac{q(s)}{1 - p(s)p(s+1)} ds dt_1, & a_{01}(t) &= - \int_0^t \int_0^{t_1} \frac{p(s)q(s+1)}{1 - p(s)p(s+1)} ds dt_1 \\
 a_{10}(t) &= \int_0^1 \int_0^{t_1} \frac{q(s)}{(1 - p(s)p(s+1))} ds dt_1 + \int_1^t \int_0^1 \frac{q(s)}{1 - p(s)p(s+1)} ds dt_1 - \int_1^t \int_1^{t_1} \frac{p(s)q(s+1)}{1 - p(s)p(s+1)} ds dt_1 \\
 a_{11}(t) &= - \int_0^1 \int_0^{t_1} \frac{p(s)q(s+1)}{1 - p(s)p(s+1)} ds dt_1 - \int_1^t \int_0^1 \frac{p(s)q(s+1)}{1 - p(s)p(s+1)} ds dt_1 + \int_1^t \int_1^{t_1} \frac{q(s)}{1 - p(s)p(s+1)} ds dt_1 \\
 a_{20} &= \int_0^1 \frac{q(s)}{1 - p(s)p(s+1)} ds + \int_1^2 \frac{p(s)q(s+1)}{1 - p(s)p(s+1)} ds, & a_{21} &= - \int_0^1 \frac{p(s)q(s+1)}{1 - p(s)p(s+1)} ds + \int_1^2 \frac{q(s)}{1 - p(s)p(s+1)} ds.
 \end{aligned}$$

Let  $x(t)$  be a 2-periodic function defined as

$$\begin{cases} x(t) = x'(0)t + a_{00}(t)x(1) + (1 + a_{01}(t))x(0) + F(t) & \text{for } t \in [0, 1) \\ x(t) = x'(0)t + a_{10}(t)x(1) + (1 + a_{11}(t))x(0) + F(t) & \text{for } t \in [1, 2) \end{cases} \tag{2}$$

where  $x(1), x(2),$  and  $x'(0)$  are unknown numbers. We write the system of equations

$$\begin{cases} (1 + a_{00})(1)x(0) + (-1 + a_{01})(1)x(1) + x'(0) = -F(1) \\ a_{10}(2)x(0) + a_{11}(2)x(1) + 2x'(0) = -F(2) \\ a_{20}x(0) + a_{21}x(1) = -F'(2) \end{cases} \tag{3}$$

and denote by  $\Delta$  a determinant of the matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 + a_{00}(1) & -1 + a_{01}(1) & 1 \\ a_{10}(2) & a_{11}(2) & 2 \\ a_{20} & a_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

**Theorem 1.** Let  $1 - p(t)p(t + 1) \neq 0$  for  $t \in [0, 2]$ .

(i) If  $\Delta \neq 0$ . Then equation (1) has a unique 2-periodic solution  $x$  having the form (2), where  $(x(1), x(2), x'(0))$  is the solution of (3).

(ii) If  $\Delta = 0$  and  $F = (F(1), F(2), F'(2)) = (0, 0, 0)$ , then equation (1) has an infinite number of 2-periodic solutions having the form

$$\begin{aligned}
 x_\alpha(t) &= \alpha(x'(0)t + a_{00}(t)x(1) + (1 + a_{01}(t))x(0)) + F(t) & \text{for } t \in [0, 1) \\
 x_\alpha(t) &= \alpha(x'(0)t + a_{10}(t)x(1) + (1 + a_{11}(t))x(0)) + F(t) & \text{for } t \in [1, 2),
 \end{aligned}$$

where  $(x(1), x(2), x'(0))$  is an eigenvector of  $M$  corresponding to 0,  $\alpha$  is any number.

(iii) If  $\Delta = 0$  and If  $\text{rank} M < \text{rank}(M | F^t)$ , where  $F = (F(1), F(2), F'(2))$ , then equation (1) has no 2-periodic solution.

**Acknowledgements.** *This work was supported by the Malaysian Ministry of Education through the Research Management Center (RMC), Universiti Teknologi Malaysia (FRGS, Votes: 5F235).*

## References

1. *Mukhiddin I. Muminov and Ali H. M. Murid.* Existence conditions for periodic solutions of second-order neutral delay differential equations with piecewise constant arguments. *Open Mathematics*, Volume 18, Issue 1, Pages 93-105.
2. *AitDads E., Lhachimi L.* New approach for the existence of pseudo almost periodic solutions for some second-order differential equation with piecewise constant argument, *Nonlinear Analysis*. 64 (2006), 1307-1324.

## ESTIMATION OF COVARIANCE MATRICES

<sup>1</sup>MustafaKhalid NurIzyan, <sup>2</sup>MdYusof Zahayu

<sup>1</sup> *Kulliyah Muamalat and Management Sciences, Sultan Abdul HalimMu'adzam Shah International Islamic University, 09300 Kuala Ketil, Kedah, Malaysia,*  
e-mail: nurizyan@unishams.edu.my

<sup>2</sup> *School of Quantitative Sciences, Universiti Utara Malaysia, 06010 Sintok, Kedah, Malaysia,*  
e-mail: zahayu@uum.edu.my

The important of covariance matrices from samples of multivariate data consist 1) estimation of principle components and eigenvalues, (2) construction of linear discriminant functions, (3) establishing independence and conditional independence and (4) setting confidence intervals on linear functions. In statistics, sometimes the covariance matrix of a multivariate random variable is not known but has to be estimated. Estimation of covariance matrices then deals with the question of how to approximate the actual covariance matrix on the basis of a sample from the multivariate distribution. Statistical analyses of multivariate data often involve exploratory studies of the way in which the variables change in relation to one another and this may be followed up by explicit statistical models involving the covariance matrix of the variables. Thus the estimation of covariance matrices directly from observational data plays two roles, (1) to provide initial estimates that can be used to study the inter-relationships and (2) to provide sample estimates that can be used for model checking. The purpose of this paper is to provide readers with an overview of Estimation of covariance matrices. More specifically, to provide a brief historical review of development related to Estimation of covariance matrices; to describe the major features of each, highlighting strengths and limitations with providing some example using real dataset. The material in this paper is presented in five sections. Begin with overview of the estimation in a general context and follow by Maximum-likelihood estimation for the multivariate normal distribution in the second section. The third section emphasized intrinsic covariance matrix estimation that consist intrinsic expectation and bias of the sample covariance matrix. The fourth and fifth section discuss in detail about shrinkage estimation and nearest valid matrix. Hence, estimates of covariance matrices are required at the initial stages of principal component analysis and factor analysis, and are also involved in versions of regression analysis that treat the dependent variables in a data-set, jointly with the independent variable as the outcome of a random sample.

**Key Words:** covariance matrices, multivariate, exploratory studies, regression analysis, Maximum-likelihood estimation



## EXISTENCE AND UNIQUENESS WITH ULAM STABILITY RESULTS FOR THE SOLUTION OF NONLINEAR FRACTIONAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

<sup>1</sup>Naimi Abdellouahab, <sup>2</sup>Brahim Tellab, <sup>3</sup> Khaled Zennir

<sup>1, 2</sup> *Department of Mathematics, Ouargla University*

e-mail: <sup>1</sup>naimi.abdelouahab@univ-ouargla.dz, <sup>2</sup>brahimtel@yahoo.fr

<sup>3</sup> *Department of Mathematics, College of Sciences and Arts, Al-Ras, Qassim University,  
Kingdom of Saudi Arabia*

e-mail: k.zennir@qu.edu.sa

This paper deals with the existence and uniqueness with Ulham stability results for the solution of a Neutral fractional integro-differential problem with nonlocal conditions. Using the Nonlinear alternative for single valued maps and Banach fixed point theorems to proof our main results. An example is given to illustrate our study.

### References

1. *1. A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo. Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland Math. Stud. 204, Elsevier, Amsterdam, 2006.*
2. *2. B. Ahmad, Y. Alruwaily, A. Alsaedi and S. K. Ntouyas. Existence and stability results for a fractional order differential equation with non-conjugate Riemann-Stieltjes integro-multipoint boundary conditions, Mathematics 7(249) (2019), 1-14.*
3. *3. I. Podlubny. Fractional differential equations, Mathematics in Science and Engineering, vol, 198, Academic Press, New York/Londin/Toronto, 1999.*
4. *4. B. Ahmad, A. Alsaedi, S. Salem and S. K. Ntouyas. Fractional differential equation involving mixed nonlinearities with nonlocal multi-point and Reimann-Steiljes integral-multi-strip conditions, Fractal and Fractional 3(34) (2019), 1-16.*
5. *. M. Momani. Local and global uniqueness theorems on differential equations of non-integer order via Bihari's and Gronwall's inequalities, Revista Técnica de la Facultad de Ingenier?a Universidad del Zulia 23(1) (2000), 66-69.*

MSC2010 \*\*\*

## LOGISTIC REGRESSION ANALYSIS ON THE DETERMINANTS OF HOMEOWNERSHIP

<sup>1</sup>Norani Binti Amit, <sup>2</sup>Hasimah Binti Sapiri, <sup>3</sup>Zahayu Binti Md Yusof

<sup>1</sup> *Department of Statistics, Faculty of Computer and Mathematical Sciences, Universiti  
Teknologi MARA Cawangan Negeri Sembilan, Seremban Campus, 70300 Seremban, Negeri  
Sembilan, Malaysia*

e-mail:norani@uitm.edu.my

<sup>2</sup> *Department of Mathematics Statistics, School of Quantitative Sciences, Universiti Utara  
Malaysia, 06010 UUM Sintok, Kedah, Malaysia,*

e-mail:hasimah@uum.edu.my

<sup>3</sup> *Institute of Strategic Industrial Decision Science Modeling (ISIDM), Scjool of Quantitative  
Sciences, Universiti Utara Malaysia, 06010 UUM Sintok, Kedah, Malaysia,*

e-mail:zahayu@uum.edu.my

Nowadays, house become a necessity for everyone. Owning a house is the ultimate goal for every Malaysian. However, homeownership is a complex issue which result from many determinants. Therefore, this study aims to determine the most significant factors to homeownership. The factors involve are financial assistance, housing performance, housing motivational, housing market and housing policy. Based on the sample of 100 respondents, questionnaire surveys were distributed for their feedbacks. Binary logistic regression analysis

was conducted throughout the study and the data were analyzed using IBM SPSS Statistical Software. Data analysis revealed that financial assistance and housing policy significantly influenced the homeownership. The findings from this study will be beneficial for the policy makers and the developers to gain a better understanding of consumer needs and the factors that make them intended to own a house in Malaysia.

### ON THE TOPOLOGICAL INDICES OF THE LINE GRAPHS OF POLYPHENYLENE DENDRIMER

<sup>1</sup>Nur Hafiza Azwani Mohd Saidi, <sup>2</sup>Mohamad Nazri Husin, <sup>3</sup>Nur Bains Ismail

<sup>1,2,3</sup>*Faculty of Ocean Engineering Technology and Informatics, University Malaysia  
Terengganu, Terengganu, Malaysia*

e-mail: <sup>1</sup>hafizaazwani@gmail.com

Chemical graph theory are usually use in topological indices for studied their bioactivity and physical-chemical characteristic. These topological indices mostly use in the fields of chemistry, gene therapy and other areas of applied sciences. In our article, we study the line graph of one of the families of Polyphenylene dendrimer, namely  $D_3[n]$ . We also compute their topological indices of the line graph of Polyphenylene dendrimer. In additional, to makes more interesting, we analyzed and showed the behavior of above computed topological indices towards Polyphenylene dendrimer.

### FTSE BURSA MALAYSIA KLCI PERFORMANCE PREDICTION USING COMBINATION OF PRINCIPAL COMPONENT ANALYSIS AND ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS

<sup>1</sup>Nur Zahidah Ismail, <sup>2</sup>Siti Khuzaimah Soid, <sup>3</sup>Zaileha Md Ali, <sup>4</sup>Mohd Rijal Illias

<sup>1</sup>*Faculty of Computer and Mathematical Sciences, Universiti Teknologi MARA, 40450 UiTM  
Shah Alam, Selangor, Malaysia*

e-mail: <sup>1</sup>khuzaimah@tmsk.uitm.edu.my

The problem of hyperbolic tangent fluid model for stagnation flow of hybrid nanofluid over a stretching sheet is studied in this study. Constitutive relation of an incompressible hyperbolic tangent model as well as consideration of thermal radiation and Newtonian heating is taken into account. Using a nonlinear partial differential equations system, the physical problem is modeled and transformed into ordinary differential equations by using similarity transformation. Along with the boundary conditions, the equations are solved numerically using `bvp4c` in the MATLAB software. A comparison with previous literature shows an excellent agreement. The effect of governing parameters such as power law index, Weissenberg number, ratio of velocity, suction/injection, radiation, and Biot number are investigated. The changes in the value of volume fraction of diamond and silicon dioxide are also studied. The velocity behavior is significantly influenced by the volume fraction of diamond and silicon dioxide, suction, power law index, Weissenberg number, and ratio of velocity while temperature is influenced by radiation parameter. The rate of heat transfer rises when radiation parameter increased. The increasing value on the power law index caused the thickness of the boundary layer to increase and fluid's behavior changes to shear thinning and resulting to a lower viscosity. The thickness of boundary layer becomes thicker as the Weissenberg number increases. Any increment in the values of radiation parameter and Biot number caused no change in the velocity profile since the parameter does not affect the momentum equation and consequently the skin friction coefficient will remain unchanged.

## EFFECTS OF RADIATION AND CHEMICAL REACTION ON 3D STRETCHED FLOW WITH CONVECTIVE BOUNDARY CONDITION IN THE PRESENCE OF HEAT GENERATION

<sup>1</sup>Rabiatuladawiyah Ismail, <sup>2</sup>Ahmad Sukri Abd Aziz, <sup>3</sup>Mohd Rijal Ilias

<sup>1</sup>*Faculty of Computer and Mathematical Sciences, Universiti Teknologi MARA (UiTM),  
40450 Shah Alam, Selangor Darul Ehsan, Malaysia*

e-mail: rabiatuladawiyah@gmail.com

<sup>2</sup>*Faculty of Computer and Mathematical Sciences, Universiti Teknologi MARA (UiTM),  
40450 Shah Alam, Selangor Darul Ehsan, Malaysia*

e-mail: sukri@tmsk.uitm.edu.my

<sup>3</sup>*Faculty of Computer and Mathematical Sciences, Universiti Teknologi MARA (UiTM),  
40450 Shah Alam, Selangor Darul Ehsan, Malaysia*

e-mail: rijal@tmsk.uitm.edu.my

There are many researches on the study of boundary layer flow on stretching surface because of its important applications in the industries. For example annealing, thinning, copper wire's drawing, aerodynamic extrusion of plastic sheets and fiber, paper manufacture, crystal shining and glass blowing. This study considers a three- dimensional stretched flow of fluid and heat and mass transfer through convective boundary condition. The presence of radiation, chemical reaction and heat generation will be considered. By using the similarity transformation, the governing of partial differential equations of momentum, energy and concentration are transformed into the non-linear ordinary equation. These equations are solved using Runge-Kutta-Fehlberg method with shooting technique in MAPLE. The numerical values of skin friction coefficients, local Nusselt number and local Sherwood number are tabulated and discussed. The influences of the various parameters on the velocity, temperature and concentration profiles are graphically presented and discussed. The results obtained show that the velocity profiles decrease as the Hartman number increase. On the other hand, ratio parameter causes the velocity profile in x-direction increase and the velocity profile in y-direction increase. Temperature profile increases because of Hartmann number, Biot number, radiation parameter and heat generation parameter and decreases because of Prandtl number and ratio parameter. Hartmann number becomes the reason of the increase of concentration of the boundary layer, meanwhile the Schmidt number and chemical reaction cause the concentration to decrease.

### References

1. Hayat, T, Shehzad, SA, Qasim, M, and Asghar, S. Three-dimensional stretched flow via convective boundary condition and heat generation/absorption, *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, 24(2), 2014, 342-358.
2. Madhu, M, Balaswamy, B, and Kishan, N. Three-dimensional MHD boundary layer flow due to an axisymmetric shrinking sheet with radiation, viscous dissipation and heat source/sink, *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 21(1), 2016, 393-406.
3. Olanrewaju, P, Arulogun, O, and Adebimpe, K. Internal heat generation effect on thermal boundary layer with a convective surface boundary condition, *American Journal of Fluid Dynamics*, 2(1), 2012, 1-4.

## ECONOMETRIC ANALYSIS AND STATISTICAL ESTIMATING THE PARAMETERS OF OKUN'S LAW FOR UZBEKISTAN

<sup>1</sup> Raimova G., <sup>2</sup> Abdiganiev D.

<sup>1</sup> *V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences*

e-mail: raimova@gmail.com

<sup>2</sup> *University of World Economy and Diplomacy, Tashkent*

e-mail: dauranbek.abdiganiev@gmail.com

### Actuality of the topic

Providing the country's economic growth and economic stability is one of the main goals of any state. The only way to ensure a prosperous life for the population is to achieve economic growth. Unemployment in the country is a potential deficit of GDP (Gross Domestic Product). The reason is that, the economic inactivity of the able-bodied person leads to the fact that goods and services not produced by them are not reflected in GDP calculation. Therefore, the government pursues policies aimed at reducing unemployment, including the creation of new vacancies to provide employment, the opening of new enterprises and the allocation of subsidies for business expansion.

### Literature Review

Since the discovery of the law of the effect of unemployment on economic growth, many scholars have studied this subject by means of scientific research. Arthur Okun was one of the first to observe the law, and the world-renowned scholars who studied it were Lawrence Ball and TouvarYales, Edward Knoke, Martin Prahouni, and Robert Gordon. P. Shevtsov, I. Promakhina and Van Lulu, E. Gurvich, O. Akhundova and others have covered this in their scientific articles. Of course, there are still a lot of research studies being learnt about this law.

### Introduction

One of the classic laws of economics is the link between unemployment and economic growth. In the traditional economy, there is an inverse relationship between them. That is, an increase in the unemployment rate in a country slows down economic growth, and conversely, a decrease in unemployment increases the rate of economic growth. If the influence of other factors does not increase, such a relationship between these two factors is observed in the economies of different countries and is more important at the macroeconomic level [1]. This law is called Okun's law in the name of the economist who first observed this law, and it is expressed by the following formula:

$$100\% \cdot \frac{Y_t - Y_t^*}{Y_t^*} = \beta \cdot (u_t - u_t^*).$$

Here  $Y_t^*$  is the volume of production at full employment in time (usually measured in GDP),  $Y_t$  is the actual volume of production in real time (real GDP),  $u_t^*$  is the natural rate of unemployment,  $u_t$  is the real unemployment rate,  $\beta$  - coefficient of correlation between GDP and unemployment.

There are several difficulties in applying Okun's law in practice, as these indicators may not be accurately measured by statistical agencies ( $Y_t^*$  and  $u_t^*$ ). Therefore, it is appropriate to write an equivalent formula for Okun's law as follows (through GDP growth and unemployment) [2]:

$$100 \cdot \frac{\Delta Y_t}{Y_{t-1}} = \alpha + \beta \cdot \Delta u_t \quad (1)$$

where  $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$  is real GDP growth for the difference  $t$  year,  $\Delta u_t = u_t - u_{t-1}$  is growth of the unemployment rate for the difference  $t$  year,  $\alpha$ ,  $\beta$  - coefficients. This formula, using empiric observations by A.Okun, analyses real GDP and unemployment growth in the

United States in the 1950s and 1960s through economic regression and derives the following equation [3]:

$$100 \cdot \frac{\Delta Y_t}{Y_{t-1}} = 3\% - 2 \cdot \Delta u_t$$

According to this formula, if unemployment in the United States were at a natural level, we could see that real GDP grew by an average of 3% per year. If the real unemployment rate increases/decreases by 1%, real GDP decreases/increases by an average of 2%.

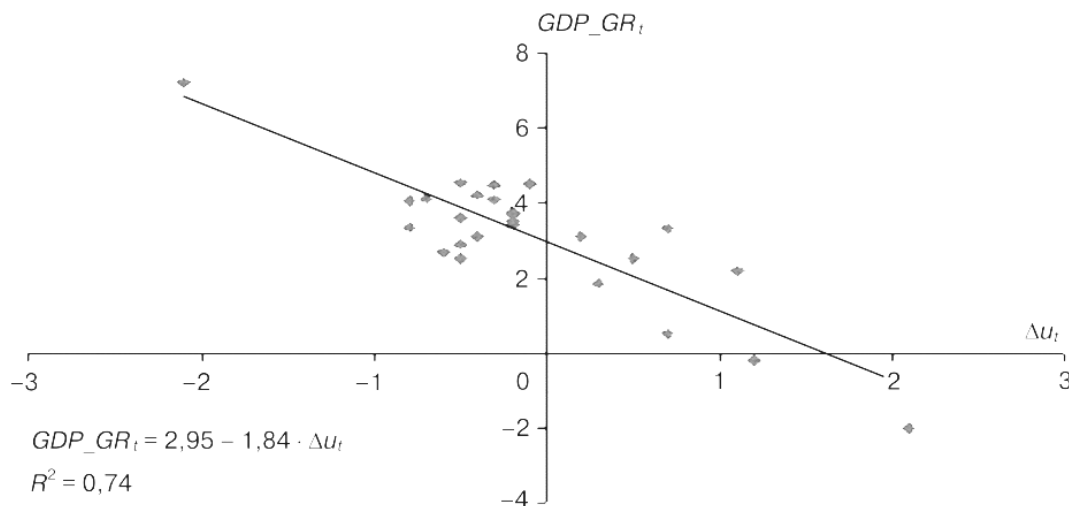


Fig. 1: The correlation between real GDP growth and real unemployment rate increase of the USA in 1991-2016.

From the first figure's graph of the equation of the linear regression obtained in the United States from 1991 to 2016, we can see that the coefficients of the equation are very close to Okun's calculation ( $\beta \approx -2$ ,  $\alpha \approx 3\%$ ) and the coefficient of determination is 0,74 (see Fig. 1).

#### **Discussion: Evaluation of the parameters of the Okun's model on the basis of statistical data of economic growth and unemployment in Uzbekistan.**

To introduce Okun's law for Uzbekistan, we express real GDP growth by means of PPP (Purchasing Power Parity), and we determine the change in the real unemployment rate using the formula  $\Delta u_t = u_t - u_{(t-1)}$ . To do this, we analyse the 26-year data of the World Bank <sup>1</sup> account of GDP based on PPP (unit in international dollars, \$) and the calculation of the unemployment rate based on the model of the International Labour Organization <sup>2</sup> from 1993 to 2018.

According to our model, the correlation coefficient between real GDP growth and real unemployment is  $r = -0,656$ , and there is a relatively strong negative correlation <sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} \text{Pearson correlation of GDP growth and } \Delta u &= -0,656, \\ P\text{-Value} &= 0,000. \end{aligned}$$

If we study Okun's law on the economy of Uzbekistan, we may encounter interesting situations. When the real unemployment rate fell by 1%, the real GDP growth rate was  $\beta = 2,046$  as Oaken observed, whereas, as the unemployment rate was natural, the economic growth rate was  $\alpha = 7,299$ . This proves once again that achieving a natural unemployment rate is one of the most important goals for Uzbekistan (see Fig. 2).

<sup>1</sup>Source: <https://data.worldbank.org/indicator/NY.GDP.MKTP.PP.CD?locations=UZ>

<sup>2</sup>Source: [https://www.ilo.org/shinyapps/bulkexplorer9/?lang=en&segment=indicator&id=UNE\\_2EAP\\_SEX\\_AGE\\_RT\\_A](https://www.ilo.org/shinyapps/bulkexplorer9/?lang=en&segment=indicator&id=UNE_2EAP_SEX_AGE_RT_A)

<sup>3</sup>All calculations with this were implemented by using MINITAB® Release 14.12.0 software programme

Таблица 1: Statistics indicators for Uzbekistan during 1993-2018.

years	GDP, PPP (US dollar)	$100 * (\Delta Y_t) / Y_{t-1}$	Unemployment rate (by WLOBΓЄs methods) %	$\Delta u$
1993	47903115578,21	0,01	4,90	2,00
1994	46381875044,92	-3,18	7,30	2,40
1995	46928234878,18	1,18	7,80	0,50
1996	48599892927,78	3,56	10,70	2,90
1997	52008718285,85	7,01	10,90	0,20
1998	54855632779,37	5,47	13,30	2,40
1999	58040488814,54	5,81	13,30	0,00
2000	61613580202,98	6,16	12,12	-1,18
2001	65586790008,92	6,45	11,00	-1,12
2002	69271523010,30	5,62	10,21	-0,80
2003	73544416724,05	6,17	9,22	-0,99
2004	81150200578,72	10,34	8,06	-1,16
2005	89493608346,39	10,28	6,93	-1,13
2006	99072215118,07	10,70	5,85	-1,08
2007	111370797677,13	12,41	4,99	-0,86
2008	123788554573,71	11,15	4,89	-0,10
2009	134774367421,58	8,87	5,04	0,15
2010	146703171945,99	8,85	5,36	0,32
2011	161426817074,78	10,04	4,96	-0,40
2012	176657350905,23	9,43	4,87	-0,09
2013	193391395528,89	9,47	4,86	-0,01
2014	211197186460,80	9,21	5,09	0,23
2015	229353083132,83	8,60	5,15	0,06
2016	245991189283,03	7,25	5,16	0,01
2017	261850539437,46	6,45	4,97	-0,19
2018	281968100008,38	7,68	5,22	0,25

The results of the regression analysis for the above 26-year data show that the determination coefficient for the regression model, which represents the change in real unemployment rate as a change in real GDP, is  $R^2 = 43\%$ .

According to the International Labour Organization's forecast for 2020<sup>4</sup>, the unemployment rate in Uzbekistan, calculated on the basis of the ILO model, is expected to be about 5,6% . Therefore, based on our model for the difference  $\Delta u_{2020} = u_{2020} - u_{2019} = 0,101$ , we calculated the economic growth according to Okun's law on GDP by PPP:

$$\frac{\Delta Y_{2020}}{Y_{2019}} = 7,092\%$$

In other words, by 2020, Uzbekistan's GDP in terms of PPP is expected to grow by 7.092%. Below are the results of the MINITAB program, which was analysed statistically:

<i>New Obs</i>	<i>Fit</i>	<i>SE Fit</i>	<i>95% CI</i>	<i>95% PI</i>
1	7,092	0,544	(5,970; 8,214)	(1,260; 12,924)

Hereby *Fit* = 7,0921 - prediction, *SE Fit* = 0,544 - standard error of the estimation, *95% CI* and *95% PI* - 95% prediction and confidence intervals for the estimation.

#### Conclusions based on the model

<sup>4</sup>Source: [https://www.ilo.org/wcmsp5/groups/public/-/%dgreports/-dcomm/-publ/documents/publication/wcms\\_734455.pdf](https://www.ilo.org/wcmsp5/groups/public/-/%dgreports/-dcomm/-publ/documents/publication/wcms_734455.pdf)

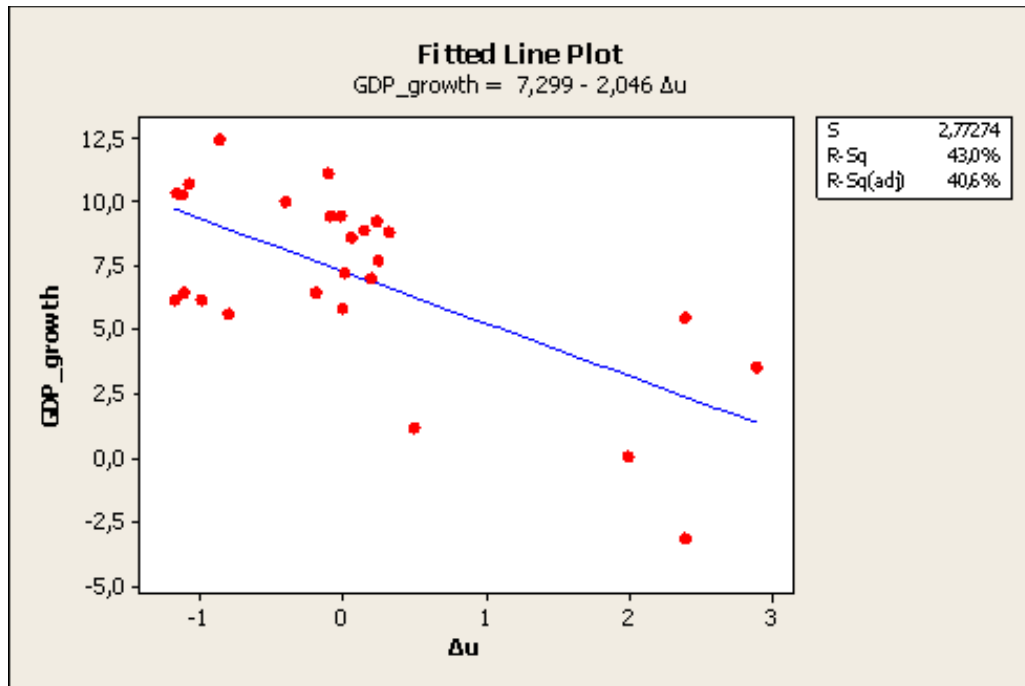


Рис. 2: Linear regression for the Okun's Law in Uzbekistan for 1993-2017 years.

In Uzbekistan, GDP growth by PPP, which we have considered, and the unemployment rate according to the ILO model, have averaged 7-9% and 4.5-5.5%, respectively, in recent years. Over the last 10 years, a stable result has been achieved on these indicators. Analysing the 26 years studied, it can be said that after gaining independence, the country faced some economic problems, and there was a mismatch between the analysed indicators. However, stability has been achieved in recent years as a result of sound government economic policies.

Okun's law coefficients serve to better visualise the Uzbek economy. In the context of natural unemployment in the economy, GDP growth by PPP is  $\alpha = 7,299\%$ . For a developing country, this situation is considered as natural. The main qualifying factor of Okun's law is  $\beta = 2,046$ , which indicates that Okun's law applies in Uzbekistan as well as in other countries.

Applying Okun's law not only helps to understand the economy, but also helps to determine the future policy of the state. An analysis of the latest data suggests that if the unemployment rate rises to 0.101 next year, GDP growth by PPP will be 7,092%.

## References

1. *Prachowny, Martin F J* Okun's Law: Theoretical Foundations and Revised Estimates, *The Review of Economics and Statistics*, pp.331-336, volume 75, 1993.
2. *Laurence M. Ball and Joao Tovar Jalles and Prakash Loungani* Do Forecasters Believe in Okun's Law? An Assessment of Unemployment and Output Forecasts, *International Monetary Fund*, number 2014/024, 2014.
3. *Okun, Arthur M.* Potential GNP: Its measurement and significance, *Proceedings of the business and economics statistics section*, DC: American Statistical Association, pp 98-104, 1962, Washington.
4. *Neter John, Wasseman William* Applied Statistics, 4th edition. Allyn & Bacon Publisher, 1993.

## A NEW APPROACH IN SOLVING TRANSPORTATION PROBLEM BASED ON MODIFICATIONS OF TDM AND INTEGRATION OF KSAM ALGORITHMS

<sup>1</sup>Sam'an Muhammad, <sup>2</sup>Farikhin, <sup>3</sup>Surarso Bayu, <sup>4</sup>Irwanto Bambang

<sup>1,2,3,4</sup> *Department of Mathematics, University of Diponegoro, Jl. Prof Soedarto, SH Tembalang Semarang, 1269, Indonesia,*

<sup>1</sup>e-mail: muhammad.92sam@gmail.com

<sup>2</sup>e-mail: farikhin.math.undip@gmail.com

<sup>3</sup>e-mail: bayusurarso@yahoo.co.id

<sup>4</sup>e-mail: b\_irwanto@yahoo.co.id

<sup>5,6</sup> *Faculty of Technology Management and Business, Universiti Tun Hussein Onn Malaysia (UTHM) Batu Pahat, Johor, 86400, Malaysia,*

<sup>5</sup>e-mail: yosza@uthm.edu.my

<sup>6</sup>e-mail: mazarudin@uthm.edu.my

In this paper, the Initial Basic Feasible Solution will be referred to as an Initial Feasible Solution (IFS). There are two phases in solving transportation problems (TP). An IFS will be determined in the first phase by using the least distribution cost and followed by calculation of the optimal solution in the second phase. In some cases, it was found that TP had equal values of the distribution least costs so that the existing methods [1,2,3] will be generated two or more IFS values. The newly proposed algorithm is generated through the modification of Total Difference Method (TDM) and followed by integrating with Karagul-Sahin Approximation Method (KSAM) algorithm, is capable to obtain IFS as a basic solution to solve the TP. Based on twenty-five numerical examples were selected from reputation journals used to evaluate the performance of the newly developed algorithm. The computational performances have been compared to the existing methods in the literature and the results shown this algorithm can solve the TP with similar values optimal solution even better minimal solutions than existing methods.

### References

1. *Hosseini E.* Three new methods to find initial basic feasible solution of transportation problems, *Applied Mathematical Sciences*, 37, 2017, 1803–1814.
2. *Azad S. M. A. K., Hasan M. K.* An effective algorithm to solve cost minimising transportation problem, *Int. J. Mathematics in Operational Research*, 4, 2019, 434–445.
3. *Karagul K., Sahin Y.* A novel approximation method to obtain initial basic feasible solution of transportation problem, *Journal of King Saud University – Engineering Sciences*, 32, 2020, 211–218.



## IMPROVING SMARTPHONE SELECTION BY USING GRAPH THEORY MATRIX APPROACH WITH GENERALIZED FUZZY NUMBER

<sup>1</sup>Sumarni Abu Bakar, <sup>2</sup>Noor Syahida Fauzi

<sup>1</sup> *Mathematics Department, Faculty of Computer and Mathematical Sciences, UiTM Malaysia, 40000 Shah Alam, Malaysia,*

e-mail: sumarni@tmsk.uitm.edu.my

<sup>2</sup> *Mathematics Department, Faculty of Computer and Mathematical Sciences, UiTM Malaysia, 40000 Shah Alam, Malaysia,*

e-mail: syahidafauzi95@gmail.com

A number of studies have proposed a method of ranking a smartphone due to the fact that its uses is becoming diverse and thus become increasingly important as a tool in helping people to make everyday decisions. But most of the studies have exhibited shortcoming associated to level of confidence of decision makers in giving a judgement, which significantly influences final ranking result. This study proposes Graph Theory and Matrix approach (GTMA) on ranking smartphone alternatives that ensures consideration of uncertainty and confidence level upon their judgement towards smartphone selection. A Generalized Triangular Fuzzy Number (GTFN) is used in the calculation of interrelation matrix which leads to give more meaningful value of importance weight of the attributes. Selection index is then calculated to rank the smartphone through fuzzy determinant. A numerical example is provided to illustrates the proposed approach.

