ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ИСЛОМ КАРИМОВ НОМИДАГИ
ТОШКЕНТ ДАВЛАТ ТЕХНИКА УНИВЕРСИТЕТИ

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ФАНЛАР АКАДЕМИЯСИ
В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

ГЛОБАЛЛАШУВ ДАВРИДА МАТЕМАТИКА ВА АМАЛИЙ МАТЕМАТИКАНИНГ ДОЛЗАРБ МАСАЛАЛАРИ

Республика илмий анжумани

МАТЕРИАЛЛАРИ ТЎПЛАМИ

1-2 июнь 2021 йил

I

Тошкент 2021

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ИСЛОМ КАРИМОВ НОМИДАГИ
ТОШКЕНТ ДАВЛАТ ТЕХНИКА УНИВЕРСИТЕТИ

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ФАНЛАР АКАДЕМИЯСИ
В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

ГЛОБАЛЛАШУВ ДАВРИДА МАТЕМАТИКА ВА АМАЛИЙ МАТЕМАТИКАНИНГ ДОЛЗАРБ МАСАЛАЛАРИ

Республика илмий анжумани

МАТЕРИАЛЛАРИ ТЎПЛАМИ

1-2 июнь 2021 йил

I

Тошкент 2021

Глобаллашув даврида математика ва амалий математиканинг долзарб масалалари.// Республика илмий анжуман материаллари тўплами.- Тошкент. ТДТУ, 2021.- 470 б.

“Глобаллашув даврида математика ва амалий математиканинг долзарб масалалари” мавзусидаги республика илмий анжумани материаллари қуйидаги йўналишларидан иборат:

- алгебра ва анализ;
- дифференциал тенгламалар ва динамик системалар;
- техник ва технологик жараёнларни математик моделлаштириш;
- ишлаб чиқариш-техника соҳаси таьлим йўналишларида математикани ўқитишнинг муаммолари.

Ушбу республика илмий анжумани Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2021 йил 2 мартдаги №78–Ф сонли Фармойишига асосан ташкил қилинган.

Илмий анжуман математика, амалий математика фанлари ва математика фанини ўқитиш методикаси соҳалари мутахассислари олий таълим муассасалари профессор-ўқитувчилари, докторантлар, магистрантлар учун мулжалланган.

Тўпламдаги материалларнинг мазмуни, илмийлиги ва далилларнинг асослилиги учун муаллифлар маъсулдир.

Таҳрир ҳайъати:
доц. Пирматов Ш.Т., доц. Юсупов А., доц. Абдукаримов А., доц. Садритдинова З.И., доц. Шамсиев Р.Н., Шамсиев Д.Н., доц. Арзиқулов Ғ.П., доц. Рахмонов Ў.С., доц. Мустапоқулов Х.Я.

Тақризчилар:
проф. Ш. Қосимов, проф. Исломов Б., проф. Ахмедов А.Б., проф. Ботиров Ғ.И., проф. Худайбергенов К.К., проф. Рахматуллаев М., доц. Пирматов Ш.Т., доц. Юсупов А.И., доц. Абдукаримов А., доц. Қаюмов Ш., доц. Файзиев Ю., доц. Буваев Қ.Т., доц. Қучқоров Э., доц. Аликулов Т.Н.

Чоп этишга масъуллар:
Эсанов Э.А., Қуромбоев Х.Н.



Ассалому алайкум ҳурматли илмий анжуман иштирокчилари!

Ислом Каримов номидаги Тошкент давлат техника университетида Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академияси В.И.Романовский номидаги Математика институти билан ҳамкорликда “Глобал-лашув даврида математика ва амалий математиканинг долзарб масалалари” мавзусида ўтказилаётган республика илмий амалий анжуманига хуш келибсизлар.

Бугунги анжумани-мизнинг асосий мақсади, глобаллашув даврида мамлакатимиз олий ўқув юртларида, илмий тадқиқот институт-ларида математика ва амалий математика фанлари бўйича, шунингдек математика тизимидаги фанларининг таълим сифатини ошириш борасида олиб борилаётган илмий изланишлар билан танишиш ва ўзаро тажриба алмашиш. Турли соҳалардаги масалаларни ечишда математик усуллар, амалий математиканиниг усуллари ва математик моделларининг қулланилишлари ва уларнинг илмий изланишлардаги, инновацион ғояларни амалга оширишдаги тадбиқлари билан танишиш. Республика миқёсида, олий ўқув юртларда хорижлик етакчи олимлар билан ҳамкорликда амалга оширилаётган илмий ишлар ва илмий изланишлар билан танишиш ва улардан амалиётда фойдаланиш. Ёшларни илмий тадқиқот ишарига кенг жалб қилиш. Бугунги ўтказилаётган Республика илмий анжуманида муҳтарам устоз домлаларимиз академиклар, кўплаб фан докторлари, профессорлар, илмий тадқиқот институти ходимлари, олий таълим муассасалари профессор-ўқитувчилари, докторантлар, тадқиқотчилар магистрантлар иштирок этмоқда. Ўзбекистон Республикаси Фанлари Академияси В.И.Романовский номидаги Математика институти ва унинг вилоятлардаги филиаллари, Ўзбекистон Миллий университети, Тошкент шахридаги барча олий таълим муассасалари, Қорақалпоғистон Автоном Республикаси ва вилоятлардаги барча ОТМ лардан алгебра ва анализ, дифференциал тенгламалар ва динамик системалар, математиканинг амалий тадбиқлари ва математика ўқитиш методикаси йўналишларида 600 дан ортиқ муаллифлардан 400 га яқин материаллар ташкилий қумитага келиб тушди. Дастурий қумитанинг тақризидан ўтган 300 ортиқ материаллар анжуман дастурига киритилди.

Барча анжуман иштирокчиларириларини кўп сонли университетимиз жамоаси номидан ва ўзимнинг номимдан қизғин табриклайман.

Мамлакатимизда таълимни, илм-фанни ривожлантириш, юқори малакали кадрлар тайёрлаш масалаларига давлатнинг устувор соҳаси сифатида жуда катта эътибор қаратилмоқда. Айниқса математика, биология,

геология, физика, кимё, каби фанларни ўқитилиши, бу соҳаларда илм-фанни ривожлантириш, юқори малакали кадрлар тайёрлаш бўйича устувор вазифалар белгилаб берилмоқда. Бу борада Ўзбекистон Республика Президентининг қатор Фармон ва Қарорлари қабул қилинди. Жумладан Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 9-июлдаги "Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб–қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисидаги ПҚ-4387 сонли, 2020 йил 7-майдаги "Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисидаги ПҚ-4708 сонли қарорларида математика таълимини, ҳамда математика ва унинг тадқиқотларига доир илм-фанни ривожлантириш асосий вазифалардан бири сифатида белгилаб берилган.

Ҳақиқатдан ҳам ҳозирги глобаллашув ахборотлар оқими кўпайган ва тезлашган даврда фан, техника ва технологияларни тез суратлар билан кескин ривожланишида математиканинг ҳиссаси каттадир.

Қайси бир соҳани олмайлик, бу соҳанинг ривожланишини шу соҳанинг хусусиятларини ўзида мужассамлаштирган математик аппаратлар, математик моделлар ва математик усулларсиз тассавур этиб бўлмайди.

Шунинг учун ҳам бугунги кунда "Глобаллашув даврида математика ва амалий математиканинг долзарб масалалари" мавзусида ўтказилаётган Республика илмий анжумани катта аҳамият касб этади деб ўйлайман.

Ҳозирги пандемия шароитида бўлса ҳам, фидойилик кўрсатиб, илмий анжуман ишида фаол иштирок этаётган устоз домлаларимизга чуқур миннатдрчилигимизни билдирамиз. Анжуман ишига муваффақиятлар тилайман.

Турабджанов Садритдин Махаматдинович
Ислом Каримов номидаги Тошкент давлат техника университети ректори, техника фанлари доктори, профессор

АНЖУМАН ТАШКИЛИЙ ҚЎМИТАСИ

Ташкилий қўмита раиси: ТДТУ ректори проф. Турабджанов С.М.
Ташкилий қўмита ҳам раиси: Математика институти директори, проф. Аюпов Ш.А.
Ташкилий қўмита раисининг ўринбосари:
ТДТУ илмий ишлар ва инновациялар бўйича проректор проф. Нематов Ш.Қ.
Математика институти директор ўринбосари, ф.-м.ф.д., Ботиров Ғ.И.
ТДТУ Машинасозлик факультети декани, проф. Сафаров Ж.Э.
Ташкилий қўмита илмий котиби:
ТДТУ Олий математика кафедраси мудири, доц. Пирматов Ш.Т.

Аъзолари:

Каримов К.А.	-	ТДТУ т.ф.д., профессор
Абдазимов А.Д.	-	ТДТУ т.ф.д., профессор
Сагатов А.В.	-	ТДТУ т.ф.д., профессор
Рисбаев А.С.	-	ТДТУ ф.-м.ф.д., профессор
Юсупов А.И.	-	ТДТУ ф.-м.ф.н., доцент
Абдукаримов А.	-	ТДТУ ф.-м.ф.н., доцент
Юлдашев А	-	ТДТУ ф.-м.ф.н., доцент
Қаюмов Ш	-	ТДТУ ф.-м.ф.н., доцент
Садритдинова З.И.	-	ТДТУ ф.-м.ф.н., доцент
Таджибоев Б.Р.	-	ТДТУ ф.-м.ф.н., доцент
Эсонов Э.Э.	-	ТДТУ ф.-м.ф.н., доцент
Шамсиев Р.Н.	-	ТДТУ ф.-м.ф.н., доцент
Расулов С.И.	-	ТДТУ ф.-м.ф.н., доцент
Шамсиев Д.Н.	-	ТДТУ ф.-м.ф.н., доцент
Арзиқулов Ғ.П.	-	ТДТУ PhD, доцент
Халматов Р.Р.	-	ТДТУ катта ўқитувчи

ДАСТУРИЙ ҚЎМИТА

Раис:

Аюпов Ш.А.	-	ЎзР ФА Математика институти директори, академик

Аъзолари:

Алимов Ш.А.	-	ЎзР ФА академиги, профессор
Садуллаев А.	-	ЎзР ФА академиги, профессор
Игамбердиев Х.З.	-	ЎзР ФА академиги, профессор
Ашуров Р.Р.	-	ЎзР ФА Математика институти, профессор
Розиқов У.А.	-	ЎзР ФА Математика институти директор ўринбосари, профессор
Жабборов Н.М.	-	Белоруссия-Ўзбекистон қўшма институти ижрочи директори, профессор
Тожиев М.Т.	-	ОЎМТВ ҳузуридаги Олий таълимни ривожлантириш тадқиқотлари ва илғор технологияларни татбиқ этиш маркази бўлим бошлиғи, профессор
Хаетов А.Р.	-	ЎзР ФА Математика институти, профессор
Жамилов У.У.	-	ЎзР ФА Математика институти, профессор
Орипов М.М.	-	Ўзбекистон Миллий университети, профессор
Холмухаммедов О.Р.	-	Ўзбекистон Миллий университети, профессор
Омиров Б.А.	-	Ўзбекистон Миллий университети, профессор
Ахмедов А.Б.	-	Ўзбекистон Миллий университети, профессор

Худойназаров Х.Х.	-	Самарқанда давлат университети, профессор
Хужаёров Б.Х.	-	Самарқанда давлат университети, профессор
Қосимов Ш.Г.	-	Ўзбекистон Миллий университети, профессор
Зикиров О.С.	-	Ўзбекистон Миллий университети, профессор
Худаяров Б.А.	-	ТИҚХММИ ўқув ишлари бўйича проректори, профессор
Тухтасинов М.	-	Ўзбекистон Миллий университети, профессор
Исломов Б.И.	-	Ўзбекистон Миллий университети, профессор
Кадиркулов Б.	-	Тошкент давлат шарқшунослик университети, профессор
Маматов М.Ш.	-	Ўзбекистон Миллий университети, профессор
Эшқобилов Ю.Х.	-	Қарши давлат университети, профессор
Худойбердиев А.Х.	-	Ўзбекистон Миллий университети, профессор
Зоидов А.А.	-	Тошкент архитектура қурилиш институти, профессор
Маматов А.З.	-	Тошкент тўқимачилик ва енгил саноат институти, профессор

КОТИБИЯТ

Мустапоқулов Х.Я.	Рахмонов Ў.С.	Бекчанов Ш.Э.
Холходжаев Б.А.	Мардонов А.П.	Қуромбоев Х.Н.
Куралов Б.А.	Эсанов Э.А.	Қурбонов А.А.

КОНФЕРЕНЦИЯ ТАШКИЛОТЧИЛАРИ

Ислом Каримов номидаги Тошкент давлат техника университети
В.И.Романовский номидаги Математика институти

МУНДАРИЖА

1-ШЎЪБА. АЛГЕБРА ВА АНАЛИЗ

Абдуллаев Ж.И., Эргашова Ш.Х. Инвариантные подпространства и собственные значения оператора Шредингера системы двух бозонов..... 16
Адашев Ж., Турсинова Ш. Двойная алгебра Лейбница 20
Арзикулов Г.П., Кучаров Р.Р. О спектральных свойствах одного трехчастичного модельного оператора..... 22
Баракаев Д. У. Об одном совершенном семействе множеств..... 25
Бегматов А.Х., Рахимов Н.Н. Алгебраик тенгсизликларни векторлар ёрдамида ўқитиш методлари..... 26
Болтаев Х.Х., Шарибаева Т.Р. Некоторые свойствы квадратичного графа для вещественных подфакторов..... 29
Гадаев С.А., Алладустова И.У. О числе и местоположение собственных значений одночастичного оператора Шредингера, соответствующего системе одной частицы во внешном поле..... 31
Гайбуллаев Р.К., Кунградбаева А.К. Описание рарешимых 4-лиевых алгебр..... 32
Дилмуродов Э.Б. Конечность дискретного спектра одной $2\times 2-$операторной матрицы..... 34
Жўрабоев С.С., Мўминов Қ.Қ. Симплектик группа таъсирига нисбатан инвариант дифференциал рационал функцияларнинг дифференциал жисмнини ташкил этувчиларини тиклаш..... 37
Жувонов К.Р. Селекционно точечно максимальные пространства и кардинальные числа..... 41
Жувонов К.Р., Атамуродова Д.Р. Суперрасширения $\lambda(X)$ и бесконечномерные многообразия..... 43
Жураев Т.Ф. Пространства $N(X)$полных сцепленных систем и его некоторые подпространства..... 45
Жураев Т.Ф., Мелиев Ш.О. Взаимно гомеоморфные подпространства вероятностных мер..... 48
Заитов А. А. Орбита группы топологических преобразований пространства вероятностных мер..... 51
Исакова Н. Т. Алгебра Ли дифференцирований нуль-филиформных йордановых алгебр..... 52
Ишметов А.Я., Курбанов Х.Х. О монаде, порожденной функтором IS..... 55
Курганов К. А., Охунова М.О. Динамика семейства кубических стохастических операторов вольтеровского типа..... 58
Курганов К.А., Каримова Ф.А.Эргодические свойства некоторых семейств стохастических операторов вольтеровского типа пятой степени..... 60

Курганов К.А., Адхамжонов М.Б. Динамика семейства стохастических операторов вольтеровского типа четвертой степени в двумерном симплексе..... 62
Кулжанов У.Н. О спектре двухчастичного оператора Шредингера с точечным потенциалом в одномерном случае..... 63
Курбонов Э., Файзуллаев Ш., Кувондиков С. Минимальные поверхности полуевклидова пространства R_3^1..... 65
Муртазакулов З., Эгамберганова Г. Разрешимые алгебры Лейбница с квази-филиформным нильрадикалом и дополняющим пространством максимальной размерности..... 68
Маматов А.И. Алгоритмы нахождения числа π..... 70
Маматов Т.Ю.Численное решение систем линейных уравнений методом сопряженных градиентов……... 71
Мамиров У.Э. Вероятностные метрики для l_0-значных вероятностей..... 74
Муминов К.К., Султонова Б.Р. Группы, все представления которых, вполне приводимы..... 76
Махкамов Х. К. Об основных состояниях для нс-модели с двумя состояниями..... 80
Назаров З.А., Исмоилова М.О. Дополнение к закону больших чисел, когда исключены крайние слагаемые..... 82
Очилов С., Пардаева Д.Н. Об одной специальной задаче динамической системы с запаздыванием..... 83
Расулов С.И. QD алгоритм для вычисления собственного значения интегрального оператора..... 85
Рахматуллаев М.М., Исаков Б.М. Об основных состояниях модели Поттса-Изинга на дереве Кэли..... 87
Рахматуллаев А.Х., Жураева Г.Р. О подпространствах вероятностных мер..... 90
Рахматуллаев А.Х.Тип расположенности подпространств..... 92
Рахматуллаев М., Расулова М., Мамадалиева М. Трансляционно-инвариантные основные состояния для модели Поттса с внешним полем на дерево Кели порядка три..... 94
Рахматуллаев М.М., Расулова М.А., Маликжонова Х. О трансляционно-инвариантных основных состояниях для одной модели с внешним полем..... 97
Рахмонов У.С., Абдуллаев Ж.Ш., Куромбоев Х.Н. Ортонормальная система для матричного шара второго типа..... 99
Сабирова Р. Асимптотика базисных функций обобщенного ряда тейлора для одного класса функций..... 101
Содикхужаева Ш.Х. Не сохранение веса при непрерывном отображении в топологических пространствах..... 102
Сапарбаева С.С. Разрешимые супералгебры Лейбница с нильрадикалом $F_{2,2}^2$..... 104

Тагаймуротов А.О. Примеры нахождения сопряженных функций.... 106
Усубжонов А.А., Кутлимуратова З.А. Локально позитивные и негативные группы..... 110
Хасанов А., Жалилов И. Некоторые интегральные представления типа Эйлера гипергеометрической функции от двух переменных четвертого порядка..... 112
Хакимов Р.М., Махаммадалиев М.Т. Об альтернативных мерах гиббса для нс-модели с двумя состояниями..... 115
Хакимов Р.М., Орифжонова Ф.Ш. О периодических мерах гиббса для одной плодородной нс модели на дереве кэли порядка четыре..... 118
Хакимов Р М., Умирзакова К. О. О крайности периодических мер гиббса для нс модели в случае жезл..... 122
Ҳакимов О.Н. Р-адик поттс модели учун даврий умумлашган Гиббс ўлчовларининг мавжудлиги..... 127
Худаяров С.С. О квадратическом стохастическом процессом типа $(12|a)$..... 129
Хурсанов Ш.Я., Бахриддинова Х.У. Некоторые свойства $(A,b)-$ аналитических функций..... 133
Яхшибоев М. У. Интегральные представления для усеченных дробных производных типа ψ –Маршо-Адамара..... 134
Abdullayev J. I., Ibragimov H.H. Pifagor va eyler g‘ishtlari..... 137
Abdusaidov S., G’afforov J. R_2^1 - yarim yevklid tekisligidagi ikkinchi tartibli chiziqlar..... 142
Axralov H.Z., Madatova F.A., Qurbonov O.I. Qo’zg’alishi bir o’lchamli bo’lgan diskret Shrödinger operatorining rezolventasi..... 145
Beshimov G., Khadjiev D., Gafurov I. Evident forms of elements of the orthogonal group of the two-dimensional bilinear-metric space with the form $x_1y_1 + 11x_2y_2$ over the field of rational numbers..... 147
Beshimov G., Khadjiev D., Sadullaeva M. On the orthogonal group of the two-dimensional bilinear-metric space with the form $x_1y_1 + 7x_2y_2$ over the field of rational numbers..... 148
Botirov G.I., Qayumov U.U. Ground states for potts model with a countable set of spin values and competing interactions on a cayley tree... 150
Jamilov U. U., Tursunov A. M. Regularity of a non-volterra quadratic operator on S^2..... 153
Jamilov U. U., Khudoyberdiev Kh. O. On trajectories of a non volterra quadratic stochastic operator on S^3..... 155
Jiyanbekov E.Y., Akmalova R.A. Erkin gruppaning indeksi 3 bo’lgan normal qism gruppasi..... 157
Ilyasova R.A. On subgroups of index four for a group representation of the cayley tree and invariance property..... 159
Khamrayev A.Yu., Nurmatova Sh. Z. Ikki parametrli kubik stoxastik operatorning qo’zg’almas nuqtalari va tipi..... 163

Khadjiev D., Beshimov G., Solieva M. Descriptions of elements of the orthogonal group of the two-dimensional bilinear-metric space with the form $x_1y_1 + 5x_2y_2$ over the field of rational numbers..... 165
Kenjayeva M. One-dimensional extension of one four-dimensional filiform Leibniz algebra..... 167
Mavlonov I.M. ℓ_p fazosi birlik sferasining aniqlovchi to'plami..... 168
Madatova F.A., Mo'minov Z.E. Discret laplasian operatorining green funksiyasi uchun asimptotika..... 170
Nazarov Z.A., Ismoilova M. O. Maxsus ko'rinishdagi yig'indi uchun limit teorema..... 172
Nazirov M. A., Abdullayev N. SH., Ergashev B. Z. Gibbs measures for an ising model with continuous spin values..... 174
Radjabov T.A., Egamberdiyev T. Matrisali o'yinni chiziqli dasturlash yordamida yechishning dasturiy ta'minotini ishlab chiqish..... 176
Rajabov Sh. Sh., Shixova I.O. Matritsa argumentli beta va gamma funksiyalar orasidagi bog'lanish..... 179
Rahimov A.A. Xurramov A.X. Operator algebralarining proektorlari haqida..... 181
Rakhmatullaev M.M., Karshiboev O.Sh. Ikkinchi tartibli keli daraxtida aniqlangan sos modeli uchun kuchsiz davriy gibbs o'lchovlari..... 183
Rizaqulov Sh.E. C_0 Fazoda qiymat qabul qiluvchi manfiy assotsirlangan tasodifiy miqdorlar uchun kuchaytirilgan katta sonlar qonuni..... 186
Rozikov U.A., Abdurakhimova Sh.B. On limit points of trajectories of a quadratic stochastic operator..... 187
Rozikov U.A., Aliev E.T. p-adic dynamical systems of $(1,2)$-rational functions with two fixed points..... 189
Qurbonov O.I., Axralov H. Z., Rajabov T. Qo'zg'alishi bir o'lchamli dikret laplasianning xos qiymati..... 193
Solijanova G.O., Fayzullayeva Sh.A. Extensions of pro-nilpotent lie algebra to residually solvable lie algebras with less than maximal dimension..... 195
Sulaymonov Z., Qarshiboyev N. Ba'zi almashtirishlarning algebraik ifodalari va ularning masalalar echishga tadbiqi..... 197
To'lqinboyev I.M. Shvarts-kristoffel formulasi orqali chegarasi uchburchak bo'lgan sohaning analitik sig'imi..... 199
Xamroyev A.Yu., Safarov A.A. Ikki o'lchovli simpleksda aniqlangan kvazi novolterra kubik stoxastik operatorining dinamikasi..... 201
Xushvaqtov N.X. Berilgan yadro uchun fridrixs modeli..... 204
Zokirjonov M.O. Tanlanma speysinglar orqali tuzilgan bir statistikalar sinfi uchun markaziy limit teoremaga doir ba'zi masalalar haqida..... 207