## ARTIFICIAL FISH SWARM ALGORITHM FOR PARALLEL IDENTICAL MACHINES SCHEDULING WITH RELEASE DATE

Tahani Jabbar Khraibet

*Department of Mathematics, Thi-Qar Directorates of Education, Ministry of Education, Iraq*

e-mail: tahani@utq.edu.iq

The present paper deals with the problem of scheduling jobs on parallel identical machines with minimizing of the total weight completion times and the late work with release date. This problem is denoted by  $P_2/r_j/\sum_{j=1}^n(w_jc_j + V_j)$  is NP-hard and far as we know, this problem has not been studies yet. In view of the NP-hardness of the problem an Artificial Fish Swarm Algorithm approach is proposed to solve it. The Computational results show that the proposed algorithm is capable of finding near optimal solutions (approximate solutions) to problems with up to 1200 jobs. This method that is used in this paper (Artificial Fish Swarm Algorithm) is programmed by using a programmed language (MATLAB Language). **This is a result of the**

**research** Table : The performance of local search methods and the best solution for

$$n \in 5, 10, 30, 50, 100, 500, 1000, 1200$$

n	Ex	AFSA	Time
5	1	13.63609	9.879991
	2	16.00326	10.3206
	3	10.30523	10.05265
	4	10.46103	9.845829
	5	12.72918	9.999281
	6	14.69218	9.897615
	7	11.13092	9.943865
	8	20.25709	10.19847
	9	18.29417	9.80817
	10	11.56403	9.764166
Av.Time			9.971063
10	1	24.93856	11.89948
	2	38.62121	12.51555
	3	54.04922	12.94725
	4	43.72513	12.45218
	5	29.28078	12.43473
	6	52.78733	12.37479
	7	35.2237	12.13919
	8	23.79201	12.40661
	9	36.00558	12.24896
	10	39.40869	12.28333
Av.Time			12.37021
30	1	125.9223	20.69776
	2	124.5646	20.73017
	3	143.5585	20.9027
	4	126.4346	20.61655
	5	108.8629	20.35206
	6	152.3008	20.53967
	7	133.0895	20.53949
	8	110.0852	20.39803
	9	131.2294	20.59935
	10	132.5785	20.77021
Av.Time			20.6146

n	Ex	AFSA	Time
50	1	182.0209	27.33136
	2	240.3774	29.18686
	3	216.5344	29.03022
	4	245.412	28.90366
	5	242.3899	29.50109
	6	237.2015	29.40666
	7	243.8984	29.2207
	8	211.257	28.91162
	9	211.6568	28.89822
	10	245.5367	29.89368
Av.Time			27.33136
100	1	546.9144	50.33064
	2	517.4986	50.80146
	3	533.8746	50.3354
	4	490.9725	49.46752
	5	520.4406	49.2798
	6	529.7786	49.73697
	7	474.2669	51.45736
	8	460.3926	49.43084
	9	488.3553	48.87486
	10	476.8677	48.88365
Av.Time			49.85985
500	1	2640.813	203.8029
	2	2589.176	203.9342
	3	2647.837	204.01
	4	2769.395	204.0823
	5	2750.771	204.3427
	6	2776.041	204.1379
	7	2712.679	203.4098
	8	2692.227	203.1137
	9	2685.192	203.1605
	10	2745.138	203.2301
Av.Time			203.7224
1000	1	5495.612	440.7404
	2	5506.796	479.6759
	3	5424.882	473.7486
	4	5506.596	466.4898
	5	5339.657	492.0958
	6	5433.163	492.5619
	7	5547.633	488.3724
	8	5546.446	489.2265
	9	5390.147	489.5947
	10	5308.692	490.2699
Av.Time			480.2776
1200	1	6566.159	572.39
	2	6600.687	565.129
	3	6717.588	564.7182
	4	6616.543	566.1685
	5	6595.569	567.65571
	6	6535.741	589.1607
	7	6395.161	584.7408
	8	6569.038	585.7667
	9	6571.334	586.713
	10	6662.522	586.5373
Av.Time			576.88

## References

1. *Smith W. E.* Various optimizers for single-stage production. *Naval Research Logistics Quarterly*, 3(1-2):59-66, 1956.
2. *Correa J. R. and Wagner M. R.* Lp-based online scheduling: from single to parallel machines, in *Integer Programming and Combinatorial Optimization*, vol. 3509 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 196-209,

2005.

3. L. XL. A new intelligent optimization-artificial fish swarm algorithm. PhD thesis, Zhejiang University, China, June(2003).
4. Du J., Leung J. Y., and Young Gi. H. Scheduling chain-structured tasks to minimize makespan and mean flow time. Information and Computation, 92(2):219-236, 1991.

## O'ZGARUVCHAN MUHITDAGI TARMOQLANUVCHI JARAYONLAR MOMENTLARI UCHUN TENGSIZLIKLAR

<sup>1</sup>Xusanbaev Ya.M., <sup>2</sup>Qudratov H.E.

<sup>1</sup> O'zRFA V.I.Romanovskiy nomidagi matematika instituti ,  
e-mail: yakubjank@mail.ru

<sup>2</sup> Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti,  
e-mail: qudratovh\_83@mail.ru

Faraz qilaylik  $Y_1, Y_2, \dots$  - qiymatlar sohasi  $N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$  bo'lgan va hosil qiluvchi funksiyalari  $f_1, f_2, \dots$  bo'lgan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lsin.  $Y_{n,i}, n, i \in N$  tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lib, barcha  $n, i \geq 1$  uchun  $Y_{n,i}$  tasodifiy miqdorning taqsimoti  $Y_n$  taqsimoti bilan ustma-ust tushsin.  $\eta$ - manfiy bo'lmagan butun qiymatlarni qabul qiluvchi, hosil qiluvchi funksiyasi  $\varphi$  bo'lgan tasodifiy miqdor bo'lib, u  $\{Y_{k,j}, k, j \in N\}$  tasodifiy miqdorlardan bog'liqsiz bo'lsin.  $N_0$  da qiymat qabul qiluvchi  $Z_n, n \geq 1$  tasodifiy miqdorlarni quyidagi rekurrent munosabat bilan aniqlaymiz:

$$Z_0 = \eta, \quad Z_n = \sum_{j=1}^{Z_{n-1}} Y_{n,j} \quad (1)$$

(1) jarayon tasodifiy sondagi zarrachalardan boshlanuvchi o'zgaruvchan muhitdagi Galton-Watson jarayoni deyiladi. (qarang, [1]). Agar  $f_i$  hosil qiluvchi funksiyalar bir xil bo'lsa, (1) jarayon Galton-Watson jarayonidan iborat bo'ladi.

Ehtimollar nazariyasining ko'pgina masalalarini yechishda, tasodifiy miqdorlar momentlarini baholash muhim masala hisoblanadi. Bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar yig'indisining momentlari uchun ko'pgina natijalar olingan (qarang, [2]-[4]). (1) munosabat bilan aniqlangan  $Z_n$  jarayon uchun  $EZ_n^p$  momentni hisoblash uchun uning  $E s^{Z_n}$  hosil qiluvchi funksiyasini ketma-ket differensiyallab, formulalar hosil qilish mumkin. Ammo bunda hosil bo'ladigan ifodalar  $p$  o'sishi bilan juda murakkab bo'lib boradi. Shu sababli  $EZ_n^p$  uchun yuqoridan baholar muhim o'rin tutadi.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\alpha_1 = E\eta, \quad \alpha_1^{(p)} = E\eta^p, \quad m_n := f_n'(1), \quad \mu_0 := 1, \quad \mu_n := \prod_{k=1}^n m_k,$$

$$\gamma_n^{(p)} = EY_{n,1}^p, \quad \Gamma_n^{(p)} = \prod_{j=1}^n \gamma_j^{(p)}, \quad \theta_n^{(p)} = E | Y_{n,1} - m_n |^p$$

Bundan keyin ko'rilayotgan barcha momentlar chekli deb faraz qilamiz.

**Teorema 1.** (1) jarayon berilgan bo'lsin. Quyidagi tengsizliklar o'rinli:

1. agar  $0 < p \leq 1$  bo'lsa

$$EZ_n^p \leq \alpha_1 \gamma_n^{(p)} \mu_{n-1}$$

2. agar  $p > 1$  bo'lsa

$$EZ_n^p \leq \alpha_1^{(p)} \Gamma_n^{(p)}$$

Yuqoridagi teoremadan bitta zarrachadan boshlanuvchi o'zgaruvchan muhitdagi tarmoqlanuvchi jarayonlar uchun quyidagi natija kelib chiqadi.

**Natija 1.** Agar  $\eta \equiv 1$  bo'lsa, u holda quyidagi tengsizliklar o'rinli:

1. agar  $0 < p \leq 1$  bo'lsa

$$EZ_n^p \leq \gamma_n^{(p)} \mu_{n-1},$$

2. agar  $p > 1$  bo'lsa

$$EZ_n^p \leq \Gamma_n^{(p)}.$$

**Teorema 2.** (1) jarayon berilgan bo'lsin. Quyidagi tengsizliklar o'rinli:

1. agar  $0 < p \leq 1$  bo'lsa

$$E|Z_n - E(Z_n/Z_{n-1})|^p \leq \alpha_1 \theta_n^{(p)} \mu_{n-1}$$

2. agar  $1 < p \leq 2$  bo'lsa

$$E|Z_n - E(Z_n/Z_{n-1})|^p \leq 2\alpha_1 \theta_n^{(p)} \mu_{n-1}$$

3. agar  $p > 2$  bo'lsa

$$E|Z_n - E(Z_n/Z_{n-1})|^p \leq C(p) \alpha_1^{(\frac{p}{2})} \theta_n^{(p)} \Gamma_{n-1}^{(\frac{p}{2})}$$

Yuqoridagi teoremadan bitta zarrachadan boshlanuvchi o'zgaruvchan muhitdagi tarmoqlanuvchi jarayonlar uchun quyidagi natija kelib chiqadi.

**Natija 2.** Agar  $\eta \equiv 1$  bo'lsa, u holda quyidagi tengsizliklar o'rinli:

1. agar  $0 < p \leq 1$  bo'lsa

$$E|Z_n - E(Z_n/Z_{n-1})|^p \leq \theta_n^{(p)} \mu_{n-1},$$

2. agar  $1 < p \leq 2$  bo'lsa

$$E|Z_n - E(Z_n/Z_{n-1})|^p \leq 2\theta_n^{(p)} \mu_{n-1},$$

3. agar  $p > 2$  bo'lsa

$$E|Z_n - E(Z_n/Z_{n-1})|^p \leq C(p) \theta_n^{(p)} \Gamma_{n-1}^{(\frac{p}{2})}.$$

### Adabiyotlar

1. Kersting G., Vatutin V.A. Discrete Time Branching Processes in Random Environment. Wiley Online Library, 2017.
2. Athreya K.B., Ney P.E. Branching processes, Springer - Verlag, Berlin. 1972.287p.
3. Петров В.В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. Москва, 1987.
4. Lin Z., Bai Z. Probability Inequalities, Springer - Verlag, Berlin, Heidelberg 2010.181p.

## INTERVAL EVALUATION OF ERRORS IN MODELING MULTI-MODE OBJECTS

<sup>1</sup>Yuldashev Ziyavidin, <sup>2</sup>Ibragimov Alimzhan, <sup>3</sup>Tokhirov Feruz

<sup>1</sup> *National University of Uzbekistan, Uzbekistan,*  
e-mail: ziyaut@mail.ru

<sup>2</sup> *Navoi state pedagogical institute, Uzbekistan,*  
e-mail: alim-ibragimov@mail.ru

<sup>3</sup> *Navoi state pedagogical institute, Uzbekistan,*  
e-mail: toxirovferuz@mail.ru

The application of logical-dynamic structures of modeling to multi-mode control objects is reduced to multiple computational experiments to implement packages of dynamic operations written in the form [1]:

$$X(t_N) = \prod_{s=1}^N K_s X(t_0) + \varepsilon, \quad (1)$$

where  $K_s$  is the functionally transformed matrix of the fixed  $s$ -th state of the system, and the error of modeling the  $\varepsilon = \varepsilon(\varepsilon_0, \delta_s^m, \varepsilon_s^l, \varepsilon_s^c, \tilde{\varepsilon}_s)$  includes, respectively:  $\varepsilon_0$  - error in setting the initial conditions,  $\delta_s^m$  - error of mathematical models of composite elements,  $\varepsilon_s^l$  - error of linearization of local state models,  $\varepsilon_s^c$  - error of the numerical integration method,  $\tilde{\varepsilon}_s$  - rounding error.

A uniform accounting of all these sources of errors by methods of interval analysis makes it possible to write out an interval analytical solution of the form:

$$\mathbf{X}(t_N) = \prod_{i=1}^N \mathbf{K}_i \mathbf{X}(t_0) + \sum_{i=1}^n h_i \prod_{j=i+1}^N \mathbf{K}_j \sum_{p=0}^{C_i-1} \mathbf{D}_i^{C_i-p} \lambda_i(p h_i), \quad (2)$$

where  $\mathbf{D}_i$  is a functionally transformed control matrix. Recall that the interval values are marked in bold by convention [2].

The paper analyzes the propagation of round-off errors and corrections to the representation by an external interval for processes of type (2). Moreover, estimates are obtained for the width of the machine interval of the result  $\mathbf{v}_n^M = [\underline{v}_n^M, \bar{v}_n^M]$ , in case of addition

$$\text{wid}([\underline{v}_n^M, \bar{v}_n^M]) \leq \sum_{i=1}^n (\bar{\alpha}_i - \underline{\alpha}_i) 2^{\max_{i=1}^n \max(c_i, \bar{c}_i)} + n - 1, \quad (3)$$

multiplication case

$$\text{wid}([\underline{v}_n^M, \bar{v}_n^M]) \leq \bar{v}_n - \underline{v}_n + 2^{2n \max(\max_{i=1}^n \underline{a}_i, \max_{i=1}^n \bar{a}_i)} + n - 1, \quad (4)$$

where  $\text{wid}([a, b]) = b - a$ ,  $n$  - number of operations,  $\underline{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i, \underline{c}_i, \bar{c}_i$  - the numbers in the corresponding left and right boundaries of the intermediate results. Of course, both estimate (3) and estimate (4) only majorize rounding errors and corrections to the representation by the outer interval, but in practice such critical extensions, especially in linear processes, are observed quite rarely, just as it happens in real computational processes [3]. This is where the advantage of interval analysis manifests itself, since in practice we obtain a posteriori guaranteed two-sided estimates.

### References

1. Yusupbekov N.R., Abdukadyrov A.A., Yuldashev Z.Kh. Interval representation and modeling of logical-dynamic systems // Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, 1997. No 9. -C.17-21.

2. *Kearfott R.B., Nakao M.T., Neumaier A., Rump S.M., Shary S.P., Hentenryck P.* Standardized notation in interval analysis // Computational Technologies. 2010. Vol. 15, No. 1. P. 7-13. <http://www.ict.nsc.ru/interval/InteNotation.ps>.
3. *Yuldashev Z. Kh., Ibragimov A.A., Abdukadirov A.A.* To the analysis of error accounting in interval computational processes // Bulletin of NUUZ, 2002, No. 2, pp. 16-20.

## NONLOCAL PROBLEM FOR A NONLINEAR FRACTIONAL MIXED TYPE INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH SPECTRAL PARAMETERS

<sup>1</sup>Yuldashev Tursun, <sup>2</sup>Rakhmonov Farhod

*National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,  
100174, Universitet street, 4, Tashkent, Uzbekistan*

<sup>1</sup> e-mail: [tursun.k.yuldashev@gmail.com](mailto:tursun.k.yuldashev@gmail.com), <sup>2</sup> e-mail: [mr.haker-frd@bk.ru](mailto:mr.haker-frd@bk.ru)

Boundary value problems, where the type of differential equation in the considering domain changes, have many applications in different branches of sciences. As for the equations of mixed type, we note the work [1], where I. M. Gel'fand considered an example a gas motion in a channel surrounded by a porous medium and at that, the gas motion in a channel was described by a wave equation, while outside the channel the diffusion equation was posed. Ya. S. Uflyand considered a problem on propagation of electric oscillations in compound lines, when the losses on a semi-infinite line were neglected and the rest of the line was treated as a cable with no leaks [2]. He reduced this problem to a mixed parabolic-hyperbolic type equation. In the work [3], a hyperbolic-parabolic system arising in pulse combustion is investigated.

In this paper, we consider a boundary value problem for a nonlinear partial integro-differential equation of mixed type with Hilfer operator of fractional integro-differentiation in a positive rectangular domain and with positive spectral parameter in a negative rectangular domain. The partial integro-differential equation of mixed type depends on another real spectral parameter in integral part of the mixed equation. With respect to first variable this equation is a fractional integro-differential equation in the positive part of the considering segment, and is a second-order integro-differential equation with spectral parameter in the negative part of this segment. Using the Fourier series method of separation variables and Fredholm method of degenerate kernels, the solutions of nonlinear boundary value problems are constructed in the form of a Fourier series. Theorems on the existence and uniqueness of solution of the problem are proved for regular values of the spectral parameters.

So, in a domain  $\Omega = \{-T < t < T, 0 < x, y < l\}$  we consider a nonlinear partial fractional integro-differential equation of mixed type

$$0 = \begin{cases} \left( D^{\alpha, \gamma} - D^{\alpha, \gamma} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right) U(t, x, y) = \nu \int_0^T G_1(t, s) U(s, x, y) ds + \\ + g_1(t) f_1 \left( x, y, \int_0^T \int_0^l \int_0^l \Theta_1(\theta, \zeta, \varsigma, \theta^{1-\gamma} U(\theta, \zeta, \varsigma)) d\theta d\zeta d\varsigma \right), \quad (t, x, y) \in \Omega_1, \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - \omega^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right) U(t, x, y) = \nu \int_{-T}^0 G_2(t, s) U(s, x, y) ds + \\ + g_2(t) f_2 \left( x, y, \int_{-T}^0 \int_0^l \int_0^l \Theta_2(\theta, \zeta, \varsigma, U(\theta, \zeta, \varsigma)) d\theta d\zeta d\varsigma \right), \quad (t, x, y) \in \Omega_2, \end{cases} \quad (1)$$

where  $\Omega_1 = \{0 < t < T, 0 < x, y < l\}$ ,  $\Omega_2 = \{-T < t < 0, 0 < x, y < l\}$ ,  $\omega$  is positive spectral parameter,  $0 \neq \nu$  is real spectral parameter,  $T$  is positive real number,  $0 \neq G_j(t, s) =$

$a_j(t)b_j(s), a_j(t), b_j(s) \in C[-T; T], j = 1, 2,$

$$D^{\alpha, \gamma} = J_{0+}^{\gamma-\alpha} \frac{d}{dt} J_{0+}^{1-\gamma}, \quad 0 < \alpha \leq \gamma \leq 1$$

is Hilfer operator and

$$J_{0+}^{\alpha} \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}, \quad \alpha > 0$$

is Riemann-Liouville integral operator,  $g_1(t) \in C[0; T], g_2(t) \in C[-T; 0],$

$$f_i(x, y, u) \in C([0; l]^2 \times \mathbb{R}), i = 1, 2, \Theta_1(t, x, y, U) \in C([0; T] \times [0; l]^2 \times \mathbb{R}),$$

$$\Theta_2(t, x, y, U) \in C([-T; 0] \times [0; l]^2 \times \mathbb{R}).$$

**Nonlocal Problem.** It is required to find a function  $U(t, x, y),$  which belongs to the class

$$\left[ \begin{array}{l} t^{1-\gamma} \frac{\partial^k U}{\partial x^k} \in C(\overline{\Omega}_1), \quad t^{1-\gamma} \frac{\partial^k U}{\partial y^k} \in C(\overline{\Omega}_1), \quad \frac{\partial^k U}{\partial x^k} \in C(\overline{\Omega}_2), \quad \frac{\partial^k U}{\partial y^k} \in C(\overline{\Omega}_2), \\ D^{\alpha, \gamma} U \in C(\Omega_1), \quad U_{tt}, U_{xx}, U_{yy} \in C(\Omega_1 \cup \Omega_2), \quad k = 0, 1, 2, \end{array} \right.$$

satisfies mixed integro-differential equation (1) in the domain  $\Omega_1 \cup \Omega_2,$  boundary value conditions

$$\begin{aligned} U(t, 0, y) = U(t, l, y) = U(t, x, 0) = U(t, x, l) = 0, \quad t \neq 0, \\ U(-T, x, y) = U(T, x, y) + \varphi(x, y), \quad 0 \leq x, y \leq l \end{aligned}$$

and gluing conditions

$$\lim_{t \rightarrow +0} J_{0+}^{1-\gamma} U(t, x, y) = \lim_{t \rightarrow -0} U(t, x, y), \quad \lim_{t \rightarrow +0} J_{0+}^{1-\alpha} \frac{d}{dt} J_{0+}^{1-\gamma} U(t, x, y) = \lim_{t \rightarrow -0} \frac{d}{dt} U(t, x, y),$$

where  $\varphi(x, y)$  is given sufficiently smooth function in  $[0; l]^2.$

We note that the presence of an integral term in a differential equations of the first and second orders has an important role in the theory of dynamical systems with automatic control [4, 5]. In the case of second spectral parameter, when  $\nu = 0,$  is studied in [6].

We consider the Cauchy problem for a nonhomogeneous differential equation of fractional order

$$\begin{cases} D^{\alpha, \gamma} u(t) = k u(t) + f(t), \quad t \in (0, t_1), \\ \lim_{t \rightarrow +0} J_{0+}^{1-\gamma} u(t) = u_0, \end{cases} \quad (3)$$

where  $f(t)$  is given continuous function on  $(0, t_1), u_0 = \text{const}.$

Let be  $f(t) \in C(0; t_1] \cap L_1(0; t_1).$  Then the solution of the problem (3)  $u(t) \in C(0; t_1] \cap L_1(0; t_1)$  is represented as follows [6]

$$u(t) = u_0 t^{\gamma-1} E_{\alpha, \gamma}(k t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(k(t-s)^\alpha) f(s) ds,$$

where

$$E_{\alpha, \gamma}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(\alpha m + \gamma)}, \quad z, \alpha, \gamma \in \mathbb{C}, \quad \text{Re}(\alpha) > 0$$

is Mittag-Leffler function.



## References

1. *Gel'fand I. M.* Some questions of analysis and differential equations. *Uspekhi Matem. Nauk*, 1959. Vol. 14. No. 3. P. 3–19 (in Russian).
2. *Uflyand Ya. S.* On oscillation propagation in compound electric lines. *Inzhener.-Phis. Zhurn.*, 1964. Vol. 7. No. 1. P. 89–92 (in Russian).
3. *Terlyga O., Bellout H., Bloom F.* A hyperbolic-parabolic system arising in pulse combustion: existence of solutions for the linearized problem. *Electronic Journal of Differ. Equations*, 2013. Vol. 2013. No. 46. P. 1–42.
4. *Yuldashev T. K.* Nonlocal boundary value problem for a nonlinear Fredholm integro-differential equation with degenerate kernel. *Differ. Equations*, 2018. Vol. 54. No. 12. P. 1646–1653.
5. *Yuldashev T. K.* On the solvability of a boundary value problem for the ordinary Fredholm integrodifferential equation with a degenerate kernel. *Comput. Math. and Math. Physics*, 2019. Vol. 59. No. 2. P. 241–252.
6. *Yuldashev T. K., Kadirkulov B. J.* Boundary value problem for weak nonlinear partial differential equations of mixed type with fractional Hilfer operator. *Axioms*, 2020. Vol. 9. No. 2(68). P. 1–19.

## NONLOCAL INVERSE PROBLEM FOR A PSEUDOHYPERBOLIC-PSEUDOELLIPTIC TYPE DIFFERENTIAL EQUATION

<sup>1</sup>Yuldashev Tursun, <sup>2</sup>Rakhmonov Farhod

*National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,  
100174, Universitet street, 4, Tashkent, Uzbekistan*

<sup>1</sup> e-mail: [tursun.k.yuldashev@gmail.com](mailto:tursun.k.yuldashev@gmail.com), <sup>2</sup> e-mail: [mr.haker-frd@bk.ru](mailto:mr.haker-frd@bk.ru)

Direct and inverse boundary value problems, where the type of differential equation in the considering domain changes, have many applications in different branches of sciences. As for the equations of mixed type, we note the work [1], where I. M. Gel'fand considered an example a gas motion in a channel surrounded by a porous medium and at that, the gas motion in a channel was described by a wave equation, while outside the channel the diffusion equation was posed. Ya. S. Uflyand considered a problem on propagation of electric oscillations in compound lines, when the losses on a semi-infinite line were neglected and the rest of the line was treated as a cable with no leaks [2]. He reduced this problem to a mixed parabolic-hyperbolic type equation.

To find a solution of direct mixed and boundary value problems of mathematical physics, it is required to set the coefficients of the equation, the boundary of the domain, the initial and boundary conditions. It usually happens that during the solving the practical problems experimentally, the quantitative characteristics of the object under study are not available for direct observation, or it is impossible to carry out the experiment itself for one reason or another. Then, in practice, the researcher can obtain some indirect information and draw a conclusion about the properties of the object under study. This information is determined by the nature of the object under study and requires mathematical processing and interpretation of research results. Nonlocal integral conditions often arise, which give averaged information about the object. In conditions when the structure of the mathematical model of the process under study is known, the problem of redefining the mathematical model is posed. Such problems belong to the class of inverse problems. So, by inverse problems we mean problems whose solution consists in determining the parameters of this model based on the available observation results and other experimental information. It so happens that inverse problems are studied in which all unknown coefficients depend only on the time variable and do not depend on the spatial variables. It happens, and vice versa, that the desired characteristics do not change over time, but depend only on spatial variables. In the theory of inverse problems, differential equations of parabolic type are often considered. Inverse problems for equations of mixed type are studied relatively rarely due to the complexity of the study.

In this paper the problems of solvability of a nonlocal inverse boundary value problem for a mixed type pseudohyperbolic-pseudoelliptic differential equation with a spectral parameter and integral conditions are considered. The equation is characterized by the fact that it has three unknown functions: with respect to the main unknown function the equation is a mixed type differential equation; and with respect to redefinition functions it is Fredholm integral equations of the second kind. The cases of regular and irregular values of the spectral parameter are studied. By the aid of the method of the Fourier series, a nonlinear system of two countable systems of Fredholm ordinary integral equations of the second kind is obtained. From this system we prove the existence and uniqueness of the Fourier coefficients of redefinition functions. In the proof of the unique solvability of this system of two countable systems of Fredholm ordinary integral equations of the second kind the method of compressive mappings is applied. In this proof we use also the Cauchy-Schwartz inequality and the Bessel inequality. For regular values of the spectral parameter, a criterion of unique solvability of the inverse boundary value problem is established. Solutions of the inverse boundary value problem are obtained in the form of Fourier series. The convergence of the obtained Fourier series and the possibility of term-by-term differentiation of the main Fourier series are shown. In the case of irregular values of spectral parameter, it is constructed an infinite number of solutions of the inverse problem in the view of Fourier series. The results are formulated as a theorem.

So, in the multidimensional domain  $\Omega = \{(t, x) \mid t \in [-T; T], x \in \Omega_l^m\}$  we consider a mixed differential equation of the form

$$\begin{cases} U_{tt} - \sum_{i=1}^m [U_{tt x_i x_i} - U_{x_i x_i}] = a_1(t) b_1(x) + g_1(t) f_1\left(x, \int_{\Omega_l^m} K_1(y) b_1(y) dy\right), & t > 0, \\ U_{tt} - \sum_{i=1}^m [U_{tt x_i x_i} + \omega^2 U_{x_i x_i}] = a_2(t) b_2(x) + g_2(t) f_2\left(x, \int_{\Omega_l^m} K_2(y) b_2(y) dy\right), & t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

where  $T$  and  $l$  are given positive real numbers,  $\omega$  is positive spectral parameter,  $a_1(t) \in C[0; T]$ ,  $a_2(t) \in C[-T; 0]$ ,  $b_i(x) \in C(\Omega_l^m)$  are redefinition functions,  $i = 1, 2$ ,  $g_1(t) \in C[0; T]$ ,  $g_2(t) \in C[-T; 0]$ ,  $K_i(x) \in C(\Omega_l^m)$ ,  $f_i\left(x, \int_{\Omega_l^m} K_i(y) b_i(y) dy\right) \in C_x^2(\Omega_l^m \times \mathbb{R})$ ,  $\int_{\Omega_l^m} |K_i(y)| dy < \infty$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\Omega_l^m \equiv [0; l]^m$ .

We note that the mixed equations (1) with respect to the main unknown function  $U(t, x)$  are a inhomogeneous differential equations, and with respect to the redefinition functions  $g_1(t)$  and  $g_2(t)$  are Fredholm nonlinear integral equations of the second kind.

**Problem.** To find in the domain  $\Omega$  the triple of unknown functions

$$U(t, x) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega') \cap C^{2,2}(\Omega_{\pm}) \cap C^{2+2}_{t,x}(\Omega_{\pm}) \cap C^{2+2+0+\dots+0}_{t,x_1,x_2,\dots,x_m}(\Omega_{\pm}) \cap C^{2+0+2+0+\dots+0}_{t,x_1,x_2,x_3,\dots,x_m}(\Omega_{\pm}) \cap C^{2+0+\dots+0+2}_{t,x_1,\dots,x_{m-1},x_m}(\Omega_{\pm}), \quad b_i(x) \in C(\Omega_l^m), \quad i = 1, 2,$$

satisfying mixed differential equations (1) and the following integral and boundary conditions

$$\begin{aligned} \int_0^T U(t, x) dt &= \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ \int_{-T}^0 U(t, x) dt &= \varphi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ U(t, 0, x_2, x_3, \dots, x_m) &= U(t, l, x_2, x_3, \dots, x_m) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= U(t, x_1, 0, x_3, \dots, x_m) = U(t, x_1, l, x_3, \dots, x_m) = \dots = \\
&= U(t, x_1, \dots, x_{m-1}, 0) = U(t, x_1, \dots, x_{m-1}, l) = \\
&= U_{x_1 x_1}(t, 0, x_2, x_3, \dots, x_m) = U_{x_1 x_1}(t, l, x_2, x_3, \dots, x_m) = \\
&= U_{x_1 x_1}(t, x_1, 0, x_3, \dots, x_m) = U_{x_1 x_1}(t, x_1, l, x_3, \dots, x_m) = \dots = \\
&= U_{x_1 x_1}(t, x_1, \dots, x_{m-1}, 0) = U_{x_1 x_1}(t, x_1, \dots, x_{m-1}, l) = \dots = \\
&= U_{x_m x_m}(t, 0, x_2, x_3, \dots, x_m) = U_{x_m x_m}(t, l, x_2, x_3, \dots, x_m) = \\
&= U_{x_m x_m}(t, x_1, 0, x_3, \dots, x_m) = U_{x_m x_m}(t, x_1, l, x_3, \dots, x_m) = \dots = \\
&= U_{x_m x_m}(t, x_1, \dots, x_{m-1}, 0) = U_{x_m x_m}(t, x_1, \dots, x_{m-1}, l) = 0, \quad 0 \leq t \leq T
\end{aligned}$$

and additional conditions

$$U(t_i, x) = \psi_i(x), \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq x \leq l,$$

where  $\varphi_i(x)$ ,  $\psi_i(x)$  are given smooth functions,  $\varphi_i(0) = \varphi_i(l) = 0$ ,  $\psi_i(0) = \psi_i(l) = 0$ ,  $i = 1, 2$ ,  $t_1 \in (0; T)$ ,  $t_2 \in (-T; 0)$ ,  $C^r(\Omega)$  is the class of functions  $U(t, x_1, \dots, x_m)$  with continuous derivatives  $\frac{\partial^r U}{\partial t^r}$ ,  $\frac{\partial^r U}{\partial x_1^r}$ ,  $\dots$ ,  $\frac{\partial^r U}{\partial x_m^r}$  in the domain  $\Omega$ ,  $C_{t,x}^{r,s}(\Omega)$  is the class of functions  $U(t, x_1, \dots, x_m)$  with continuous derivatives  $\frac{\partial^r U}{\partial t^r}$ ,  $\frac{\partial^s U}{\partial x_1^s}$ ,  $\dots$ ,  $\frac{\partial^s U}{\partial x_m^s}$  in the domain  $\Omega$ ,  $C_{t,x_1,x_2,\dots,x_m}^{r+r+0+\dots+0}(\Omega)$  is the class of functions  $U(t, x_1, \dots, x_m)$  with continuous derivatives  $\frac{\partial^{2r} U}{\partial t^r \partial x_1^r}$  in the domain  $\Omega$ ,  $\dots$ ,  $C_{t,x_1,\dots,x_{m-1},x_m}^{r+0+\dots+0+r}(\Omega)$  is the class of functions  $U(t, x_1, \dots, x_m)$  with continuous derivatives  $\frac{\partial^{2r} U}{\partial t^r \partial x_m^r}$  in the domain  $\Omega$ ,  $r, s$  are natural numbers,  $\Omega' = \Omega \cup \{x = 0\} \cup \{x = l\}$ ,  $\Omega_- = \{(t, x) \mid -T < t < 0, 0 < x < l\}$ ,  $\Omega_+ = \{(t, x) \mid 0 < t < T, 0 < x < l\}$ ,  $\Omega_{\pm} = \Omega_+ \cup \Omega_-$ ,  $\bar{\Omega} = \{(t, x) \mid -T \leq t \leq T, 0 \leq x \leq l\}$ .

## References

1. *Gel'fand I. M.* Some questions of analysis and differential equations. Uspekhi Matem. Nauk, 1959, Vol. 14. No. 3. P. 3–19 (in Russian).
2. *Uflyand Ya. S.* On oscillation propagation in compound electric lines. Inzhener.-Phis. Zhurn., 1964, Vol. 7. No. 1. P. 89–92 (in Russian).

## МЕТОДИКА КЛАССИФИКАЦИИ ЗАЕМЩИКОВ ДЛЯ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ СКОРИНГОВОЙ СИСТЕМЫ МИКРОФИНАНСОВОЙ ОРГАНИЗАЦИИ

<sup>1</sup>Ажмухамедов Искандар Маратович, <sup>2</sup>Кузнецова Валентина Юрьевна

<sup>1</sup> Астраханский государственный университет, Россия

e-mail: aim\_agtu@mail.ru

<sup>2</sup> Астраханский государственный университет, Россия

e-mail: arhelia@bk.ru

Развитие информационных технологий сопровождается комплексной цифровой трансформацией сферы услуг, в том числе и сферы микрокредитования, которая претерпевает подъем на российском финансовом рынке. Цифровизация процесса микрокредитования привела к росту количества дефолтных заемщиков, заявки которых имеющиеся скоринговые системы оценивают недостаточно эффективно. По данным «Обзора ключевых показателей микрофинансовых институтов» Центробанка Российской Федерации, за первую половину 2019 года портфель микрозаймов увеличился на 9 % и достиг 190 миллиардов рублей. При этом доля просроченной задолженности по «быстрым» займам выросла до 27,3 %. Такой рост просрочки вызван снижением объемов портфеля, передаваемого

профессиональным взыскателям. Это связано, в первую очередь, с введением единого стандарта по взысканию просроченной задолженности, который дал МФО право самостоятельно взыскивать долги, а также комплексным ужесточением нормативно-правовой базы деятельности коллекторских агентств [5]. Особенность микрофинансирования заключается в том, что, в сравнении с классической системой банковского кредитования, где принятие решения занимает в среднем около 3 рабочих дней, микрофинансовые организации (МФО) не могут осуществлять рассмотрение заявки на кредитование в такие же длительные сроки, т.к. скорость принятия решения по кредитованию в таких организациях является основным конкурентным преимуществом. В среднем, время рассмотрения заявки не должно превышать 30 минут. Однако за такой короткий промежуток времени трудно проверить заявителя на добросовестность. Вследствие этого микрофинансовые организации имеют высокие кредитные риски и большое количество невозвратных кредитов [2]. В связи с вышесказанным, микрофинансовые организации заинтересованы в такой скоринговой системе, которая сможет снизить количество дефолтных выдач за счет выявления заемщиков, не соответствующих рискованной стратегии МФО еще на этапе рассмотрения заявки на кредитование. Для этого требуется разработка методики, которая позволит более точно классифицировать заемщиков. Присутствие в системе человека (заемщика) с невозможностью личного контакта при онлайн-кредитовании для выявления степени выраженности дефолтного поведения вносит субъективную неопределенность в процесс принятия решения по выдаче микрозаймов [3]. В связи с этим было принято решение проанализировать данные заемщиков. За основу была взята обезличенная база клиентов одной из крупных федеральных микрофинансовых компаний, состоящая из 20 000 записей за 2017 год. В дальнейшем эта МФО упоминается как базовая организация. Статистическому анализу были подвержены более 10 различных параметров базовой скоринговой модели. Проанализировав данные о просрочках и построив график возврата заемных средств, удалось провести кластеризацию заемщиков по критерию уровня финансовой ответственности, которая характеризует их с точки зрения продолжительности просрочки по займу. Таким образом, было выявлено 4 категории заемщиков:

- Категория 1 – без просрочки.
- Категория 2 – просрочка от 0 до 90 дней.
- Категория 3 – просрочка от 90 до 150 дней.
- Категория 4 – просрочка свыше 150 дней.