2-ШЎЪБА. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ВА ДИНАМИК СИСТЕМАЛАР

Абдуллаев О. Х. Нелокальная задача для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с двумя линиями изменения типа……. 211
Аликулов Т.Н., Хусанов Э.А. Условие позитивности возмущение полигармонического оператора с сингулярным коэффициентом……. 213
Апаков Ю. П., Хамитов А.А. О разрешимости решения одной краевой задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве…….. 215
Апаков Ю.П., Иброхимов Х.К. Об одном задаче для параболо-гиперболического уравнения в трехмерном пространстве……... 220
Апаков Ю.П., Мамажонов С.М. Об одной краевой задачи для уравнения четвертого порядка параболо-гиперболического типа в пятиугольной области…….. 222
Ахмедов М. И. Граф в виде треугольника с прикрепленными исходящися ребрами на каждой вершине……..…..…. 227
Ахмедов О.С., Абдуваҳобов Т.А. Ёпиқ траекторияга эга квадратик динамик системалар..... 229
Ашуров Р. Р., Файзиев Ю. Э. Обратная задача по определению порядка дробной производной в волновом уравнении……. 231
Ашуров Р.Р., Зуннунов Р.Т. Аналог задачи трикоми для уравнения смешанного типа с дробной производной.обратная задача……..…… 236
Бабаев М.М. О разрешимости смешанной задачи для уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом по времени и псевдодифференциальными операторами с нелокальными краевыми условиями в классах Соболева……..…..… 242
Балтаева У.И., Ваисова Н.З., Сейтмурадова Г.И. Задача коши для параболо-гиперболического уравнения с нагруженными слагаемыми……... 248
Буранов Ж.И., Хусанов Д.Х., Бердияров А.Ш. Управление вращательным движением рабочего органа манипулятор…..... 249
Буранов Ж. И., Хусаинов Д. Я., Хусанов Д. Х., Шатырко А. В. Оптимальная стабилизация в разностных системах……..….. 253
Давлатов Ш.О. Ўзгармас коэффициентли бир ўлчовли симметрик t-гиперболик системаларни чекли элементлар усули билан нотекис тўрда ечиш..... 258
Джамалов С.З., Ашуров Р.Р., Туракулов Х.Ш. Об одной нелокальной краевой задаче для трёхмерного уравнения Трикоми в неограниченной призматической области……..…. 263
Жайнакова У.Т., Темуров С.Й. О внутренних оценках А.Ф. Филиппова…… 265
Жураева Ф.Б. Краевая задача с условием бицадзе-самарского для

параболо-гиперболического уравнения второго порядка со спектральными параметрами……..……. 268
Жураев А. Х. О решение третья краевая задача для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками…….…. 270
Ибрагимов Б. Н. Чекли стерженда иссиқлик оқимини бошқариш..... 272
Исканаджиев И. Аппроксимационные схемы для интеграла обобщенного первого метода преследования……..… 274
Исломов Б.И., Ахмадов И.А. Краевая задача для уравнения смешанного типа дробного порядка с нехарактеристической линией изменения типа……..… 277
Кадиркулов Б.Ж., Донаев Н.Ю. Об одной обратной задаче для уравнения смешанного типа с оператором капуто..... 279
Каримов Ж.Ж. Инвариантные меры на символическом пространстве, порождённые отображением окружности……..… 283
Каримов Н.М. Метод решения задачи распределения вспомогательных ресурсов сил в конфликтных ситуациях…….…. 285
Касимов Ш.Г., Жовлиева Г.А. Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высокого порядка в двухмерном случае……... 290
Касимов Ш.Г., Кощанов А.П. Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высокого порядка в многомерном случае, связанные с уравнениями колебаний балки с учётом её вращательного движения при изгибе……... 298
Каххаров А.Э., Буранов Ж.И., Хусанов Д.Х. Об устойчивости по части переменных решений дифференциальных уравнений различного типа…….. 300
Коршунова Н.А., Собитова К.У. Частные решения для участков максимальной тяги в случае центрального ньютоновского поля.……. 303
Куйлиев С.Б., Имомназаров Х.Х., Урев М.В., Искандаров И.К. Об одной краевой задаче для одной переопределенной системы в полуплоскости……..…… 306
Курбанов О. Т, Холбоев Б. М. О единственности решение одной краевой задачи для уравнения нечетного порядка с кратными характеристиками……..……... 311
Мамадалиев Н. Метод разрешающих функций для задачи преследования с интегральными ограничениями..... 312
Мамадалиев Н., Назаров Ф.У., Носирхонов А.И. Об одной задаче преследования с интегральными ограничениями…….. 316
Мамадалиев Н., Муйдинов Х.Н., Акрамжонов А.Д. Задача преследования при интегральных ограничениях на управления игроков…….. 319
Мамадалиев Н., Каримова М.Ё., Шадиев Д.Т. Квазилинейная дифференциальная игра преследования…… 321

Мамажонов М., Шерматова Х.М., Мирзабоев М.Р. Об одной краевой задачи для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа вида $\left(a\frac{\partial}{\partial x}+c\right)(Lu)=0$ в пятиугольной области с тремя линиями изменения типа, когда все гиперболические части области являются характеристическими треугольниками……... 324
Маматов А. У., Хайдаров Т. А. Влияние источника тепла на плотность окружающей среды в нелинейных процессах тепловыделения в многомерных областях…… 328
Маматов М.Ш., Эсонов Э.Э. Дискретные игры преследования описиваемая уравнениями второго порядка…….. 333
Маматов М.Ш., Зуннунов А.О. Компакт тўпламдаги кўп иштирокчили дифференциал ўйинларда қочиш масаласи..... 338

Муминов Ф.М., Муминов С.Ф. Об одной нелокальной краевой задаче для полулинейного уровнения смешанного типа……. 343
Мўминов Ф.М., Мўминов С.Ф. Нелокольная раевая задача для линейных уровнений смешанного типа…… 346
Нарманов О.А., Насридинов С.С., Рахимова Ф.С. О группе симметрий двумерного уравнения теплопроводности……. 350
Орипов Т.С., Донаев Н. Представление решение одного класса системы уравнений второго порядка с сингулярными коэффициентами в пространстве……..… 352
Очилов С., Косимова М.А. К задаче скорейшего прохождения области……...…… 355
Пирматов Ш.Т. О необходимых условиях суммирумости спектральных разложений по собственным функциям b-полигармонического оператора……..……... 356
Пулатова М. И. Некоторые многомерные дифференциальные уравнения и их решения……..……..… 354
Расулов.М.С, Норов.А.К. Задача с двумя свободными границами для квазилинейного параболического уравнения…… 359
Расулов М.С., Сафоев Ш.Ж. Задача со свободной границей для систем параболических уравнений типа реакция – диффузия……. 362
Рахимов И. Д. Интегрирование нагруженного нелинейное уравнение шредингера……..... 364
Рузиев М.Х. Нелокальная краевая задача для уравнения смешанного типа…… 365
Сраждинов И.Ф. Смешанная задача для одной системы составного типа……..….. 367
Тураев К.Н. Нелокальная задача со свободной границей для нагруженного квалинейного уравнения диффузии..... 372
Тураев Р.Н. Задача стефана для квазилинейного уравнения диффузии с нелокальным условием..... 374

Турдиев Ҳ.Ҳ. Хотирали биринчи тартибли интегро-дифференциал гиперболик тенгламалар системаси учун тўғри ва тескари масала…….... 376
Тухтасинов М., Мустапокулов Х.Я. О разрешимости конфликта при импульсном воздействии…….…… 378
Усмонов Б. Краевая задача для уравнения третьего порядка эллиптико-гиперболического типа в прямоугольной области……... 383
Уразбоев Г., Балтаева И., Рахимов И. Обобщенный (g '/ g) метод разложения для нагруженного уравнения кортевега-де фриза…… 384
Фаязов К.С., Хажиев И.О., Эгамберганова О. Условная корректность краевой задачи для уравнения смешанного типа высокого порядка……. 386
Фаязова З.К. Граничное управление для псевдо параболического уравнения с смешанными данными на границе отрезка…….. 388
Қўчқоров Э.И., Ҳушвақтова Э.О. Параболик фильтрация тенгламаламалари учун чегаравий масала ҳақида..... 390
Хайиткулов Б.Х. Консервативные схемы по оптимальному выбору местоположения источников тепла в стержне……..…. 394
ХалмухамедовА.Р., ЭгамбердиевМ.Р. Шрёдингер операторининг узлуксиз Спектри ҳақида..... 397
Хасанов М.М., Балтаева И. И., Хайитбоев И.И. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза в классе периодических функций……..…… 399
Хоитметов У.А., Юлдашев С. Интегрирование нагруженного уравнения мкдф в классе быстроубывающих функций……... 401
Хоитметов У.А., Мусаева Ф. Интегрирование нагруженного общего уравнения Кортевега-де фриза в классе быстроубывающих комплекснозначных функций…… 404
Ҳушвақтова Э.О. Лаплас алмаштириши ёрдамида баъзи параболик фильтрация тенгламаларини ечиш..... 408
Холбеков Ж.А. Об одной нелокальной краевой задачи для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа……..….. 411
Шамсиев Р.Н., Куралов Б.А. Исследование сетей связи с отказами в реальном времени……. 413
Эркинова Д. А., Имомназаров Б. Х., Имомназаров Х.Х. Задача коши для одномерной системы уравнений типа хопфа……..…….. 417
Эшниязов А.И., Менгнаров Х.Э. Динамические системы генерируемые квадратичными стохастическими операторов вольтеровского типа и функции Ляпунова……..…. 421
Aralova K.A., Jamilov U.U. The dynamics of superposition of non-volterra quadratic stochastic operators on S^2 ……. 424
Buvayev Q.T., To‘xtaeva N.M. Poligarmonik operatoriga mos spektral yoyilmalarning deyarli yaqinlashishi..... 426

Ismoilov X.F., Kasimova F., Abdukarimov N. Deformatsiyalanuvchi muhitdagi elastik konussimon qobiqning buralma tebranishlari..... 428
Kurbanov A. A. Graf ustida ko'p quvuvchilar ishtirokida differensial o'yin..... 431
Mamadiyeva G. B., Davlatov J. E. Keynsning dinamik modeli..... 436
Muminov M.I., Radjabov T.A. Bo'lakli doimiy argumentli differensial tenglamaning davriy yechimlari..... 437
Homidov F.F. Koshi masalasi yechimini regulyarlashtirish……. 441
Radjabov T.A., Egamberdiyev T.X. Matrisali o'yinni chiziqli dasturlash yordamida yechishning dasturiy ta'minotini ishlab chiqish..... 444
Safarov U. A. Bounded geometry for *p*-homeomorphisms on the circle with critical point…… 447
Samatov B. T., Xorilov M. A., Akbarov A.X. Boshqaruvlari gronuoll chegaralanishga ega differensial o'yinda qochish masalasi…… 450
Samatov B. T., Soyibboyev O'. B., Jo'rayev B. I. Boshqaruvlari aralash chegaralanishli sodda differensial o'yinda tutish masalasi…… 452
Sattarov I. A., Abdukaxorova Z. T. Dynamical system of the p-adic (0,2)-rational functions with three fixed points……..…….. 454
Seytov Sh. J., Eshniyozov A.I., Khidirova Sh.B. Chaos by three dimensional quadratic mappings…….……. 456
Subhonova Z.A., Rahmonov A.A. Diffuziya-to'lqin tenglamasi uchun koeffisiyentini aniqlash masalasi……. 460
Tursunaliyev T. G'., Madaminjonov M. D., Shodmonaliyeva G.H. Koordinatalari bo'yicha so'nuvchi geometrik chegaralanishli boshqariladigan obyektning yetishish sohasi masalasi…….. 463
Turg'unboyeva M. A., Bozarova D. S., Zohidova Z.S. Obyekt boshqaruvining koordinatalari o'zaro bog'liqsiz bo'lganda optimal o'tish masalasi…….. 465
Xolboyev N. A., Buvaev Q. T. Elliptik differensial operatoriga mos spektral yoyilmalarning umumlashgan lokalizasiyasi……..……. 470

1-ШЎЪБА. АЛГЕБРА ВА АНАЛИЗ

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА СИСТЕМЫ ДВУХ БОЗОНОВ

[1]Абдуллаев Ж.И., [2]Эргашова Ш.Х.
[1]Самаркандский государственный университет
[2]Навоийский государственный педагогический институт
jabdullaev@mail.ru., sh.ergashova@mail.ru

Введение. Природа появления связанных состояний двухчастичных кластерных операторов при малых значениях параметра впервые подробно исследовалась Минлосом и Маматовым [1], а потом в более общей ситуации Минлосом и Могильнером [2]. В статье [3] Хауленд показал, что теорема Реллиха о возмущении собственных значений не распространяется на теорию резонансов. Исследование связанных состояний гамильтониана H системы двух частиц на $d-$ мерной решетке $\mathbb{Z}^d$ сводится к изучению собственных значений семейства операторов Шредингера $H(\boldsymbol{k})$, $\boldsymbol{k} \in \mathbb{T}^{\boldsymbol{d}} = (-\text{р}, \text{р}]^{\boldsymbol{d}}$. При этом собственные функции оператора $H(\boldsymbol{k})$ трактуются, как связанные состояния гамильтониана H, а собственные значения, как энергии связанного состояния. Связанные состояния гамильтониана H системы двух фермионов на одномерной решетке изучены в [4], а система двух бозонов на двумерной решетке исследовались в работе [5].

В этой работе рассматриваются связанные состояния гамильтониана $\widehat{H}$ системы двух бозонов на трехмерной решетке $\mathbb{Z}^3$ со специальным потенциалом $\hat{v}$ т.е. изучается дискретный спектр семейства операторов Шредингера $H(\boldsymbol{k})$, $\boldsymbol{k} = (k_1,\ k_2,\ k_3) \in \mathbb{T}^3$, соответствующий гамильтониану $\widehat{H}$ в инвариантном подпространстве L_1 и L_2.

Описание двухчастичного гамильтониана. Свободному гамильтониану $\widehat{H}_0$ системы двух бозонов на трехмерной решетке $\mathbb{Z}^3$ обычно соответствует следующий ограниченный, самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\ell_2^{sym}(\mathbb{Z}^3 \text{Ч}\ \mathbb{Z}^3) := \{f \in \ell_2(\mathbb{Z}^3 \text{Ч}\ \mathbb{Z}^3)\colon\ f(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})\}$ по формуле

$$\widehat{H}_0 = -\frac{1}{2m}\text{Д}_1 - \frac{1}{2m}\text{Д}_2.$$

Здесь m означает массу бозона, которую в дальнейшем мы считаем равным единице, $\text{Д}_1 = \text{Д} \otimes I$ и $\text{Д}_2 = I \otimes \text{Д}$, где $I -$ единичный оператор, решетчатый Лапласиан Δ есть разностный оператор, описывающий перенос частицы с узла на соседний узел, т.е.

$$(Д\hat{\mathfrak{w}})(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{3}\big[\hat{\mathfrak{w}}\big(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_j\big) + \hat{\mathfrak{w}}\big(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_j\big) - 2\hat{\mathfrak{w}}(\boldsymbol{x})\big], \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^3, \quad \hat{\mathfrak{w}}\in\ell_2(\mathbb{Z}^3),$$

где $\boldsymbol{e}_1 = (1,\ 0,\ 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,\ 1,\ 0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0,\ 0,\ 1)$ единичные орты в $\mathbb{Z}^3$. Полный гамильтониан $\widehat{H}$ действует в гильбертовом пространстве $\ell_2^{sym}(\mathbb{Z}^3\text{Ч}\,\mathbb{Z}^3)$ и состоит из суммы свободного гамильтониана $\widehat{H}_0$ и потенциала взаимодействия $\hat{V}_2$ двух частиц (см. [6], [7], [8]) т.е.

$$\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \hat{V}_2,$$

где

$$\big(\hat{V}_2\hat{\mathfrak{w}}\big)(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \hat{v}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\hat{\mathfrak{w}}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}), \quad \hat{\mathfrak{w}}\in\ell_2^{sym}(\mathbb{Z}^3\text{Ч}\,\mathbb{Z}^3).$$

Всюду в дальнейшем относительно функции $\hat{v}$ предполагается, что

$$\hat{v}(\boldsymbol{n}) = \hat{v}(n_1,n_2,n_3) = \begin{cases}\bar{v}(|\boldsymbol{n}|), & |n_1|+|n_2|\le 1,\\ 0, & |n_1|+|n_2|\ge 2,\end{cases} \tag{1}$$

где $|\boldsymbol{n}| = |n_1| + |n_2| + |n_3|$. Носитель потенциала $\hat{v}$ совпадает со множеством D:

$$D = \{\boldsymbol{n} = (n_1,n_2,n_3)\in\mathbb{Z}^3 :\ n_3\in\mathbb{Z}, |n_1|+|n_2|\le 1\}.$$

Здесь $\bar{v}\colon\mathbb{Z}_+\to\mathbb{R}$ убывающая функция на $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N}\cup\{0\}$ и $\bar{v}\in\ell_2(\mathbb{Z}_+)$.

При условии (1) гамильтониан $\widehat{H}$ является ограниченным и самосопряженным оператором в пространстве $\ell_2^{sym}(\mathbb{Z}^3\text{Ч}\,\mathbb{Z}^3)$.

Переход в импульсное представление осуществляется с помощью преобразования Фурье

$$F\colon\ell_2^{sym}(\mathbb{Z}^3\text{Ч}\,\mathbb{Z}^3)\to L_2^{sym}(\mathbb{T}^3\text{Ч}\,\mathbb{T}^3).$$

Гамильтониан $H = H_0 + V = F\widehat{H}F^{-1}$ в импульсном представлении коммутирует с группой унитарных операторов U_s, $s\in\mathbb{Z}^3$:

$$(U_s f)(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) = \exp(-i(\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2))f(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2), \quad f\in L_2^{sym}(\mathbb{T}^3\text{Ч}\,\mathbb{T}^3).$$

Отсюда следует, что существуют разложения пространства $L_2^{sym}(\mathbb{T}^3\text{Ч}\,\mathbb{T}^3)$ и операторов U_s, H в прямые интегралы (см. [9])

$$L_2^{sym}(\mathbb{T}^3\text{Ч}\,\mathbb{T}^3) = \int_{\mathbb{T}^3}\oplus L_2(F_{\boldsymbol{k}})d\boldsymbol{k}, \quad U_s = \int_{\mathbb{T}^3}\oplus U_s(\boldsymbol{k})d\boldsymbol{k}, \quad H = \int_{\mathbb{T}^3}\oplus \widetilde{H}(\boldsymbol{k})d\boldsymbol{k}$$

Здесь

$$F_{\boldsymbol{k}} = \{(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)\in\mathbb{T}^3\text{Ч}\mathbb{T}^3\colon \boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{k}\},$$

$U_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{k})-$ оператор умножения на функцию $\exp(-i(\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}))$ в пространстве $L_2^{sym}(F_{\boldsymbol{k}})$. Слой $\widetilde{H}(\boldsymbol{k})$ оператора H также действует в $L_2^{sym}(F_{\boldsymbol{k}})$ и унитарно эквивалентен оператору $H(\boldsymbol{k}) := H_0(\boldsymbol{k}) + V$, который называемое оператором Шредингера, и действует в гильбертовом пространстве $L_2^e(\mathbb{T}^3) := \{f\in L_2(\mathbb{T}^3)\colon f(-\boldsymbol{q}) = f(\boldsymbol{q})\}$ по формуле

$$(H(\boldsymbol{k})f)(\boldsymbol{q}) = \mathrm{e}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{q})f(\boldsymbol{q}) + (2\mathrm{p})^{-\frac{3}{2}}\int_{\mathbb{T}^3} v(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{s})f(\boldsymbol{s})d\boldsymbol{s}.$$

Невозмущенный оператор $H_0(\boldsymbol{k})$ есть оператор умножения на функцию

$$\mathrm{e}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{q}) = \mathrm{e}\left(\frac{\boldsymbol{k}}{2}+\boldsymbol{q}\right)+\mathrm{e}\left(\frac{\boldsymbol{k}}{2}-\boldsymbol{q}\right) =$$

$$= 6 - 2\cos\frac{k_1}{2}\cos q_1 - 2\cos\frac{k_2}{2}\cos q_2 - 2\cos\frac{k_3}{2}\cos q_3$$

Оператор возмущения V – интегральный оператор в $L_2^e(\mathbb{T}^3)$ с ядром

$$(2\mathrm{p})^{-\frac{3}{2}}v(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{s}) = (2\mathrm{p})^{-\frac{3}{2}}(F\hat{v})(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{s})$$

и принадлежит классу Гильберта-Шмидта $\sum_2$.

Собственные значения оператора $H(\boldsymbol{k})$. Заметим, что спектры операторов $H_0(\mathbf{k})$ и V известны. Оператор $H_0(\boldsymbol{k})$ не имеет собственных значений, его спектр чисто непрерывный и состоит из области значений функции $\mathrm{e}_{\boldsymbol{k}}$, т.е.

$$\mathrm{y}\big(H_0(\boldsymbol{k})\big) = [m(\boldsymbol{k}), M(\boldsymbol{k})], \text{где } m(\boldsymbol{k}) = \min_{\boldsymbol{q}\in T3}\mathrm{e}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{q}), M(\boldsymbol{k}) = \max_{\boldsymbol{q}\in T3}\mathrm{e}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{q}).$$

Спектр оператора V чисто дискретный и совпадает со множеством $\{0, \bar{v}(n), n \in \mathbb{Z}_+\}$. При условии (1), V является оператором Гильберта-Шмидта, в частности, компактным оператором. Поэтому в силу теоремы Вейля, существенный спектр оператора $H(\boldsymbol{k})$ совпадает со спектром оператора $H_0(\boldsymbol{k})$, т.е.

$$\mathrm{y}_{ess}(H(\boldsymbol{k})) = [m(\boldsymbol{k}), M(\boldsymbol{k})].$$

Если $\boldsymbol{k} = (\mathrm{p},\mathrm{p},\mathrm{p})$, тогда спектр оператора $H(\mathrm{p},\mathrm{p},\mathrm{p}) = 6I - V$ состоит из собственных значений вида $6 + \bar{v}(n), n \in \mathbb{N}$ и существенного спектра $\{6\}$.