При этом каждая категория была описана с точки зрения принципов нечеткой логики, поэтому каждый заемщик характеризуется степенью принадлежности к той или иной категории по уровню финансовой ответственности согласно графическому классификатору:

Классификация ранее получавших заем клиентов сводится к анализу сроков предыдущей просрочки, на основании которого заемщику присваивается определенная категория. Однако для первичных заемщиков такой подход неприемлем, поскольку у них отсутствует кредитная история. В связи с этим возникла необходимость получения дополнительных персонализированных сведений, которые отсутствуют в множестве параметров базовой скоринговой модели, для классификации первичных заявителей. Для решения данной задачи была разработана методика построения расширенного цифрового профиля заемщика (РЦПЗ). Была выдвинута гипотеза, что при прочих равных условиях на степень выраженности дефолтного поведения существенное влияние оказывает психологический тип личности заемщика. Для его выявления наиболее целесообразным в данном случае является применение методики «7 радикалов» В.В. Пономаренко. В рамках данной методики анализируются физиологические особенности, внешний вид, вербальные и невербальные

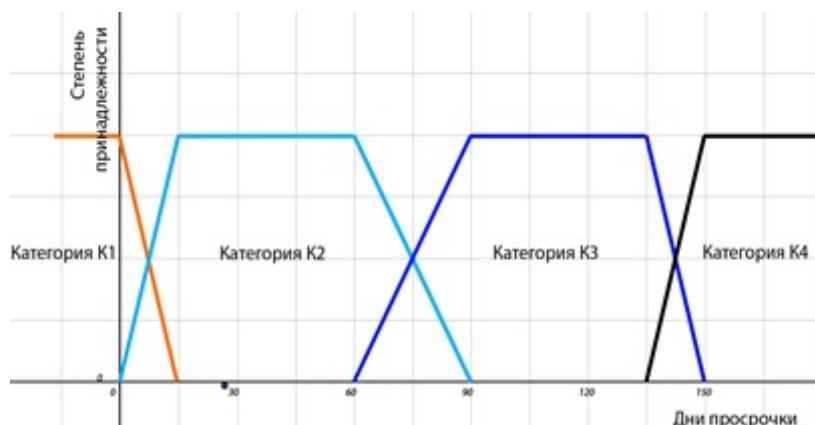


Рис. 3: Нечеткий графический классификатор

признаки личности, что позволяет выявить в характере т.н. «радикалы»: истероидный, эпилептоидный и т.п. На основании базы клиентов базовой МФО была разработана таблица прецедентов для заемщиков, которые обращаются за займом впервые. В нее были внесены данные о степени принадлежности заемщика к категориям, базовые скоринговые параметры и данные о наборе радикалов в его типе характера. Таблица прецедентов была проверена на избыточность и непротиворечивость. Полученная таким образом таблица

ID заемщика	Параметры расширенного цифрового профиля												Степени ( $\mu^m; \mu^{m+1}$ ) принадлежности заемщика к категориям ( $K^m$ и $K^{m+1}$ )			
	Параметры базовой скоринговой модели					Интенсивность проявления радикалов в ПТЛЗ							$K^1$	$K^2$	$K^3$	$K^4$
	Пол	Возраст	Сфера деят.	З/п	...	$R_i^1$	$R_i^2$	$R_i^3$	$R_i^4$	$R_i^5$	$R_i^6$	$R_i^7$				
1	M	VZ2	SD1	SF3	...	0,68	0,11	0	0,19	0,20	0	0	0,77	0,23		
2	M	VZ3	SD5	SF2	...	0	0	0,73	0,05	0,22	0	0		0,85	0,15	
3	M	VZ3	SD7	SF3	...	0	0	0	0,29	0,7	0	0,01	0,64	0,36		
6651	M	VZ2	SD9	SF1	...	0	0,21	0	0	0	0,6	0,19			0,73	0,27
6652	M	VZ2	SD9	SF1	...	0	0,21	0	0	0	0,6	0,19		0,32	0,68	

позволила для определения степени принадлежности первичного заемщика к той или иной категории финансовой ответственности использовать прецедентный подход. При этом, с целью нахождения наиболее близкого прецедента в качестве меры схожести для блока параметров базовой скоринговой модели целесообразно использовать расстояние Хемминга, а для параметров, характеризующих интенсивность проявления радикалов в его характере — Евклидово расстояние. Исходя из этого, алгоритм определения степени принадлежности первичного заемщика к той или иной категории по уровню финансовой ответственности был сформулирован следующим образом:

1. Выполняется построение РЦПЗ для первичного заявителя.
2. Производится расчет Евклидова расстояния между значениями параметров интенсивности проявления радикалов в характере первичного заявителя и аналогичными параметрами из таблицы прецедентов.
3. Выбирается та строка (строки) в таблице прецедентов, для которых вычисленное в п.2 Евклидово расстояние является минимальным.

4. Если количество полученных в п.3 строк более одной, то находится Хеммингово расстояние между значениями параметров базовой скоринговой модели и в качестве прецедента выбирается та строка, для которой это расстояние минимально.
5. Первичному заявителю ставятся в соответствие значения степени принадлежности к категориям финансовой ответственности, указанные в строке, полученной в п.4.

Данная методика позволяет решить задачу по установлению степени принадлежности первичного заявителя к той или иной категории по уровню финансовой ответственности и соответственно оценить риск снижения рентабельности кредитного портфеля МФО при выдаче ему микрозайма. Однако для принятия решений по онлайн-заявкам, ввиду отсутствия личного контакта с заявителем и невозможности построения типа его характера, изложенная выше методика требует адаптации, учитывающей специфику онлайн-микрокредитования. Данная задача может быть решена путем получения дополнительных данных из социальных сетей для использования прецедентного подхода, однако это потребует дополнительного сбора данных при оформлении заявки на займ.

### Литература

1. *Azhmukhamedov I.M., Vybornova O.N.* Introduction of metrics for risk assessment and management. // Caspian Journal: Management and High Technologies. –2015. No. 4(32). pp. 10–22.
2. *Dosmukhamedov B.R.* Modeling and approaches to managing business processes in microfinance organizations. // Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Management, Computer Science and Informatics. –2013. –No. 2. –pp. 121-130.
3. *How social media profile helps banks score future borrowers: Forbes.* [Electronic resource]. URL: <https://www.forbes.ru/finansy/internet-i-svyaz/236259> (access date: 25.09.2019).
4. *Magomaev L.R.* Development of big data technology using social media in Russian and foreign banks. // Theoretical and practical issues of the development of modern science. –2017. – pp. 136–140.
5. *Review of key indicators of microfinance institutions N 4 for 2018.* – The Central Bank. –Moscow: 2019. –p.26 [Electronic resource]. URL: [https://www.cbr.ru/Content/Document/File/72204/review\\_mfo\\_18.pdf](https://www.cbr.ru/Content/Document/File/72204/review_mfo_18.pdf) (access date: 06.09.2019).
6. *Maria Oskarsdottira, Cristian Bravo, Carlos Sarrautec, Jan Vanthienena, Bart Baesensa.* The value of big data for credit scoring: Enhancing financial inclusion using mobile phone data and social network analytics [Электронный ресурс]. URL: <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2018.10.004> (access date: 05.10.2019).
7. *Almeida, H., Cunha, I., Ferreira, M. A., & Restrepo, F. (2017).* The real effects of credit ratings: The sovereign ceiling channel. *The Journal of Finance*, 72(1), 249-290.
8. *Emekter, R., Tu, Y., Jirasakuldech, B., & Lu, M. (2015).* Evaluating credit risk and loan performance in online Peer-to-Peer (P2P) lending. *Applied Economics*, 47(1), 54-70.

### ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СЕН-ВЕНАНА В ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ (В ЗАВИСИМОСТИ ОТ НАКЛОНА)

<sup>1</sup>Алоев Р.Д., <sup>2</sup>Акбарова А.А.

<sup>1</sup> *Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека*

<sup>2</sup> *Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека*

e-mail: aloevr@mail.ru

В настоящей работе исследуется проблема численного расчета устойчивых решений для квазилинейной гиперболической системы уравнений Сен-Венана, которая описывает движение неустановившихся речных потоков. Когда наклон  $S$  является дополнительно постоянным, постоянные состояния являются однородными. Этот частный случай был изучен в [3] и только для линеаризованной системы. В данной работе мы используем иной

подход, применив разностную схему расщепления [1] для случая когда наклон не является постоянным. Исходя из теоремы об устойчивости [2], полученный результат даст нам возможность утверждать об экспоненциальной устойчивости численного решения системы уравнений Сен-Венана.

Уравнения Сен-Венана с наклоном и трением задаются следующей системой:

$$\partial_t H + \partial_x(HV) = 0 \quad (1)$$

$$\partial_t V + \partial_t \left( \frac{V^2}{2} + gH \right) + \left( \frac{kV^2}{H} - gC \right) = 0 \quad (2)$$

где  $H(t, x)$  - глубина воды,  $V(t, x)$  - горизонтальная скорость воды.  $k$  - постоянный коэффициент трения. Наклон  $C(\bullet) \in C^2([0, L])$  определяется как

$$C(x) = -\frac{dB}{d1x}$$

с  $B(x)$  - возвышением дна,  $g$  - постоянное ускорение силы тяжести. Система (1)-(2) переписывается в новых координатах вида:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} 0 & a(x) \\ b(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (3)$$

Далее для системы (3) задаем следующие граничные условия :

$$y_1(t, 0) = k_0 \frac{\varphi_1(0)}{\varphi_2(0)} y_2(t, 0), \quad y_2(t, L) = k_1 \frac{\varphi_1(L)}{\varphi_2(L)} y_1(t, L). \quad (4)$$

Начальные условия:

$$y_1(0, x) = \varphi_1 f_0(x), \quad y_2(0, x) = \varphi_2 g_0(x), \quad (5)$$

Для численного решения смешанной задачи (3)-(5) была применена разностная схема расщепления. Полученное численное решение смешанной задачи (3)-(5) экспоненциально устойчиво в  $L^2$  - норме.

## Литература

1. Alov R. D., Eshkuvatov Z. K., Khudoyberganov M. U., Nematova D. E. The Difference Splitting Scheme for Hyperbolic Systems with Variable Coefficients. Mathematics and Statistics. Vol. 7(3), 2019, pp. 82-89 DOI: 10.13189/ms.2019.070305
2. Amaury Hayat, Peipei Shang A quadratic Lyapunov function for Saint-Venant equations with arbitrary friction and space-varying slope. 2018. hal-01704710
3. Georges Bastin, Jean-Michel Coron, and Brigitte d'Andr\_ ea Novel On lyapunov stability of linearised saint-venant equations for a sloping channel. Networks and Heterogeneous Media, 4 (2):177{187, 2009

## УСТОЙЧИВОСТЬ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА

<sup>1</sup>Ганиходжаев Р.Н., <sup>2</sup>Таджиева М. А.

<sup>1</sup> Национальный университет Узбекистан (Узбекистан, Ташкент),  
e-mail: rasulgani@hotmail.com

<sup>2</sup> Национальный университет Узбекистан (Узбекистан, Ташкент),  
e-mail: mohbonut@mail.ru

Квадратичный стохастический оператор (к.с.о) является отображением симплекса

$$S^{m-1} = \{x \in R^m : x = (x_1, \dots, x_m) : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$$

в себя и имеет вид:

$$(Vx)_k = x'_k = \sum_{i,j=1}^m p_{ij,k} x_i x_j, \quad k = \overline{1, m} \quad (1)$$

с условиями

$$p_{ij,k} \geq 0, \quad p_{ij,k} = p_{ji,k}, \quad \sum_{i,j=1}^m p_{ij,k} = 1, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in S^{m-1} \quad (2)$$

Поскольку,  $V : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$  непрерывен, а  $S^{m-1}$ - выпуклый компакт, то согласно теореме Боля-Брауэра множество неподвижных точек  $V$  непусто, т.е.

$$X = \{x \in S^{m-1} : Vx = x\} \neq \emptyset.$$

**Определение 1.** Квадратичный стохастический оператор  $V : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$  называется Вольтерровским, если

$$p_{ij,k} = 0, \quad k \notin \{i, j\} \quad (3)$$

Квадратичный стохастический оператор Вольтерровского типа (к.с.о.в.т) можно привести к следующему виду:

$$V : x'_k = x_k \left(1 + \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i\right), \quad k = 1, \dots, m \quad (4)$$

где

$$|a_{ki}| \leq 1, \quad a_{ki} = -a_{ik}$$

$A = (a_{ki})$ -кососимметрическая матрица.

**Определение 2.** Кососимметрическая матрица  $A = (a_{ki})$  называется матрицей общего положения, если все главные миноры четного порядка отличны от нуля.

Как известно [1], кососимметрические матрицы общего положения образуют открытое и всюду плотное подмножество в множестве всех кососимметрических матриц.

Полагая  $x'_k = f_k(x_1, \dots, x_m)$  строим якобиан квадратичного стохастического оператора (1).

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

Пусть  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*) \in S^{m-1}$  является неподвижной точкой (к.с.о). Через  $\sigma(J(x^*))$  обозначим спектр якобиана в  $x^*$ . Тогда из

$$|J(x^*) - \lambda I| = 0$$

находим собственные числа в точке  $x^* \in S^{m-1}$ .

Пусть  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  единичный, открытый круг на комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ .

**Определение 3.** Неподвижная точка  $x^*$  отображения  $f$  называется гиперболической, если спектр якобиана, т.е.  $\sigma(J(x^*))$  не пересекается с единичной окружностью комплексной плоскости.



Известно [2], что если  $\sigma(\mathcal{J}(x^*)) \subset D$ , то неподвижная точка  $x^*$  является притягивающей неподвижной точкой, т.е. *аттрактором*.

Если  $\sigma(\mathcal{J}(x^*)) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$  то, неподвижная точка  $x^*$  называется отталкивающей, т.е. *репеллером*. В остальных случаях неподвижная точка называется седловой неподвижной точкой.

Ориентированный полный граф называется турниром и обозначается через  $T_m$ . В настоящей работе подробно рассмотрен случай  $m = 5$ .  $V : S^4 \rightarrow S^4$  количество турниров  $T_5$  равно 12.

**Теорема.** В случае  $S^4$ , если  $A = (a_{ki})$  является матрицей общего положения, тогда все неподвижные точки  $V : S^4 \rightarrow S^4$  являются гиперболическими неподвижными точками.

## Литература

1. *Р. Н. Ганиходжаев, М. А. Таджиева, Д. Б. Эшмаматова* Динамические свойства квадратичных гомеоморфизмов конечномерного симплекса // Итоги науки и техники современная математика и ее приложения. — Москва 2018. — т.144. — стр.104-109.
2. *Ganikhodzhaev R.N., Mukhamedov F.M., Rozikov U.A.* Quadratic stochastic operators: Results and open problems. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* 14(2) (2011), 279-335.

## АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПРОДОЛЖЕНИЯ КРИТИЧЕСКИХ ВЕТВЯЩИХСЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

<sup>1</sup>Жураев Ш.Ю.

<sup>1</sup> *Институт математики имени В.И.Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан., e-mail: shukurjon4756@gmail.com*

Пусть  $Z_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , ветвящийся случайный процесс с дискретным временем и с одним типом частиц. Введем производящие функции

$$F_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(n)x^i, F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(1)x^i, P_i(n) = P\{Z_i = n/Z_0 = 1\}, |x| \leq 1.$$

Как известно, для производящих функций имеет место соотношение:

$$F_i(x) = F(F_{i-1}(x))$$

Положить  $\alpha_m = F^{(m)}(1)$ , а для первых факториальных моментов вводят обозначения:  $\alpha_1 = A$ ,  $\alpha_2 = B$ ,  $\alpha_3 = C$ ,  $\alpha_4 = D$ .

Величина  $P_0(n)$  есть вероятность вырождения процесса, начавшегося с одной частицы, к моменту  $n$ .

Пусть  $Q_n = 1 - P_0(n)$  - вероятность продолжения процесса.

Асимптотическое поведение вероятности  $Q_n$  для дискретного времени изучено А.Н.Колмогоровым [1] Результаты А.Н.Колмогорова для процессов с непрерывным временем получены Б.А.Севастьяновым [2].

Литературной обзор по вопросам предельных и локально предельных теорем, и в частности, уточнение асимптотического разложения для вероятности  $Q_n$  коротко изложены в работе С.В.Нагаева, Р.Мухамедхановой [4].

В этой заметке изучаются некоторые уточнения теорем, которые доказаны в работе [4], по вопросам асимптотического разложения для вероятности  $Q_n$  в случае дискретного времени.

Для критических ветвящихся процессов ( $A = 1$ ) в работе [4] доказаны следующие теоремы (см.[4], стр.96-97):

**Теорема 1.** Если  $A = 1, B > 0, C < \infty$ , то при  $n \rightarrow \infty$

$$Q_n = \frac{2}{Bn} + \left( \frac{4C}{3B^3} - \frac{2}{B} \right) \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

**Теорема 2.** Если  $A = 1, B > 0, D < \infty$ , то при  $n \rightarrow \infty$

$$Q_n = \frac{2}{Bn} + \left( \frac{4C}{3B^3} - \frac{2}{B} \right) \frac{\ln n}{n^2} + \frac{4K}{B^2 n^2} + O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right) \quad (*)$$

где –

$$K = 1 + L_1 \left( 1 + \frac{2c_1}{B} + \frac{2}{B} \left( \frac{2C}{3B^2} - 1 \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) + \sum_{j=0}^{\infty} L_2(1 + I_2) + \varepsilon_n(1 + I_2)$$

а коэффициенты  $L_i, i = 1, 2$ , зависят только от факториальных моментов  $\alpha_k < \infty, k = 2, 3, 4, c_1 = 0,577216\dots$  – постоянная Эйлера,  $I_j = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k^j, j = 2, 3, 4, \varepsilon_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

## Литература

1. Колмогоров А.Н. К решению одной биологической задачи. Изв. НИИ матем. и мех. Томского Университета. 2.2. вып. 1 (1938) 1-12.
2. Севастьянов Б.А. Теория Ветвящиеся случайных процессов. УМН.1951.Т.вып.6.
3. Нагаев А.В. Уточнение некоторых теорем теории ветвящихся случайных процессов. Труды. ТошГУ, вып 189, 1961.
4. Нагаев А.В., Мухаммедханова Р. Некоторые предельные теоремы из теории ветвящихся случайные процессов.Предельные теоремы и статистические выводы.АНУзССР Институт математики им.В.И.Романовского.Ташкент.90-112 стр.1966
5. Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.–Л.1949.
6. Чистяков В.П. Локальные предельные теоремы теории ветвящихся случайных процессов."Теория вероятностей и ее применения". 1957. Т.2. вып. 3.

## СЛАБО НЕКОРРЕКТНАЯ ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ПО СЕМЕЙСТВУ ПАРАБОЛ С ВОЗМУЩЕНИЕМ

<sup>1</sup>Исмоилов А.С.

<sup>1</sup> Самаркандский Государственный Университети, Самарканд, Узбекистан,  
e-mail: alisher\_8778@mail.ru

Задачи интегральной геометрии естественным образом возникают при исследовании многих математи-ческих моделей в таких имеющих обширные применения областях, как сейсморазведка, интерпретация данных геофизических и аэрокосмических наблюдений, различных процессах, описываемых кинетичес-кими уравнениями и т. д. Разработанный здесь аппарат является математической базой вычислительной томографии - перспективного и интенсивно развивающегося направления современной науки.

Одной из центральных проблем интегральной геометрии является восстановление функции, если известны ее интегралы по заданным многообразиям.

Вопросы единственности решения плоской задачи интегральной геометрии на семействе парабол с возмущением рассматривались в статье [1].

Теоремы единственности, оценки устойчивости и формулы обращения слабо некорректных задач интегральной геометрии по специальным кривым и поверхностям с особенностями в вершинах получены в [2-4].

В работах [5,6] изучены новые классы задачи интегральной геометрии и введены новые подходы к исследованию задач восстановления функции по весовым функциям с особенностью.

В данной работе рассмотрена задача восстановления функции по семейству парабол в верхней полу-плоскости с весовой функцией нового вида. Доказана теорема единственности решения уравнения и выведена формула обращения. Показано, что решение поставленной задачи слабо некорректно, то есть получены оценки устойчивости в пространствах конечной гладкости. Далее рассматривается соответствующая задача интегральной геометрии с возмущением. Получены теорема единственности ее решения в классе гладких финитных функций с носителем в полосе и оценка устойчивости решения в соболевских пространствах.

Введем обозначения, которые будем использовать далее:

$$x \in R^2, \quad \xi \in R^2, \quad \lambda \in R^1, \quad \mu \in R^1, \quad R_+^2 = \{x = (x_1, x_2) : x_2 \geq 0\};$$

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1 \in R^1, x_2 \in [0, l],$$

здесь  $0 < l < \infty$ .

**Задача 1.** В полосе  $\Omega$  рассмотрим семейство  $P(x_1, x_2)$  кривых, которое однозначно параметризуются с помощью координат своих вершин  $(x_1, x_2) \in \Omega$ :

$$P(x_1, x_2) = \{(\xi_1, \xi_2) : x_2 - \xi_2 = (x_1 - \xi_1)^2, \quad 0 \leq \xi_2 \leq x_2\}.$$

**Задача 2.** Восстановить функцию двух переменных  $u(x_1, x_2)$ , если в полосе  $\Omega$  известны суммы интегралов от нее вида

$$\int_{P(x_1, x_2)} g(x_1, \xi_1) u(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 + \int_0^{x_2} \int_{x_1-h}^{x_1+h} K(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) u(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = F(x_1, x_2),$$

где  $h = \sqrt{x_1 - \xi_2}$ .

## Литература

1. Лаврентьев М. М. Задача интегральной геометрии на плоскости с возмущением, Сиб. мат. Журн.—Т. 37,—(1996), —С. 851–857.
2. Бегматов Акр. Х. Теоремы существования решения двух слабо некорректных задач интегральной геометрии, Доклады РАН,—Т. 386,—(2002), № 6.—С. 727–729.
3. Бегматов Акр. Х., Очилов З. Х. Задачи интегральной геометрии с разрывной весовой функцией, Доклады РАН,—Т. 429,—(2009), № 3.—С. 295–297.
4. Бегматов Акб. Х., Джайков Г. М. Линейная задача интегральной геометрии с гладкими весовыми функциями и возмущением, Владикавказский математический журнал,—Т. 17,—(2015), № 3.—С. 14–22.
5. Бегматов Акр. Х., Исмоилов А. С. Задача интегральной геометрии в полосе с весовой функцией, Научный вестник СамГУ,—Т. 117,—(2019), № 5.—С. 12–17.
6. Исмоилов А. С. Единственность и существование решения задачи интегральной геометрии в полосе, Бюллетень Института Математики,—Т. 2,—(2020), —С. 58–68.

## О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

<sup>1</sup>Турметов Б.Х., <sup>2</sup>Еркишева Ж.С., <sup>3</sup>Кулахметова Ш.Б.

<sup>1</sup> *Международный казахско-турецкий университет имени Х.А.Ясави, Казахстан, г. Туркестан,*

e-mail: turmetovbh@mail.ru

<sup>2</sup> *Международный казахско-турецкий университет имени Х.А.Ясави, Казахстан, г. Туркестан,*

e-mail: jazira78@mail.ru

<sup>3</sup> *Международный казахско-турецкий университет имени Х.А.Ясави, Казахстан, г. Туркестан,*

e-mail: shahimat95@gmail.com

В настоящей работе изучаются краевые задачи, обобщающие известную задачу с наклонной производной. Доказаны теоремы о существовании и единственности решения исследуемых задач. В классе Гельдера найдены точные порядки гладкости решения исследуемых задач.

Для любого  $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$  из  $R^n$  введем обозначение  $x = (\tilde{x}, x_n)$ , где  $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ . Пусть  $m \geq 2$ ,  $\Omega_m = \{x \in R^n : |\tilde{x}|^2 + |x_n|^m < 1\}$ ,  $\partial\Omega_m = \{|\tilde{x}|^2 + |x_n|^m = 1\}$ ,  $\Gamma = \{x \in \partial\Omega_m : x_n = 0\}$ ,  $n \geq 3$ . В области  $\Omega_m$  рассмотрим равномерно эллиптический оператор

$$A(x, D) = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \sum_{p,q=1}^{n-1} a_{pq} \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_q} + \sum_{j=1}^{n-1} b_j \frac{\partial}{\partial x_j} + c,$$

где коэффициенты  $a_{pq}, b_j, c$  зависят только от  $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ , являются достаточно гладкими и  $c \leq 0$ .

Для любой точки  $x \in \Omega_m$  сопоставим точку  $x^* = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, -x_n)$ . Пусть  $a, b$  - действительные числа. Рассмотрим в области  $\Omega_m$  следующие задачи

**Задача 1.** *Найти функцию  $u(x) \in C^2(\Omega_m) \cap C^1(\bar{\Omega}_m)$ , удовлетворяющую условиям*

$$aA(x, D)u(x) + bA(x, D)u(x^*) = f(x), \quad x \in \Omega_m,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_n}(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega_m,$$

$$u(x) = \phi(x), \quad x \in \Gamma.$$

**Задача 2.** *Найти функцию  $u(x) \in C^2(\Omega_m) \cap C^1(\bar{\Omega}_m)$ , удовлетворяющую условиям*

$$A(x, D)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega_m,$$

$$a \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) + b \frac{\partial u}{\partial x_n}(x^*) = g(x), \quad x \in \partial\Omega_m,$$

$$u(x) = \phi(x), \quad x \in \Gamma.$$

Заметим, что в случае  $a = 1, b = 0$  задачи 1 и 2 совпадают и она изучена в работе [1]. Отметим также, что уравнения и краевые задачи с инволютивными отображениями исследованы в работах [2,3]

Основными утверждения относительно задач 1 и 2 изложены в следующих теоремах.

**Теорема 1.** Пусть  $a \neq \pm b$ ,  $\lambda > 1 - \frac{1}{m}$ , причем  $\lambda + \frac{1}{m}$  - нецелое,  $f(x) \in C^{\lambda + \frac{1}{m} - 1}(\bar{\Omega}_m)$ ,  $g(x) \in C^\lambda(\partial\Omega_m)$ ,  $\phi(x) \in C^{\lambda+1}(\Gamma)$ . Тогда решение задачи 1 (задачи 2) существует, единственно и принадлежит классу  $C^{\lambda + \frac{1}{m}}(\bar{\Omega}_m)$ .

**Теорема 2.** Пусть  $a \neq \pm b$ ,  $f(x), \phi(x) = 0$ ,  $\lambda > 0$ , причем  $\lambda + \frac{1}{m}$  - нецелое. Тогда существует функция  $g(x) \in C^\lambda(\partial\Omega_m)$ , такая, что решение задачи 1 (задачи 2) при любом  $\varepsilon > 0$  не принадлежит классу  $C^{\lambda + \frac{1}{m} + \varepsilon}(\bar{\Omega}_m)$ .

### Литература

1. Алимов Ш.А. Об одной задаче с наклонной производной, Дифференциальные уравнения, no 10, 1981, 1738 - 1751.
2. Karachik V.V., Sarsenbi A., Turmetov B.Kh. On solvability of the main boundary value problems for a non-local Poisson equation, Turkish journal of mathematics, no 3, 2019, 1604 - 1625.
3. Karachik V.V., Turmetov B.Kh. Solvability of one nonlocal Dirichlet problem for the Poisson equation, Novi Sad Journal of Mathematics, no 1, 2020, 67 - 88.

## НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ОДНОЙ ЛИНИЕЙ ВЫРОЖДЕНИЯ

<sup>1</sup>Фаязов К.С., <sup>2</sup>Хажиев И.О.

- <sup>1</sup> Туринский политехнический университет в г. Ташкенте, ул. Кичик Халка йули, 17, г. Ташкент, 100195 Узбекистан,  
e-mail: kudratillo52@mail.ru
- <sup>2</sup> Национальный университет Узбекистана, Туринский политехнический университет в г. Ташкенте, ул. Университетская, 4, г. Ташкент, 100174 Узбекистан  
e-mail: kh.ikrom04@gmail.com

В работе исследуется корректность и условная корректность нелокальной краевой задачи для дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка.

Пусть  $\Omega = \{(x, y) : |x| < 1, 0 < y < 1\}$ ,  $Q = \Omega \times (0, T)$ . В области  $Q \cap \{x \neq 0\}$  рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \operatorname{sgn} x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x, y, t), \quad (1)$$

где постоянные  $a, b \geq 0$ ,  $a + b \neq 0$ ,  $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$

**Постановка задачи.** Найти решение уравнения (1) удовлетворяющее следующим условиям:

нелокальным

$$\alpha u|_{t=0} + \beta u|_{t=T} = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega} \quad (2)$$

граничным

$$u|_{x=1} = u|_{x=-1} = 0, \quad y \in [0, 1], \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

$$u|_{y=0} = u|_{y=1} = u_{yy}|_{y=0} = u_{yy}|_{y=1} = 0, \quad x \in [-1, 1], \quad t \in [0, T] \quad (4)$$

и условиям склеивания

$$\begin{aligned} u(-0, y, t) &= u(+0, y, t), \\ u_x(-0, y, t) &= u_x(+0, y, t), \end{aligned} \quad y \in [0, 1], \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

где  $\varphi(x, y)$ ,  $f(x, y, t)$  заданные достаточные гладкие функции,  $\alpha, \beta$  - заданные действительные числа такие, что  $|\alpha| + |\beta| \neq 0$ .

Нелокальные задачи для уравнения смешанного типа четвертого порядка (1) мало изучены. Краевых задачи для уравнений типа (1) исследуются в многих работах, в том числе в [1-2].

Уравнения смешанного типа имеют большое практическое применение, они возникают при решении задач газовой динамики, без моментной теории оболочек с кривизной переменного знака, в магнитной гидродинамике, в теории электронного рассеяния, в прогнозировании уровня грунтовых вод и в других областях физики и техники.

В данной работе выведена априорная оценка для решения уравнения (1), получено представления решения задачи (1)-(5), доказаны теоремы о существовании и единственности решения, выведены оценки условной устойчивости.

### Литература

1. Аманов Д. Краевая задача для вырождающегося параболического уравнения высокого порядка с меняющимся направлением времени. Известия вузов. Математика, 2014, №12, с.3-8.
2. Джуроев Т.Д., Согуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. Ташкент: Фан, 2000.
3. Егоров И.Е., Пятков С.Г., Попов С.В. Неклассические операторно-дифференциальные уравнения, Наука, Новосибирск, 2000.
4. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралъцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., Наука, 1967.
5. Ларькин Н.А., Новиков В.А., Яценко Н.Н. Нелинейные уравнения переменного типа. Новосибирск, Наука, 1983.

### ХАРАКТЕРИСТИКА ИБРАГИМОВА-ОСИПОВА И ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМЫ

<sup>1</sup>Хусаинова Б.Б.

<sup>1</sup> Институт математики имени В.И.Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан.,  
e-mail:

<sup>2</sup>Сирожитдинов А.А.

<sup>2</sup> Институт математики имени В.И.Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан.,  
e-mail:

Пусть в некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, F, P)$  определена последовательность серий независимых случайных величин (с,в)

$$X_{n1}, \dots, X_{nn}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{1}$$

и  $S_n = X_{n1} + \dots + X_{nn}$ .

Положим

$$F_{n_j} = P(X_{n_j} < x), \quad j = 1 \dots n, \quad F_n(x) = P(S_n < x)$$

Далее положим

$$D_n(\alpha, \varepsilon) = \sum_{j=1}^n \int_{|x| \leq \varepsilon} |x|^{2+\alpha} dF_{n_j}(x) + \\ + \sum_{j=1}^n \int_{|x| > \varepsilon} x^2 dF_{n_j}(x) = M_n(\alpha, \varepsilon) + L_n(\varepsilon), \quad \alpha > 0, \quad \varepsilon > 0.$$

Числовые выражение

$$L_n(\varepsilon) = \sum_{j=1}^n \int_{|x|>\varepsilon} x^2 dF_{n_j}(x)$$

называется характеристикой Линдберга и эта характеристика играет важную роль в теории суммирования независимых с.в.

**Теорема 1.** Пусть выражение  $D_n(\alpha, \varepsilon)$  при некоторых значениях  $\alpha = \alpha_0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0$  стремится к нулю. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n(\alpha, \varepsilon) = 0$$

при всех значениях  $\alpha > 0$  и  $\varepsilon > 0$ .

Согласно теореме 1, если

$$D_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (D)$$

то величина

$$D_n(\alpha, \varepsilon) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

при любых  $\alpha > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ .

В теории суммирования независимых с.в. очень часто используется следующее условие бесконечной малости дисперсий  $\sigma_{n_j}^2 = EX_{n_j}^2$ , введенное Феллером [2] (гл.8, §4, стр.302),

$$\max_{1 \leq j \leq n} \sigma_{n_j}^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

**Теорема 2.** (CLT) Если последовательности независимых случайных величин

$$\{X_{n1}, \dots, X_{nn}\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

удовлетворяют условию (D), то

$$\sup_x |P(S_n < x) - \Phi(x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

**Теорема 3.** Пусть последовательности независимых случайных величин

$$\{X_{n1}, \dots, X_{nn}\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

удовлетворяют условию (F) бесконечной малости дисперсий  $\sigma_{n_j}^2$ . Тогда условие (D) необходимо и достаточно для справедливости CLT.

## Литература

1. М.Лоев. Теория вероятностей. Издательство Иностранной литературы. Москва 1962. 719стр.
2. В.Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения том 2. Москва "МИР"1984. 751стр.
3. Ю.В.Линник, И.В.Островский Разложения случайных величин и векторов. Издательство "Наука"Москва 1972 479стр.
4. Vladimir Rotar Probability Theory. World Scientific. Singapore. New Jersey. London, Hong Kong. 1997. 414pp
5. А.А.Боровков Теория вероятностей. Издательство "Эдиториал УРСС"Москва1999 471 стр.
6. В.В.Петров Суммы независимых случайных величин. Издательство "Наука"Москва 1972 414 стр.

## 6. MATHEMATICAL MODELING

### FUZZY B-SPLINE MODELING METHODS ON FUZZY TOPOLOGICAL LINGUISTIC SPACES FOR UNCERTAINTY DATA VISUALIZATION PROBLEMS

<sup>1</sup>Abd Fatah Wahab, <sup>2</sup>Syafiq Bidin, <sup>3</sup>Izat Emir

<sup>1</sup> Faculty of Ocean Engineering Technology and Informatics Universiti Malaysia Terengganu,  
e-mail: fatah@umt.edu.my

<sup>2</sup> Faculty of Ocean Engineering Technology and Informatics Universiti Malaysia Terengganu,  
e-mail: syafiqbidin@gmail.com

<sup>3</sup> Department of Mathematical Science, Faculty of Science, Universiti Teknologi Malaysia,  
e-mail: zatemer@umt.edu.my

The interpretation and visualization of the linguistic uncertainty data in to fuzzy linguistic B-spline form are difficult. The visualization and forecasting data into geometrical figure requires a simple and effective method based on fuzzy linguistic parameter. In this paper discuss methodology of fuzzy linguistic B-spline model as a crisp function is a combination of flexible bands that passes through the number of fuzzy linguistic points that are called fuzzy linguistic control points and creates smooth fuzzy linguistic curves and surface. These functions which called fuzzy linguistic B-spline enable the creation and management of fuzzy complex shapes and fuzzy surfaces using a number of fuzzy linguistic point relation. The introduced model will fit to the data on a some fuzzy topological space and the result will be given in the form of smooth fuzzy linguistic curve and surface as a solution of the defined problems.

### THE INFLUENCE OF MAGNETIC FIELD ON WALL SHEAR STRESS IN POWER LAW FLUID FLOW OF BLOOD

<sup>1</sup>Ilyani Abdullah

<sup>1</sup> Malaysia,

e-mail:ilyani@umt.edu.my

The profile of wall shear stress in non-Newtonian fluid which is governed by power law fluid flow through a cosine shape stenosis is explored in this study. Further, the effect of magnetic field as an external force on wall shear stress also revealed. Wall shear stress is an important flow characteristic in order to determine the behaviour of blood in the presence of stenosis, as the accumulation of fatty material can affect the flowing blood. The governing equations employing the blood flow in the cylindrical coordinate system are then solved by finite difference scheme in staggered grid known as Marker and Cell (MAC) method. The influence of magnetic parameters on wall shear stress profile are illustrated in graphical results. The results show that the wall shear stress increases when magnetic field is applied and the profile is higher along the stenotic region.

### ON EIGENVALUE OF A GONOSOMAL EVOLUTION OPERATOR

<sup>1</sup>Absalamov Akmal

<sup>1</sup> Samarkand State University, University blv. 15, 140104, Samarkand, Uzbekistan.

e-mail: absalamov@gmail.com

The population dynamics is a well developed branch of mathematical biology, which has a history of more than two hundred years, although more recently the branch of mathematical



biology has greatly increased. Many concrete models of mathematical biology described by corresponding non-linear evolution operator. Our model is related to a bisexual population.

In bisexual population any kind of differentiation must agree with the sex differentiation, i.e. all the organisms of one type must belong to the same sex. Thus it is possible to speak of male and female types. For mathematical models of bisexual population, see [1], [2] for more details.

Sex is controlled by two chromosomes called gonosomes. Gonosomal inheritance is a mode of inheritance that is observed for traits related to a gene encoded on the sex chromosomes.

Hemophilia is a lethal recessive  $X$ -linked disorder: a female carrying two alleles for hemophilia die. Therefore, if we denote by  $X^h$  the gonosome  $X$  carrying the hemophilia, there are only two female genotypes:  $XX$  and  $XX^h$  ( $X^hX^h$  is lethal) and two male genotypes:  $XY$  and  $X^hY$ . We have four types of crosses defined as

$$\begin{aligned} XX \times XY &\rightarrow a_1XX, a_2XY, \\ XX \times X^hY &\rightarrow c_1XX^h, c_2XY, \\ XX^h \times XY &\rightarrow b_1XX, b_2XX^h, b_3XY, b_4X^hY, \\ XX^h \times X^hY &\rightarrow d_1XX^h, d_2XY, d_3X^hY. \end{aligned}$$

Let  $F = \{XX, XX^h\}$  and  $M = \{XY, X^hY\}$  be sets of genotypes. Assume that state of the set  $F$  is given by a real vector  $(x, y)$  and state of  $M$  by a real vector  $(u, v)$ . Then a state of the set  $F \cup M$  is given by the vector  $t = (x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4$ . If  $t' = (x', y', u', v')$  is a state of the system  $F \cup M$  in the next generation, then by the above rule we get the evolution operator  $W : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  defined by

$$W : \begin{cases} x' = a_1xu + b_1yu, \\ y' = c_1xv + b_2yu + d_1yv, \\ u' = a_2xu + c_2xv + b_3yu + d_2yv, \\ v' = b_4yu + d_3yv. \end{cases} \quad (4)$$

where  $a_1, a_2, c_1, c_2, b_1, b_2, b_3, b_4, d_1, d_2, d_3$  are non-negative real numbers such that

$$a_1 + a_2 = c_1 + c_2 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = d_1 + d_2 + d_3 = 1. \quad (5)$$

This example can be generalized as follows. Suppose that the set of female types is  $F = \{1, 2, \dots, \eta\}$  and the set of male types is  $M = \{1, 2, \dots, \nu\}$ . Let  $x = (x_1, x_2, \dots, x_\eta) \in \mathbb{R}^\eta$  be a state of  $F$  and  $y = (y_1, y_2, \dots, y_\nu) \in \mathbb{R}^\nu$  be a state of  $M$ . Consider  $p_{ir,j}^{(f)}$  and  $p_{ir,l}^{(m)}$  as some inheritance non-negative real coefficients (not necessarily probabilities) with

$$\sum_{j=1}^{\eta} p_{ir,j}^{(f)} + \sum_{l=1}^{\nu} p_{ir,l}^{(m)} = 1$$

and the corresponding evolution operator

$$W : \begin{cases} x'_j = \sum_{i,r=1}^{\eta,\nu} p_{ir,j}^{(f)} x_i y_r, & j = 1, \dots, \eta \\ y'_l = \sum_{i,r=1}^{\eta,\nu} p_{ir,l}^{(m)} x_i y_r, & l = 1, \dots, \nu. \end{cases} \quad (6)$$

This operator is called gonosomal evolution operator.

Note that the operator (6) describes evolution of a hemophilia.

**Theorem 1.**  $\lambda = 2$  is an eigenvalue for the nonzero fixed point  $(x, y, u, v)$  of the evolution operator (4).

**Proof** Let  $(x, y, u, v)$  be a nonzero fixed point of the operator (4). Then fixed point satisfy

$$\begin{cases} x = a_1xu + b_1yu, \\ y = c_1xv + b_2yu + d_1yv, \\ u = a_2xu + c_2xv + b_3yu + d_2yv, \\ v = b_4yu + d_3yv. \end{cases} \tag{7}$$

We have

$$x \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial x'}{\partial y} + u \cdot \frac{\partial x'}{\partial u} + v \cdot \frac{\partial x'}{\partial v} = 2(a_1xu + b_1yu) = 2x.$$

$$x \cdot \frac{\partial y'}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial y'}{\partial y} + u \cdot \frac{\partial y'}{\partial u} + v \cdot \frac{\partial y'}{\partial v} = 2(c_1xv + b_2yu + d_1yv) = 2y.$$

$$x \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u'}{\partial y} + u \cdot \frac{\partial u'}{\partial u} + v \cdot \frac{\partial u'}{\partial v} = 2(a_2xu + c_2xv + b_3yu + d_2yv) = 2u.$$

$$x \cdot \frac{\partial v'}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial v'}{\partial y} + u \cdot \frac{\partial v'}{\partial u} + v \cdot \frac{\partial v'}{\partial v} = 2(b_4yu + d_3yv) = 2v.$$

This means that,  $\nabla x' \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} = 2x$ , and analogously  $\nabla y' \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} = 2y$ ,  $\nabla u' \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} = 2u$ ,

$\nabla v' \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} = 2v$ , i.e.  $\lambda = 2$  is eigenvalue. Lemma is proved.

Using ideas in the lemma 2.1, one can prove the following.

**Theorem 2.**  $\lambda = 2$  is an eigenvalue for the nonzero fixed point of the evolution operator (6)

### References

1. Lyubich Y.I. Mathematical structures in population genetics. Springer-Vergar, Berlin. (1992).
2. Absalamov A.T., Rozikov U.A. The Dynamics of Gonosomal Evolution Operators. Jour. Applied Nonlinear Dynamics. **9**(2), (2020), 247-257.

## WHY DO WE NEED THE QUALITATIVE THEORY OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS?

<sup>1</sup>Auni Aslah Mat Duad

<sup>1</sup>Faculty of Ocean Engineering Technology and Informatics, Universiti Malaysia Terengganu, Kuala Nerus, Malaysia.,

e-mail:auni aslah@yahoo.com, auni aslah@umt.edu.my

This note discusses the definition, the history and the importance of the qualitative theory of ordinary differential equations (ODEs). Although such discussions can be found in many textbooks and online lecture notes, some of the information provided are distinct and some are repeated, often without or with insufficient examples. This article takes the union of the information and fills in the missing details by providing suitable examples from other references. The qualitative theory of ODEs are essential to complement the analytical and numerical methods. It is also required to prove qualitative properties of a dynamical system. Qualitative analysis of ODEs is also needed when exact solution, even if it can be found, is difficult to

interpret or visualise. Furthermore, in some applications, only qualitative properties of the system are of interest. The qualitative methods also will provide information on the sensitivity of the system under study to perturbations of change of initial conditions and of various parameters.

### A SOIL-TRANSMITTED HELMINTHIASIS PREVALENCE-BASED DETERMINISTIC MODEL

<sup>1,2</sup>Chong Nyuk Sian, <sup>2</sup>Hardwick Robert J, <sup>2</sup>Truscott James E, <sup>2</sup>Anderson Roy M

<sup>1</sup> Faculty of Ocean Engineering Technology and Informatics, Universiti Malaysia Terengganu, 21030 Kuala Nerus, Terengganu, Malaysia.,

e-mail:nyuksian@umt.edu.my

<sup>2</sup> London Centre for Neglected Tropical Disease Research, Department of Infectious Disease Epidemiology, Imperial College London, United Kingdom,

Eradicating soil-transmitted helminth (STH) infections in children by 2020 is a target set by the World Health Organization (WHO) in the 2010-20 Neglected Tropical Diseases Road Map. STH infections are not a major cause of mortality, however, they lead to poor health and increase the disability-adjusted life years (DALYs). Thus, in this paper, we propose a prevalence-based deterministic model to examine the transmission dynamics of soil-transmitted helminthiasis in human population subject to continuous exposure to infection over time. We find that the STH infection will die out if the initial prevalence value ( $y(0)$ ) is sufficiently small.

Otherwise, the STH infection will persist. Moreover, to better understand the dynamical behaviour of this model, we investigate the movement trajectories via analytical approximations around the equilibrium points. Two special cases of the model are analysed: Case (1) the distribution of the STH parasites in the host population is highly aggregated following a negative binomial distribution, and Case (2) no density-dependent effects act on the parasite population. We discover that, for Case (1), disease elimination is always possible, but it is not so for Case (2) if  $y(0)$  is sufficiently large. In addition, we learn that the clumping parameter  $k$  of the negative binomial probability model has a great influence on the likelihood of parasite eradication.

### A LESLIE-GOWER PREDATOR-PREY MODEL WITH TWO FREE BOUNDARIES

Elmurodov Alimardon

*Institute of Mathematics (Tashkent, Uzbekistan),*

e-mail: elmurodov8111@mail.ru

The expanding (migration) of a new or invasive species is one of the most important topics in mathematical ecology. Many mathematicians have made efforts to develop various invasion models and investigated them from a viewpoint of mathematical ecology. To describe the invasion and spreading phenomenon, there have been many interesting studies on the existence of positive traveling wave solutions connecting two different equilibria. Recently, many works studied the predator-prey system with the Leslie-Gower scheme [1- 3]. Inspired by former works [1,2] that study the nonlinear evolution of two species on an unbounded spatial domain, we focus on the case where indigenous population undergoes diffusion and growth in a bounded domain  $[-L, L]$  to be more realistic. We consider system (1) over a bounded domain  $[-L, L]$  with Leslie-Gower type nonlinearity. The nonlinear evolution equations that  $u(t, x)$  and  $v(t, x)$  satisfy are as follows:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = u_{xx} + uu_x + u(1 - u) - v \left( \frac{u}{u+m} \right) & \text{for } t > 0 \quad \text{and} \quad -L < x < L, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = dv_{xx} + vv_x + kv \left( 1 - \frac{bv}{u+a} \right) & \text{for } t > 0 \quad \text{and} \quad h(t) < x < s(t). \end{cases} \quad (1)$$

The above equations are subject to the following initial, boundary and free-boundary

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = -\mu v_x(t, s(t)) & \text{for all } t > 0, \quad s(0) = s_0, \\ \dot{h}(t) = -\mu v_x(t, h(t)) & \text{for all } t > 0, \quad h(0) = -s_0, \\ v(t, h(t)) = v(t, s(t)) = 0 & \text{for all } t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad -L \leq x \leq L, \quad v(0, x) = v_0(x), \quad -s_0 \leq x \leq s_0, \\ u_x(t, -L) = u(t, L) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

where all the parameters  $a, b, k, D, m$  and  $\mu$  are positive. Model (1), coupled with the conditions in (2), governs the dynamics of two species ( $u$  and  $v$ ) over a bounded spatial domain  $[-L, L]$ , where the function  $u(t, x)$  (resp.  $v(t, x)$ ) stands for the population of the prey (resp. predator). The condition  $v(t = 0, \cdot) \equiv v_0(\cdot)$  on  $[-s_0, s_0]$  conveys that  $v$  initially occupies only a subregion  $[-s_0, s_0] \subset [-L, L]$  of the whole domain. The nonlinear term  $\frac{u(t, x)}{u(t, x) + m}$  in (1) is the Holling type-II functional response. This type of nonlinearity is commonly used in the ecological literature.

**Theorem 1.** *Let  $(u, v, s, h)$  be a solution of (1)-(2). Then*

$$\begin{aligned} 0 < u(t, x) &\leq M_1, & (t, x) &\in \bar{D}, \\ 0 < v(t, x) &\leq M_2, & (t, x) &\in \bar{Q}, \\ 0 < s'(t) &\leq M_3, & 0 \leq t &\leq T, \\ 0 < -h'(t) &\leq M_4, & 0 \leq t &\leq T. \end{aligned}$$

We establish the existence and uniqueness of a global classical solution and then study the asymptotic behavior of the solution of (1)-(2).

## References

1. Wang M. X. and Zhao J. F. A free boundary problem for a predator-prey model with double free boundaries, J. Dynam. Differential Equations, 29, 2017, 957-979.
2. Yang R.Z., Wei J.J. The effect of delay on a diffusive predator-prey system with modified leslie-gower functional response, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 40, 2017, 51-73.
3. Yu. Liu, Guo Z., El Smailly M., Wang L. A Leslie-Gower predator-prey model with a free boundary, Discrete and Continuous Dynamical Systems-S, 12, 2019, 927-959.

## MODELLING OF ECOLOGICAL AND ECONOMIC SUSTAINABILITY OF COASTAL AREA FOR SHRIMP AQUACULTURE PRODUCTION AT I-SHARP, SETIU, TERENGGANU DARUL IMAN

<sup>1</sup>Hanani I. S., <sup>2</sup>Muhamad Safih I.

<sup>1</sup> Faculty of Ocean Engineering Technology and Informatics University Malaysia Terengganu, 21030 Kuala Terengganu, Terengganu, Malaysia,

e-mail: hananiisa@yahoo.com

<sup>2</sup> Faculty of Ocean Engineering Technology and Informatics University Malaysia Terengganu, 21030 Kuala Terengganu, Terengganu, Malaysia,

e-mail: safihmd@umt.edu.my

The large-scale integrated shrimp aquaculture project are risky on long term impact especially ecological aspect like quality of water. Besides having negative impact, it given positive impact to local communities and an economic of fisheries. The potential long term economic effects related to labor, income, local demand and net profit are analysed from a system perspective. In this study, we have used systems dynamics simulations with ecological

and economic aspect of integrated shrimp farming as an experimental platform for policy analysis. The model was validated by using the simulation was suggested by the literature. Then, the behavior of the model was tested and calibrated using available data. The simulation finding revealed that the production does not meet increasing in demand. The lower demand given effect on production level and automatically making the lower income in the cost of labor for the shrimp production. In the model, unit labor cost is a function of the growth rate of per capital income.

## A SYSTEM OF EQUATIONS OF THE TWO-VELOCITY HYDRODYNAMICS WITHOUT PRESSURE

<sup>1</sup>Imomnazarov Kholmatzhon, <sup>2</sup>Turdiyev Ulugbek

<sup>1</sup> *Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, 6, Lavrentieva ave., 630090, Novosibirsk, Russia,*

e-mail: imom@omzg.sccc.ru

<sup>2</sup> *Karshi State University, 17, Kuchabag str., 180100, Karshi, Uzbekistan,*

e-mail: u.turdiyev.81@mail.ru

Modern theories of continuum mechanics [1]-[3] suggest that a medium possesses its prehistory and in the general case a material can have an arbitrarily long "memory". However, a long memory generates significant difficulties, which can be overcome in the two ways: first, by considering special classes of motions in which memory whatever it may be cannot significantly manifest itself (for example, viscometric flows of viscous fluids [1, Ch. V]), second, by distinguishing classes of media or materials in which stresses at any point are affected only by the background of motion in an arbitrarily small time interval. Materials of this type are called materials with infinitesimal memory.

The most important materials with infinitesimal memory are those in which stresses at the point  $x$  at the time instant  $t^*$  are determined by the first  $n$  derivatives of the deformation gradient  $\mathbf{F}(x)$  with respect to time  $t$  at the same time  $t^*$ . Such materials are called materials of the differential type of complexity  $n = 1, 2, \dots$ . The theory of isotropic liquids of the differential type of complexity  $n$  was constructed by Rivlin and Eringen (see [1], [2]), and based on this theory a simpler asymptotic theory of slow motions of liquids of order  $n = 0, 1, 2, \dots$  was constructed by Coleman and Noll (see [1]). In the case of incompressible fluids, a zero-order fluid is an elastic fluid whose motion is described by the Euler equations

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_k \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{F}, \quad \text{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

first order fluid is a Newtonian linearly viscous fluid whose motion is described by the Navier-Stokes equations

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_k \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_k} - \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{F}, \quad \text{div} \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

moreover,  $\rho > 0$  and  $\nu > 0$ . We have obtained systems of equations of the Burgers and the Hopf types from the system of non-stationary equations of the two-velocity hydrodynamics. Account must be taken of the fact that the energy dissipation occurs due to the viscosities of subsystems and the coefficient of inter-component friction. For a Hopf-type model, the analysis of the system of differential equations reduces in the form of traveling waves to solving a system of nonlinear ordinary differential equations. The effect of the kinetic coefficients on the propagation of nonlinear waves is clarified. This work was supported in part by the Russian Foundation for Basic Research (grant No. 18-51-41002).

## References

1. *Truesdell C. A.* first course in rational continuum mechanics, vol. I, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1977.
2. *Serrin J.B.* Mathematical principles of classical fluid mechanics. Handbuch der Physik, 1959.
3. *Sedov L.I.* Continuum mechanics. Vol. 2. M.: Nauka, 1973, - 584 p (in Russian).

## EFFICIENT DISTRIBUTION OF WATER RESOURCES IN THE CHANNELS OF IRRIGATION SYSTEMS

<sup>1</sup> **Juraev G.U.**, <sup>2</sup> **Tulaganov Z.Sh.**, <sup>3</sup> **D.G. Juraeva**

<sup>1</sup> *National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,*

e-mail: gjuraev@mail.ru

<sup>2</sup> *National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,*

e-mail: tzakir@mail.ru

<sup>3</sup> *Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi,*

e-mail: juraeva.d@gmail.com

As you know, during the summer season, there is often an acute shortage of water in the irrigated territories of the Republic of Uzbekistan and other countries of the world. Therefore, the rational distribution of water resources, the optimal management of the processes of water delivery to consumers, as well as their efficient use are one of the urgent tasks of today. From this point of view, the optimal management of water distribution in the canals of irrigation systems in conditions of a shortage of water resources has both theoretical and practical significance.

This paper investigates the problem of efficient distribution of water resources in irrigation canals under conditions of discrete water supply to consumers, which should provide water to a specific consumer at a specified time, as well as allow control over discrete distribution of water resources in irrigation canals and optimal control of the entire process[1,2,3].

To solve this problem, first of all, the criteria for the quality of water distribution in the canal section, as well as the main restrictions on the operating modes of the sections and hydraulic structures of the canal in conditions of discrete water supply to consumers, were identified. Mathematical models of the optimal distribution of water in the canals of irrigation systems have been tested under conditions of discrete water supply to consumers.

In the future, the results obtained can also be used to improve production efficiency in agriculture, management and allocation of sown areas by optimizing production.

## References

1. *Li Y. and De Schutter B.* Stability and performance analysis of an irrigation channel with distributed control Control Engineering Practice, vol. 19, no. 10, pp. 1147-1156, Oct. 2011.
2. *Cardona C. M., Quevedo J., Romera J. Puig V., Salterain A., Ayesa E., Irizar I., Castro A., Lujan M., Charbonnaud P., Chiron P., Trouvat J.* Optimal predictive control of water transport systems: ArrГкт-Darr Arros case study, Water Science Technology WST, vol. 60 (no. 8). pp. 2125-2133. ISSN 0273-122. (2009)
3. *M. Xu, R.R. Negenborn P.J. van Overloop, N.C. van de Giesen.* De Saint-Venant equations-based model assessment in model predictive control of open channel flow //Advances in Water Resources 149 pp. 37-45, 2012.

## ANALYSIS OF ECONOMIC INDICATORS OF DEVELOPING OF SMALL BUSINESS USING ECONOMETRIC MODELS

**Khudoyorov Laziz Niyozovich**

*Karshi branch of the Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Kharizmi, Head of the information technologies department Karshi city, street Mirmiron 27, Uzbekistan.  
e-mail: laziz1309@bk.ru*

Nowadays the development of small business and private entrepreneurship, the creation of a favorable business environment for entrepreneurship are considered one of the most actual issues in achieving stable economic growth in Uzbekistan. Therefore, it is important to accurately and optimally forecast the share of small business in the country's Gross domestic product through using mathematical models and taking into account reliable and influential factors [1]. In this article, the regression analyses of factors which influence the development of small business, are carried out and the order of analysis through using econometric models is observed.

In the third direction named after "Further development and liberalization of the economy" of the Action Strategy which was approved in our country by five priority areas of development of the Republic of Uzbekistan for 2017-2021 years, measures such as active attraction of foreign investment in the sectors and regions of the economy of the country through strengthening macroeconomic stability and maintaining high economic growth, increasing the competitiveness of the national economy, modernization and intensive development of agriculture, continuing institutional and structural reforms by reduction state participation in the economy, protecting the rights of private property and strengthening their important position, encouraging the development of small business and private entrepreneurship, socio-economically developing the regions, districts and cities in a comprehensive and proportional way, improving investment climate have been identified [2].

In the Action Strategy for 2017-2021 years, the implementation of sectoral programs which are involved 649 investment projects in the amount of 40 billion US dollar, is planned and in the result, it is expected that the production of industrial products will be increased by 1.5 times over the next 5 years, their share in gross domestic product will be increased from 33.6 to 36, the share of the reprocessing industry will be increased from 80 to 85. Nowadays, the level of the share of small entrepreneurship in the country's gross domestic product is also directly related the volume of produced products, the number of people who are worked in small business and private entrepreneurship, the number of small businesses and private entrepreneurship. With taking account of this, the need for scientific analysis of these indicators for the future period using mathematical methods is considered one of the most actual issues of today.

Table 1.

**Analysis of factors which influence the volume of products which are produced by small businesses and private entrepreneurs in Karshi city**

Years	Product volume which are produced by small businesses and private entrepreneurs (billion soums) Y	Investments in small business and private entrepreneurship (thousand soums) X1	Number of people which are worked in small business and private entrepreneurship X2	Number of small businesses and private entrepreneurship X3
2008	23.075852	8730152.7	11420	4220
2009	21.226537	21525265.5	10002	4549
2010	23.598471	93703785	10726	4634
2011	49.702919	43074637.2	10455	4622
2012	186.563885	71380052.8	11188	4251
2013	177.019929	43862007.1	10000	3994
2014	197.693541	62865012	11661	3461
2015	225.456267	115179625	13407	3213
2016	263.376348	167864643	14484	3175
2017	264.769629	370580627	15843	3442
2018	549.300749	280439243	16025	3835
2019	677.377468	393080957	20769	4489

\* Compiled by the author on the basis of data from the Regional statistics department.

In this article, we analyze the factors which influence the volume of products which are produced by small businesses and private entrepreneurs in Karshi city on the basis of regression analysis by using econometric models. Regression analysis is considered one of the most common methods in data analysis. In the analysis and forecasting of revenues, numerical data are commonly used, and the need for observing and analyzing the relationship between different sizes is appeared.

In the analysis of given numerical values, the arbitrary variable (X) and the involuntary (Y) variables are observed. Regression analysis explains the change of the values of these variables. The regression equation is the formula for the statistical relationship between variables. If this formula is linear, linear regression will be observed. The formula of the statistical relationship between two variables is called even regression, and the relationship among several variables is called multivariate regression.

The correlation index R is used to estimate the connection density among even factors. The correlation coefficient can be used to determine the density of linear connections. A negative value of the correlation coefficient r indicates that there is the inverse relationship among the phenomena [3].

We consider the regression analysis of a number of factors (X1, X2, X3) which affect the output factor (Y) which is produced by small businesses and private entrepreneurs on the basis of the data of the Regional Statistics Office. Regression analysis is performed on the basis of the following table data (Table 1).

In the analysis of the data of Table 1, the volume of products which are produced by small businesses and private entrepreneurs is taken as (Y). Investments in small business and private entrepreneurship (thousand soums) X1, number of people engaged in small business and private entrepreneurship X2, number of small business and private entrepreneurship X3, are taken as



influencing factors. On the basis of the data in the table, calculations are performed and the following regression analysis results are obtained. (Table 2).

Table 2.

### Results of regression analysis

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
X1	-1.171542	6.09E-07	-0.192397	0.8522
X2	0.061955	0.025217	2.456905	0.0395
X3	0.004171	0.056597	-0.073698	0.9431
C	-55.7401	350.8470	-1.569744	0.1551
R-squared	0.826754	Mean dependent var	Mean dependent var	221.5968
Adjusted R-squared	0.761786	S.D. dependent var	S.D. dependent var	206.8916
S.E. of regression	100.9779	Akaike info criterion	Akaike info criterion	12.32888
Sum squared resid	81572.24	Schwarz criterion	Schwarz criterion	12.49052
Log likelihood	-69.97329	Hannan-Quinn criter.	Hannan-Quinn criter.	12.26904
F-statistic	12.72568	Durbin-Watson stat	Durbin-Watson stat	1.609758
Prob(F-statistic)	0.002057			

As we can see from the amount of coefficient of the analysis of results which are obtained in Table 2 that when the investment in small business and private entrepreneurship in Karshi city increased by 1 percent, it is led to increase the average volume of products which are produced by small business and private entrepreneurship by 1,2 percent, the number of people who work in small business and private entrepreneurship by 1 percent when increase in the volume of products which are produced by small businesses and private entrepreneurship other factors do not change, the increase in the number of small businesses and private entrepreneurship by 1 percent when the other factors do not change, increase in the volume of products which are produced by small businesses and private entrepreneurship by average of 0,006 percent. When each factor which influences the volume of products which are produced by small businesses and private entrepreneurship in Karshi city, is analyzed individually, and the others are considered unchanged, the biggest influenced factor is considered the share of investment in small business and private entrepreneurship. In this case, we can express the regression equation which represents the correlation bond between the resulting factor with the influencing factors on the basis of data of Table 2 and using the method of "The smallest squares" as follows:

$$Y = 1,2 * X1 + 0,06 * X2 + 0,004 * X3 - 55 \quad (1)$$

Thus, we can conclude on the basis of (1) mathematical model that we can achieve an increase of the volume of products which are produced by small businesses and private entrepreneurship in Karshi city through increasing the number of investments in small business and private entrepreneurship in Karshi, the number of people who work in small business and private entrepreneurship, the number of small business and private entrepreneurship.

### References

1. *Urmonov J.J.* TMethods of applying mathematical models in forecasting economic indicators of small business development, Scientific electronic journal "International finance and accounting 5, 2017, 127-134.
2. *Decree of the President of the Republic of Uzbekistan.* On the Action strategy of further development of the Republic of Uzbekistan, DP-4947, February 7, 2017

3. *Nasritdinov G. Econometrics. Training manual. , κECONOMY-FINANCEЪ, 2008.*

## METHOD FOR THE HIERARCHICAL ASSESSMENT OF PERSONNEL COMPETENCE IN THE EDUCATIONAL SYSTEM

<sup>1</sup>Kosbergenov S, <sup>2</sup>Kosbergenova M.S.

<sup>1</sup> *Nukus State Pedagogical Institute named after Ajiniyaz,*

<sup>2</sup> *National University of Uzbekistan,*

e-mail: kosbergenova.marina@gmail.com

**Abstract:** This work is about the method of hierarchical assessment of personnel competence in the education system. The HAM method for assessing the competence of personnel in the field of information security is considered.

**Keyword:** the competence of the specialist in the field of information security, information security, hierarchical assessment.

The ongoing global economic and social reforms, to improve the quality of education and upbringing of young people in line with the need for a democratically developed state, introduces modern forms and methods of education into the educational process. Implementation of this task will require the need to simulate the quality of teaching quality in the higher education system in accordance with the requirements of a personalized educational strategy. Implementation of state educational standards based on competency approach in organization and management of monitoring of teaching quality, elaboration of scientifically-based proposals and recommendations on modeling quality of teaching quality in the system of higher education, development of system of criteria, indicators, parameters and indicators of training, identifying factors affecting teaching quality, its computer aided information system is of vital importance.

At the moment, competency-based information systems are widely used in the higher education system. Education aimed at forming competences is the ability to apply the knowledge, abilities and skills of students to their practical, professional and social activities. Competence-based learning helps students to gain independence, an active civil position, initiative, rationalize access to media and information and communication technologies, gain practical skills in the field, and build healthy competitiveness and public skills.

A person must have personal, social, economic and professional relationships in his or her own life, acquire a role in society, solve the problems that he or she faces, and, most importantly, be competent in his area of competence. Also, during the course of learning each academic discipline, trainees are also trained in the field of private competences based on the peculiarity and content of the subject.

It is well known that the content of the educational content is hierarchical and it is desirable to use the Saati hierarchical analyzing method for quantitative evaluation of some components of the curriculum to make a decision on the whole course's adaptation.

Hierarchical analysis method (HAM) is an improved way of evaluating the assessment and introducing existing real-life system as an abstract model, determining the impact of the various components relationships in the system on the whole system and the priorities of these components. The main task of the HAM is not only the direct linkage of the elements, but also the assessment of the hierarchy of high levels of interconnection between different levels.

Let's take a look at the use of HAM for the evaluation of the competence in the field of information security. Obviously, the formation of such competence is a complex issue, and the audience will find a satisfactory solution based on a new quality by formulating a number of individual competences.

The process of information security management requires a comprehensive approach based on deep analysis of all possible negative consequences. At the same time, it is important not to

miss the important aspect of the object. The negative consequences analysis requires mandatory identification of all potential sources of threats, factors that affect its origin and the most current threats to information security.

The competence in the field of information security is recommended to formulate competencies on the following topics:

$K_1$  - protecting the use of banned information amongst young children

$K_2$  - protection against spam, hacker attacks and malicious software

$K_3$  - protection from criminal and terrorist information

$K_4$  - prevention of addiction to network and computer games

$K_5$  - controlling young children in the information space

$K_6$  - personal information protection

$K_7$  - copyright protection

$K_8$  - registration and use of electronic means of education

$K_9$  - health-friendly technologies

The formation of the above competences is influenced by the following factors, i.e. the results of studying the following subjects:

$\Phi_1$  - Informatics and Information Technology in Education;

$\Phi_2$  - Basics of Information Security;

$\Phi_3$  - legal framework in the field of education;

$\Phi_4$  - Psychology;

$\Phi_5$  - occupational safety in educational institutions;

$\Phi_6$  - safety of human activity;

$\Phi_7$  - pedagogy.

Hence, the hierarchy of the competency modeling in information security is the stage of identification of priorities, in which the elements of each hierarchy are adjusted according to the significance level of the elemental analysis. In particular, the priorities are determined by the importance of each element of the level of experts. Determination of priorities, that is, the ability to compare factors is mathematically justified. As a result, based on the hierarchical model of competency-building, it is possible to define the main purpose of the information security professionals' competency indicators.

Based on this analysis, it is possible to conclude about the significance (value) of the science, the content and the temporary parameters in the formation of competence. In turn, it provides the opportunity to adjust basic curriculum and science curriculum, and to make corrections. In general, the proposed approach is an effective tool for managing the learning process rather than being able to integrate specific subjects into specific subject areas, to gain an integral assessment of the audience in the field of competence in some areas.

Forming the content of the higher education curriculum in the field of information security and information security as such ensures the integrity of the competent specialists in the future education system, i.e. in the learning environment, also has the potential to prevent negative consequences for the physical and mental health of both the students and the teachers.

## References

1. *Bogatyрева Yu.I.* The problem of forming competence in the field of information security for graduates of pedagogical universities, Bulletin of the Laboratory of Mathematical, Natural Science Education and Informatization - Voronezh: "The Scientific Book 2012, p. 77-81.
2. *Privalov A.N.* Evaluation of the effectiveness of simulators with distributed processing of data, Scientific Bulletins of the Belgorod State University, 1(56).Issue 9/1, 2009, p.78-83.
3. *Privalov, A.N.* Design of adaptive learning subsystems for simulators of special purpose, Tula: Tula State University, 2009, 195 with .

4. Saati T.L. Decision-making. The hierarchy analysis method, Radio and Communication, 1989, p. 316.

## THE REGULARITY OF A STOKES-TYPE PROBLEM FOR A STATIONARY SYSTEM OF THE TWO-VELOCITY HYDRODYNAMICS ON THE PLANE

<sup>1</sup>Kuyliyev Sarvar, <sup>2</sup>Imomnazarov Kholmatzhon, <sup>3</sup>Iskandarov Ilham

<sup>1</sup> Samarkand State University, Samarkand city, University avenue 15, 140104, Uzbekistan, e-mail: s.kuyliyev@mail.ru

<sup>2</sup> Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, 6, Lavrentieva ave., 630090, Novosibirsk, Russia, e-mail: imom@omzg.sccc.ru

<sup>2</sup> Pacific State University, 136, Tihookeanskaya St., Khabarovsk, 680035, Russia

The forms of motion of two-phase flows are essentially diverse, and the laws of their control, are much more complicated than the forms of motion and the laws of hydrodynamics of homogeneous media. The interest of researchers in the problems of the mechanics of multiphase media is due to the frequent occurrence of such systems in nature and their extensive use in modern technologies. Mathematical models of multiphase or heterogeneous media describe various phenomena of hydro- and gas-dynamics, the theory of filtration, rocket technology, coal and oil production, nuclear and non-nuclear thermal energy, metallurgical and construction industries, and astrophysics. Models of multiphase media also arise when considering various problems of describing technogenic systems: modeling of dynamic processes in oil wells and near-surface formations, as well as in describing endogenous processes in solving the related problems of geodynamics and modeling ore-forming structures within the framework of a common coordinated model of the evolution of the system including the upper mantle, the mantle lithosphere and the earth's crust with geoecological monitoring for specific natural and man-made objects.

In this paper, we obtain a stationary system of the two-velocity hydrodynamics with one pressure from a system of non-stationary equations of the two-velocity hydrodynamics [1]

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0, \quad \nu_1 \Delta \mathbf{u}_1 = \nabla P - \rho \mathbf{f},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_2 = 0, \quad \nu_2 \Delta \mathbf{u}_2 = \nabla P - \rho \mathbf{f},$$

where  $\rho = \rho_1 + \rho_2$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  are the partial densities and phase velocities, respectively,  $P$  is the pressure,  $\nu_1$  and  $\nu_2$  are the corresponding shear viscosities of phases,  $\mathbf{f}$  is the mass force.

The resulting system is overdetermined. To solve the overdetermined problem on the plane, a new version of the orthogonal regularization method [2] is used. We study the regularity of the Stokes-type problem on the plane.

This work was supported in part by the Russian Foundation for Basic Research (grant No. 18-51-41002).

## References

1. Imomnazarov Kh.Kh., Imomnazarov Sh.Kh., Mamatkulov M.M., Chernykh E.G. Fundamental'noe reshenie dlya statsionarnogo uravneniya dvuhkorostnoy gidrodinamiki s odnim davleniem // Sib. zhurn. industr. matem. 2014, v. 17, No. 4, pp. 60-66 (in Russian).
2. Gudovich I.S., Kreyn S.G., Kulikov I.M. Kraevye zadachi dlya uravneniy Maksvella // Doklady AN SSSR, 1972, v. 207, No. 2, pp. 321-324 (in Russian).

## UNIVALENT SOLVABILITY OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH INVOLUTION.

<sup>1</sup>Nazarova K.Zh, <sup>2</sup>Usmanov K.I.

<sup>1</sup> *Akhmet Yassawi University, Sattarkhanov Str. 29, Turkestan, 161200 Kazakhstan,*  
e-mail: gjnazarova@mail.ru

<sup>2</sup> *Akhmet Yassawi University, Sattarkhanov Str. 29, Turkestan, 161200 Kazakhstan,*  
e-mail: y\_kairat@mail.ru

In this paper, we will establish criteria for the univalent solvability of a boundary value problem for integro-differential equations systems with an involutive transformation when the kernel is degenerated.

Study of boundary value problems for integro-differential equations was considered in the works of many authors, however, with the development of computer technologies, arises the question to create constructive methods for obtaining the problem solution. Consequently, Professor D. Dzhumabaev proposed a method for parametrizing the solution of a linear two-point boundary value problem for differential equations systems [1].

In [2, 3], this method was applied to study of boundary value problems for integro-differential equations systems and their unique solvability criterion were established.

In this paper, a modified parametrization method is applied to study of a boundary value problem for integro-differential equations systems with involution, and unique solvability criterion are established.

On the segment  $[0, T]$ , consider the boundary value problem

$$\frac{dx(t)}{dt} + A \frac{dx(\alpha(t))}{dt} = \sum_{k=1}^m \int_0^T \varphi_k(t) \psi_k(s) x(s) ds + f(t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

$$Bx(0) + C(T) = d, \quad d \in R^n \quad (2)$$

where  $\varphi_k(t), \psi_k(s)$ - matrixes and  $n$ - measurable vector function  $f(t)$  is continuous on  $[0, T]$ . Here  $\alpha(t)$ — is a reorienting homeomorphism of  $\alpha : [0, T] \rightarrow [0, T]$  such as  $\alpha^2(t) = \alpha(\alpha(t)) = t$ .

This homeomorphism is known as an involutive transformation. On the segment  $[0, T]$ , such as transformation, we can consider the homeomorphism  $\alpha(t) = T - t$ . The properties of an involutive transformation were studied in the works of G.S. Litvinchuk [4], N.K. Karapetyants and S.G. Samko [5] and etc.