Инвариантные подпространства оператора $H(\boldsymbol{k})$. Здесь мы изучаем инвариантные подпространства относительно оператора $H(\boldsymbol{k})$. Гильбертово пространство $L_2^e(\mathbb{T}^3)$, состоящее из четных функций на $\mathbb{T}^3$, можно представить в виде прямой суммы

$$L_2^e(\mathbb{T}^3) = L_1^+ \oplus L_2^+ \oplus L_3^+ \oplus L_{123}^+.$$

Здесь

$L_1^+ := L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^-(\mathbb{T})$, $L_2^+ = L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^-(\mathbb{T})$

$L_3^+ = L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T})$, $L_{123}^+ = L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T})$,

где $L_2^+(\mathbb{T}) = \{f \in L_2(\mathbb{T}): f(-q) = f(q)\}$ и $L_2^-(\mathbb{T}) = \{f \in L_2(\mathbb{T}): f(-q) = -f(q)\}$ состоит из четных и нечетных функций на отрезке $\mathbb{T} = [-\mathrm{p}, \mathrm{p}]$.

Лемма 5.1 *Пусть потенциал $\hat{v}$ имеет вид (1). Тогда подпространства L_1^+ L_2^+, L_3^+ и L_{123}^+ являются инвариантными относительно оператора $H(\boldsymbol{k})$.*

Обозначим через $H_6^+(\boldsymbol{k})$ сужение оператора $H(\boldsymbol{k})$ в инвариантном подпространстве L_6^+, $6 = 1,2,3$. Операторы $H_1^+(\boldsymbol{k}) = H(\boldsymbol{k})|_{L_1^+}$ и $H_2^+(\boldsymbol{k}) = H(\boldsymbol{k})|_{L_2^+}$ является унитарными эквивалентами, мы изучаем собственные значения и собственные функции оператора $H_1^+(\boldsymbol{k}) = H(\boldsymbol{k})|_{L_1^+}$. Сужение

$H^+_{0(1)}(\boldsymbol{k}) := H_0(\boldsymbol{k})$ невозмущенного оператора $H_0(\boldsymbol{k})$ есть оператор умножения на функцию $\mathrm{e}_{\boldsymbol{k}}$. Сужение $V_1^+ = V\,|_{L_1^+}$ оператора V действует на элемент $f \in L_1^+$ по формуле

$$(V_1^+ f)(\boldsymbol{p}) = \frac{4}{(2\mathrm{p})^3}\int\limits_{\mathbb{T}^3}\Bigg\{\cos p_1 \cos q_1 \sum_{n=1}^{\infty}\bar{v}(n+1)\sin np_3 \sin nq_3$$

$$+ 2\sin p_2 \sin q_2 \cos p_1 \cos q_1 \sum_{n=1}^{\infty}\bar{v}(n+2)\sin np_3 \sin nq_3\Bigg\} f(\boldsymbol{q})d\boldsymbol{q}.$$

Система функций $\text{ш}_n^-(q) = \frac{\sin nq}{\sqrt{\mathrm{p}}}$, $n \in \mathbb{N}$ образует ортонормированный базис в $L_2^-(\mathbb{T})$. Обозначим через $L^+(n), n \in \mathbb{Z}_+$ одномерное подпространство, натянутое на вектор ш_n^-. При этом, пространство $L_2^-(\mathbb{T})$ разлагается в прямую сумму

$$L_2^-(\mathbb{T}) = \sum_{n=1}^{\infty}\oplus L^-(n). \qquad (2)$$

Разложение (2) порождает разложение

$$L_1^+ = \sum_{n=1}^{\infty}\oplus\{L_2^{+-}(\mathbb{T}^2)\otimes L^-(n)\} = \sum_{n=1}^{\infty}\oplus \mathfrak{R}_{1n}^+,$$

где $\mathfrak{R}_{1n}^+ = L_2^{+-}(\mathbb{T}^2)\otimes L^-(n)$, $L_2^{+-}(\mathbb{T}^2) = L_2^+(\mathbb{T})\otimes L_2^-(\mathbb{T})$.

Лемма 2. *Пусть потенциал $\hat{v}$ имеет вид (1), то для любого $n \in \mathbb{N}$ подпрост-ранство $\mathfrak{R}_1^+(n)$ является инвариантным относительно оператора $H_1^+(k_1, k_2, \mathrm{p})$*

Несложные вычисления показывают, что сужение

$H_{1n}^+(k_1, k_2, \mathrm{p}) = V|_{\mathfrak{R}_1^+(n)}$ оператора $H_1^+(k_1, k_2, \mathrm{p})$ можно представить в виде тензорного произведения:

$$H_{1n}^+(k_1, k_2, \mathrm{p}) = [2I + H_0(k_1, k_2) + V_{2n}]\otimes I. \qquad (3)$$

Здесь I – единичный оператор, а $H_1^{(n)}(\boldsymbol{k}) := 2I + H_0(k_1, k_2) + V_{1n}$, $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2)$ есть двумерный двухчастичный оператор, действующий в $L_2^{+-}(\mathbb{T}^2)$ по формуле:

$$(H_1^{(n)}(\boldsymbol{k})f)(\boldsymbol{p}) = \big(2 + \mathrm{e}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{p})\big)f(\boldsymbol{p}) +$$

$$+\frac{1}{2\mathrm{p}^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2}[\bar{v}(n+1) + 2\bar{v}(n+2)\cos p_1 \cos q_1]\sin p_2 \sin q_2 f(\boldsymbol{q})d\boldsymbol{q}.$$

Изучение собственных значений оператора $H_1^+(k_1, k_2, \mathrm{p})$ в силу представления (3) сводится к изучению собственных значений оператора $H_1^{(n)}(\boldsymbol{k})$, т.е. трехмерная задача сводится к двумерной.

Теорема. а) Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует д_n такое, что при всех $\text{в} \in (0, \text{д}_n)$ оператор $H_1^{(n)}(\mathrm{p} - 2\text{в}, \mathrm{p} - 2\text{в})$ имеет два собственные значения,

лежащих справа от существенного спектра и имеет место асимптотические формулы:

$$z_{\bar{v}(n+1)}(\text{в}) = 6 + \bar{v}(n+1) + \frac{3\bar{v}(n+1) - \bar{v}(n+2)}{\bar{v}(n+1)\big(\bar{v}(n+1) - \bar{v}(n+2)\big)}\text{в}^2 + O(\text{в}^4),$$

$$z_{\bar{v}(n+2)}(\text{в}) = 6 + \bar{v}(n+2) + \frac{2(\bar{v}(n+1) - 2\bar{v}(n+2))}{\bar{v}(n+2)\big(\bar{v}(n+1) - \bar{v}(n+2)\big)}\text{в}^2 + O(\text{в}^4).$$

b) Оператор $\text{H}_1^{(\text{n})}(\text{p} - 2\text{в}, \text{p} - 2\text{в})$ не имеет вложенных собственных значений в интервале $(\text{m}(\text{в}), \text{M}(\text{в}))$.

Литература

1.Маматов Ш.С., Минлос Р.А. Связанные состояния двухчастичного кластерного оператора. ТМФ. Т.79, 2, 163-179, (1989).

2. Minlos R.A., Mogilner A.I. Some problems conserning spectra of lattice models.In Schodinger operators: Standard and Nonstandard (eds. P.Exner, P.Seba). World. Scientific. Singapoor. 1989.

3. Howland J.S. Puiseux Series for Resonances at an Embedded Eigenvalue. Pacific J.Math. V.55, 157-176, (1974).

4. Абдуллаев Ж.И. Связанные состояния системы двух фермионов на одномерной решетке. ТМФ. Т.147, 1, 36-47, (2006).

5. Абдуллаев Ж.И., Кулиев К.Д. Связанные состояния системы двух бозонов на двумерной решетке. ТМФ, Т 186, 2, 272-292, (2016).

6. Muminov M.I. and Ghoshal S.K. Spectral Features of Two-Particle Schrodinger Operators on *d*− Dimensional Lattice. Complex Analysis and Operator Theory. V., 288-300, (2020).

7. Абдуллаев Ж.И. Теория возмущений для двухчастичного оператора Шредингера на решетке. ТМФ. Т.145, 1, 212-220, (2005).

8. Абдуллаев Ж.И., Икромов И.А. Конечность числа собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на решетке. ТМФ, Т152, 2, 47-57, (2007).

9. Reed M. and Simon B. Методы современной математической физики. IV: Анализ операторов. М.: Мир. 1982.

ДВОЙНАЯ АЛГЕБРА ЛЕЙБНИЦА

Адашев Ж., Турсинова Ш.

Институт Математика, Национальный университет Узбекистана

adashevjq@mail.ru, katta1991@bk.ru

Пусть L-конечномерная алгебра Лейбница над полем F характеристики нуль. В связи с изучением алгебра Ли [2] нас интересует следующий вопрос.

Для каких дифференцирований D алгебры L билинейное отображение $[x, y]_D := D([x, y])$ удовлетворяет тождеству Лейбница? Другими словами, для каких дифференцирований D определяется $[x, y]_D$ и другая алгебра Лейбница, обозначаемая L_D? Если $[x, y]_D$ − умножение алгебры Лейбница, то линейное отображение D также является примером классической R – матрицы для L, т.е. линейное преобразование $R:L\to L$, такое, что

$$[x, y]_R = [R(x), y] + [x, R(y)]$$

определяет умножение алгебры Лейбница. Классические *R*-матрицы изучались многими авторами [3].

В этой работе мы описали двойные естественным образом градуированные филиформные алгебры Лейбница.

Теперь приведем определение классических R – матрицы и двойных алгебр Лейбница, которые определены как двойные алгебра Ли [2] следующим образом.

Определение 1. Пусть L–алгебра Лейбница над полем F и [–,–] - умножение в L. Линейное преобразование $R:L\to L$ называется классической R–матрицей, если

$$[x, y]_R = [R(x), y] + [x, R(y)]$$

определяет умножение алгебры Лейбница (удовлетворяет тождеству Лейбница). В этом случае пара (L, D) называется двойной алгеброй Лейбница.

Определение 2. Пусть L – алгебра Лейбница и $D\in Der(L)$ дифференцирование такое, что $[x, y]_D := D([x, y])$ определяет умножение алгебра Лейбницы L_D. Тогда пара (L, D) называется дифференцированной двойной алгебра Лейбница.

Для алгебры Лейбница L определим следующую последовательность:

$$L^1 = L, \quad L^{k+1} = [L^k, L^1], \ k \geq 1.$$

Алгебра Лейбница L является нильпотентной, если существует $s\in N$ такое, что $L^s=\{0\}$. Минимальное такое число *s* называется индексом нильпотентности алгебры *L*.

Определение 3. n-мерную алгебру Лейбница L назовем филиформной, если $\dim L^i = n - i, \ 2 \leq i \leq n$.

Теорема 1. [1] Любая n-мерная комплексная естественным образом градуированная филиформная неливая алгебра Лейбница изоморфна одной из следующих не изоморфных алгебр

$$F_n^1: [e_1, e_1] = e_3, \ [e_i, e_1] = e_{i+1} \ \text{где} \quad 2 \leq i \leq n-1,$$

$$F_n^2: [e_1, e_1] = e_3, \ [e_i, e_1] = e_{i+1} \ \text{где} \quad 3 \leq i \leq n-1,$$

где отсутствующие произведения равны нулю.

Теорема 2. Пусть L – n-мерная комплексная естественным образом градуированная филиформная неливая алгебра Лейбница. Тогда алгебра

Лейбница L_D изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$$L(F_n^1,p): [e_1, e_1] = e_{p+1},\ [e_i, e_1] = e_{i+p-1} \text{ где } 2 \le i \le n-p+1,$$

$$L(F_n^2,p): [e_1, e_1] = e_{p+1},\ [e_i, e_1] = e_{i+p-1} \text{ где } 3 \le i \le n-p+1.$$

Литература

1. Аюпов Ш.А., Омиров Б.А. О некаторых классах нильпотентных алгебр Лейбница. Сиб. Мат. Журнал, Том 42(1), 2001,с. 18–29.
2. Burde D. Derivation double Lie algebras. Journal of Algebra and Its Applications, Vol. 15(6) (2015) 1650114 (17 pages).
3. Семенов М.А., Шанский Т. Что такое классическая r-матрица. Функционалный анализ и его приложения, т.17, вып. 4 (1983).