Using the properties of an involutive transformation and applying a modified parameterization method, it was obtained:

**Theorem.** *For the unique solvability of problem (1), (2), it is necessary that the matrix  $Q(\ell)$  is reversible for  $\ell \geq \ell_0$ , and sufficiently if it is reversible for some  $\ell \geq \ell_0$ .*

### References

1. *Dzhumabayev D.S.* Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys. 29 GrindEQ 1989, No 1, 34-46.
2. *Dzhumabaev D.S.* A method for solving the linear boundary value problem for an integro-differential equation, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 50 GrindEQ 2010 , No 7, 1150-1161.
3. *Dzhumabaev D.S.* An algorithm for solving a linear two-point boundary value problem for an integrodifferential equation, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 53 GrindEQ 2013, No 6, 736-758.
4. *Litvinchuk G. S.* Kraevye zadachi i singulyarnye integral'nye uravneniya so sdvigom, Izdatel'stvo Nauka, Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoy literatury, 1977.
5. *Karapetyanc N.K., Samko S.G.* Uravneniya s involyutivnymi operatorami i ih prilozheniya // Rostov-n/D. Izd-vo RGU. -1988. 188 s.

**ON THE PROPERTIES OF GENERALIZED SOLUTIONS OF A NONLINEAR CAUCHY PROBLEM FOR A NONLINEAR PARABOLIC SYSTEM WITH ABSORPTION OR SOURCE**

<sup>1</sup>Nigmanova D. B., <sup>2</sup> Yusupov Yu.S.

*National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan*

<sup>1</sup> e-mail: dill198912@gmail.com, <sup>2</sup> e-mail: yusabio@gmail.com

**Introduction**

The present work is devoted to the study of the global solution of the Cauchy problem for a system of quasilinear parabolic equations with volumetric sources or absorption:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( u^{\sigma_1} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \epsilon v^p, \quad t > 0, \quad x \in R^N \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( v^{\sigma_2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \epsilon u^q \end{aligned} \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \geq 0, \quad v|_{t=0} = v_0(x) \geq 0, \quad x \in R^N \quad (2)$$

where  $\epsilon = \pm 1$ ,  $\sigma_i, p, q (i = 1, 2)$  are positive real numbers.

Natural restrictions are imposed on the functions  $u(x, t), v(x, t)$ :

$$\begin{aligned} u(0, t) = 0, \quad u(x, t) \rightarrow 0, \quad u^{\sigma_1} \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow 0, \quad t \geq 0 \\ x \rightarrow \infty \quad x \rightarrow \infty \\ v(0, t) = 0, \quad v(x, t) \rightarrow 0, \quad v^{\sigma_2} \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow 0, \quad t \geq 0 \\ x \rightarrow \infty \quad x \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3)$$

and  $u_0(x) \neq 0, v_0(x) \neq 0$  is a non-trivial, non-negative, bounded and sufficiently smooth function. In this paper, in the case  $\epsilon = +1$  in particular, the following condition for the global solvability of problem (1), (2) is obtained on the basis of the analysis of self-similar solutions using the method of nonlinear splitting [3].

$$\max \left( \frac{q+1}{pq-1}, \frac{p+1}{pq-1} \right) < \frac{N}{2 + \sigma_i N} \quad (i = 1, 2)$$

which generalizes the result of [1].

The equation (1) describes many physical processes: the conductance processes in two-component nonlinear medium with the sources or absorption; the filtering in nonlinear two-phase liquid and gas submitted to the laws of polytropy and so on. Members  $\epsilon u^p, \epsilon v^q$  accord to having sources ( $\epsilon = \pm 1$ ) or absorption ( $\epsilon = -1$ ) which powers are equal to  $\epsilon u^p, \epsilon v^q$ .

The functions  $u$  and  $v$  may be discussed the same way as the temperatures of two БГЧ interacted with each other components of some fuel mixture [1]. In this work main attention is paid to argumentation of algorithm of nonlinear splitting for system (1), to constructing of automodel solutions, to the question of existence the solution of the system of automodel equations and their asymptotic representation[8]. We also study the properties of solutions with a finite propagation velocity, perturbation, asymptotic behavior of the solution to compact carriers and in the case of fast diffusion [6]. Such a widespread use of quasilinear parabolic equations is explained primarily by the fact that they are derived from fundamental conservation laws (energy, mass, number of particles, etc.). Therefore, a situation is possible when two physical processes that at first glance have nothing in common (for example, thermal conductivity in semiconductors and the process of magnetic field propagation in a medium with finite conductivity) are described by the same nonlinear diffusion equation, only with different numerical parameters [5]. In the general case, the difference between the quasilinear parabolic

equations underlying mathematical models of a wide variety of processes lies in the nature of the dependence of the control coefficients (coefficients of thermal conductivity, transfer, power of volumetric sources and energy sinks) on the quantities that determine the state of the medium, i.e. on temperature, density, magnetic field, etc.

### References

1. *M. Escobedo, M. A. Herrero* Boundedness and blowup for a semilinear reaction-diffusion systems. *J. Differ. Equat.* 89 (1991), 176-202.
2. *H. Fujita* On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for ut s Du q u1qd *J. Fac. Sci. UniBi. Tokyo Sect. IA Math.* 13 E,, . 1966 , 105-113.
3. *M.Fila, H.A.Levine and Y. Uda* A Fujita-type global existence global non-existence theorem for a system of reaction diffusion equations with differing diffusivities, *Math. Methods Appl. Sci.* 17 E,, .1994,807-835.
4. *Samarskiy A. A, Kurdyumov S.P, Galaktionov V. A, Mikhailov A.P* Regimes with sharpening for quasilinear parabolic equations. -M .: Nauka, 1987, 477 p.
5. *Aripov M.M.* Methods of reference equations for solving nonlinear boundary value problems. Tashkent. Fan, 1988, 137 p.
6. *Kurdyumov S.P., Kurkina S.E., Telkovskaya O.V.* Peaking modes in two-component media. - *Zh. Mathematical modeling.* Moscow: Nauka, 1989, vol. 1
7. *S. Dimova, M. Kaschiev, M. Kolcva, D. Vasilcva* Numerical analysis of radially non symmetric blow-up solutions of a nonlinear parabolic problem. *J. Comput. Appl. Math.* 97 (1998), 81-97.
8. *H. A. Levine* A Fujita type global existence-global nonexistence theorem for a weakly coupled system of reaction-diffusion equations, *Z. Angew. Math. Phys.* 42 E,, . 1991 , 408-430.
9. *Kurdyumov S.P., Kurkina E.S, Potapov A.B., Samarskiy A.A.* Complex multidimensional combustion structures of a nonlinear medium // *Vychisl. mathematics and mat, physics.* - 1986. - T. 26, No. 8. -1189-1205p.

## STRESS INTENSITY FACTOR FOR THERMALLY INSULATED MULTIPLE CRACKS IN BONDED DISSIMILAR MATERIALS

Nik Mohd Asri Bin NIK LONG

The new system of hypersingular integral equations (HSIEs) for the thermally insulated inclined cracks and thermally insulated circular arc cracks subjected to remote shear stress in bonded dissimilar materials was formulated by using the modified complex potentials (MCPs) function method with the continuity conditions of the resultant force, displacement and heat conduction functions.

The relationship between crack opening displacement (COD) function and temperature jump along the crack faces were used to finalize the new system of HSIEs. The appropriate quadrature formulas were used to solve numerically the new system of HSIEs for the unknown COD function and the known traction along the crack as the right hand term. Numerical solutions for the value of nondimensional stress intensity factors (SIFs) at all the cracks tips are illustrated. The comparison of nondimensional SIFs for the cracks with and without thermal is also illustrated.

## DIFFUSION PROCESSES IN HETEROGENEOUS BODIES

<sup>1</sup>Nurumova Aziza

<sup>1</sup>National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

e-mail:

Investigates the process of diffusion in solids, consisting, for example, from polymeric materials, with perfect diffusion contact. At least one of the bodies contains an active substance, which may penetrate by diffusion into another body. The formula for calculation of fields of concentration of the active substance, the method of determining the coefficient of diffusion.

Among the various polymeric materials used in modern technology, thermoplastic polymers are distinguished by their ability to easily take the desired shape when processed on injection molding machines. This is achieved by adding to the polymer basis of special substances – plasticizers [1].

Thermoplastic materials are used in numerous products – from toys to spacecraft components. However, the presence in the composition of the thermoplastic materials of plasticizers sometimes leads to unwanted environmental consequences, as plasticizers, as a rule, are substances harmful to living organisms. So product of thermoplastic materials to improve the environmental properties, or to increase heat resistance covered with a layer of harmless polymers, heat-protective or decorative coatings. Over time the plasticizers from the product by diffusion penetrate into the coating and upon reaching a sufficient concentration can bring the cover down. In this regard, the theoretical calculation of concentration fields of the active substance can help to calculate the allowable time of operation (the time at which the concentration of the product in the coating will not exceed the allowable limits).

Considered self-determined body (body A) containing diffusion-active substance. The body surface is covered with a layer of a substance, originally not containing the active component (body B), the layer has a thickness  $h$  that is small compared with the linear dimensions of the body A. Since the time  $t = 0$  the body is in perfect diffusional contact. The distribution process of the active substance in the bodies A and B is described according to [1]:

a) the system of equations

$$\begin{cases} \frac{\partial n_{s,1}}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2}, & 0 < x < h, \\ \frac{\partial n_{s,2}}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2}, & 0 < x < \infty, \end{cases} \quad (1)$$

b) boundary conditions of the fourth kind (conditions of perfect diffusion contact):

$$C_1|_{x=h} = C_2|_{x=h} \quad (2)$$

c) boundary conditions:

$$D_1 \frac{\partial C_1}{\partial x} \Big|_{x=h} = D_2 \frac{\partial C_2}{\partial x} \Big|_{x=h} \quad (3)$$

d) initial conditions:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} C_2 = C_0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \quad (5)$$

Here  $C_1(t, x)$  and  $C_2(t, x)$  and are the concentrations of the active substance in B, respectively, A,  $D_1$  and  $D_2$  are the diffusion coefficients of the active substance in these bodies,  $C_0$  is the initial concentration of the substance in body A.

$$C_1|_{t=0} = 0 \quad (6)$$

$$C_2|_{t=0} = C_0 \quad (7)$$

After applying the Laplace transform, the equations of system (1) taking into account conditions (6) and (7) will take the form:

$$Y_2'' - \frac{S}{D_2} Y_2 = -\frac{C_0}{D_2}$$

$$Y_1'' - \frac{S}{D_1} Y_1 = 0$$



Here

$$Y_1(s, x) = \int_0^\infty C_1(t, x)e^{-st} dt$$

and

$$Y_2(s, x) = \int_0^\infty C_2(t, x)e^{-st} dt$$

Laplace image features  $C_1(t, x)$  and  $C_2(t, x)$ .

Equations (8) have solutions

$$Y_1 = A_1e^{-\mu_1x} + A_2e^{\mu_1x},$$

$$Y_2 = A_3e^{-\mu_3x} + A_4e^{\mu_2x} + \frac{C_0}{S}$$

Are arbitrary constants.

From the boundary conditions (4) and (5) it follows:  $A_4 = 0$ ,  $A_1 = A_2$ . To find  $A_1$  and  $A_3$ , we also use

conditions (4) and (5), which, given (9), take the form:

$$2A_1ch \left( \frac{h\mu_2}{m} \right) = A_3e^{-h\mu_2x} + \frac{C_0}{S}$$

$$2A_1ch \left( \frac{h\mu_2}{m} \right) = mA_3e^{-h\mu_2x}. \tag{8}$$

Here

$$m = \sqrt{D_1/D_2}$$

After substituting in (9) the found values of  $A_1$  and  $A_3$  we get:

$$Y_1 = \frac{2C_0ch(h\mu_2\bar{X}/m)e^{-h\mu_2/m}}{s(1+m)(1+ke^{-2h\mu_2/m})}$$

$$Y_2 = \frac{C_0}{S} \left[ 1 - \frac{2msh(h\mu_2/m)e^{-(h\mu_2/m)(1-m(1-\bar{X}))}}{(1+m)(1+ke^{-2h\mu_2/m})} \right]$$

Here

$$\bar{X} = \frac{x}{h}, \quad k = \frac{(1-m)}{(1+m)}$$

To move from images to originals, imagine the expression  $1/(1+ke^{-2h\mu_2/m})$  in the form of a power series, and then, after transformations, we obtain (2):

$$Y_1 = \frac{C_0}{s(1+m)} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n k^n \left\{ e^{\frac{h\mu_2}{m}(2n+1-\bar{X})} + e^{\frac{h\mu_2}{m}(2n+1+\bar{X})} \right\}$$

$$Y_2 = \frac{C_0}{s} \left[ 1 - \frac{m}{1+m} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n k^n \times \left\{ e^{-\frac{h\mu_2}{m}(2n-m(1-\bar{X}))} + e^{\frac{h\mu_2}{m}(2n+2-m(1-\bar{X}))} \right\} \right] \tag{11}$$

We denote

$$ertc(y) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-z^2} dz$$

Since for any a the quantity

$$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$$

is a function image

$$erfc\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right),$$

then from (11) it follows:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{C_0}{(1+m)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n k^n \left\{ erfc\left(\frac{2n+1-\bar{X}}{2mF_0}\right) + erfc\left(\frac{2n+1+\bar{X}}{2mF_0}\right) \right\} \\ C_2 &= C_0 \left( 1 - \frac{m}{1+m} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n k^n \times \left\{ erfc\left(\frac{2n+m(\bar{X}-1)}{2mF_0}\right) - erfc\left(\frac{2n+2+m(\bar{X}-1)}{2mF_0}\right) \right\} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

Here

$$F_0 = \frac{\sqrt{D_2 t}}{h}$$

- Fourier diffusion criterion.

Functions  $C_1(t, x)$  and  $C_2(t, x)$  satisfy system (1), as well as conditions (2 – 7). Formulas (12) completely

solve the problem of calculating the concentration of the active substance in an inhomogeneous body. In the particular case of the equality of the diffusion coefficients of the active substance in bodies A and B, i.e. at  $D_1 = D_2 = D$ ,  $m = 1$ ,  $k = 0$  we get

$$C_{1(t,x)} = \frac{C_0}{2} \left[ erfc\frac{h(1-\bar{X})}{2\sqrt{Dt}} + erfc\frac{h(1+\bar{X})}{2\sqrt{Dt}} \right]$$

a well-known solution to the diffusion (thermal conductivity) problem of equalizing concentrations (temperatures) in a semi-bounded homogeneous body (2). For practical needs, there is no need to study the distribution of the active substance in the layer of substance B, it is usually necessary to know its average concentration (2)

$$\bar{C}_1(F_0) = \int_0^1 C_1(\bar{X}, F_0) d\bar{X} \quad (9)$$

which in thin layers of matter can only be determined experimentally by chemical analysis methods. Substituting in (9) the first of the expressions (12), after integration we obtain:

$$\bar{C}_1(F_0) = \frac{2C_0}{1+m} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n k^n \left\{ (n+1) erfc\left(\frac{n+1}{mF_0}\right) - n erfc\left(\frac{n}{mF_0}\right) + \frac{mF_0}{\sqrt{\pi}} \Theta(n, m, F_0) \right\}$$

here

$$\Theta(n, m, F_0) = e^{-\left(\frac{n}{mF_0}\right)^2} - e^{-\left(\frac{n+1}{mF_0}\right)^2}$$

The obtained formula can also be used for experimental determination of the coefficient diffusion of the active substance in one of the bodies, if it is known in another. For  $F_0$ , this expression is accepted

It looks like:

$$\bar{C}_1(F_0) \cong \frac{2C_0 m F_0}{\sqrt{\pi}(1+m)} \quad (10)$$

i.e., at short contact times of the bodies, the concentration of the active substance in body B linearly depends on the  $F_0$  criterion. If, at measured time intervals, measurements of C are made, the dependence

$$\frac{\bar{C}_1}{C_0} = B \cdot F_0$$

and determine the coefficient  $B$ , then, according to (10), we obtain

$$D_1 = D_2 \left( \frac{B\sqrt{\pi}}{2 - B\sqrt{\pi}} \right)^2$$

### References

1. *Glasey R.* Blow-up theorems for nonlinear wave equations, *Math. Z.* 132 (1973), 183-203.
2. *Georgiev V. and Todorova G.* Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms, *J. Differential Equations* 109 (1994), no. 2, 295-308. MR 95b:35141

## GLOBAL EXISTENCE AND NONEXISTENCE FOR A MULTIDIMENSIONAL SYSTEM OF PARABOLIC EQUATIONS WITH NONLINEAR BOUNDARY CONDITIONS

<sup>1</sup>**Rakhmonov Z.**, <sup>1,2</sup>**Alimov A.**

<sup>1</sup> *National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan (use complete addresses, including country name),*

e-mail: zraxmonov@inbox.ru

<sup>2</sup> *The Branch of Plekhanov Russian University of Economics in Tashkent, Uzbekistan*

e-mail: akram\_alimov@mail.ru

In this paper we consider the properties of solution of nonlinear parabolic system of diffusion equation coupled via nonlinear boundary condition

$$\begin{cases} u_t = \nabla (|\nabla u^{m_1}|^{p_1-2} \nabla u^{m_1}), & x \in R_+^N, \quad t > 0, \\ u_t = \nabla (|\nabla v^{m_2}|^{p_2-2} \nabla v^{m_2}), & x \in R_+^N, \quad t > 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} -|\nabla u^{m_1}|^{p_1-2} \frac{\partial u^{m_1}}{\partial x_1} = v^{q_1}, & x_1 = 0, \quad t > 0, \\ -|\nabla v^{m_2}|^{p_2-2} \frac{\partial v^{m_2}}{\partial x_1} = u^{q_2}, & x_1 = 0, \quad t > 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x > 0, \quad (3)$$

where  $R_+^N = \{(x_1, x') | x' \in R^{N-1}, x_1 > 0\}$ ,  $m_i > 1$ ,  $p_i > 1 + 1/m_i$ ,  $q_i > 0$  ( $i = 1, 2$ ),  $u_0(x)$  and  $v_0(x)$  are nonnegative continuous functions with compact support in  $R_+^N$ .

Nonlinear parabolic system of equations (1) appear in various applications as model of population dynamics, chemical reactions, heat transfer, and so on. For instance  $u(x, t)$  and  $v(x, t)$  represent the densities of two biological populations during a migration or the temperatures of two kinds of porous materials during a heat propagation [1-3].

The nonlinear boundary conditions (2) can be used to describe the influx of energy input at the boundary. For instance, in the heat transfer process (2) represents the heat flux, and hence the boundary conditions represent a nonlinear radiation law at the boundary. This kind of boundary conditions appears also in combustion problems when the reaction happens only at the boundary of the container, for example because of the presence of a solid catalyzer, see [1, 3] for a justification.

In recent years have been intensively studied the problems on blow-up and global existence conditions in time, blow-up rates to nonlinear parabolic equations, asymptotic of self-similar solutions [4-6]. In particular, critical exponents of the Fujita type, which plays an important role in studying the properties of mathematical models of various nonlinear processes, are described by nonlinear parabolic equations and a system of such equations of mathematical physics (see [4-6] and references therein). This work is devoted to the study of the conditions of

global solvability, and unsolvability in time of solutions to problem (1)-(3) based on self-similar analysis.

**Theorem 1.** *Let  $q_1 q_2 > \frac{(p_1-1)(p_2-1)(m_1+1)(m_2+1)}{p_1 p_2}$ , then any solution to the problem (1)-(3) is unbounded for sufficiently large initial data.*

## References

1. Wu, Z.Q., Zhao, J.N., Yin, J.X. and Li, H.L., Nonlinear Diffusion Equations, Singapore: World Scientific, 2001.
2. M. Aripov, Standard Equation's Methods for Solutions to Nonlinear Problems, FAN, Tashkent, 1988.
3. A.S.Kalashnikov, Some problems of the qualitative theory of nonlinear degenerate parabolic equations of second order, Russian Math. Surveys, 42, (1987), 169-222.
4. Mi Yongsheng, Mu Chunlai. Global existence and blow-up of solutions to a class of doubly degenerate parabolic equations coupled via nonlinear boundary flux. Advances in Mathematics (China), Vol.43, No.3, 2014, 398-410.
5. Wanjuan Du and Zhongping Li. Critical exponents for heat conduction equation with a nonlinear Boundary condition. Int. Jour. of Math. Anal. vol. 7, 11, 2013, 517-524.
6. Rakhmonov Z.R., Urunbayev J.E., On a Problem of Cross-Diffusion with Nonlocal Boundary Conditions. Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics, 2019, no. 5, pp. 614-620. doi:<https://doi.org/10.17516/1997-1397-2019-12-5-614-620>.

## NUMERICAL INVESTIGATION ONE OF DOUBLY NONLINEAR REACTION-DIFFUSION SYSTEM

**Sadullaeva Sh., Fayzullaeva Z., Karimov M.X.**

*Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi,  
Uzbekistan*

e-mail: orif\_sh@list.ru, nigor1802@mail.ru

This research work considers the properties of solutions to problems for one system of nonlinear reaction-diffusion equations. Nonlinear splittings are constructed on the basis of a self-similar and approaching self-similar system of equations. Estimates are found for the free boundary. The properties of the global solvability of weak solutions are proved to investigate problems using the comparison principle.

The considered system describes various physical processes in inhomogeneous two-component nonlinear media, such as reaction-diffusion, thermal conductivity, polytropic filtration of liquids and gases.

Was constructed based on the nonlinear splitting of the original system, a system of self-similar equations, approximate solutions were found depending on the values of the system parameters, and the asymptotic behavior of the generalized finite solution of the system and the free boundary was established. The main terms of the asymptotics - self-similar solutions - are obtained. On the basis of the constructed self-similar solutions, asymptotics of solutions, and the free boundary, numerical calculations and visualization of the diffusion reaction process are carried out.

## References

1. Samarskii A.A., Galaktionov V.A., Kurdyomov S.P., Mikhailov A.P., Blow-up in quasilinear parabolic equations, Walter de Grueter, Berlin (1995).
2. Aripov M., Method of the standard equation for the solution of the nonlinear value problem, Fan, Tashkent, (1988).
3. Dimova S.N., Kastchiev M.S., Koleva M.G., Vasileva D.P., " Numerical analysis of the blow-up regimes of combustion of two-component nonlinear heat-conducting medium", JVM and MF, No. 35(3)1, 303-319 (1995).
4. Aripov M., Sadullaeva Sh., "To properties of the equation of reaction diffusion with double nonlinearity and distributed parameters", Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 157-167 (2013).

5. *Aripov M., Sadullaeva Sh.*, "To solutions of one nondivergent type parabolic equation with double nonlinearity", *Advances and Progress in Analysis*, [https://doi.org/10.1142/9789814313179\\_0077](https://doi.org/10.1142/9789814313179_0077) (2010).
6. *Sadullaeva Sh.A., Khaydarov A.T., Kabilianova F.A.*, "Modeling of Multidimensional Problems in Nonlinear Heat Conductivity in Non-Divergence Case", *IEEE*, DOI: 10.1109/ISMSIT.2019.8932954 (2019).
7. *Sadullaeva, Shahlo A.*, Numerical Investigation of Solutions to a Reaction-diffusion System with Variable Density, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 9(1), 90–101 (2016).

## A MATHEMATICAL MODELLING APPROACH TO PREDICT GLOBAL LIFE EXPECTANCY BASED ON NON-MEDICAL FACTORS

<sup>1</sup>Teow Boon Keong, <sup>2</sup>Nor Fauzan Ramadan Ramadan Ita, <sup>3</sup>Nazihah Ahmad

<sup>1</sup> *School of Quantitative Sciences (SQS), College of Arts and Sciences (CAS), Universiti Utara Malaysia (UUM), 06010 Sintok, Kedah Darul Aman, Malaysia,*

e-mail: teow\_boon\_keong@sqs.uum.edu.my

<sup>2</sup> *School of Quantitative Sciences (SQS), College of Arts and Sciences (CAS), Universiti Utara Malaysia (UUM), 06010 Sintok, Kedah Darul Aman, Malaysia,*

e-mail: n\_fauzan\_ramadan@sqs.uum.edu.my

<sup>3</sup> *School of Quantitative Sciences (SQS), College of Arts and Sciences (CAS), Universiti Utara Malaysia (UUM), 06010 Sintok, Kedah Darul Aman, Malaysia,*

e-mail: nazihah@uum.edu.my

The information on human life expectancy in a country is crucial for many parties especially the government and the insurance companies. It can be utilized for the benefit of the community or any potential beneficiaries. According to the World Life Expectancy database, there are ten non-medical factors related to death rate and life expectancy such as alcohol consumption, drowning, drug abuse, falls, fire, poisoning, road traffic injuries, suicide, violence, and other injuries. The ultimate aim of the paper is to study the relationship between the non-medical factors and the global human life expectancy in a country and hence, maximize the minimum human life expectancy. 183 countries are being chosen as the focus of study. The mathematical modelling analysis such as the descriptive statistics, the correlation analysis, and the ordinary least square was then done on the 175 countries after the removal of outliers. The analysis shows a significant negative relationship between the life expectancy of people in a country and death rate of the people in that particular country due to drowning, fire, other injuries, poisoning, and road traffic injuries. After the multicollinearity analysis, only drowning, other injuries, and road traffic injuries death rates are taken into account in creating the model. Two constraints are then set up according to the targets set by the World Health Organization in the previous literature study to optimize that particular model where the model is related to the significant non-medical factors. From this study, if the two targets are successfully hit, the minimum average life expectancy of people in a country in the following year is found to be 75.38 years old which is higher as compared to the previous year. Deeply understanding life expectancy is important especially against the current problem faced by the world which is the drop of minimum life expectancy from year to year.

## References

1. *Cooper S.* World Report on Child's Injury Prevention, WHO, 2009.
2. *Mendel A.* What is Life Expectancy? Retrieved from News Medical Life Insurance, <https://www.news-medical.net/health/What-is-Life-Expectancy.aspx>, 2019.
3. *Veetil J. N., Parambath V. A., Rajanbabu B., Suresh S.* An Epidemiological Study of Drowning Survivors among School Children, *Journal of Family Medicine and Primary Care*, 6(4), p 844-847.
4. *WHO.* The Global impact. Retrieved from [https://www.who.int/violence\\_injury.prevention/publications/road-traffic/world\\_report/chapter2.pdf?ua=1](https://www.who.int/violence_injury.prevention/publications/road-traffic/world_report/chapter2.pdf?ua=1), 2004.

5. WHO. World Life Expectancy. Retrieved from World Life Expectancy Live Long Live Better: <https://www.worldlifeexpectancy.com>, 2020.

## SPACE FORMATION FOR THE DESCRIPTION OF THEMATIC DOCUMENTS

<sup>1</sup>Tuliyev Ulugbek

<sup>1</sup> Uzbekistan, Tashkent, University street, 4, 100174  
e-mail: u.tuliyev@mail.ru

Reducing the dimension of feature space is considered to describe thematic documents. Documents are presented in the form of "object-property" tables, for the formation of which thematic dictionaries are used, usually with a volume of not more than 100 keywords. As a tool for research, we use the study of the topological properties of feature space from the values of class compactness measures based on relations between objects.

## INVERSION FORMULA FOR THE PROBLEM OF INTEGRAL GEOMETRY ON FAMILIES OF PARABOLAS

<sup>1</sup>Uteuliev Nietbay, <sup>2</sup>Djaykov Gafur, <sup>3</sup>Seidullaev Abat

<sup>1</sup> Nukus branch of Tashkent University of Information Technologies, Nukus, Uzbekistan  
e-mail: utewlievn@mail.ru

<sup>2</sup> Nukus branch of Tashkent University of Information Technologies, Nukus, Uzbekistan,  
e-mail: gafur\_djaykov@mail.ru

<sup>3</sup> Karalpak state university, Nukus, Uzbekistan,  
e-mail: abat\_1984@inbox.ru

In this paper, we consider the problems of integral geometry on families of parabolas. We examined the application of the integral geometry problem to seismic problems. We have obtained the inverse formula for the problem of integral geometry on families of parabolas. Numerical experiments demonstrate the performance of the method.

We denote  $L_H = \{(x, y) : x \in R^1, 0 \leq y \leq H\}$ ,  $\Omega = \{(x, y) : x \in R^1, \eta \leq y \leq H\}$

**Problem 1.** In the strip  $L_H$  restore the function of two variables  $u(x, y)$  if the integrals of it are known over the curves of the family  $\{\Upsilon(x, y)\}$

$$\int_{\Upsilon(x,y)} u(\xi, \eta) d\xi = f(x, y), \quad (1)$$

where an arbitrary curve of the family is represented by the expression  $\Upsilon(x, y) = \{(\xi, \eta) : x - \xi = \sqrt{y - \eta}, 0 \leq \eta \leq y\}$ .

**Problem 2.** In the strip  $\Omega$  restore the function of two variables  $u(x, y)$ , if the integrals of it are known over the curves of the family  $\{\Gamma(x, y)\}$

$$\int_{\Gamma(x,y)} u(\xi, \eta) d\xi = f(x, y), \quad (2)$$

where an arbitrary curve of the family is represented by the expression  $\Gamma(x, y) = \{(\xi, \eta) : x - \xi = \sqrt{\eta - y}, y \leq \eta \leq H\}$ .

**Theorem 1.** Let the function  $f(x, y)$  known in the strip  $L_H$ . Then the solution of equation (1) in a class of two continuously differentiating finite functions with a carrier in the strip  $L_H$

is unique and has the representation

$$\hat{u}(\lambda, y) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y \frac{ch(\lambda\sqrt{y-\eta})}{\sqrt{y-\eta}} \cdot \hat{f}(\lambda, \eta) d\eta.$$

**Theorem 2.** Let the function  $f(x, y)$  known in the strip  $\Omega$ . Then the solution of equation (2) in a class of two continuously differentiating finite functions with a carrier in the strip  $\Omega$  is unique and has the representation

$$\hat{u}(\lambda, y) = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_y^H \frac{ch(\lambda\sqrt{\eta-y})}{\sqrt{\eta-y}} \cdot \hat{f}(\lambda, \eta) d\eta.$$

## References

1. Moon, S., Inversion of the seismic parabolic Radon transform and the seismic hyperbolic Radon transform, *Inverse Problems in Science and Engineering*, 24(2), 2016, 317–327.
2. Begmatov, A.H., Seidullaev, A.K., Pirimbetov, A.O., Reconstruction stability in some problems of X-ray and seismic tomography, 2012 7th International Forum on Strategic Technology (IFOST), 2012, 1–6.
3. Begmatov, A.H., Seidullaev, A.K., Pirimbetov, A.O., Problems of integral geometry in a strip on families of parabolic curves, *Proceedings of the Russian Higher School Academy of Sciences*, 19(2), 2012, 6–15. (In Russian)

## FRACTIONAL DIFFERENCE OPERATORS WITH MULTIPLICATIVE STEP Yakhshiboev M.U.

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan  
e-mail: m.yakhshiboev@gmail.com

Mixed difference of vector fractional order  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  with "multiplicative" vector step  $h \in \mathbb{R}_{+\dots+}^n$  is

$$(\tilde{\Delta}_h^{\alpha, \mu} f)(x) = \tilde{\Delta}_{h_1}^{\alpha_1, \mu_1} [\tilde{\Delta}_{h_2}^{\alpha_2, \mu_2} \dots (\tilde{\Delta}_{h_n}^{\alpha_n, \mu_n} f)](x) = (E - \Pi_h^\mu)^\alpha f(x) = \sum_{0 \leq |j| \leq \infty} (-1)^{|j|} \binom{\alpha}{j} h^{j\mu} f(x \circ h^j),$$

where  $\mu \in \mathbb{R}_{+\dots+}^n$ ,  $x \circ h^j = (x_1 \cdot h_1^{j_1}, \dots, x_n \cdot h_n^{j_n})$  and  $\binom{\alpha}{j} = \prod_{i=1}^n \binom{\alpha_i}{j_i}$ ,  $\binom{\alpha_i}{j_i}$  are binomial coefficients,  $|j| = j_1 + \dots + j_n$  is the length of the multi-index  $j$ .

This paper introduces the concept of a mixed difference of a vector fractional order with a multiplicative step and its properties. Some of these properties are proven using the Mellin transform.

The review is conducted in the framework of spaces with mixed norm

$$L_{\bar{p}, \bar{\gamma}} = L_{\bar{p}} \left( \mathbb{R}_{+\dots+}^n, x^{-\bar{\gamma}} \frac{dx}{x} \right) = \left\{ f : \|f\|; L_{\bar{p}, \bar{\gamma}} \| = \left\{ \int_0^\infty [\dots (\int_0^\infty |f(x)|^{p_1} x_1^{-\gamma_1} \frac{dx_1}{x_1})^{p_2} \dots]^{p_{n-1}} x_n^{-\gamma_n} \frac{dx_n}{x_n} \right\}^{\frac{1}{p_n}} < \infty \right\},$$

and

$$C_{\bar{\gamma}}(\mathbb{R}_{+\dots+}^n) = \left\{ f : \|f\|; C_{\bar{\gamma}} = \max_{x \in \mathbb{R}_{+\dots+}^n} |x^{-\bar{\gamma}} f(x)| < \infty, \lim_{|x| \rightarrow 0} x^{-\bar{\gamma}} f(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^{-\bar{\gamma}} f(x) \right\},$$

$\gamma_i \geq 0, i = \overline{1, n}$ . The norm in  $X_{\bar{p}, \bar{\gamma}}$  is determined by the formula

$$\|f\|; X_{\bar{p}, \bar{\gamma}} = \|x^{-\bar{\gamma}^*} f\|; X_{\bar{p}}, 1 \leq \bar{p} \leq \infty,$$

where

$$x^{-\bar{\gamma}^*} = x_1^{-\gamma_1^*} \dots x_n^{-\gamma_n^*}, \gamma_i^* = \begin{cases} \frac{\gamma_i}{p_i}, & 1 \leq p_i < \infty, \\ \gamma_i, & p_i = \infty, i = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{1}$$

**Definition 1** The function  $g(x) \in L_{\bar{p}}$  is called a strong mixed fractional derivative of the vector order  $\alpha, \alpha_i > 0, i = \overline{1, n}$  of function  $f(x) \in L_{\bar{p}}, 1 \leq \bar{p} \leq \infty$ , if

$$\left\| \frac{(\tilde{\Delta}_{h \pm 1}^{\alpha, \mu} f)(x)}{|(1-h)^\alpha|} - g(x); L_{\bar{p}} \right\| \rightarrow 0$$

at  $h \rightarrow 1 \pm 0, \mu, h, \alpha \in \mathbb{R}_{+\dots+}^n$ .

Determine the values of

$$A_i(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha_i}{k} |\xi^{k(\gamma_i^* + \mu_i)}|, \xi \in \mathbb{R}_+^1,$$

where  $\gamma_i^*$  – are the numbers (1). Since  $\binom{\alpha_i}{k} \sim \frac{c}{k^{1+\alpha_i}}$ , then the series converges at  $0 \leq \xi \leq 1$ , if  $\gamma_i > 0, \mu_i \geq 0$  or  $\gamma_i \geq 0, \mu_i > 0$  and at any  $\xi$  (does not depend on  $\xi$ ), if  $\gamma_i = 0, \mu_i = 0$ .

**Lemma 1** If  $f(x) \in X_{\bar{p}, \bar{\gamma}}, 1 \leq p_i \leq \infty, \gamma_i \geq 0, \mu_i \geq 0, i = \overline{1, n}$ , then

$$\|\tilde{\Delta}_h^{\alpha, \mu} f\|; X_{\bar{p}, \bar{\gamma}} \leq c(\alpha, \mu) \|f\|; X_{\bar{p}, \bar{\gamma}},$$

where  $c(\alpha, \mu) = \prod_{i=1}^n A_i(h_i)$  and  $0 \leq h_i \leq 1$  ( $h$  - is any value for those  $i$  for which  $\gamma_i = 0, \mu_i = 0$ )

**Lemma 2** If  $f_{\pm}^\alpha(x) \in X_{\bar{p}, \bar{\gamma}}, 1 \leq p_i \leq \infty, \gamma_i \geq 0, \mu_i \geq 0, i = \overline{1, n}$ , then

$$\|\tilde{\Delta}_h^{\alpha, \mu} f\|; X_{\bar{p}, \bar{\gamma}} \leq c \|f_{\pm}^\alpha\|; X_{\bar{p}, \bar{\gamma}},$$

where  $c = \prod_{i=1}^n c_i$  and  $c_i = 1$ , if  $0 \leq h_i \leq 1$  or  $\gamma_i = 0, \mu_i = 0$  and  $c_i < \infty$  for finite values of

$h_i \in [1; N_i]$ , if  $h_i > 1$  and  $\gamma_i > 0, \mu_i \geq 0$  or  $\gamma_i \geq 0, \mu_i > 0$  ( $c_i = \max_{1 \leq h_i \leq N_i} \frac{h_i^{\gamma_i^* + \mu_i - 1}}{\ln h_i}$ ).