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОГО ТРЕХЧАСТИЧНОГО МОДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

[1]Арзикулов Г.П., [2]Кучаров Р.Р.

[1]Ташкентский Государственный Технический Университет

[2]Национальный Университет Узбекистана

arzikulov79@mail.ru, ramz3364647@yahoo.com

Пусть $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}, d_1 \in \mathbb{N}$ и $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}, d_2 \in \mathbb{N}$ – компактные множества.

В пространстве $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ определим оператор H_0 (оператор умножения на функцию $k_0(x,y)$) по равенству

$$(H_0 f)(x,y) = k_0(x,y) f(x,y),$$

где $k_0(x,y)$ – произвольная вещественнозначная непрерывная функция на $\Omega_1 \times \Omega_2$.

Рассмотрим непрерывные функции $k_1(x,s,y)$ на $\Omega_1^2 \times \Omega_2, k_1(x,s,y) = \overline{k_1(s,x,y)}$ и $k_2(x,t,y)$ на $\Omega_1 \times \Omega_2^2, k_2(x,t,y) = \overline{k_2(x,y,t)}$.

В гильбертовом пространстве $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ определим линейный ограниченный самосопряженный оператор

$$H = H_0 - (T_1 + T_2), \tag{1}$$

здесь действия операторов T_1 и T_2 заданы по формулам

$$T_1 f(x,y) = \int_{\Omega_1} k_1(x,s,y) f(s,y) d\mu_1(s),\ T_2 f(x,y) = \int_{\Omega_2} k_2(x,t,y) f(x,t) d\mu_2(t).$$

Здесь интегрирование понимается в смысле Лебега по мере $\mu_j(\cdot)$ на Ω_j, $j = 1,2$. В дальнейшем будем предполагать, что $ds = d\mu_1(s), dt = d\mu_2(t)$ и $\mu_1(\Omega_1) = \mu_2(\Omega_2) = 1$.

Исследованию существенных и дискретных спектров некоторых трехчастичных операторов, заданных по модели (1), посвящены работы [4 - 7]. В [4] получены достаточные условия конечности и бесконечности дискретного спектра в модели (1), когда $k_1(x,s,y) = const$ $k_2(x,t,y) = const$ и при $\sigma_{ess}(H) = \sigma(H_0)$. В [5] доказано существование бесконечного количества отрицательных собственных значений в модели (1). В [6,7] исследован существенный спектр и число собственных значений, лежащих ниже нижней грани существенного спектра в модели (1), когда функция $k_0(x,y)$ имеет специальный вид: $k_0(x,y) = u(x)v(y)$, а ядра k_1, k_2 являются вырожденными с одним и двумя порядками. Дано полное описание существенному спектру оператора H (1). Доказано существование одного или двух собственных значений, лежащих ниже нижнего края существенного спектра.

Пусть $\{\phi_k(x), k = \overline{1,n}\}$ и $\{\psi_j(y), j = \overline{1,m}\}$ - ортонормированная система непрерывных функций из $L_2(\Omega_1)$ и $L_2(\Omega_2)$, $\phi(y)$ и $\psi(x)$ - вещественнозначная непрерывная функция на Ω_2 и Ω_1, соответственно. В настоящей работе рассматривается модельный оператор H (1) с вырожденными ядрами $k_1(x,s,y), k_2(x,t,y)$:

$$k_1(x,s,y) = \phi(y)q_1(x,s),\ k_2(x,t,y) = \psi(x)q_2(y,t)$$

здесь

$$q_1(x,s) = \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k(x)\overline{\phi_k(s)},\ q_2(y,t) = \sum_{k=1}^{m} b_k \psi_k(y)\overline{\psi_k(t)},$$

где $a_k > 0,\ b_j > 0$.

Пусть $u(x)$ и $v(y)$ – неотрицательные непрерывные функции на Ω_1 и Ω_2, соответственно и $0 \in Ran(u), 0 \in Ran(v)$, при этом $u(x^{\min}) = 0, x^{\min} \in \Omega_1$ и $v(y^{\min}) = 0, y^{\min} \in \Omega_2$ и пусть функции $\phi(y), \psi(x)$ также неотрицательные и $\phi(y^{\min}) = \phi_{\max} = \max\limits_{y \in \Omega_2} \phi(y),\ \psi(x^{\min}) = \psi_{\max} = \max\limits_{x \in \Omega_1} \psi(x)$.

Рассмотрим ЧИО H, заданные равенством

$$H = H_0 - (T_1 + T_2), \quad (2)$$

в пространстве $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$, где

$$H_0 f(x,y) = u(x)v(y) f(x,y).$$

Через $\rho(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$, $\sigma_{ess}(\cdot)$ и $\sigma_{disc}(\cdot)$, как обычно, обозначаются резольвентное множество, спектр, существенный спектр и дискретный спектр самосопряженных операторов [8].

Для каждого $\lambda \in \rho(H_0)$ определим ЧИО $B_1(\lambda) = T_1(H_0 - \lambda E)^{-1}$ и $B_2(\lambda) = T_2(H_0 - \lambda E)^{-1}$, где E – тождественный оператор. В работе [9] дано определение детерминантов операторов $E - B_1(\lambda)$ и $E - B_2(\lambda)$ как функции $\Delta_1(y;\lambda)$ и $\Delta_2(x;\lambda)$, соответственно.

Определим множества

$$\sigma_1 = \{\lambda \in \rho(H_0) : \Delta_1(y_0;\lambda) = 0 \text{ для некоторого } y_0 \in \Omega_2\},$$

$$\sigma_2 = \{\lambda \in \rho(H_0) : \Delta_2(x_0;\lambda) = 0 \text{ для некоторого } x_0 \in \Omega_1\}.$$

В пространстве $L_2(\Omega_1)(L_2(\Omega_2))$ рассмотрим семейство $\{H_1(\alpha)\}_{\alpha\in\Omega_2}(\{H_2(\beta)\}_{\beta\in\Omega_1})$ самосопряженных операторов в модели Фридрихса

$$H_1(\alpha)h(x) = v(\alpha)u(x)h(x) - \phi(\alpha)\int_{\Omega_1} q_1(x,s)h(s)ds,$$

$$H_2(\beta)g(y) = u(\beta)v(y)g(y) - \psi(\beta)\int_{\Omega_2} q_2(y,t)g(t)dt.$$

Положим, $M_1(\alpha) = u_{\max}v(\alpha)$ и $M_2(\beta) = v_{\max}u(\beta)$, где $u_{\max} = \max\limits_{x\in\Omega_1} u(x)$, $v_{\max} = \max\limits_{y\in\Omega_2} v(y)$. В силу теоремы Вейля [10] о компактном возмущении существенного спектра имеем $\sigma_{ess}(H_k(\xi)) = [0, M_k(\xi)]$, $\xi \in \Omega_j$, $j \neq k$, $k = 1,2$ и $j = 1,2$.

В $L_2(\Omega_1)$ и $(L_2(\Omega_2))$ определим семейство компактных операторов:

$$K_1(\alpha;\lambda)h(x) = \phi(\alpha)\int_{\Omega_1} \frac{q_1(x,s)h(s)ds}{v(\alpha)u(s) - \lambda},\ \alpha \in \Omega_1,\ \lambda \in [0, M_1(\alpha)]$$

$$K_2(\beta;\lambda)g(y) = \psi(\beta)\int_{\Omega_2} \frac{q_2(y,t)g(t)dt}{v(t)u(\beta) - \lambda},\ \beta \in \Omega_2,\ \lambda \in [0, M_2(\beta)].$$

Лемма 1 *Пусть* $\alpha \in \Omega_2 (\beta \in \Omega_1)$ *- произвольный элемент.*

а) число $\lambda \in (-\infty, 0)$ *является собственным значением оператора* $H_1(\alpha)$ (*соответственно, оператора* $H_2(\beta)$) *тогда и только тогда, когда* $\Delta_1(\alpha;\lambda) = 0$ *(соответственно,* $\Delta_2(\beta;\lambda) = 0$*);*

б) если число $\lambda \in (-\infty, 0)$ *является p – кратным собственным значением оператора* $H_1(\alpha)$ (*соответственно, оператора* $H_2(\beta)$), *то число* $\eta = 1$ *является p – кратным собственным значением компактного оператора* $K_1(\alpha;\lambda)$ (*соответственно, оператора* $K_2(\beta;\lambda)$), *и наоборот.*

Лемма 2 *Каждое число* $\lambda = -\phi_{\max} \cdot a_k$ *(соответственно,* $\lambda = -\psi_{\max} \cdot b_j$*) является решением уравнения* $\Delta_1(y^{\min};\lambda) = 0$*, (соответственно,* $\Delta_2(x^{\min};\lambda) = 0.$ *)*

Литература

1. Ю.Х. Эшкабилов Об одном дискретном "трехчастичном" операторе Шредингера в модели Хаббарда, – ТМФ, 149:2, 2006, 228–243.

2. Appell J., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations, – New York, 2000.

3. Ю.Х. Эшкабилов Частично интегральные операторы типа Фредгольма,Germany, Saarbrucken: LAP, 2013.

4. S. Albeverio, S.N. Lakaev, Z.I. Muminov On the Number of Eigenvalues of a Model Operator Associated to a System of Three-Particles on Lattices, - Russ. J. of Math. Phys., 14:4, 2007, 377-387.

5. Расулов Т. Х. Асимптотика дискретного спектра одного модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке // ТМФ. 2010. Т. 163, №1. С. 34–44.
6. Г.П. Арзикулов, Ю.Х. Эшкабилов О существенном и дискретном сректрах одного частично интегрального оператора типа Фредгольма, //Мат. труды., 17, №2, 2014, 23-40.
7. Р.Р. Кучаров, Ю.Х. Эшкабилов О конечности отрицательных собственных значений частично интегрального оператора, //Мат. труды., 17, №1, 2014, 128-144..
8. М.Рид, Б.Саймон Методы современной математической физики - Т.1, Функциональный анализ, - М.; Мир, 1977.
9. Ю.Х. Эшкабилов Существенный и дискретный спектры частичо интегральных операторов, - Мат. труды, 11:2, 2008, 187-203.
10. М.Рид, Б.Саймон Методы современной математической физики - Т.4, Анализ операторов, - М.; Мир, 1982.

ОБ ОДНОМ СОВЕРШЕННОМ СЕМЕЙСТВЕ МНОЖЕСТВ

Баракаев Д. У.
Бухарский инженерно-технологический институт

Как известно, если числовое множество является замкнутым, без изолированных точек (т.е. любая точка этого множества является предельной), то его принято называть совершенным. Фундаментальным результатом, относящимся к совершенным множествам, является то, что всякое непустое совершенное множество из R несчетно, более того его мощность равна мощности множества R. Самым знаменитым примером совершенного нигде ни плотного множества нулевой меры является канторово множество C. Этот пример был построен немецким математиком Гергом Кантором, поэтому множество названо в его честь [1-5].

Георг Кантор разработал теорию бесконечных множеств и теорию трансфинитных чисел, доказал несчетность множества всех действительных чисел, установив таким образом существование неэквивалентных бесконечных множеств. Также он сформулировал общее понятие мощности множества.