**Lemma 3** If  $\alpha, \rho, \mu \in \mathbb{R}_+^1$  and  $f \in L_1(\mathbb{R}_{+\dots+}^n)$ , then for the multiplicative fractional difference  $(\tilde{\Delta}_\rho^{\alpha, \mu} f)(x)$  of the Mellin transform we have the equality

$$m(\tilde{\Delta}_\rho^{\alpha, \mu} f)(s) = \left(1 - \rho^{\mu - \sum_{i=1}^n s_i}\right)^\alpha f^*(s).$$

**Lemma 4** If  $\alpha, \beta, \rho, \mu \in \mathbb{R}_+^1$  and  $f \in L_1(\mathbb{R}_{+\dots+}^n)$ , then the semi-group property is fulfilled

$$(\tilde{\Delta}_\rho^{\alpha, \mu} \tilde{\Delta}_\rho^{\beta, \mu} f)(x) = (\tilde{\Delta}_\rho^{\alpha + \beta, \mu} f)(x).$$



In particular, we have

$$\left(\tilde{\Delta}_\rho^\alpha \tilde{\Delta}_\rho^\beta f\right)(x) = \left(\tilde{\Delta}_\rho^{\alpha+\beta} f\right)(x).$$

**Theorem 1** Let  $f(x) \in X_{\bar{p}, \bar{\gamma}}$ ,  $1 \leq p_i \leq \infty$ ,  $\gamma_i \geq 0$ ,  $\mu_i \geq 0$ ,  $i = \overline{1, n}$  and  $\alpha > 0$ . Then

$$\left\| \tilde{\Delta}_h^{\alpha, \mu} f; X_{\bar{p}, \bar{\gamma}} \right\| \rightarrow 0 \text{ at } h \rightarrow 1 - 0 \quad (2)$$

for all  $\gamma_i \geq 0, \mu_i \geq 0$ ; if  $\gamma_i = 0, \mu_i = 0$  for some  $i$ , then (2) is true and at  $h_i \rightarrow 1 + 0$  for such  $i$ .

**Theorem 2** Let  $f(x)$  has the derivative  $f_{\pm, \mu}^\alpha(x)$  in the sense of definition 1. Then

$$\left(\tilde{\Delta}_h^{\beta, \mu} f\right)_{\pm, \mu}^\alpha(x) = \left(\tilde{\Delta}_h^{\beta, \mu} f_{\pm, \mu}^\alpha\right)(x).$$

**Theorem 3** Let function  $f \in L_{\bar{p}}\left(\mathbb{R}_{+ \dots +}^n, \frac{dx}{x}\right)$  satisfy inequality

$$\left\| \frac{\tilde{\Delta}_{h \pm 1}^{\alpha, \mu} f}{|(1-h)^\alpha|}; L_{\bar{p}} \right\| \leq M(1 < \bar{p} < \infty)$$

where  $M$  does not depend on  $h$  and  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\alpha_i > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Then in  $\mathbb{R}_{+ \dots +}^n$  there exists a fractional derivative  $f_{\pm, \mu}^\alpha(x)$  in a weak sense in  $L_{\bar{p}}\left(\mathbb{R}_{+ \dots +}^n, \frac{dx}{x}\right)$ ,  $1 < \bar{p} < \infty$  and for all  $\alpha$  there exists an inequality

$$\left\| f_{\pm, \mu}^\alpha; L_{\bar{p}} \right\| \leq M.$$

## РАЗРЕШЕНИЕ КОНФЛИКТА В КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ СТАРТОВЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ

Абдуолимова Г.М.

Андижанский государственный университет им. З.Бабура, 710020, Узбекистан,  
г.Андижан, ул. Университетская 129.  
e-mail: abduolimova81@inbox.ru

В работе задача стартового управления колебаниями системы изучается в постановке конфликта, при этом управляющими параметрами конфликтующих сторон являются начальное положение и скорость мембраны.

Многие физические процессы колебания описываются уравнением гиперболического типа

$$u_{tt} - \operatorname{div}(a(x)\nabla_x u) + c(x)u = f(x, t), \quad (1)$$

где  $x \in \Omega$ ,  $0 < t < T$ ,  $\Omega$  – некоторая ограниченная область пространства  $R^n$ ,  $T$  – произвольный фиксированный момент времени,  $a(\cdot) \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $c(\cdot) \in C(\bar{\Omega})$ ,  $a(x) \geq a_0 > 0$ ,  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $\bar{\Omega}$  – замыкание области  $\Omega$ .

Пусть функция  $u(x, t)$ ,  $x \in \Omega$ ,  $0 \leq t \leq T$ , удовлетворяет как начальным

$$u|_{t=0} = \mu(x), \quad (2)$$

$$u_t|_{t=0} = \nu(x), \quad (3)$$

так и граничным условиям

$$u|_{\Gamma_T} = 0 \quad (4)$$

или

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u \right) \Big|_{\Gamma_T} = 0, \quad (5)$$

где  $\Gamma_T = \{(x, t) : x \in \partial\Omega, 0 < t < T\}$ ,  $\sigma(\cdot) \in C(\partial\Omega)$ ,  $\sigma(x) \geq 0$ ,  $x \in \partial\Omega$ .

Пусть  $Q_T = \{(x, t) : x \in \Omega, 0 < t < T\}$  – означает цилиндр,  $\Omega_\tau = \{(x, t) : x \in \Omega, t = \tau\}$  – сечение цилиндра плоскостью  $t = \tau$ . Функция  $u(x, t)$ , принадлежащая пространству  $W_2^{(1)}$ , при всех  $\eta(\cdot) \in W_2^{(1)}(Q_T)$ , для которых выполнены условия (4) и

$$\eta|_{\Omega_T} = 0, \quad (6)$$

где  $W_2^{(1)}(Q_T)$  – пространство Соболева.

Известно, что колебание однородной прямоугольной мембраны с закрепленными границами описывается уравнением [4, 5]

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad (7)$$

с граничными

$$u(0, y, t) = u(l_1, y, t) = 0, \quad 0 \leq y \leq l_2, \quad t \geq 0, \quad (8)$$

$$u(x, 0, t) = u(x, l_2, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad t \geq 0, \quad (9)$$

и начальными

$$u(x, y, 0) = \mu(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = \nu(x, y), \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad 0 \leq y \leq l_2 \quad (10)$$

условиями, где функция  $f(\cdot, \cdot)$  означает внешнюю силу, действующую на прямоугольной мембраны –  $P = (0, l_1) \times (0, l_2)$ .

В данном пункте изучается конфликтная ситуация, происходящая в процессе, описываемой задачей (7) - (10). Управляющими функциями игроков являются  $\mu(\cdot, \cdot) \in W_2^{(1)}(P)$ ,  $\nu(\cdot, \cdot) \in L_2(P)$  соответственно.

**Определение 1.** Функции  $m_j(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,  $j = 1, \dots, s$  называются реализуемыми для точек  $(x_1, y_1), \dots, (x_s, y_s) \in P$  мембраны, если существуют функции  $u(\cdot, \cdot)$ ,  $v(\cdot, \cdot)$  из пространств  $W_2^{(1)}(P)$ ,  $L_2(P)$  соответственно, такие, что соответствующее решение  $u(x, y, t)$ ,  $(x, y) \in \bar{P}$ ,  $0 \leq t \leq T$ , задачи (7) - (9) удовлетворяет равенств:

$$u(x_j, y_j, t) = m_j(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad j = 1, \dots, s. \quad (11)$$

Пусть  $F_m$ ,  $G_m$  обозначают множество функций  $u(\cdot, \cdot) \in W_2^{(1)}(P)$ ,  $\nu(\cdot, \cdot) \in L_2(P)$  соответственно таких, что решение  $u(x, y, t)$ ,  $(x, y) \in \bar{P}$ ,  $t \geq 0$ , задачи (7) - (9), удовлетворяет равенств (11).

Конфликтная ситуация возникает следующим образом: первая сторона стремится минимизировать по управлениям  $\mu(\cdot, \cdot) \in F_m$ , а вторая - максимизировать по управлениям  $\nu(\cdot, \cdot) \in G_m$  следующего функционала

$$K(\mu, \nu) = \alpha \|\mu\|_1 - \beta \|\nu\|_2 + \gamma(\mu, \nu), \quad (12)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  – неотрицательные константы,  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  ( $\cdot$ ) – нормы в  $W_2^{(1)}(P)$  и скалярное произведение в  $L_2(P)$  соответственно. Таким образом, получим игру двух лиц  $\langle F_m, G_m, K \rangle$ .

**Задача 1.** При данных реализуемых функциях  $m_j(\cdot)$ ,  $j = 1, \dots, s$  решить игру  $\langle F_m, G_m, K \rangle$ , т.е. найти ситуации равновесия игры, седловых точек и значение функционала (12).

**Лемма 1.** Для того чтобы в каждом из множеств  $F_m$  и  $G_m$  содержалось только один элемент, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одна из пар чисел  $(x_1, y_1), \dots, (x_s, y_s)$  была несоизмерима с парой чисел  $(l_1, l_2)$ .

Теперь рассмотрим случай, когда каждое из множеств  $F_m, G_m$  содержит более одного элемента. По лемме 1 это эквивалентно тому, все пар чисел  $(x_1, y_1), \dots, (x_s, y_s)$  соизмерима с парой чисел  $(l_1, l_2)$ . Здесь могут быть различные ситуации, для простоты рассмотрим случай, когда  $\frac{x_1}{l_1}, \dots, \frac{x_s}{l_1}$  — рациональные,  $\frac{y_1}{l_2}, \dots, \frac{y_s}{l_2}$  — иррациональные. Далее, через  $q$  обозначено наименьшее общее кратное знаменателям чисел  $\frac{x_1}{l_1}, \dots, \frac{x_s}{l_1}$ . Пусть  $\bar{\mu}(\cdot, \cdot) \in$

$$W_2^{(1)}\left(\left(0, \frac{l_1}{q}\right) \times \left(0, \frac{l_2}{r}\right)\right), \bar{\nu}(\cdot, \cdot) \in L_2\left(\left(0, \frac{l_1}{q}\right) \times \left(0, \frac{l_2}{r}\right)\right).$$

Рассмотрим функции, имеющие вид:

$$\mu(x, y) = \begin{cases} \bar{\mu}(x, y), & 0 < x < \frac{l_1}{q}, \quad 0 < y < l_2 \\ -\bar{\mu}\left(\frac{2l_1}{q} - x, y\right), & \frac{l_1}{q} < x < \frac{2l_1}{q}, \quad 0 < y < l_2, \end{cases}$$

$$\nu(x, y) = \begin{cases} \bar{\nu}(x, y), & 0 < x < \frac{l_1}{q}, \quad 0 < y < l_2 \\ -\bar{\nu}\left(\frac{2l_1}{q} - x, y\right), & \frac{l_1}{q} < x < \frac{2l_1}{q}, \quad 0 < y < l_2. \end{cases} \quad (15)$$

Далее, рассмотрим эти функции, продолженные с периодом  $\frac{2l_1}{q}$ , по оси  $x$  на отрезок  $[0, l_1]$ .

**Лемма 2.** Множества  $F_m$  и  $G_m$  содержат функции, разность любых двух из которых имеет вид (15) соответственно (продолженной с периодом  $\frac{2l_1}{q}$ ).

**Теорема 1.** Задача 1 имеет решение:

$$\mu_0(x, y) = \begin{cases} M(x, y), & 0 < x < \frac{l_1}{q}, \quad 0 \leq y \leq l_2, \\ M_1(x, y) - M(x, y), & \frac{l_1}{q} < x < 2\frac{l_1}{q}, \quad 0 \leq y \leq l_2, \\ M_2(x, y) - M_1(x, y) + M(x, y), & 2\frac{l_1}{q} < x < 3\frac{l_1}{q}, \quad 0 \leq y \leq l_2, \\ \dots & \dots \\ M_{q-1}(x, y) - M_{q-2}(x, y) + \dots + (-1)^{q-1}M(x, y), & (q-1)\frac{l_1}{q} < x < l_1, \quad 0 \leq y \leq l_2, \end{cases}$$

$$\nu_0(x, y) = \begin{cases} N(x, y), & 0 < x < \frac{l_1}{q}, \quad 0 \leq y \leq l_2, \\ N_1(x, y) - N(x, y), & \frac{l_1}{q} < x < 2\frac{l_1}{q}, \quad 0 \leq y \leq l_2, \\ N_2(x, y) - N_1(x, y) + N(x, y), & 2\frac{l_1}{q} < x < 3\frac{l_1}{q}, \quad 0 \leq y \leq l_2, \\ \dots & \dots \\ N_{q-1}(x, y) - N_{q-2}(x, y) + \dots + (-1)^{q-1}N(x, y), & (q-1)\frac{l_1}{q} < x < l_1, \quad 0 \leq y \leq l_2, \end{cases}$$

где

$$M(x, y) = \sum_{i=1}^{q-1} \frac{(-1)^{q-1-i} M_{q-i}(x, y)}{q}, \quad N(x, y) = \sum_{i=1}^{q-1} \frac{(-1)^{q-1-i} N_{q-i}(x, y)}{q},$$

$M_i(\cdot, \cdot)$ ,  $N_i(\cdot, \cdot)$ ,  $i = 1, \dots, q - 1$  известные функции, выраженные через функции  $m_j(\cdot)$ ,  $f_j(\cdot, \cdot, 0)$ ,  $j = 1, \dots, s$  и их производных.

### Литература

1. Авдонин С.А., Иванов С.В и И.Йо. Стартовое и точечное управление колебаниями прямоугольной мембраны. Автоматика. – Киев. – 1990. – №6. – С. 68 - 71.
2. Акуленко Л.Д. Приведение упругой системы в заданное состояние посредством силового граничного воздействия. Прикл.мат.и мех. 1981, Т.45, №6, С. 135-145..
3. Ильин В.А и Моисеев Е.И. Оптимальное граничное управление смещением на одном конце при свободном втором конце и отвечающее ему распределение полной энергии струны. Докл.РАН. – 2005. – Т.400. – №5. – С.587 - 591.
4. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, – 1976.
5. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний, М.: Наука, – 1972..

### К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ШТАМПОВКИ

<sup>1</sup>Абиров Р.А., <sup>2</sup>Хусанов Б.Э., <sup>3</sup>Сагдуллаева Д.А.

<sup>1</sup> Институт механики и сейсмостойкости сооружений АН РУз, 100125 Ташкент,  
Узбекистан,

e-mail: rustam\_abirov@mail.ru

<sup>2</sup> Институт механики и сейсмостойкости сооружений АН РУз, 100125 Ташкент,  
Узбекистан,

e-mail: khusanov@mail.ru

<sup>3</sup> Институт механики и сейсмостойкости сооружений АН РУз, 100125 Ташкент,  
Узбекистан,

e-mail: dsagdullaeva1989@mail.ru

В работе рассматривается моделирование динамического процесса штамповки твердого тела в плоской постановке. Приведена общая постановка задачи штамповки твердого тела под жестким штампом, позволяющая учитывать упруго-пластические свойства материала и процесс формирования напряженно-деформированного состояния. Решение реализовано методом конечных разностей. В результате решения задачи для четырехугольного профиля показаны распределение напряженно-деформированного состояния рассматриваемого тела и путем сравнительного анализа проведена оценка влияния пластических свойств материала на напряженное состояние тела.

Рассмотрим достаточно длинный деформируемый брус с четырехугольным поперечным сечением, лежащим на гладкой недеформируемой поверхности. Пусть в момент времени  $t = 0$  на брус начинает действовать жесткий штамп со скоростью  $v_{st} = v_{st}(t)$  на противоположный свободной поверхности, параллельной к недеформируемой. Считаем, что брус при этом испытывает плоское деформированное состояние, тогда данную задачу можно сформулировать в двумерной постановке для профиля поперечного сечения. Таким образом, исследуем напряженно-деформируемое состояние (НДС) четырехугольного массивного тела  $2a \times b$  и формирование НДС при действии жесткого штампа. Решение

данной краевой задачи в эйлеровом представлении сводится к решению систем уравнений: уравнения движения:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y}; \quad (1)$$

уравнения, связывающие скорости  $v_x, v_y$  с деформациями частиц  $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yy}$ :

$$\frac{d\varepsilon_{xx}}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \frac{d\varepsilon_{yy}}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \frac{d\varepsilon_{xy}}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}; \quad (2)$$

уравнения неразрывности:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0; \quad (3)$$

уравнения состояния упругопластического деформирования бруса

$$\frac{dP}{dt} = K \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}; \quad \frac{dS_{xx}}{dt} + \lambda S_{xx} = 2G \cdot \left( \frac{d\varepsilon_{xx}}{dt} - \frac{1}{3\rho} \frac{d\rho}{dt} \right), \quad (4a)$$

$$\frac{dS_{yy}}{dt} + \lambda S_{yy} = 2G \cdot \left( \frac{d\varepsilon_{yy}}{dt} - \frac{1}{3\rho} \frac{d\rho}{dt} \right), \quad \frac{dS_{zz}}{dt} + \lambda S_{zz} = -\frac{2G}{3\rho} \frac{d\rho}{dt}, \quad \frac{d\tau_{xy}}{dt} + \lambda \tau_{xy} = G \frac{d\varepsilon_{xy}}{dt}. \quad (4b)$$

При упругом деформировании параметр в (4)  $\lambda \equiv 0$ , в случае упругопластического деформирования этот параметр определяется с заданием условия Мизеса

$$2J_2 = S_{xx}^2 + S_{yy}^2 + S_{zz}^2 + 2\tau_{xy}^2 \leq \frac{2}{3}Y^2, \quad (5)$$

и соотношением  $\lambda = \frac{3}{2}WH(W)Y^{-2}$ , где  $H(W) = 0$  при  $W < 0$ ,  $H(W) = 1$  при  $W \geq 0$ ,

$$W = 2G \left[ \sum_{k=x,y,z} S_{kk} \left( \frac{d\varepsilon_{kk}}{dt} - \frac{1}{3\rho} \frac{d\rho}{dt} \right) + \tau_{xy} \frac{d\varepsilon_{xy}}{dt} \right].$$

Начальные условия предполагаются нулевыми. Сформулируем граничные условия: на контактной границе на гладкой твердой недеформируемой поверхности: при  $|x| \leq a$ ,  $y = 0$ ,  $t \geq 0$

$$v_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (\tau_{xy} = f_1 \sigma_{yy}); \quad (6)$$

на боковых границах тела - при  $x = \pm a$ ,  $0 < y < b$ ,  $t \geq 0$

$$\sigma_{xx} = 0, \quad \tau_{xy} = 0; \quad (7)$$

на границе контакта с жестким штампом, т.е. при  $|x| \leq a$ ,  $y = b$ ,  $t \geq 0$

$$v_y = v_{st}(t), \quad \tau_{xy} = 0 \quad (\tau_{xy} = f_2 \sigma_{yy}). \quad (8)$$

В соотношениях (6) и (8) в скобках указаны учет трения при их наличии,  $f_1$  коэффициент трения между рассматриваемым брусом и твердой деформируемой средой, а  $f_2$  со штампом.//

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к решению систем уравнений (1)-(5) с нулевыми начальными и граничными (6)-(8) условиями. Эта задача является продолжением исследований [1], где рассмотрено численное решение задачи о вдавливании упругого и упруго-пластического деформируемого тела.

Поставленную задачу решаем численно с использованием метода конечных разностей по схеме [2]. Основным результатом данной работы являются реализации граничных условий (6) и (8) введением воображаемых ячеек, обеспечивая устойчивость схемы и второго

порядка точности для шага по времени и по координатам. Этот подход позволяет оценить формирование напряженно-деформированное состояние и образование конечной формы твердого тела при штамповки рассматриваемого бруса. С помощью численного эксперимента получены НДС в виде графиков.

В данной постановке задачи и реализации метода шаровая и девиаторная части напряжения в уравнениях использованы отдельно. Это дает возможность оценивать формоизменение тела в результате расчета отдельно от изменения его объема. Также в дальнейшем этот подход позволяет применять более сложные уравнения состояния, учитывающие пластические свойства с различными условиями, процессы сложного нагружения, анизотропию материала и т.д. Соотношения Коши (2) позволяют учесть конечные деформации, хотя на каждом шагу расчета данный метод учитывает возможные значительные (большие) деформации. Отметим также, что с помощью предложенного подхода открывается перспектива теоретического исследования формирования плоской штамповки материалов.

Таким образом, приведена общая постановка задачи штамповки твердого тела под жестким штампом, позволяющая учитывать пластические свойства материала и процесс формирования напряженно-деформированного состояния. Реализована с помощью конечно-разностного метода задача действия жесткого штампа на внешней границе. С помощью решения задачи для четырехугольного профиля показаны распределение напряженно-деформированного состояния рассматриваемого тела, и формирование напряжений по истечению времени.

### Литература

1. *Abirov R.A., Khusanov B.E., Sagdullaeva D.A.* Numerical modeling of the problem of indentation of elastic and elastic-plastic massive bodies, IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2020 (сдана в печать).
2. *Wilkins M.L.* Computer Simulation of Dynamic Phenomena, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1999.

## ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ОПЕРАТОРОМ ХИЛФЕРА

<sup>1</sup>Жалилов М.А., <sup>2</sup>Каюмова Г.А.

<sup>1</sup> Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан,  
e-mail: alimuhammad9978@mail.ru

<sup>2</sup> Каршинский инженерно-экономический институт, Карши, Узбекистан,  
e-mail: gavhar88@mail.ru

Пусть  $\Omega = \{(x, t) : -1 < x < 1, -a < t < b\}$ ,  $\Omega_1 = \Omega \cap (t > 0)$ ,  $\Omega_2 = \Omega \cap (t < 0)$ , где  $a, b$  - положительные действительные числа. В области  $\Omega$  рассмотрим следующую нелокальную задачу.

**Задача А.** Требуется найти функцию  $u(x, t)$ , из класса

$$t^\sigma \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \in C(\bar{\Omega}_1), \quad \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \in C(\bar{\Omega}_2), \quad D^{\alpha, \gamma} u \in C(\Omega_1), \quad u_{tt} \in C(\Omega_2), \quad u_{xxxx} \in C(\Omega_1 \cup \Omega_2), \quad k = \overline{0, 2},$$

удовлетворяющее уравнению

$$\begin{cases} D^{\alpha, \gamma} u(x, t) + \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + \varepsilon \frac{\partial^4 u(-x, t)}{\partial x^4} = 0, & (x, t) \in \Omega_1, \\ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + \varepsilon \frac{\partial^4 u(-x, t)}{\partial x^4} = 0, & (x, t) \in \Omega_2, \end{cases}$$

краевым условиям

$$t^\sigma u(-1, t) = t^\sigma u(1, t) = t^\sigma u_{xx}(-1, t) = t^\sigma u_{xx}(1, t) = 0, \quad -a \leq t \leq b,$$

$$u(x, -a) = \varphi(x), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

а также условиям склеивания

$$\lim_{t \rightarrow +0} J_{0+}^{\sigma} u(x, t) = \lim_{t \rightarrow -0} u(x, t), \quad \lim_{t \rightarrow +0} J_{0+}^{1-\alpha} \frac{d}{dt} J_{0+}^{\sigma} u(x, t) = \lim_{t \rightarrow -0} u_t(x, t).$$

Здесь  $\sigma = 1 - \gamma$  при  $t \geq 0$  и  $\sigma = 0$  при  $t \leq 0$ ,  $0 < |\varepsilon| < 1$ ,  $\varepsilon \in R$ ,  $\varphi(x)$  - заданная функция,  $D^{\alpha, \gamma} = J_{0+}^{\gamma-\alpha} \frac{d}{dt} J_{0+}^{1-\gamma}$ ,  $0 < \alpha \leq \gamma \leq 1$  - обобщенный оператор дробного интегрирования [1, 2].

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

**Теорема.** Пусть выполнены следующие условия:

$$\varphi(x) \in C^4[0, 1], \quad \varphi^{(5)}(x) \in L_2(0, 1), \quad \varphi^{(s)}(-1) = \varphi^{(s)}(1) = 0, \quad s = 0, 2, 4,$$

$$\left| \cos \sqrt{\lambda_{ik} a} + \sqrt{\lambda_{ik}} \sin \sqrt{\lambda_{ik} a} \right| \geq k^2 C > 0, \quad i = 1, 2.$$

Тогда задача А имеет единственное решение. Здесь  $C$  - некоторое положительное число из  $(0, 1)$ ,

$$\lambda_{1k} = (1 - \varepsilon)k^4 \pi^4, \quad \lambda_{2k} = (1 + \varepsilon)(k - 0,5)^4 \pi^4, \quad k \in N.$$

Для решения задачи использованы методы спектральной теории линейных операторов, теория интегральных уравнений и рядов. Для доказательства единственности решение задачи используем полноту систем собственных функций соответствующей спектральной задачи, а решение задачи построим в виде абсолютно сходящегося ряда.

## Литература

1. Hilfer R., Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific Publishing Company, Singapore, New Jersey, London and Hong Kong, 2000.
2. Cilbas A. A., Sirivastava H. M., Turijilo J. J., Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics studies, 204. Elsevier Science B. M., Amsterdam, 2006. xvi + 523pp.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОБУЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Журакулов Т.Т.

Навоийский государственный педагогический институт, Узбекистан

e-mail: jurakulov89@inbox.ru

Постановок и решение прикладных задач управления (программного и оптимального) для исследования процессов обучения начинается созданием структуры управления изучаемых процессов. Функционирование созданной структуры открытой системы управления, как недетерминированный объект не имеет никакой закономерности развития. При этом применяются методы имитационного моделирования с применением принципа системного подхода теории управления [1,2]. Поэтому разработка математических моделей решения задач анализа и синтеза социальных объектов управления, как процесса обучения является весьма актуальной.

В работе предложена математическая модель обучения на основе теории управления. Получены аналитические формулы и графики для оптимального программного управления и оптимальной траектории, найдено оптимальное управление с обратной связью [3]. Численными методами построена оптимальная траектория процесса с определенными начальными условиями.

В исследовании процесса обучения, как кибернетическая система исследований (теоретически) решаются задачи разработки математической модели объекта управления, выявления особых значений обратных связей в системе, подчеркивание оптимального управления и синтеза систем, передачи и обработки информации и ее количественное описание, развитие вычислительного эксперимента с помощью ЭВМ [4].

Требуется оптимальным образом попасть из точки  $(Y_0, 0)$  в точку  $(Y_1, T)$ , где  $Y_1 \in [Y_{\min}, Y_{\max}]$ . В первом приближении принимаем прямую, соединяющую начальную и конечную точки

$$Y^0(t) = Y_0 + \frac{Y(T) - Y_0}{T} t, \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

Для расчета оптимального программного управления и оптимальной траектории в [4] предложены следующие формулы:

$$u_0^*(t) = \frac{Y^0(t)(kp + 1)}{k_0p + 1} \quad (2)$$

$$Y^*(u_0^*, t) = Y_0 e^{-kt} + e^{-kt} \int k_0 u_0^*(t) e^{kt} dt \quad (3)$$

где дополнительная переменная

$$p(u_0, t) = \frac{Y_0 - u_0(0)}{k_0 u_0(0) - k Y_0} e^{kt} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} e^{kt} \quad (4)$$

Таким же образом рассчитываются оптимальное программное управление при самообучении  $u_2^*$  и оптимальная траектория  $Y^*(u_2^*, t)$ :

$$u_2^*(t) = \frac{Y_0(t)(k_2p + 1)}{k_2p + 1}, \quad (5)$$

$$Y^*(u_2^*, t) = Y_0 e^{-kt} + e^{-kt} \int k_2 u_2^*(t) e^{kt} dt \quad (6)$$

где принимаем в качестве дополнительного переменного

$$p(u_2, t) = \frac{Y_0 - u_2(0)}{k_2 u_2(0) - k Y_0} e^{kt} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} e^{kt} \quad (7)$$

Предложены задачи для программного управления и оптимального управления с обратной связью с минимизацией функционала качества управления обучением. Использование этих решений на практике позволит повысить качество обучения и сохранять знания выпускников вуза в долгосрочном плане при минимальной нагрузке профессорско-преподавательского состава.

## Литература

1. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975, 526 с.
2. Михалевич В.С., Волкович В.Л. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. М.: Наука, 1982, 287 с.
3. Сувонов О.О., Журакулов Т.Т. Математическая модель и алгоритм расчета процессов управления повышением квалификации в отраслях. Четырнадцатая Международная Азиатская Школа Семинар. Проблемы оптимизации сложных систем. Тезисы докладов. // Кыргызская Республика, Иссык-Куль, 2018 июнь.
4. Жукович С.Я. Математический метод повышения качества обучения в вузе // Вестник БГЭУ. -2012. - е5. - с. 36-42.



## МАГНИТОУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ГИБКИХ ОБОЛОЧЕК В НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ

<sup>1</sup>Индиаминов Р.Ш., <sup>2</sup> Наркулов А.С. <sup>3</sup> Бутаев Р.Б.

<sup>1</sup> Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий, 100140, Самарканд, ул. Шохрух Мирза, 47 А., Узбекистан.

e-mail: r\_indiaminov@mail.ru

<sup>2</sup> Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий, 100140, Самарканд, ул. Шохрух Мирза, 47 А., Узбекистан.

e-mail: narkulov1904@gmail.com

<sup>3</sup> Джиззакский государственный педагогический институт, 130100, Джиззах, ул. Шароф Рашидова, 4, Узбекистан.

e-mail: ruslanbutaev83@mail.ru

В механике сопряженных полей важное место занимают вопросы изучения движения сплошной среды с учетом электромагнитных эффектов. Анализ электромагнитных процессов возможен только на основе системы уравнений электродинамики, совместно с материальными соотношениями. В последние десятилетия значительное внимание в литературе уделяется исследованию процесса деформации электропроводных тел, помещенных во внешнее постоянное магнитное поле, под воздействием силовых, тепловых и электромагнитных нагрузок. Интерес к исследованиям в этой области связан с важностью количественного изучения и оценки наблюдаемых эффектов взаимосвязи механических, тепловых и электромагнитных процессов и их практическим применением в различных областях современной техники при разработке новых технологий, а также в области радиоэлектроники, электротехники, современных измерительных системах и т.д. Большинство известных работ по деформированию упругих проводящих тел выполнены для линеаризованной системы уравнений. Однако, решение ряда прикладных задач, к которым нужно отнести нестационарные задачи определения напряженного состояния гибких токонесущих анизотропных пластин и оболочек, требует более полного изучения механических процессов, включая волновые поля, сопровождающие магнитоупругое взаимодействие, на основе нелинейной модели магнитоупругости и представляют собой актуальную научную задачу.

Рассмотрим гибкую токонесущую бороалюминиевую коническую оболочку, находящуюся во внешнем магнитном поле  $B_{S0} = 0.1 \text{ Tl}$  под действием нормальной поверхностной нагрузки  $P_{\zeta} = 5 \cdot 10^3 \sin \omega t^N / m^2$ . К контурам оболочку подводится сторонний электрический ток плотности  $J_{\theta CT} = -5 \cdot 10^5 \sin \omega t^A / m^2$ , а также оболочка имеет конечную ортотропную электропроводность  $\sigma (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ . Считаем, что сторонний электрический ток в невозмущенном состоянии равномерно распределен по оболочке, т.е. плотность стороннего тока не зависит от координат. В этом случае на оболочку действует комбинированное нагружение, состоящее из пондеромоторной силы Лоренца и механической силы.

Исследованы напряженно-деформированные состояния гибких оболочек в нелинейной постановке на основе сравнения результатов решений, полученных для токонесущего ортотропного конуса из бериллия и токонесущего изотропного конуса из алюминия, а также для изотропного конуса из алюминия при отсутствии магнитного поля и стороннего тока. Полученные результаты показывают о влиянии ортотропной электропроводности, стороннего электрического тока и внешнего магнитного поля на напряженно-деформированного состояния оболочки, а учет геометрической нелинейности позволяет существенно уточнить картину деформирования.

## Литература

1. *Indiaminov R.Sh., Narkulov A. S., Zarpullaev U. K.* (2020). Mathematical modeling of magnetoelastic vibrations of a rod in a magnetic field. ISJ Theoretical & Applied Science, 03 (83), 327-332. SoI: <http://s-o-i.org/1.1/TAS-03-83-60> Doi: <https://dx.doi.org/10.15863/TAS> Scopus ASCC: 2200. Impact Factor: 6.6

## НЕЛИНЕЙНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТОКОНЕСУЩЕЙ ОБОЛОЧКИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

<sup>1</sup>Индиаминов Р.Ш., <sup>2</sup>Бутаев Р.Б., <sup>3</sup>Наркулов А.С.

<sup>1</sup> Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий, 100140, Самарканд, ул. Шохрух Мирза, 47 А., Узбекистан.

e-mail: r\_indiaminov@mail.ru

<sup>2</sup> Джиззакский государственный педагогический институт, 130100, Джиззах, ул. Шароф Рашидова, 4, Узбекистан.

e-mail: ruslanbutaev83@mail.ru

<sup>3</sup> Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий, 100140, Самарканд, ул. Шохрух Мирза, 47 А., Узбекистан.

e-mail: narkulov1904@gmail.com

В данной работе рассмотрена деформация гибкого токнесущего ортотропного конуса с ортотропной электропроводностью при воздействии внешнего магнитного поля и стороннего электрического тока и исследуется влияние учета конусности при определении напряженного состояния токнесущих ортотропных оболочек в геометрически нелинейной постановке. Выявлено, что взаимодействие магнитной индукции и перерезывающей силы вызывает появление экстремальных значений напряжений оболочки.

Развитие теории сопряженных полей и, в частности, теории электромагнитного взаимодействия с деформируемой средой считается одним из главных направлений развития современной механики твердого тела. Механизм взаимодействия упругой среды с электромагнитным полем разнообразен и обусловлен геометрическими характеристиками и физическими свойствами рассматриваемого тела. В частности, этот механизм получает некоторые специфические особенности, когда рассматриваем проблемы относительно тонких пластин и оболочек, обладающих ортотропной электро-проводностью. В большинстве случаев взаимодействие электромагнитного поля с упругим телом происходит при наличии стороннего электрического тока. При этом приходим к задаче электромагнитоупругости. Однако задачи, связанные с вопросами учета сторонних токов, в основном, достаточно сложные, но существенно упрощаются в случае тонких тел, подверженных малым изменениям формы при деформации.

Рассмотрена связанная задача магнитоупругости для гибкой ортотропной оболочки с учетом ортотропии проводящих свойств. Представлены результаты числового примера. Рассмотрены учет влияния конусности на нелинейное поведение ортотропной оболочки. Выявлено, что угол раствора конуса равный шести градусам оказался критическим для рассматриваемой геометрически нелинейной оболочки при подобранных нагрузках. Дальнейшее уменьшение угла ( $\phi = \pi/30$ ) приводит к потере устойчивости оболочки.

## Литература

1. *L. V. Mol'chenko, I. I. Loos, and R. Sh. Indiaminov* Determining the stress state of flexible orthotropic shells of revolution in magnetic field, Int. Appl. Mech., 44, No. 8, 882-891 (2008). ADSMathSciNetCrossRefMATH.
2. *R. Indiaminov* On the absence of the tangential projection of the Lorenz force on the axsymmetrical stressed state of current-carrying conic shells // Int. Jour.Comp. Techn. -2008. -Vol. 13, No 6. pp. 65-77.

3. *Indiaminov R. Sh, Butaev R.* Stress-strain state of current-carrying shells in a magnetic field. ISJ Theoretical & Applied Science, 05(85), 489-492. Soi: <http://s-o-i.org/1.1/TAS-05-85-90>. Doi: <https://dx.doi.org/10.15863/TAS> Scopus ASCC: 2200. Impact Factor: 6.6
4. *Indiaminov R. Sh, Narkulov A.S., Zarpullaev U.K.* Mathematical modeling of magnetoelastic vibrations of a rod in a magnetic field. ISJ Theoretical & Applied Science, 03 (83), 327-332. Soi: <http://s-o-i.org/1.1/TAS-03-83-60> Doi: <https://dx.doi.org/10.15863/TAS> Scopus ASCC: 2200. Impact Factor: 6.
5. *Primova Holida, Yalgashev Olimjon, Lola Safarova* Solution of the multi-criterial routing problem in telecommunication networks // International conference on information Science and communications technologies ICISCT 2019, Applications, Trends, Opportunities. 2019, 4-6 november.

## КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ, СОСТАВЛЯЮЩИМИ ИЗ ПРОИЗВЕДЕНИЯ НЕ ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

<sup>1</sup>Исломов Б.И., <sup>2</sup>Усмонов Б.З.

<sup>1</sup> *Национальный Университет Узбекистана, Узбекистан*  
e-mail: [islomovbozor@yandex.com](mailto:islomovbozor@yandex.com)

<sup>2</sup> *Чирчикский Государственный педагогический институт, Узбекистан* e-mail:  
[bakhtiyer.usmanov@mail.ru](mailto:bakhtiyer.usmanov@mail.ru)

В настоящей работе изучается краевая задача для уравнения, составляющими из произведения не перестановочных дифференциальных операторов в прямоугольной области.

В прямоугольной области  $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$  рассмотрим уравнение

$$\left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c\right) Lu = 0, \quad (1)$$

где

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} - u_y, & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy}, & y < 0, \end{cases}$$

$\alpha > 0, \beta > 0$   $a, b$  и  $c$  заданные вещественные числа,  $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ .

Введем обозначения:  $J = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\}$ ,

$$D_1 = D \cap \{(x, y) : x > 0, y > 0\}, D_2 = D \cap \{(x, y) : x > 0, y < 0\}, D = D_1 \cup D_2 \cup J.$$

**Определение.** Решением уравнения (1) будем называть регулярное решение – функцию  $u(x, y)$ , обладающую в области  $D_j (j = 1, 2)$  непрерывными частными производными до третьего порядка включительно и обращающую его в тождество,

**Задача.** Найти регулярное в области  $D$  решение  $u(x, y)$  уравнения (1), непрерывное со своими производными в замкнутой области  $\bar{D}$  и удовлетворяющее условиям:

$$[au_x(x, y) + bu_y(x, y) + cu(x, y)]|_{x=0} = 0, \quad [au_x(x, y) + bu_y(x, y) + cu(x, y)]|_{x=1} = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta, \quad (2)$$

$$u(x, y)|_{y=-\alpha} = \varphi_1(x), \quad u_y(x, y)|_{y=-\alpha} = \varphi_3(x), \quad (x, 0) \in \bar{J}, \quad (3)$$

$$u(x, y)|_{y=\beta} = \varphi_2(x), \quad (x, 0) \in \bar{J}, \quad (4)$$

где  $\varphi_j(x) (j = \bar{1}, \bar{3})$  – заданные функции.

**Доказана следующая теорема.**

**Теорема.** Если выполнены условия  $\varphi_j(x) \in C^5(\bar{J})$ ,  $\varphi_3(x) \in C^4(\bar{J})$  и  $\varphi_j^{(i)}(0) = \varphi_j^{(i)}(1) = 0$ ,  $j = 1, 2$ ;  $i = 0, 2, 4$ , то задача (1)-(4) однозначно разрешима.

Теорема доказывается методом спектрального анализа для уравнений смешанного типа третьего порядка в прямоугольной области [1-2].

## Литература

1. *Сабитов К.Б.* Краевая задача для уравнений смешанного типа третьего порядка в прямоугольной области. // "Дифференциальные уравнения". 2011. Т.47. № 5. С.705-713.
2. *Исломов Б. И., Убайдуллаев У. Ш.* Краевая задача для уравнения параболо - гиперболического типа с оператором дробного порядка в смысле Капуто в прямоугольной области. // "Научный вестник. Математика". 2017. № 5. С. 25-30.

**ДИНАМИЧЕСКОЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ  
СОСТОЯНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТРУБ С ЖИДКОСТЬЮ ПРИ  
ВОЗДЕЙСТВИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ НАГРУЗОК**

<sup>1</sup>Ишмаматов М., <sup>2</sup>Рузимов А., <sup>3</sup>Хомидов Ф., <sup>4</sup>Сайидов Х.К., <sup>5</sup>Рузиев Т.Р.

<sup>1</sup>Навоийский горный институт, г.Навоий, Узбекистан,  
e-mail: M.Ishmamtov@mail.ru

<sup>2</sup>Ташкентский химико-технологический институт, г.Ташкент, Узбекистан,  
e-mail:a.sh.ruzimov@gmail.com

<sup>3</sup>Бухарский инженерно-технологический институт, г.Бухара, Узбекистан,  
e-mail:Farhod2708@mail.ru

<sup>4</sup>Бухарский инженерно-технологический институт, г.Бухара, Узбекистан,  
e-mail:saidovhk@gmail.com

<sup>5</sup>Бухарский медицинский институт, г.Бухара, Узбекистан,  
e-mail:T.Ruziyev@mail.ru

Известно, что уравнение Ламе, в векторной форме, имеет вид [1]:

$$(\lambda + 2\mu)\text{grad div } \vec{u} - \mu \text{rot rot } \vec{u} + Q\vec{f} = 0 \quad (11)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  – коэффициенты Ламе,  $\vec{u}$  – вектор перемещений,  $Q\vec{f}$  – вектор массовых сил.

Краевые условия по внешней поверхности трубы: условие идеального контакта с грунтом, внутренняя поверхность свободна [2]:

$$\left. \begin{aligned} r = R : \quad & u_{r1} = u_{r2}, \quad u_{\theta 1} = u_{\theta 2}, \quad u_z = u_{z2}, \\ & \sigma_{rr1} = \sigma_{rr2}, \quad \sigma_{r\theta 1} = \sigma_{r\theta 2}, \quad \sigma_{rz1} = \sigma_{rz}, \\ r = R_0 : \quad & \sigma_{rr2} = 0, \quad \sigma_{r\theta 1} = 0, \quad \sigma_{rz1} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где индексы «1» и «2» обозначают соответственно материалы окружающей среды и трубы. Граничные условия, обеспечивающие равенство нормальных составляющих скоростей жидкости и оболочки, имеют вид

$$(\vec{V}\vec{n}) \Big|_{r=a} = + \frac{\partial u_{r2}}{\partial t} \quad (13)$$

где  $\vec{v}$  – скорость частицы жидкости;  $\vec{n}$  – нормал поверхности при  $r = a$ ,  $w$  – радиальное перемещение оболочки. Чтобы полностью замкнуть систему уравнений, необходимо к условиям (22) и (13) добавить условия на бесконечности  $\vec{u} \rightarrow 0$  при  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty$  условия излучения.

Рассмотрим задачу динамической теории упругости (в линейной постановке) о воздействии сейсмических волн на трубы, уложенных в высокой насыпи в две нитки и заполненных идеальной сжимаемой жидкостью. При этом рассмотрим случай, когда волна падает перпендикулярно к оси, соединяющей центры труб, и к продольной оси этих труб (рис.1).

Бицилиндрическая система координат связана с декартовой системой координат следующими соотношениями:

$$x = \frac{a \sin \xi}{ch \eta - \cos \xi}, \quad y = \frac{a sh \eta}{ch \eta \cos \xi}, \quad z = z. \quad (14)$$

где:  $a$  — половина расстояния между точками  $\eta = -\infty$  и  $\eta = \infty$ . Тогда

$$ds^2 = a^2(ch \eta - \cos \xi)^{-2} d\xi^2 + a^2(ch \eta - \cos \xi)^{-2} d\eta^2 + dz^2. \quad (15)$$

Уравнение (11) после некоторых преобразований сводится к виду :

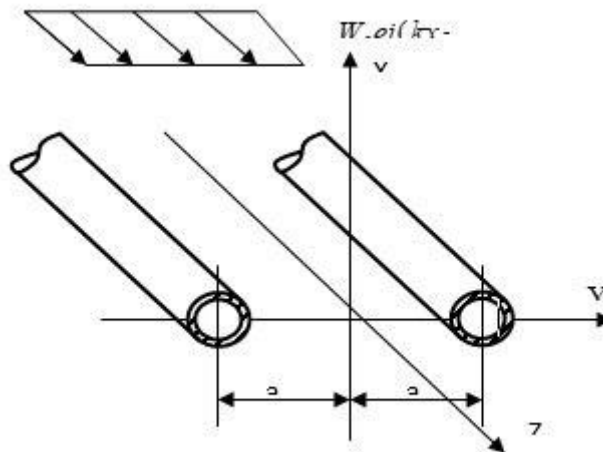


Рис. 4: Расчётная схема

$$(v)_{\xi\xi} + (v)_{\eta\eta} + (2kae^{\pm\eta})^2 v = 0 \quad (16)$$

Решение уравнение (16) будем искать в виде ряда:

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} [v_n^a(\eta) \cos n\xi + v_n^b(\eta) \sin n\xi] \varepsilon^{-i\omega t} \quad (17)$$

Подставив (17) в (16) и приравняв коэффициенты при соответствующих гармониках, получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение [?]:

$$v_n'' + [(2kae^{\pm\eta})^2 - n^2]v_n = 0. \quad (18)$$

Стандартной заменой  $v_n(\eta) = z(t), t = \exp(\pm\eta)$  сводим (18) к уравнению Бесселя вида

$$t^2 z'' + tz' + (4k^2 a^2 - n^2)z = 0, \quad (19)$$

которое имеет частное решение в виде цилиндрической функции  $z(2ake^{\mp\eta})$ , а решение уравнения Гельмгольца принимает следующий вид:

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n Z_n(2ake^{\mp\eta}) \cos n\xi e^{-i\omega t}, \quad \psi = \sum_{n=0}^{\infty} B_n Z_n(2ake^{\mp\eta}) \sin n\xi e^{-i\omega t}. \quad (20)$$

Учитывая полученные соотношения, будем искать решение краевой задачи для случая падения на две подземные трубы  $P$ -волны сжатия и  $SV$ -волны сдвига перпендикулярно

Таблица 2: Значения коэффициента динамической концентрации при различных расстояниях между трубами для случая падения  $P$ -волны

D/d	0.5	1.0	2.0	4.0
$\eta_{max}$	1.68	1.76	1.60	1.61

к оси  $Y$ . Общая характеристика программы предназначена для многониточных труб в насыпи для случая падения сейсмических волн перпендикулярно к оси, проходящей через центры труб.

**Влияние расстояния между трубами.** В *табл.1* приведены значения коэффициента

$$\eta|\sigma_{rr}|^2max_{max}$$

максимального радиального давления грунта на трубы при различном расстоянии  $d$  между ними в случае падения  $P$ -волны. При этом принималось волновое число  $P$ -волны  $\alpha_r = 1,0$ : внутренний и наружный радиусы труб  $R_0 = 0,8 m$  и  $R = 1,0 m$ : преобладающий период колебаний частиц грунта  $T = 0,2 sec$ . Характеристики грунта насыпи: постоянные Ламе  $\lambda_1 = 8,9 MPa$ ;  $\mu_1 = 4,34 MPa$ ; плотность  $\rho_1 = 1,74 Kn sec^2/m^4$ . Характеристики материала трубы  $\lambda_2 = 8690 MPa$ ;  $\mu_2 = 12930 MPa$ ;  $\rho_2 = 2,55 Kn sec^2/m^4$ .

Из *таблицы 1* следует, что сначала при увеличении расстояния между трубами  $0,5 \leq d/D \leq 1,0$  коэффициент  $\eta_{max}$  немного возрастает (на 5%), а при дальнейшем увеличении  $d/D > 1,0$  убывает более резко, на 10%. При  $d/D > 2,0$  значение  $\eta_{max}$  стабилизируется, т.е. практически не меняется, при  $l \leq 4,0$  близко к значению  $\eta_{max}$  для одиночной трубы, согласно расчетам. Следовательно, взаимное влияние железобетонных труб многониточной укладки имеет место при расстоянии между ними  $d \leq 4,0 D$  и приводит к увеличению максимального динамического давления грунта на них по сравнению с одиночной трубой. Этот эффект увеличения коэффициента  $\eta_{max}$  связан с наложением волн, отраженных несколькими поверхностями многониточных труб. При этом немонотонное возрастание коэффициента  $\eta_{max}$  с уменьшением расстояния между трубами  $d/D$  связано, с явлением интерференции наложенных после отражения волн. Это явление чрезвычайно важно для практики проектирования сейсмических подземных многониточных трубопроводов, т.к. позволяет подобрать оптимальное расстояние между трубами, при котором динамическое давление при сейсмическом воздействии минимально. Например, в *таблице 1* таким расстоянием является  $d = 0,5 D$ .

## Литература

1. Pao Y.H., Mow C.C. The diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations. Ц N.Y.: Crane Russak and Co., 1973. 694 p. .
2. Авляжюлов Н.Н., Сафаров И.И. Современные задачи статики и динамики подземных трубопроводов. Ташкент, Fan va texnologiya. 2007, 306 с.

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛИННЫХ ВОЛН КОНДРАТЬЕВА С УЧЕТОМ ЭРЕДИТАРНОСТИ

Макаров Д.В., Паровик Р.И.

*Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, г. Петропавловск-Камчатский*

e-mail: danil.makarov.pk@yandex.ru, e-mail: romanparovik@gmail.com

В работе предложено численное исследование новой математической модели с учетом эредитарности, которая обобщает модель Дубовского [1] для прогнозирования экономических циклов и кризисов (длинных волн Кондратьева [2]). Эредитарность или наследственность – свойство динамической системы "помнить" реакцию на воздействие, т.е. текущее ее состояние зависит от предыдущего числа состояний. Математическое описание такой модели дается с помощью динамической системы с дробными производными в виде:

$$\begin{cases} \partial_{0t}^{\alpha_1} x(\tau) = -\lambda n x(t)(x(t) - 1)(y(t) - y^*) + \delta_1 \cos(\omega_1 t), x(0) = a \\ \partial_{0t}^{\alpha_2} y(\tau) = n(1 - n)y^2(t)(x(t) - x^*) + \delta_2 \cos(\omega_2 t), y(0) = b \end{cases} \quad (21)$$

где  $x(t)$  – эффективность инноваций, отношение производительности труда на новых рабочих местах к средней производительности на всех рабочих местах всех возрастов;  $y(t)$  – эффективность основных фондов (средств) организации;  $n$  – норма накопления, валовое накопление в долях ВВП;  $\lambda$  – параметр, определяющий размер и длительность циклов;  $a, b$  – положительные константы, определяющие начальные условия;  $(x^*, y^*)$  – координата точки равновесия системы (1);  $\delta_1, \delta_2, \omega_1, \omega_2$  – заданные положительные константы; дробные операторы в системе (1) понимаются в смысле Герасимова-Капуто [3]:

$$\partial_{0t}^{\alpha_1} x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_1)} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha_1}}, 0 < \alpha_1 < 1, \partial_{0t}^{\alpha_2} x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_2)} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha_2}}, 0 < \alpha_2 < 1 \quad (22)$$

Система (1) описывает длинные волны Кондратьева с учетом эредитарности. В случае, когда в системе (1)  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  и  $\delta_1 = \delta_2 = 0$  мы получаем модель Дубовского, которая была предложена и исследована С.В. Дубовским в работе [1]. Поэтому динамическую систему (1) будем называть обобщенной моделью Дубовского (ОМД).

Необходимо отметить, что в работе [4] была исследована ОМД (1) в случае  $\delta_1 = 0$  с помощью нелокальной явной конечно-разностной схемы.

В настоящей работе с помощью численного метода Адамса-Башфорта-Моултона находится и исследуется решение ОМД (1). Строятся расчетные кривые и фазовые траектории. Разработана компьютерная программа на языке Python, реализующая численный алгоритм.

Показано, что эффект эредитарности в динамической системе (1) может приводит к предельным циклам различной формы, что влияет на характер экономического роста и спада.

Работа выполнена в рамках темы НИР КамГУ имени Витуса Беринга "Математическая модель длинных волн Кондратьева с учетом наследственности" еАААА-А20-120021190003-1

### Литература

1. Дубовский С. В. Объект моделирования – цикл Кондратьева, Математическое моделирование, Т. 7, по 6, 1995, 65-74.

2. Кондратьев Н. Д., Опарин Д. Н. Большие циклы конъюнктуры, Институт экономики, 1928.
3. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение, Физматлит, 2003.
4. Makarov D.V., Parovik R.I. Modeling of the economic cycles using the theory of fractional calculus, Journal of Internet Banking and Commerce, vol. 21, no 21, S6, 2016.

## ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ, СОДЕРЖАЩИЙ ПРОИЗВОДНУЮ ПО ВРЕМЕНИ ОТ ИСКОМОЙ ФУНКЦИИ

<sup>1</sup>Маматов А.З., <sup>2</sup>Бахрамов С.А., <sup>3</sup>Нармаматов А.Б.

<sup>1</sup> Профессор кафедры «Математика и информатика» Ташкентского института текстильной и легкой промышленности и профессор кафедры «Вычислительная математика и информационные системы» факультета математики Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека

e-mail: maz54@mail.ru

<sup>2</sup> доцент кафедры вычислительной математики и информационных систем математического факультета Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека

e-mail: bahromovsayfidin@gmail.com

<sup>3</sup> ассистент кафедры вычислительной математики и информационных систем математического факультета Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека

e-mail: narmamatov.alibek@mail.ru

В статье рассмотрена одна краевая задача параболического типа с дивергентной главной частью, когда граничное условие содержит производную по времени от искомой функции при размерности области  $m \geq 3$ .

$$\begin{cases} u_t - \frac{d}{dx_i} a_i(x, t, u, \nabla u) = 0, \\ a_0 u_t + a_i(x, t, u, \nabla u) \cos(v, x_i) = g(x, t, u), \quad (x, t) \in S_t, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \end{cases}$$

где  $\Omega$  - ограниченная область в  $E_m$ . Построим приближенное решение по Галеркину. Возьмем координатную систему из пространства  $H^1$ . Приближенное решение

$$U(x, t)$$

будем искать в виде [1-2]

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^n C_k^n(t) \varphi_k(x) \in M$$

где  $C_k^n(t)$  определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} (U_t, \varphi_j)_{L_2} + (a_i(x, t, U, \nabla U), \varphi_{j x_i})_{\Omega} + (a(x, t, U, \nabla U), \varphi_j)_{\Omega} = \\ = (g(x, t, U), \varphi_j)_S, \quad j = \overline{1, n} \end{aligned}$$

При определенных условиях для коэффициентов заданной задачи доказана существование и единственность обобщенного решения задачи в пространстве  $\tilde{H}^{1,1}(Q_T)$ .

### Литература

1. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралъцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.-Наука,-1967.-736 С.



2. *Михлин С.Г.* Численная реализация вариационных методов. М.-Наука,-1966.-432 С.

## ДИФРАКЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ВОЛН ДАВЛЕНИЯ НА ЖЕСТКОМ НЕПОДВИЖНОМ ШАРЕ В АКУСТИЧЕСКОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

<sup>1</sup>Мусурмонова М.О., <sup>2</sup>Шукуров А.М.

<sup>1</sup> *Каршинский государственный университет, Узбекистан, г.Карши, Кучабаг, 17,*  
e-mail: musurmonova.mamura@gmail.com

<sup>2</sup> *Каршинский государственный университет, Узбекистан, г.Карши, Кучабаг, 17,*  
e-mail: Shukurov171258@gmail.com

В работе рассматривается задача о дифракции нестационарных сферических волн давления на абсолютно-жестком неподвижном шаре в акустическом полупространстве. Подобная задача рассмотрена в [1].

Пусть в акустическом полупространстве  $z \geq 0$  на расстоянии  $h$  от плоскости  $z = 0$  на оси  $O_2z$  (точка  $O_2$  лежит на границе полупространства) расположен центр шара радиусом  $r = 1$ .

В момент времени  $\tau = 0$  поверхности шара касается фронт нестационарной сферической волны давления с заданным потенциалом [2]

$$\varphi_{0s}) = \frac{d_0 - 1}{l} f(\tau + d_0 - 1 - l) H(\tau + d_0 - 1 - l) \quad (1)$$

где  $f(x)$  - произвольная функция, задающая закон изменения потенциала во времени;  $H(x)$  - единичная функция Хевисайда;  $l_0 = \sqrt{r^2 + d_0^2 - 2rd_0 \cos \theta}$ ,  $d_0$  - расстояние от центра до точечного источника сферической волны.

Потенциал отраженной от плоской границы полупространства без шара сферической волны имеет следующий вид

$$\varphi_1 = \mp \frac{d_1 - 1}{l_1} f(\tau + d_1 - l_1 - 1) H(\tau + d_1 - l_1 - 1) \quad (2)$$

где верхний знак соответствует свободной поверхности плоской границы полупространства, а нижний  $\Pi$  жесткой стенке.  $l_1 = \sqrt{r^2 + d_1^2 - 2rd_1 \cos \theta}$ ,  $d_1 = d_0 + 2h$ .

Плоская граница полупространства является либо свободной поверхностью, либо жесткой стенкой

$$(p + p^*)|_{z=0} = 0, p^* = p_0 + p_1, p = -\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}; (v + v^*)|_{z=0} = 0, v^* = v_0 + v_1, v = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad (3)$$

где  $p$  - давление в жидкости;  $v$  - скорость частицы жидкости. На поверхности шара граничное условие имеет следующий вид:

$$(v + v^*)|_{r=1} = 0, v^* = v_0 + v_1. \quad (4)$$

С учетом осевой симметрии задачи движение акустической среды относительно потенциалов  $\varphi$  скоростей описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} = \Delta \varphi, \quad (5)$$

где  $\Delta$  - оператор Лапласа в сферической системе координат  $r, \theta, \vartheta$ . Начальные условия  $\Pi$  однородные и на бесконечности отсутствует возмущение.

Начально-краевая задача (1)-(5) решается применением интегрального преобразования Лапласа по времени  $\tau$  и использованием метода неполного разделения переменных. С учетом осевой симметрии задачи искомые функции раскладываются в ряды по полиномам Лежандра  $P_n(\cos \theta)$ . Используется вспомогательная сферическая система координат  $(r_1, \theta_1, \vartheta_1)$  с началом в точке  $O_1$ , симметричной точке  $O$  относительно плоской границы полупространства. Для перехода из одной системы в другую систему координат использована теорема сложения для функций Бесселя [3]. В пространстве изображений задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Решение системы представляется в виде бесконечного ряда по экспонентам. Для коэффициентов ряда получены начальные условия и рекуррентные соотношения, не требующие применения метода редукции. Коэффициенты рядов искомых функций определяются в виде рациональных функций, что позволяет найти оригиналы с помощью теории вычетов. Получены формулы для параметров акустических сред.

### Литература

1. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В., Шукуров А.М. . Распространение волн от сферической полости в акустическом полупространстве // ПММ. - 1991. Т. 55. no 1. - С. 172-174.
2. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1990. - 264 с.
3. Иванов Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. - Минск: Наука и техника, 1968. - 584 с.

## ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ

Рузиев Рауп Ахмадович

Навоийский государственный педагогический институт, 201100, г. Навоий, ул. Ибн

Сины 45

e-mail: rrauf@mail.ru

При исследовании поверхностных волн особенность решения пространственной задачи состоит в том, что область  $\Omega$ , занятая жидкостью, изменяется со временем и нахождение численного решения существенно зависит от вида используемой сетки. В связи с этим при проведении расчетов целесообразно использовать подвижные адаптивные сетки, подстраивающиеся под границы области  $\Omega(t)$ .

Тогда вычисления проводятся в расчетной неподвижной области  $Q$  простой формы в пространстве  $q^\beta$ , в взаимно однозначное соответствие узлов расчетной сетки, покрывающей  $Q$ , и адаптивной криволинейной сетки, покрывающей  $\Omega$ , задает в дискретном виде преобразование координат

$$t = q^0, \quad x^\alpha = x^\alpha(q^\beta, t), \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \quad (1)$$

Используя это дискретное преобразование можно определить параметры жидкости в любой точке физической области  $\Omega(t)$ .

Для численного решения пространственной задачи

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial q^\alpha} (k_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial q^\beta}) = 0, \quad q = (q^1, q^2, q^3) \in Q, \quad (2)$$

покроем область  $\bar{Q}$  прямоугольной равномерной сеткой  $\bar{Q}_h$ , согласованной с границей  $\Gamma$ , с шагами  $h_\alpha$  и количеством узлов  $N_\alpha$  в направлении осей  $Oq^\alpha$ ,  $h_\alpha = 1/(N_\alpha - 1)$ . Пусть  $i$  - мультииндекс,  $i = (i_1, i_2, i_3)$ . Обозначим через  $q_i$  узел сетки с координатами

$$(q_{i_1}^1, q_{i_2}^2, q_{i_3}^3), \quad i_\alpha = 1, \dots, N_\alpha, \quad q_{i_\alpha}^\alpha = (i_\alpha - 1)h_\alpha.$$

Пусть  $\Gamma_{1,h}$  – множество узлов сетки, лежащих на  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_{0,h}$  – на  $\Gamma_0$ ,  $Q_h$  – множество внутренних узлов сетки,  $Q_h = \overline{Q}_h \setminus \Gamma_h$ ,  $\Gamma_h = \Gamma_{1,h} \cup \Gamma_{0,h}$ .

Полученные разностного уравнения относительно потенциала осуществляется на основе интегро-интерполяционного метода.

## КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ МАТЛАБ

<sup>1</sup>Саттаров А.

<sup>1</sup>Филиал РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина в г. Ташкенте, Узбекистан  
e-mail:s-akhat@mail.ru

Нефтегазовая отрасль имеет много сложных и сверхсложных задач, решение которых без помощи компьютерного моделирования невозможно [1]. Например, оценка риска повреждений и утечек, моделирование различных сценариев развития аварийных ситуаций, прогнозирование состояния разработки нефтяных и газовых месторождений и т. д. Matlab на сегодняшний день один из самых удобных пакетов прикладных программ для решения технических задач. Моделировать задачи нефтегазовой отрасли в Matlab легче и эффективнее [2]. Гипотезы, отражающие реальный мир, должны обладать наглядностью и сводиться к удобным для исследования логическим схемам, их обычно связывают с экспериментом. Такие логические схемы, упрощающие логические построения и позволяющие проводить эксперименты для уточнения природы исследуемых явлений, называют моделями, а процесс построения модели - моделированием. Суть моделирования заключается в переходе от изучения исходного явления, процесса или технической системы непосредственно в реальности к другому явлению, процессу или технической системе, которую называют моделью. Основная цель такого перехода - облегчить исследование, сделать доступным определение интересующих нас величин, искусственно воспроизвести исследуемые явления. Matlab благодаря своему пакету прикладных программ облегчает компьютерное моделирование задач, которых необходимо решить. В Matlab встроены множество библиотек изначально, что помогает пользоваться многими функциями просто указав название библиотеке в которых они находятся - это является одним из главных преимуществ Matlab.

## Литература

1. Деева В.С. Учебное пособие - Компьютерное моделирование в нефтегазовой сфере, томский политехнический университет, Томск, 2018
2. Саттаров А. С., Сидоров В. В. Методические указания к выполнению лабораторных работ по дисциплине Информатика. Программные продукты в математическом моделировании. Т: Филиал РГУ нефти и газа (НИУ) им. И.М. Губкина в г. Ташкенте , 2019

## СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ ТОРОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК С ПРОТЕКАЮЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ

<sup>1</sup>Сафаров И., <sup>1</sup>Кулдашов Н., <sup>2</sup>Эсанов Н., <sup>3</sup>Алмуратов Ш., <sup>4</sup>Болтаев З.

<sup>1</sup>Ташкентский химико-технологический институт, г.Ташкент, Узбекистан,  
e-mail: a.sh.ruzimov@gmail.com

<sup>2</sup>Бухарский государственный университет, г.Бухара, Узбекистан,  
e-mail: n.esanov1973@mail.ru

<sup>3</sup>Термезский государственный университет, г.Термез, Узбекистан,  
e-mail: sh.almuratov@mail.ru

<sup>4</sup>Бухарский инженерно-технологический институт, г.Бухара, Узбекистан,  
e-mail: Farhod2708@mail.ru

Рассмотрим колебания цилиндрических оболочек с протекающей жидкости [1,2], находящихся в упругой среде. Уравнения равновесия элемента оболочки сведем к одному разрешающему уравнению в перемещениях. Для этого исключим из уравнения равновесия усилия и используем соотношения между усилиями и деформациями, а также между деформациями и перемещениями. Рассматривая малые перемещения, можно отбросить все нелинейные слагаемые, в результате чего придем к уравнению [3,4]:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} + h_\nu^2 \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \left( \tilde{v}_2 + \frac{\partial^3 \tilde{v}_2}{\partial \theta^3} \right) - \frac{r p}{E h} \frac{\partial^3 \tilde{v}_2}{\partial \theta^3} + \frac{r p}{E h} \left( \rho h + \frac{p_{\text{ж}} r}{2} \right) \times \\ \left( -\frac{\partial^3 u}{\partial \xi \partial t^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial \xi \partial t^2} + \frac{\partial^3 \omega}{\partial \theta^2 \partial t^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left[ \frac{r}{E h} (p_{\text{ж}} V^2 + p) \frac{\partial^3 \omega}{\partial \xi^2} \right] + \\ \frac{2 p_{\text{ж}} r^2 V}{E h} \frac{\partial^3}{\partial \theta^2 \partial t} \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\text{где } h_\nu = \frac{h}{r \sqrt{12(1 - \nu^2)}}$$

Приступая к решению уравнения (1) отметим, что все перемещения и углы поворота можно представить через  $\omega$ . Разделяя переменные, примем  $\omega$  в виде ряда [4]:

$$\omega = \sum_n \sum_m f_{mn}(\xi) e^{i\omega t} \cos m\vartheta \quad (2)$$

где  $\omega$  – круговая частота свободных колебаний. Тогда

$$\vartheta_1 = \sum_n \sum_m \frac{1}{m} f_{mn}(\xi) e^{i\omega t} \sin m\theta; \quad u = \sum_n \sum_m \frac{1}{m^2} f'_{mn}(\xi) e^{i\omega t} \cos m\theta; \\ \vartheta_2 = -\sum_n \sum_m \frac{m^2 - 1}{m} f_{mn}(\xi) e^{i\omega t} \sin m\theta; \quad \tilde{v}_1 = \sum_n \sum_m \frac{1}{m^2} f'_{mn}(\xi) e^{i\omega t} \cos m\theta. \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в уравнение (1) и используя алгоритм метода Бубнова-Галеркина:

$$\int_0^{2\pi} L^* \cos k\theta d\theta = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad (4)$$

где  $L^*$  – левая часть уравнения (4), получим систему уравнений для определения искомым функций  $f_{mn}(\xi)$ , причем коэффициенты этой системы при  $k \neq m$  обращаются в нуль:

$$f_{mn}^{IV}(\xi_0) + a_{mn} f_{mn}''(\xi_0) + b_{mn} f_{mn}'(\xi_0) + c_{mn} f_{mn}(\xi_0) = 0 \quad (5)$$

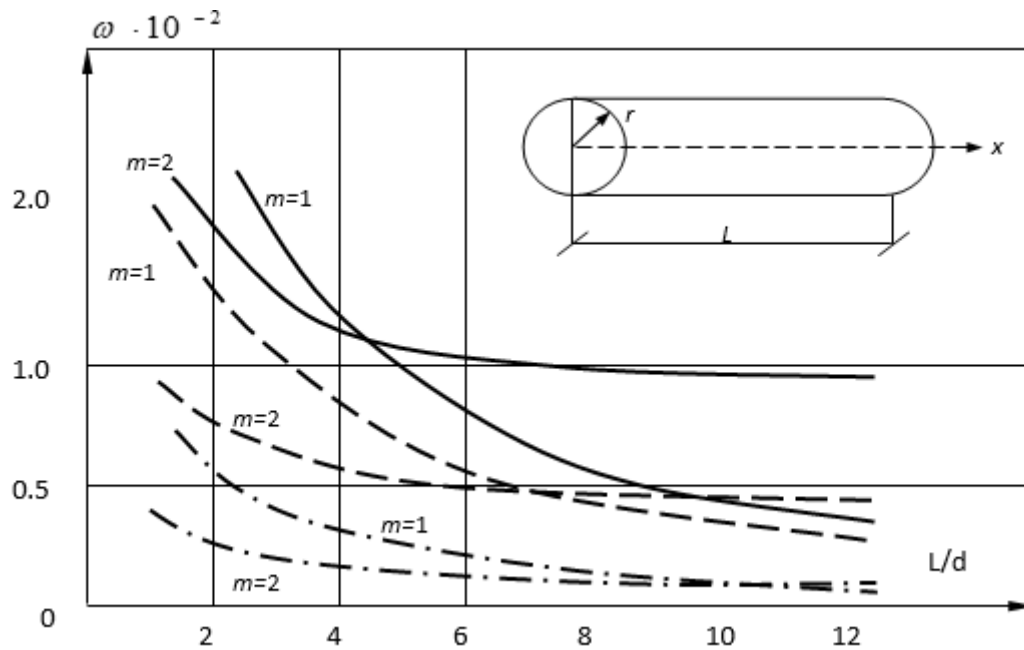
Здесь  $f_{mn}$  – функция переменной  $\xi_0 = \xi \sqrt{h_\nu}$ , изменяющаяся в пределах  $0 < \xi_0 < l_0$ ;  $l_0 = \sqrt{h_\nu} L / r$ . Коэффициенты системы уравнений (5) определяются выражениями:

$$a_{mn} = \frac{r^2}{h_\nu^2} \left( \rho h + \frac{p_{\text{ж}} r}{2} \right) \omega^2 + m^4 \frac{r}{E h h_\nu^2} (p_{\text{ж}} V^2 + p); \quad b_{mn} = i \frac{2 p_{\text{ж}} r^2 V}{E h h_\nu^2} m^4 \omega.$$

Рассмотрим случай шарнирного закрепления обоих торцов. Представим функцию  $f_{mn}(\xi_0)$  в виде тригонометрического ряда, заранее удовлетворив граничным условиям:

$$f_{mn}(0, l_0) = 0; \quad f_{mn}''(0, l_0) = 0. \quad (6)$$

Анализ полученных результатов показал, что влияние кариолисовой силы на частоту свободных колебаний не существенно.



Зависимость частоты свободных колебаний от  $L/d$ .

Из графиков на *рис.1* следует, что на частоту свободных колебаний оказывают существенное влияние соотношения геометрических параметров ( $h/r$  и  $L/d$ ).

### Литература

1. Сафаров И.И., Тешаев М.Х., Эсанов Н.Х., Хамроева З.Х. Математическое моделирование собственных и вынужденных колебаний криволинейных труб, взаимодействующих со средой. Ташкент, ФАН, 2009.-161 с. (монография)
2. Удовенко В.Е., Сафронова И.П., Гусева Н.Б. Полиэтиленовые трубопроводы. ЦМ.:ЗАО Полимер Газ, 2003.-50 с.
3. Рашидов Т.Р., Хожметов Г.Х., Мардонов Б.М. Колебания сооружений взаимодействующих с грунтом. Ташкент. Фан. 1975. - 174 с.
4. Safarov I.I., Teshayev M.Kh., Nuriddinov B.Z., Boltayev Z.I. Of Own and Forced Vibrations of Dissipative Inhomogeneous Mechanical Systems. Applied Mathematics, 2017, 8, 1001-1015. <http://www.scirp.org/journal/am>.

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ВО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПЛАСТАХ

<sup>1</sup>Сувонов О.О., <sup>2</sup>Кучкарова С.С.

<sup>1</sup>ТЦППККНО Навоийской области, Узбекистан

e-mail: olimsuvonov54@umail.uz

<sup>2</sup>Навоийский государственный педагогический институт, Узбекистан

e-mail: surmaxon-73@bk.ru

В процессе эксплуатации месторождений полезных ископаемых, а также в процессах подземного выщелачивания в горнорудных месторождениях продуктивный пласт и размещенные в нем скважины можно представлять как единая гидродинамическая система с распределенными параметрами (параметры изменяются в пространстве и во времени), а состояние самой системы описывается дифференциальными уравнениями в частных производных. Таким образом пласт и скважина есть как гидродинамическая система управления с распределенными параметрами.

При определении режимов функционирования системы требуется решение прикладных задач программного управления, т.е. определении состояния системы в пространстве и во времени. Состояние системы (поле давлений) описывается системой дифференциальных уравнений с частными производными.