Метод построения канторова множества в несколько измененном виде можно применить построения целого семейства линейных дисконтинуумов положительной меры.

Построим полезное семейство совершенных нигде неплотных множеств. Каждое из этих множеств есть множество точек, остающихся на отрезке [0; 1] после удаления из него последовательности открытых интервалов следующим образом.

Пусть $0<\alpha<1$. Из отрезка [0; 1] на первом шаге выбросим интервал с центром в точке $\frac{1}{2}$ длины $\frac{1}{2}\alpha$. Из двух оставшихся отрезков удалим средние открытые интервалы, длина каждого из которых равна $\frac{1}{2}\alpha$. На *n* шаге мера удаленных открытых интервалов будет равна $\alpha\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+2^{-n}\right)$. После бесконечного числа удалений открытых интервалов меры α, оставшееся множество A_α меры $(1-\alpha)$ назовем канторовым множеством положительной меры. Построенное таким образом семейство множеств $\{A_\alpha | 0<\alpha<1\}$ является нигде неплотным совершенным множеством, не пустым, замкнутым, не содержащим изолированных точек и имеет мощность равную мощности множества *R*.

В работе были сформулированы и доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Каждое компактное метрическое пространство есть непрерывный образ канторова множества.

Теорема 2. Все канторовы множества положительной или нулевой меры гомеоморфные. Более того, существует гомеоморфизм *f* отрезка [0; 1] на отрезок [0; 1], такой, что $f(C)=A_\alpha$.

Литература

1. Б.Гельбаум, Дж.Олмстед. Контрпримеры в анализе.-М.: 2007
2. Математическа энциклопедия.
3. И.П.Нотансон. Теория функций вещественной переменной. – М.: 1974
4. П.С. Александров. Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: 1977
5. Ф.А. Медведев. Развитие теории множеств в 19 веке. – М.: 1965

АЛГЕБРАИК ТЕНГСИЗЛИКЛАРНИ ВЕКТОРЛАР ЁРДАМИДА ЎҚИТИШ МЕТОДЛАРИ

Бегматов А. Х., Рахимов Н.Н
СамДУ

Ушбу мақолада айрим алгебраик типдаги тенгсизликларни векторлар ёрдамида ўқитиш уларни биз билган алгебраик усулларда ечишга қараганда бирмунча содда эканлигини кўрсатиб ўтишга ҳаракат қилдик. Маълумки, векторларни скаляр кўпайтмаси геометрияда асосан тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топишга доир масалаларни ечишда қўлланилади; биз ушбу ишимизда баъзи алгебраик тенгсизликларни векторларни қўллаб (векторларни скаляр кўпайтмасидан, ҳамда уларнинг коллинеарлик хоссаларидан фойдаланган ҳолда) ўқитиш усулларини ишлаб чиқдик.

Умумий ҳолда икки $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси $\vec{a}\cdot\vec{b}\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$ тенгликдан аниқланади, бунда $\cos\alpha\le 1$ эканлигидан $\vec{a}\cdot\vec{b}\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ муносабат ўринли бўлади.

Шундай тенгсизликлар борки, уларни анъанавий метод ёрдамида ечиш бирмунча қийин бўлади. Биз тавсия этаётган усулларни қўллаш масала ечиш жараёнини анча осонлаштиради ва ечимни тезда топиш имконини беради.

Биз қуйида векторлар ёрдамида баъзи алгебраик тенгсизликларни исботлаш, функциянинг экстримум қийматларини топишга оид бир нечта масалаларни ечиш усулларини кўрсатиб ўтамиз.

1-масала. Агар $a+b+c=1$ ва $a\ge-\frac{1}{4}$, $b\ge-\frac{1}{4}$, $c\ge-\frac{1}{4}$ экани маълум бўлса, у ҳолда $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\le\sqrt{21}$ тенгсизликни исботланг.

Ечими. Биз бу масалани векторларнинг скаляр кўпайтмасидан фойдаланиб ечамиз. Бунинг учун дастлаб 2 та вектор тузиб оламиз. $\vec{a}\left(\sqrt{4a+1};\sqrt{4b+1};\sqrt{4c+1}\right)$ ва $\vec{b}(1;1;1)$. Бу векторлар учун $\vec{a}\cdot\vec{b}\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ тенгсизликни қўлласак қуйидаги муносабат ўринли бўлади.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}$

$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=\sqrt{\sqrt{4a+1}^2+\sqrt{4b+1}^2+\sqrt{4c+1}^2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{4(a+b+c)+3}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{21}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ га кўра $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\le\sqrt{21}$ бўлади.

Тенгсизлик исботланди. [3]

2-масала. $a+b+c=1$ экани маълум бўлса, $a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{3}$ эканини исботланг.

Ечими. Масалани геометрик услубда, аниқроғи векторлар ёрдамида исботлашга ҳаракат қиламиз. Бунда ҳам 1- масаладаги каби векторлар тузиб оламиз.

$\vec{a}(a;b;c)$ ва $\vec{b}(1;1;1)$ ҳамда $\vec{a}\cdot\vec{b}\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ эканлигидан $a+b+c\le\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{3}$ бўлади. [1]

Иккала томонни квадратга кўтарсак, ҳамда $a+b+c=1$ эканидан фойдалансак $a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{3}$ экани келиб чиқади. Тенгсизлик исботланди.

3-масала. Қуйидаги функциянинг энг катта қийматини топинг: $y=\sqrt{x+28}+\sqrt{22-x}$

Ечими. Берилган функциянинг аниқланиш соҳаси [-28;22] ёпиқ оралиқ бўлади. Бу масалани ечиш учун векторларни қуйидагича танлаймиз: $\bar{u}\left(\sqrt{x+28};\sqrt{22-x}\right)$ ва $\bar{v}(1;1)$.

У ҳолда, $\bar{u}\cdot\bar{v}=\sqrt{x+28}+\sqrt{22-x}\le|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|=\sqrt{x+28+22-x}\cdot\sqrt{1+1}=\sqrt{50\cdot2}=10.$

бўлади. Кўриниб турибдики, функциянинг энг катта қиймати 10 га тенг бўлади. Тенглик белгиси ўринли бўлиши учун, танланган векторлар коллинеар бўлиши кераклиги келиб чиқади, яъни

$\sqrt{x+28}=\sqrt{22-x} \Rightarrow$ x + 28 = 22 - x $\Rightarrow$ x = -3. Демак берилган функция ўзининг энг катта (яъни, y=10) қийматига x=-3 бўлганда эришади. [2]

4-масала. Мусбат *a, b, c* сонлар учун *abc=1* тенглик ўринли. Тенгсизликни исботланг. $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$

Ечими. Қулайлик учун *x=1/a, y=1/b, z=1/c* кўринишдаги алмаштириш оламиз, масала шартидаги тенглик шартидан *xyz=1* келиб чиқади. Натижада берилган тенгсизликка тенг кучли қуйидаги тенгсизликни ҳосил қиламиз: $S=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{3}{2}$. Бунга Коши-Буняковскийнинг векторлар орқали ифода қилинган тенгсизлигини қўлласак: $\vec{m}\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}},\frac{y}{\sqrt{z+x}},\frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)$ ва $\vec{n}\left(\sqrt{y+z},\sqrt{z+x},\sqrt{x+y}\right)$ векторлардан $(x+y+z)^2\leq 2S(x+y+z)$, бундан эса $S\geq(x+y+z)/2$ натижани оламиз. Учта мусбат сонлар учун ўрта арифметик ва ўрта геометрик қийматлар ҳақидаги тенгсизликни татбиқ этсак, $S\geq\frac{3}{2}\cdot\frac{x+y+z}{3}\geq\frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz}=\frac{3}{2}$ эканлиги келиб чиқади. [3]

5-масала. Мусбат *a, b, c* сонлари учун

$\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq(a+b+c)^2$ тенгсизликни исботланг.

Ечими. Бу масалани ҳам векторларнинг скаляр кўпайтмаси формуласидан фойдаланган ҳолда ечишга харакат киламиз. Айтайлик, $\overline{m}\left\{a\sqrt{a};b\sqrt{b};c\sqrt{c}\right\}$, $\overline{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{a}};\frac{1}{\sqrt{b}};\frac{1}{\sqrt{c}}\right\}$ бўлсин. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси формуласига асосан, яъни $\overline{m}\cdot\overline{n}\leq|\overline{m}|\cdot|\overline{n}|$ га кўра $|\overline{m}|=\sqrt{a^3+b^3+c^3}$, $|\overline{n}|=\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$. $\overline{m}\cdot\overline{n}=a+b+c$, бунда *a>0, b>0, c>0* эканлигидан $|\overline{m}\cdot\overline{n}|=\overline{m}\cdot\overline{n}=a+b+c$ бўлади. $|\overline{m}\cdot\overline{n}|\leq|\overline{m}|\cdot|\overline{n}|$ эканлигидан: $a+b+c\leq\sqrt{a^3+b^3+c^3}\cdot\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$. Охирги тенгсизликни иккала кисмини квадратга кўтарсак, берилган тенгсизликни исбот килган бўламиз. [1]

6-масала. $y=\sqrt{4\cos^2 x+1}+\sqrt{4\sin^2 x+3}$ функциянинг энг катта қийматини топинг.

Ечими. Бу функция $x\in R$ да аниқланган. Векторларни киритамиз: $\overline{m}\left(\sqrt{4\cos^2 x+1},\sqrt{4\sin^2 x+3}\right)$ ва $\vec{n}(1,1)$. У ҳолда,

$\overline{m}\cdot\overline{n}=\sqrt{4\cos^2 x+1}+\sqrt{4\sin^2 x+3},\leq 4$. Демак, функция ўзининг энг катта қийматига $\sqrt{4\cos^2 x+1}=\sqrt{4\sin^2 x+3}$ тенглик бажарилганда эришади. Бундан эса $\cos 2x=\frac{1}{2}$, x = $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, k $\in$ Z қийматни топамиз [2,3].

Хулоса ўрнида шуни айта оламизки, айрим алгебраик тенгсизликларни исботлашда, функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топишда векторлар ёрдамидан фойдаланиш ўқувчилар оммасига мавзуни осон ўзлаштириш имконини беради.

Адабиётлар

1. Алфутова Н.Б., Устинов А.В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. М.: МЦНМО, 2009г – 264с.
2. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач- М. Просвещение, 1991г.
3. N.Raximov. Vektors helps algebra. European Journal of Research and Reflection in Educational Sciences. Vol.8, No.6,2020. Part II.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВЫ КВАДРАТИЧНОГО ГРАФА ДЛЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПОДФАКТОРОВ

Болтаев Х.Х., Шарибаева Т.Р.
ТГПУ
bkhabibzhan2020@mail.ru

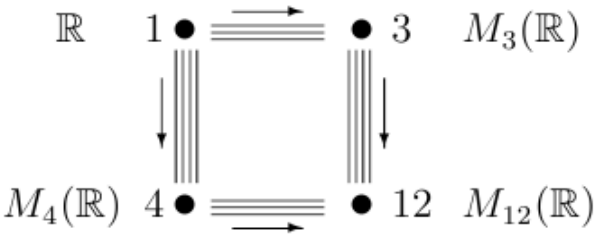
Пусть $A \subseteq B$ – конечномерные вещественные C*-алгебры. Тогда известно, что $A \cong \bigoplus_{i+1}^{k} M_{n_i}(F)$ и $B \cong \bigoplus_{j+1}^{l} M_{m_j}(F)$, где $F = \mathbb{R}$ или $F = \mathbb{H}$ – тело кватернионов. Положим $\vec{n} = (n_1, ..., n_k)$ и $\vec{m} = (m_1, ..., m_l)$, и назовем их вектор-размерностями A и B, соответственно. Определим элементы Λ_{ij} $k \times l$-матрицы Λ_A^B следующим образом: Λ_{ij} – число i-го слагаемого в представлении A в j-м слагаемом B (см. [1], [2]).