На основе динамической модели нестационарной фильтрации газа (жидкости) в системе двух взаимодействующих пластов при условии продвижения краевой воды через разрабатываемый пласт, определяются изменения по времени положения нефти или газовой фазы в контакте. Запасов газа и пластовых перетоков, а также количества воды, внедряемой в залежи. Для этого рассматривается нестационарная фильтрация газа (жидкости) в системе гидрогазодинамически связанных пластов. Разрабатываемый, продуктивный пласт связан краевыми водами, что обуславливает водонапорный режим, и в случае учета упругих свойств образовывается искомая подвижная граница раздела фаз. Сверху через кровлю хорошопроницаемый пласт может взаимодействовать с соседним пластом. Отметим, что верхний плохопроницаемый пласт может отсутствовать. В этом случае получим одномерную задачу о поршневом вытеснении из двух фаз. В случае системы пластов математическая модель задачи описана в рамках модели М.С.Хантуша, т.е. в соседнем пласте движение происходит по вертикали, а в основном (продуктивном) - по горизонтали. Силу сказанного рассматриваемую задачу нестационарного взаимодействия пластов можно представить следующим образом, требуется интегрировать систему дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 P_1^\gamma}{\partial x^2} + \frac{C_3 k_3}{B_1 k_1} \frac{\partial P_3^\gamma}{\partial z} \Big|_{z=b_1+0} &= \frac{1}{H_1^{2-\gamma}} \left( \frac{2m_1\mu}{k_1} \right)^{\gamma-1} \frac{\partial P_1}{\partial t} \\ 0 < x < l(t) \leq L, \quad t > 0 \\ \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \frac{C_3 k_3 \mu_b}{B_1 k_b \mu} \frac{\partial P_3^\gamma}{\partial z} \Big|_{z=b_1+0} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial P_z}{\partial t}, \quad l(t) < x < L \\ \frac{\partial^2 P_3^\gamma}{\partial x^2} &= H_3^{\gamma-2} \left( \frac{2m_3\mu}{k_3} \right)^{\gamma-1} \frac{\partial P_3}{\partial t}, \quad 0 < x < L \\ b_1 < z < b_1 + b_2, \quad t > 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

при соответствующих начальных и граничных условиях.

Решение краевой задачи в безразмерном виде получено методом конечных разностей после применения метода выпрямления фазовых фронтов [1]. Полученные нелинейные системы алгебраических уравнений, соответствующие методу конечных разностей, решаются методом простой итерации. При каждой итерации линеаризованные системы уравнений решаются применением методов прогонки: левой, правой и встречной.

## Литература

1. Будаг Б.М., Гольдман Н.Л., Успенский А.Б. Разностные схемы с выпрямлением фронтов для решения многофронтовых задач типа Стефана. ДАН СССР 1966. Том 167, е4, с. 735-738.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Сувонов Олим Омонович

*Навоийский государственный педагогический институт, Узбекистан*

e-mail: olimsuvonov54@umail.uz

Изучение проблем управления гидродинамическими процессами и решение прикладных задач по разработке управляющих систем с распределенными параметрами, как следует из принципа необходимого разнообразия Эшби [1], наиболее полно отвечает целям управления процессами в месторождениях полезных ископаемых [2,3].

Проблема управления процессами в нефтегазовых месторождениях привлекает в последнее время большое внимание специалистов как по прикладной математике и механике, а также физике сплошных сред, так и по теории автоматического управления. Эти задачи имеют большое научное и практическое значение в связи с возможностью контроля критических параметров, характеризующих устойчивость, и тем самым повысить эффективность управления рассматриваемым гидродинамическим процессом.

В работе рассматривается гидродинамический процесс функционирования системы «пласт-скважина» (« П-С ») с учетом динамического процесса останковки и пуска группы эксплуатационных скважин, который делится на три этапа - до останковки скважин, в период их останковки, после введения скважин в действие [4].

Для математического моделирования примем следующие предположения: режим течения изотермический, для каждой из фаз справедлив обобщенный закон Дарси; фильтрация происходит в горизонтальном пласте и ее можно представить в виде радиальных потоков; газ и промывочная жидкость взаимнонерастворимы; вязкость их постоянная; сжимаемостью жидкости по сравнению со сжимаемостью газа можно пренебречь; до останковки скважины добывается чистый газ [5].

В первом случае, который является нормальным режимом функционирования системы, состояние системы описывается дифференциальным уравнением в частных производных, т.е. добывается чистый газ:

$$\frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^\alpha \frac{\partial P^2}{\partial r} \right) = \frac{2m\mu_2}{k} \frac{\partial P}{\partial t}, \quad \alpha R_c < r < R_k, \quad t \in (0, T) \quad (1)$$

На втором этапе в структуре пласта происходит динамический процесс непоршневого вытеснения, который связан с искусственным воздействием на систему « П-С ». Поэтому динамический процесс глушения скважин описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^\alpha f_2(S) \frac{\partial P^2}{\partial r} \right) = -\frac{2m\mu_2}{k} P \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{2m(1-S)}{k} \mu_2 \frac{\partial P}{\partial t}, \\ \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^\alpha f_1(S) \frac{\partial P}{\partial r} \right) = \frac{m\mu_1}{k} \frac{\partial S}{\partial t}, \quad \alpha R_c < r < R_k, \quad t \in (T_1, T_2). \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $T_1$  – начало, а  $T_2$  – конец останковки скважин.

На третьем этапе в структуре пласта происходит обратный динамический процесс, т.е. промывочная жидкость вытесняется газом, давление которого является внутренней энергией пласта. Этот процесс также описывается системой уравнений (2), а  $t \in [T_2, T]$ . Здесь  $T$  - общее время исследования процессов. Уравнение (1) и (2) решаются при условии на границах пласта.

В результате анализа многочисленных вычислительных экспериментов показано, что предложенный алгоритм может быть использован для расчета полей насыщенных и давлений при плоско-параллельном течении газа и промывочной жидкости в пласте. При этом вышеприведенные особенности численного решения и условия искусственной вязкости налагают особые требования на выбор шагов пространственной и временной сеток. Неудачный выбор этих параметров приводит к неустойчивому по времени результату. При этом на первом этапе, где нет задачи определения поля насыщенности, счет можно вести с крупным шагом (до десятка суток), а на втором и третьем этапах начальный временной шаг приходится брать порядка сотен долей минуты.

### Литература

1. Эшби У.Р. Введение в кибернетику. - М.: ИЛ. - 1959. - 257 с.
2. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. - М.: Наука. 1975. - 568 с.
3. Мееров М.В. Исследование и оптимизации многосвязных систем управления. - М.: Наука. - 1986. - 223 с.
4. Кричлоу Г.Б. Современная разработка нефтяных месторождений - проблемы моделирования. М. Мир: Недра, 1979. - 303 с.
5. Пулатов Р.Д., Сиддиков А.М., Сувонов О.О. Численное и экспериментальное исследование фильтрационных свойств промывочных жидкостей // Известия АН УзССР. Сер.техн.наук. - Ташкент. - 1983. - е 4. - с. 44-46.

### РАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

<sup>1</sup> Тешаев М., <sup>2</sup>Аблокулов Ш., <sup>3</sup>Эргашев М., <sup>4</sup>Райимов Д., <sup>5</sup>Нуриддинов Б.

<sup>1</sup> Бухарское отделение института математики АН РУз, г.Бухара, Узбекистан,  
e-mail: muhsin\_5@mail.ru

<sup>2</sup> Ташкентский химико-технологический институт, г.Ташкент, Узбекистан,  
e-mail: a.sh.ruzimov@gmail.com

<sup>3</sup> Бухарский инженерно-технологический институт, г.Бухара, Узбекистан,  
e-mail: Farhod2708@mail.ru

<sup>4</sup> Бухарский инженерно-технологический институт, г.Бухара, Узбекистан,  
e-mail:saidovhk@gmail.com

<sup>5</sup> Бухарский медицинский институт, г.Бухара, Узбекистан,  
e-mail:T.Ruziyev@mail.ru

В связи с повышенным интересом к разработке новых подходов при решении актуальных современных проблем, связанных с неразрушающим дистанционным контролем материалов медицинской диагностики, геоакустических проблем, сейсмоакустическим зондированием, оценкой сейсмостойкости подземных инженерных сооружений и ряда других, возникает необходимость постановки и решения некоторых модельных задач, анализ которых даст ключ к прогнозу и эффективному управлению рассматриваемых процессов [1,2]. При динамическом процессе сферической оболочке излучение волн приводит к затуханию колебаний и собственные частоты колебаний этой системы будут комплексными. Таким образом, решение задач, исследование сферических тел, имеет большое значение в технике.

Основные уравнения движения деформируемых (линейных упругих или вязкоупругих) сферических тел, имеют вид

$$(\tilde{\lambda}_j + 2\tilde{\mu}_j) = \text{grad div } \vec{u} + \tilde{\mu}_j \text{rot rot } \vec{u} = \rho_j \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \quad (j = 1, 2) \quad (1)$$



Таблица 3: Корни частотного уравнения при различных значениях  $\sigma$ .

Номер корня	$\sigma = 0$	1/2		1/3
1	0.6620	0.8160	0.8500	0.8733
2	1.8909	1,9285	1.9391	1.9479
3	2.9303	2,9539	2,9606	2.9656
4	3.0485	3.9658	3.9707	3.9744
5	4.9590	4.9728	4.9607	4.9776
6	5.9660	5,9774	5,0806	5.9830

где

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\lambda}_j \phi(t) &= \lambda_{0j} \left[ \phi(t) - \int_0^t R_{\lambda j}(t - \tau) \phi(t) d\tau \right]; \\ \tilde{\mu}_j \phi(t) &= \mu_{0j} \left[ \phi(t) - \int_0^t R_{\mu j}(t - \tau) \phi(t) d\tau \right], \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$\tilde{\lambda}_j$  и  $\tilde{\mu}_j$  – операторные модули упругости,  $\phi(t)$  – произвольная функция времени;  $\rho_j$  – плотность,  $R_{\lambda j}(t - \tau)$  и  $R_{\mu j}(t - \tau)$  – ядра релаксации и  $\lambda_{0j}$ ,  $\mu_{0j}$  – мгновенные модули упругости. Далее применяя процедуру замораживания, заменим (2) приближенным соотношением вида

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\lambda}_j \phi &= \lambda_{0j} [1 - \Gamma_{\lambda j}^C(\omega_R) - i\Gamma_{\lambda j}^S(\omega_R)]; \\ \tilde{\mu}_j \phi &= \mu_{0j} [1 - \Gamma_{\mu j}^C(\omega_R) - i\Gamma_{\mu j}^S(\omega_R)] \phi, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_{\lambda j}^C(\omega_R) &= \int_0^\infty R_{\lambda j} \cos \omega_R \tau d\tau; & \Gamma_{\lambda j}^S(\omega_R) &= \int_0^\infty R_{\lambda j} \sin \omega_R \tau d\tau; \\ \Gamma_{\mu j}^C(\omega_R) &= \int_0^\infty R_{\mu j} \cos \omega_R \tau d\tau; & \Gamma_{\mu j}^S(\omega_R) &= \int_0^\infty R_{\mu j} \sin \omega_R \tau d\tau; \end{aligned}$$

– соответственно косинус и синус образа Фурье ядра релаксации материала.

Для решения рассматриваемой задачи примем зависимость  $\vec{u}$  от времени в виде  $\vec{u} = \vec{U}(r, \theta, \phi) e^{i\omega t}$ . При этом функция пространственных координат  $\vec{U}(r, \theta, \phi)$  может быть представлена в виде суммы потенциальной  $\vec{U}_p = \text{grad } \vec{\phi}$  и соленоидальной  $U_s = \text{rot } \vec{\psi}$  частей:  $\vec{U} = \vec{U}_p + \vec{U}_s$ , которые удовлетворяют следующим уравнениям

$$\left. \begin{aligned} (\Delta + k_p^2) \vec{U}_p &= 0; \\ (\Delta + k_s^2) \vec{U}_s &= 0; \\ \text{div} \vec{U}_p &= 0; \\ \text{div} \vec{U}_s &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} k_p^2 &= \omega^2 / \Gamma_{pk} c_p^2; & k_s^2 &= \omega^2 / \Gamma_{sk} c_s^2; & \Gamma_{pk} &= 1 - \Gamma_{pj}^C(\omega_R) - i\Gamma_{pj}^S(\omega_R); \\ \Gamma_{sk} &= 1 - \Gamma_{sj}^C(\omega_R) - i\Gamma_{sj}^S(\omega_R). & c_p^2 &= (\lambda + 2\mu) / \rho; & c_s^2 &= \mu / \rho, \end{aligned}$$

– соответственно скорости распространения продольных и поперечных волн в упругом теле. Для этого приводя уравнение (4) к общему знаменателю и приравнявая числитель нулю, получим

$$\frac{vh(b-a)(h^2ab+v)}{v^2h^2ab+(h^2a^2-v)(g^2a^2-v)} = \frac{tg hb - tg ha}{1 + tg ha tg hb} = 0$$

Корни частотного уравнения при различных значениях  $\sigma$  приведена в таблице 1

## Выводы

1. Построена теория и методы для оценки динамики вязкоупругой сферической оболочки, которые могут позволить предсказать резонансные явления, возникающие в механике рассеяния сейсмических волн в различных средах при наличии включений в системе.

2. Рассмотренные задачи сводились к задаче отыскания комплексных собственных частот, рассмотренных для неоднородных систем (т.е. включений в безграничной среде)  $\Omega_R + i\Omega_I$  ( $\Omega_R$  – реальные и  $\Omega_I$  – мнимые части комплексных собственных частот), при которых система уравнений движения и укороченные условия излучения имеют ненулевое решение в классе бесконечно дифференцируемых функций. Показана, что, задача имеет дискретный спектр.

## Литература

1. Safarov I.I., Boltaev Z.I., Teshaev. M.Kh. Properties of Wave Motion in a Cylindrical Shell, Interacting with Viscous Liquid. Open Access Library Journal. - 2018. - Vol. 5. - pp.1-22.
2. Safarov I.I., Teshaev M.Kh., Boltaev Z.I. Own Vibrations of Bodies Interacting with Unlimited Deformable Environment. Open Access Library Journal. - 2018. - Vol. 5. - pp.1-22.

## ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

<sup>1</sup>Турметов Б.Х., <sup>2</sup>Кадиркулов Б.Ж.

<sup>1</sup> *Международный казахско-турецкий университет им. Х.А.Ясави, Казахстан, ЮКО,  
г.Туркестан, пр. Б.Саттарханова, 29,*

e-mail: turmetovbh@mail.ru

<sup>2</sup> *Ташкентский государственный университет востоковедения, Узбекистан, г.  
Ташкент, ул. Шахрисабз, 25,*

e-mail: kadirkulovbj@gmail.com

Пусть  $0 < p, q, T$  – действительные числа,  $\Pi = \{x = (x_1, x_2) \in R^2 : 0 < x_1 < p, 0 < x_2 < q\}$  – прямоугольник,  $Q = (0, T) \times \Pi$ . Для любой точки  $x = (x_1, x_2) \in \Pi$  рассмотрим отображения

$$S_0x = (x_1, x_2), S_1x = (p - x_1, x_2), S_2x = (x_1, q - x_2), S_3x = (p - x_1, q - x_2)$$

Напоминаем, что отображение  $I$  принято называть инволюцией, если  $I^2 = E$ ,  $E$  – тождественное отображение. Так как  $S_j^2x = x$ , для любого  $j = \overline{0, 3}$ , откуда следует, что отображения  $S_j$  являются инволюцией.

Пусть  $a_j$  – действительные числа,  $j = \overline{0, 3}$ ,  $\Delta$  – оператор Лапласа, действующий по переменным  $x_1$  и  $x_2$ . Рассмотрим в области  $Q$  следующее уравнение

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = a_0 \Delta u(t, S_0x) + a_1 \Delta u(t, S_1x) + a_2 \Delta u(t, S_2x) + a_3 \Delta u(t, S_3x) + f(x), (t, x) \in Q. \quad (1)$$

Здесь  $\Delta u(t, S_jx) = \Delta u(t, z)|_{z=S_jx}$ ,  $j = \overline{0, 3}$ .

Если  $a_0 = 1$ ,  $a_j = 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ , то (1) совпадает с классическим параболическим уравнением.

В области  $Q$  рассмотрим следующую задачу.

Задача ID. Найти решение уравнения (1) в области  $Q$ , удовлетворяющее условиям

$$u(0, x) = \varphi(x), u(T, x) = \psi(x), x \in \bar{\Omega}_x, \quad (2)$$

$$u(t, x) = 0, (t, x) \in \partial\Pi \times [0, T] \quad (3)$$

Здесь  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  - заданные на  $\Pi$  функции, причем выполняются условия согласования

$$\varphi(x)|_{\partial\Pi} = 0, \quad \psi(x)|_{\partial\Pi} = 0$$

Под регулярным решением задачи ID будем понимать пару функций  $(u(x, t), f(x))$ , такие, что  $u(t, x) \in C_{t,x}^{1,2}(\bar{Q})$ ,  $f(x) \in C(\bar{\Pi})$ , удовлетворяющее в области  $Q$  уравнению (1) и условиям (2) - (3) в классическом смысле.

Отметим, что прямые и обратные задачи для уравнения параболического типа целого и дробного порядков изучены в работах [1-3].

Введем следующие числа

$$\varepsilon_1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \varepsilon_2 = a_0 + a_1 - a_2 - a_3, \varepsilon_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3, \varepsilon_4 = a_0 - a_1 - a_2 + a_3$$

Основными результатами настоящей работы являются:

Теорема. Пусть  $\varepsilon_j > 0, j = \overline{1, 4}$ ,  $\varphi(x), \psi(x) \in C^3(\bar{\Pi})$ ,  $\frac{\partial^4 \varphi(x)}{\partial x_r^3 \partial x_s}, \frac{\partial^4 \psi(x)}{\partial x_r \partial x_s^3} \in C(\bar{\Pi})$ ,  $r, s = 1, 2$  и функции  $\varphi(x), \psi(x), \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_r \partial x_s}, \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_r \partial x_s^3}, r, s = 1, 2$  удовлетворяют краевому условию (3). Тогда решение задачи ID существует и единственно.

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования КН МОН РК, грант No AP08855810.

## Литература

1. *Al-Salti N., Kerbal S., Kirane M.* Initial - boundary value problems for a time-fractional differential equation with involution perturbation, *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, V. 14, No.3, 2019, p. 1-15.
2. *Ashyralyev A, Sarsenbi A.* Well-posedness of a parabolic equation with involution, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 38(10), 2017, p. 1295-1304.
3. *Malik S.A., Aziz S.* An inverse source problem for a two parameter anomalous diffusion equation with nonlocal boundary conditions, *Computers and Mathematics with Applications*, V. 73, No.12., 2017, p. 2548-2560.

## КОНСЕРВАТИВНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ПО ОПТИМАЛЬНОМУ ВЫБОРУ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА В СТЕРЖНЕ

Тухтасинов М., Хайиткулов Б.Х.

Национальный Университет Узбекистана, 100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул.

Университетская, 4.

e-mail: mumin51@mail.ru; b.hayitqulov@mail.ru

В работе [1] изучены стационарные задачи расчета оптимального обогрева простых геометрических областей. В [2] рассматривались нестационарные задачи расчета оптимального обогрева простых геометрических областей: отрезок, прямоугольник и параллелепипед.

В данной работе разработаны метод и алгоритм решения задачи об оптимальном выборе плотности источников тепла на стержне таким образом, чтобы температура внутри рассматриваемой области находилась в заданных пределах. При этом источники тепла должны обеспечить заданный температурный режим минимальной суммарной мощности и температуру в заданном коридоре.

В прямоугольнике  $D = \{a \leq x \leq b, 0 \leq t \leq T\}$  требуется определить функцию  $f(x, t) \geq 0$ , доставляющую при каждом  $t \in [0, T]$  минимум линейному функционалу

$$J\{f\} = \int_a^b f(x, t) dx \rightarrow \min, \quad (1)$$

при следующих условиях

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad a < x < b, \quad 0 < t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad a \leq x \leq b, \quad u(a, t) = \mu_1(t), \quad u(b, t) = \mu_2(t),$$

$$m(x, t) \leq u(x, t) \leq M(x, t), \quad a \leq x \leq b, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

где  $u = u(x, t)$  – температура стержня в точке  $x$  в момент времени  $t$ ,  $\chi(x) > 0$  – коэффициент теплопроводности,  $u_0(x)$ ,  $\mu_1(t)$ ,  $\mu_2(t)$ ,  $m(x, t)$ ,  $M(x, t)$  – заданные функции. Здесь  $m(x, t)$ ,  $M(x, t)$  – функции минимального и максимального профиля температуры в области  $D$  соответственно. Плотность источников тепла описывается квадратично интегрируемой функций  $f(x, t)$  в пространстве  $L_2(D)$ . Решение данной краевой задачи можно получить в аналитическом виде с использованием метода Фурье [3].

Введем в  $\bar{D}$  равномерную по обеим переменным разностную сетку  $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i = ih, t_j = j\tau), i = 0, 1, \dots, N_1, j = 0, 1, \dots, N_2\}$  с шагами  $h = (b - a)/N_1$ ,  $\tau = T/N_2$ .

Для получения однородных консервативных разностных схем воспользуемся интегро-интерполяционным методом. Рассмотрим интегральное уравнение баланса тепла на элементарной ячейке сетки на отрезке  $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$  за промежуток времени  $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t_{j+1}) dx - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t_j) dx = \int_{t_j}^{t_{j+1}} W(x_{i-1/2}, t) dt - \int_{t_j}^{t_{j+1}} W(x_{i+1/2}, t) dt + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x, t) dx dt,$$

где

$$W(x_{i-1/2}, t) = \left( -\chi(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)_{x=x_{i-1/2}}.$$

Аппроксимируем входящие в уравнение баланса интегралы приближенными формулами [3]

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t_{j+1}) dx \approx hu_i^{j+1}; \quad \int_{t_j}^{t_{j+1}} W(x_{i-1/2}, t) dt \approx \tau W_{i-1/2}^{j+1}; \quad \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x, t) dx dt \approx \tau h \varphi_i^{j+1},$$

$$W_{i+1/2}^{j+1} = -\chi_{i+1/2} \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}}{h}; \quad W_{i-1/2}^{j+1} = -\chi_{i-1/2} \frac{u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{h}.$$

При этом  $\chi_{i\pm 1/2}$  и  $\varphi_i^{j+1}$  определяются равенствами

$$\chi_{i+1/2} = \chi \left( \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right), \quad \chi_{i-1/2} = \chi \left( \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \right), \quad \chi_i = \chi(x_i), \quad \varphi_i^{j+1} = f(x_i, t_{j+1}).$$

Неявной однородной консервативной разностной схемой для задачи (2) имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \left[ \chi_{i+1/2} \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}}{h^2} - \chi_{i-1/2} \frac{u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{h^2} \right] + \varphi_i^{j+1}, & i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{0, N_2 - 1}, \\ u_i^0 = u_0(x_i), & i = 0, 1, \dots, N_1, \\ u_0^{j+1} = \mu_1(t_{j+1}), \\ u_{N_1}^{j+1} = \mu_2(t_{j+1}). \end{cases} \quad (4)$$

Для поиска численного решения задачи (1)-(3) определим минимум функционала  $J\{f\} = \int_a^b f(x, t) dx$  при следующих ограничениях на плотности источников тепла

$$f(\cdot, \cdot) \in L_2(D); \quad m(x, t) \leq (G^{-1}f)(x, t) \leq M(x, t), \quad (5)$$

где  $G$  – трехдиагональная матрица

$$G = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{\chi_{1\pm 1/2}}{h^2}\right) & -\frac{\chi_{1+1/2}}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\chi_{i-1/2}}{h^2} & \left(\frac{1}{\tau} + \frac{\chi_{i\pm 1/2}}{h^2}\right) & -\frac{\chi_{i+1/2}}{h^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -\frac{\chi_{i-1/2}}{h^2} & \left(\frac{1}{\tau} + \frac{\chi_{i\pm 1/2}}{h^2}\right) & -\frac{\chi_{i+1/2}}{h^2} \\ 0 & \dots & \dots & -\frac{\chi_{(N_1-1)-1/2}}{h^2} & \left(\frac{1}{\tau} + \frac{\chi_{(N_1-1)\pm 1/2}}{h^2}\right) \end{bmatrix}.$$

Построим консервативную аппроксимацию (1)-(5) в виде задачи линейного программирования. Разобьем область  $D$  по  $x$  на  $N_1$ , и по  $t$  на  $N_2$  равных частей  $D = \bigcup_{j=1}^{N_2} \bigcup_{i=1}^{N_1} D_i^j$ ,

где  $D_i^j = \{(x, t), x_i \leq x \leq x_{i+1}, t_j \leq t \leq t_{j+1}, i = 0, 1, \dots, N_1 - 1, j = 0, 1, \dots, N_2 - 1\}$ . Обозначим через  $S_{N_1 N_2}(D)$  подпространство пространства  $L_2(D)$ , в котором определены кусочно-постоянные функции вида  $f(x, t) = f_i^j, (x, t) \in D_i^j (i = \overline{1, N_1 - 1}, j = \overline{1, N_2})$ . Введем в  $S_{N_1 N_2}(D)$  базис, состоящий из функций  $e_i^j(x, t) = 1, (x, t) \in D_i^j$  и  $e_i^j(x, t) = 0,$

$(x, t) \notin D_i^j$ . Тогда  $f(x, t) \approx \sum_{i=1}^{N_1-1} f_i^j e_i^j(x, t)$ . Пусть  $g_{ik} = (G^{-1}e_i^j, e_k^j), (m(x, t), e_i^j(x, t)) = \overline{m}_i^j,$

$(M(x, t), e_i^j(x, t)) = \overline{M}_i^j$ , где  $(\cdot, \cdot)$  скалярное произведение в  $L_2(D)$ . Подставим выражение для  $f(x, t)$  в (1) и скалярно умножаем неравенства (5) на  $e_i^j(x, t)$  в  $L_2(D)$  получим задачу линейного программирования

$$\begin{aligned} J_j\{f\} &= \sum_{i=1}^{N_1-1} (mes D_i^j) f_i^j \rightarrow \min, \quad j = 1, 2, \dots, N_2, \\ \overline{m}_i^j &\leq \sum_{k=1}^{N_1-1} g_{ik} f_k^j \leq \overline{M}_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2, \\ f_k^j &\geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, N_1 - 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Решением задачи (6) численными методами находится функция  $u_i^j = g_{ik} f_k^j$ , которая является решением краевой задачи (2) с  $f_k^j$ . При этом задача (6) решается симплекс-методом.

## Литература

1. Осипов О.В. Оптимальное расположение источников тепла в неоднородной среде, Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова, №1, 2013, С. 154–158.
2. Тухтасинов М., Хайиткулов Б.Х. Численное решение нестационарной задачи об оптимальном выборе источников тепла в стержне, Тез. докл. Междунар. конф. “Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики”, Фергана: ФГУ, 2020, Т. 1. С. 346–348.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. 7-е изд., М.: Изд-во МГУ, Наука, 2004, 798 с.

## ВЛИЯНИЕ СПОСОБА ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Узаков З.У.

*Каршинский филиал Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммеда аль-Хоразми, 180000 г. Карши, Бешкентское шоссе, 3-километр, Республика Узбекистан,  
e-mail: zair90uzakov@gmail.com*

**Постановка задачи.** Рассматривается вопрос о численном решении одномерной нелинейной задачи теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi_0 \cdot u^\delta \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad u(0, t) = u_0 \cdot u^n, \quad u(x, 0) = C, \quad (1)$$

$\chi_0 = const > 0$ ,  $\delta = const > 0$ ,  $u_0 = const > 0$ ,  $C = const$  по явной консервативной разностной схеме

$$(u_i^{j+1} - u_i^j) / \tau = \left[ k_{i+\frac{1}{2}}^j \cdot (u_{i+1}^j - u_i^j) / h - k_{j-\frac{1}{2}}^j \cdot (u_i^j - u_{i-1}^j) / h \right] / h \quad (2)$$

В практических расчетах распределения температуры по схеме (2) используются различные способы вычисления значений  $k_{i+\frac{1}{2}}^j$  и  $k_{j-\frac{1}{2}}^j$  коэффициента теплопроводности  $k(u) = \chi_0 \cdot u^\delta$ . В данной работе методом вычислительных экспериментов исследовано влияние способа вычисления значений  $k_{i+\frac{1}{2}}^j$  и  $k_{j-\frac{1}{2}}^j$  на численное решение задачи (1).

**Способы вычисления значений  $k_{i+\frac{1}{2}}^j$ .** В вычислительных экспериментах использованы следующие способы вычисления значений

$$k_{j-\frac{1}{2}}^j [1 - 3] : k_{j-\frac{1}{2}}^j = 0.5 [k(u_{i-1}^j) + k(u_i^j)], \quad (3)$$

$$k_{i-\frac{1}{2}}^j = k \left( \frac{u_{i-1}^j + u_i^j}{2} \right), \quad (4)$$

$$k_{i-\frac{1}{2}}^j = k(u_{i-1}^j) \quad (5)$$

$$k_{i-\frac{1}{2}}^j = k_{i-1}^j + h/2 \cdot \left( \frac{\partial k}{\partial u} \right)_{i-1}^j, \quad (6)$$

$$k_{i-\frac{1}{2}}^j = k_{i-1}^j + \frac{h}{2} \cdot \left( \frac{\partial k}{\partial u} \right)_{i-1}^j + \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2}{2} * \left( \frac{\partial^2 k}{\partial u^2} \right)_{i-1}^j \quad (7)$$

Формулы (5), (6) и (7) получены из разложения функции  $k_{j-\frac{1}{2}}^j(u)$  в ряд Тейлора в окрестности узловой точки  $(i-1, j)$  сохранением в ряде, соответственно, первого слагаемого, первых двух слагаемых и первых трех слагаемых.

**Результаты вычислительных экспериментов.** Численные решения, полученные при использовании первой группы формул (формулы (3) и (4)), отличаются между собой незначительно, и это отличие имеет место в зоне температурного

фронта. То же самое можно сказать относительно численных решений, полученных при использовании второй группы формул (формулы (5), (6) и (7)). Однако, численные решения, полученные с использованием формулы первой группы и формулы второй группы, отличаются между собой заметно, как количественно, так и качественно, и это отличие имеет место в

зоне температурного фронта.

## Литература

1. Самарский, А.А. Теория разностных схем: учебное пособие / А.А. Самарский. - Издание второе, исправленное. - Москва: "Наука". Главная редакция физико-математической литературы, 1983. - 616 с.
2. Калиткин, Н. Н. Численные методы: учебное пособие / Н.Н. Калиткин. - 2-ое издание, исправленное. - Санкт-Петербург: "БХВ - Петербург 2011". - 592 с.: ил.
3. Konovalov A.N. Problems of multiphase fluid filtration / A.N.Konovalov. - World Scientific Publisher Company, 1994. - p. 192 .

## МЕТОДЫ АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИНДУСТРИАЛЬНЫЕ РАДИОПОМЕХИ НА ОСНОВЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ АНТЕННЫ

<sup>1</sup>Хотамов А.Х., <sup>2</sup>Валетов Р.Ш.

<sup>1</sup> Самаркандский филиал Ташкентского университета информационной технологии,  
Узбекистан,

e-mail: 1214222@mail.ru

<sup>2</sup> Инженер 1-категории, Служба электромагнитной совместимости Самаркандской  
области, Узбекистан,

e-mail: kechkimet121@gmail.com

К индустриальным радиопомехам, создаваемым радиопередающим устройством, относятся все излучения от оборудования передатчика помимо антенны, за исключением излучений высокочастотных трактов. Кроме излучения ИРП, создаваемые передатчиком, распространяются по проводам управления, коммутации, заземления и в цепях питания. Технические средства и высокочастотные устройства, являющиеся возможными источниками радиопомех, подлежат обязательному оборудованию устройствами, обеспечивающими подавление создаваемых ими радиопомех, силами и средствами владельцев этих средств и устройств.

## Литература

1. Александр А., Владимир К., Анатолий Р. Радиомониторинг. Задачи, методы, средства // Горячая Линия - Телеком, 2010, с. 624
2. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы : учеб. для вузов по специальности "Радиотехника" // - Изд. 5-е, стер. - М. : Высш. школа, 2005 (ГУП Смол. обл. тип. им. В.И. Смирнова). - 462 с.
3. Бузов А.Л., Быховский М.А., Васехо Н.В., Волкова Ю.В. и др. Управление радиочастотным спектром и электромагнитная совместимость радиосистем. -М.: "Наука 2006. -372 с.
4. А. Гурина кЭлектромагнитные помехи и методы защиты от нихъ Благовещенск 2006-104 с.

## ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛО - ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДЕНИЕМ ПО ВРЕМЕНИ

<sup>1</sup>Эшматов Б., <sup>2</sup>Каюмова Г.

<sup>1,2</sup> Каршинский инженерно-экономический институт e-mail: eshmatovbahodir@mail.ru  
GAVHAR88@mail.ru,

В настоящей работе для уравнения смешанного параболо- гиперболического типа с дробной производной и с вырождением по времени изучается краевая задача. Применяя метод разделения переменных, доказаны теоремы о единственности и существования классического решения этой задачи.

**Ключевые слова:** уравнение смешанного типа; оператор дробного дифференцирования Капуто; вырожденное уравнение; функция типа Миттаг-Леффлера; метод Фурье .

**Введение и постановка задачи.**

К настоящему времени наиболее полные результаты получены по исследованию краевых задач для уравнений смешанного типа с производными целых порядков, в то же время краевые задачи для уравнений смешанного типа с дробными производными, а также с вырождением по времени или с вырождениями по обоим переменным мало изучены.

Достаточно полный обзор основных результатов, касающиеся к уравнениям смешанного типа целого порядка можно найти в работах[1]. Что касается уравнений смешанного типа с операторами дробного порядка отметить работы [2,3].

Пусть  $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, -p < t < q\}$  и

$$Lu = \begin{cases} {}_C D_{0t}^\alpha (t^\gamma u) - t^\gamma u_{xx}, & t > 0 \\ -{}_C D_{t0}^\beta u - u_{xx}, & t < 0, \end{cases}$$

где  $p, q > 0$ ,  $\alpha \in (0, 1]$ ,  $\beta \in (1, 2]$ ,  $\gamma \in [0, 1)$ ,  ${}_C D_{0t}^\alpha u$ ,  $D_{t0}^\beta u$  - операторы дробного дифференцирования в смысле Капуто.

В области  $\Omega$  для уравнения

$$Lu = f(x, y) \quad (1)$$

рассмотрим следующую краевую задачу.

**Задача V.** Найти функцию  $u(x, t)$ , удовлетворяющую условиям:

- 1)  $t^\gamma u \in C(\bar{\Omega}^+)$ ,  $u \in C(\bar{\Omega}^-)$ ,  ${}_C D_{0t}^\alpha (t^\gamma u) \in C(\Omega^+)$ ,  ${}_C D_{t0}^\beta u \in C(\Omega^-)$ ,  $u_{xx} \in C(\Omega^+ \cup \Omega^-)$ ;
- 2) удовлетворяет уравнению (1) в области  $\Omega^+ \cup \Omega^-$ ;
- 3) удовлетворяет краевым условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t \in [-p, 0) \cup (0, q], \quad (2)$$

$$u(x, -p) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (3)$$

- 4) удовлетворяет условиям склеивания

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (I_{0+}^\gamma u(x, t)) = u(x, -0), \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (4)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} ({}_C D_{0t}^\alpha (t^\gamma u)) = u_t(x, -0), \quad 0 < x < 1. \quad (5)$$

Здесь  $\Omega^+ = \Omega \cap (t > 0)$ ,  $\Omega^- = \Omega \cap (t < 0)$ ,  $I_{0+}^\gamma$  - дробный интегральный оператор Римана-Лиувилля.

Пусть  $\Delta_n(p, \beta) = E_{\beta,1}(-\lambda_n^2 p^\beta) + \lambda_n^2 p E_{\beta,2}(-\lambda_n^2 p^\beta)$ . Имеет место:

**Теорема 1.** Пусть  $p$  число такое, что

$$\Delta_n(p, \beta) \neq 0. \quad (6)$$

Тогда, если существует регулярное решение задачи V, то оно единственно.

Здесь  $E_{\alpha,\beta}(z)$  - функция типа Миттаг-Леффлера.

## Литература

1. Джурев Т.Ж. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-Ц составного типов. Ташкент:Фан, 1979. 240 с.
2. A.A.Kilbas, O.A.Repin. An analog of the Tricomi problem for a mixed type equation with a partial fractional derivative. Fractional Calculus and Applied Analysis, 13(1) (2010), pp.69-84.
3. Berdyshev A.S., Eshmatov B. E., Kadirkulov B.J. Boundary value problems for fourth-order mixed type equation with fractional derivative EJDE. - Texas State University. - v. 2016. e 36. - P. 1-11.