Теорема. Верно слудующие свойства.

1. $\Lambda_A^B = \Lambda_A^C \cdot \Lambda_C^B$, где C*-алгебра C содержит A и содержится в B;
2. $\Lambda_A^B \cdot \Lambda_B^D = \Lambda_A^C \cdot \Lambda_C^D$, $\Lambda_A^B \cdot (\Lambda_A^C)^T = \Lambda_B^D \cdot (\Lambda_C^D)^T$, для $A \subset B \subset D$, $A \subset C \subset D$, При этом, если $B \subset C$, то $\Lambda_A^B \cdot \Lambda_B^C \cdot \Lambda_C^D = \Lambda_A^D, k + m \neq l + n$. Если $B \not\subseteq C$, то $k + m = l + n$. Здесь C и D - вещественные C*-алгебры; k, m, l и n - число рёбер графов соответствующих матрицам Λ_A^B, Λ_B^D, Λ_A^C и Λ_C^D, соответственно;

Продемонстрируем эту терему на следующих примерах.

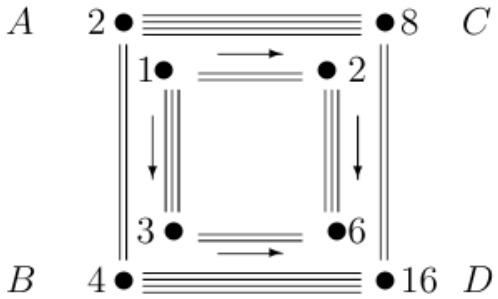
Пример. Пусть $A = \mathbb{R}$, $B = M_3(\mathbb{R})$, $C = M_4(\mathbb{R})$ и $B = M_{12}(\mathbb{R})$. Вложения $A \subset B \subset D$ и $A \subset C \subset D$ зададим следующим графом:



Отсюда получим, что $\Lambda_A^B=[3]$, $\Lambda_A^C=[4]$, $\Lambda_B^D=[4]$ и $\Lambda_C^D=[3]$. Очевидно, что свойства 2 выполняются. Кроме того, так как $B\not\subset C$, то $k+m=l+n$ (4+3=3+4). Если положить $B=M_2(\mathbb{R})$, то $B\subset C$ и $k+m\neq l+n$ $(4+3\neq 2+6)$.

Теперь рассмотрим вложение $A\subset B\subset D$, тогда свойства 1, т.е. $\Lambda_A^D=\Lambda_A^C\cdot\Lambda_C^D$ выполняется. Так как $\Lambda_A^B=[3]$ и $\Lambda_B^D=[4]$, то по формуле $12=\Lambda_A^D=\Lambda_A^C\cdot\Lambda_C^D=[3]\cdot[4]=12$.

Пример 2. Пусть $A=\mathbb{R}\oplus\mathbb{H}$, $B=M_3(\mathbb{R})\oplus M_2(\mathbb{H})$, $C=M_2(\mathbb{R})\oplus M_4(\mathbb{H})$ и $D=M_6(\mathbb{R})\oplus M_8(\mathbb{H})$. Вложения $A\subset B\subset D$ и $A\subset C\subset D$ зададим следующим графом:



Отсюда получим, что $\Lambda_A^B=\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}$, $\Lambda_B^D=\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}$, $\Lambda_A^C=\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}$, $\Lambda_C^D=\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}$. Очевидно, что свойства 2 и 3 теоремы 3.1.3 выполняются. Кроме того, так как $B\not\subset C$, то $k+m=l+n$ $(6+5=5+6)$. Если положить $B=\mathbb{R}\oplus M_2(\mathbb{H})$, то $B\subset C$ и $k+m\neq l+n$ $(3+10\neq 6+5)$.

Теперь рассмотрим вложение $A\subset B\subset D$, тогда свойства 1, т.е. $\Lambda_A^D=\Lambda_A^C\cdot\Lambda_C^D$ выполняется. Так как $\Lambda_A^B=\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}$, $\Lambda_B^D=\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}$, то по формуле $\begin{pmatrix}6&0\\0&8\end{pmatrix}=\Lambda_A^D=\Lambda_A^C\cdot\Lambda_C^D=\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0\\0&8\end{pmatrix}$.

Доказательство теоремы можно получить, используя [3] и [4].

Литература

1. Jones V.F.R., Index for Subfactors, Inventiones Math. 72 (1983) 1-25.

2. Jones V. Sunder V. S. Introduction to Subfactors, Lon. Mat. Soc., 234, (1997), 162.
3. Болтаев Х.Х. Вещественные W*- подалгеры и их графы. // Доклады академия наук Республики Узбекистана, 2013, № 3, с. 3-5.
4. Goldman F, P. de la. Harpe, and V. Jones. Coxeter graphs and towers of algebras, MSRI Publications, (Springer), 14, New York, (1989).

О ЧИСЛЕ И МЕСТОПОЛОЖЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА, СООТВЕТСТВУЮЩЕГО СИСТЕМЕ ОДНОЙ ЧАСТИЦЫ ВО ВНЕШНОМ ПОЛЕ

[1]Гадаев С.А., [2]Алладустова И.У.
[1]Самаркандский государственный архитектурно-строительный институт,
[2]Самаркандский государственный университет
sokhibgadayev@gmail.com, alladustova.iroda@mail.ru

В работе [1] Б.Саймона исследовано существование собственных значений для семейства непрерывного оператора Шредингера $H = -\Delta + \lambda V$, $\lambda > 0$ в одномерном и двумерном случаях. Для всех $V(x)$ удовлетворяющих условию $\int (1+|x|^2)|V(x)|dx < +\infty$ доказано, что н имеет связанное состояние при всех $\lambda > 0$ тогда и только тогда, когда $\int V(x)dx < 0$.

В работе [2] рассмотрен, что при определенных условиях на потенциал, одномерной оператор Шредингера имеет единственное связанное состояние в пределах слабой связи а в других условиях не существует связанное состояние в этом пределе. Этот вопрос изучались для потенциалов, удовлетворяющих условию $\int (1+|x|)|V(x)|dx < +\infty$.

Эти вопросы дальнейшем обсуждался Р.Бланкенбеккером, М.Н.Голдбергером и Б.Саймоном [3]. Все эти результаты требуют использования модифицированного определителя.

Как известно, всюду в физике устойчивые сложные объекты образуются с помощью притягательных сил, которые позволяют составным частям уменшить их энергию, связывая их вместе. Отталкивающие силы отделяют частицы в свободном пространстве. Однако в [4] описано экспериментальное наблюдение, состоящее в том, что в упорядоченных средах, с периодическим потенциалом, а также в отсутствие рассеяния устойчивые сложные объекты могут существовать даже в случае отталкивающих взаимодействий.

Более того, в [4] для теоретического обоснования полученных экспериментальных результатов использована модель Бозе-Хаббарда, а именно гамильтониан системы двух частиц с отталкивающим взаимодействием [4].

Основная цель данного доклада является доказательство существование собственных значений и описание их местоположение для дискретного оператора Шредингера $H = \widehat{H}_{\mu\lambda} := \widehat{H}_0 + \widehat{V}_{\mu\lambda}$ с контактным взаимодействием $\mu \neq 0$ и с взаимодействием $\lambda \neq 0$ на ближайших соседних точках.

Пуст $L_2(T)$ гильбертово пространство квадратично интегрируемых функций, определенных на одномерном торе $T = (-\pi; \pi]$ и пусть H-дискретный оператор Шредингера, действующий в гильбертовом пространстве $L_2(T)$ по формуле

$$(H_{\mu\lambda} f)(p) = (1 - \cos p) f(p) - \mu \cos p \int_T \cos s f(s) ds$$

$$- \lambda \cos 2p \int_T \cos 2s f(s) ds, \quad f \in L_2(T) \text{ и } \quad \mu, \lambda \in R.$$

Так как возмущенные операторы V_1 и V_2 являются одномерными интегральными операторами, согласно теореме Вейля, существенный спектр $\sigma_{ess}(H_{\mu\lambda})$оператора $H_{\mu\lambda}$ не зависит от $\mu, \lambda \geq 0$ и совпадает со спектром $\sigma_{ess}(H_0)$ оператора $(H_0 f)(p) = (1 - \cos p) f(p)$, т.е.

$$\sigma_{ess}(H_{\mu\lambda}) = \sigma_{ess}(H_0) = [0;2].$$

Теорема. Пусть $\mu + \lambda + \mu\lambda > 0$, $\mu > -1$. Тогда оператор $H_{\mu\lambda}$ не имеет собственных значений лежащее правее существенного спектра оператора $H_{\mu\lambda}$.

Литература

1. B.Simon: Ann. Phys. 97 (1976), 279-288.
2. M.Klaus: Annals of Physics 97(1976), 279-288
3. R.Blankenbecker, M.N.Goldberger and B.Simon: Ann.Physics 108(1977), 69-78.
4. K.Winkler, et al.: Vol 441 15 June 2006 \ doi: 10.1038\ nature 04918.
5. Lakaev S., Ozdemir E., Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics 45 (2016), 1693-1703

ОПИСАНИЕ РАЗРЕШИМЫХ 4-ЛИЕВЫХ АЛГЕБР

Гайбуллаев Р.К., Кунградбаева А.К.
Национальный университет Узбекистана

4-лиевые алгебры[1] тесно связаны со многими областями математики, математической физики и теории струн. В работе [2] построен класс разрешимых 3-лиевых алгебр с максимальным гипо-нильпотентным идеалом, который является филиформной 3-лиевой алгеброй. Фактически, такие алгебры полностью классифицированы. В этой работе получено описание разрешимых 4-лиевых алгебр, максимальный гипо-нильпотентный идеал

которых является филиформным. Кроме того, описаны дифференцирования этих разрешимых 4-лиевых алгебр.

4-лиевой алгеброй называется векторное пространство L над полем F, наделенное произвольной полилинейной кососимметричной операцией $[x_1, x_2, x_3, x_4]$, удовлетворяющей следующему тождеству:

$$[[x_1, x_2, x_3, x_4]y_2, y_3, y_4] = \sum_{i=1}^{4} [x_1, \ldots, [x_i, y_2, y_3, y_4], \ldots, x_4], \quad \forall x_1, x_2, x_3, x_4 \in L. \quad (1)$$

Дифференцированием 4-лиевой алгебры L называется линейное отображение $D: L \to L$ такое, что для произвольных элементов x_1, x_2, x_3, x_4 из L следующее равенство будет верным:

$$D[x_1, x_2, x_3, x_4] = \sum_{i=1}^{4} [x_1, \ldots, D(x_i), \ldots, x_4]. \quad (2)$$

Множество всех дифференцирований L относительно коммутатора образует подалгебру лиевой алгебры $gl(L)$. Эта подалгебра называется алгеброй дифференцирований L и обозначается через $Der(L)$.

Для произвольной 4-лиевой алгебры L определим, соответственно, нижний центральный и производный ряды:

$$L^1 = L, \quad L^{k+1} = [L^k, L, L], \ k \geq 1 \text{ и } L^{(1)} = L, \quad L^{(s+1)} = [L^{(s)}, L^{(s)}, L, L], \ s \geq 1.$$

Подпространство I 4-лиевой алгебры L называется *идеалом*, если выполняется соотношение $[I, L, L, L] \subseteq I$. Идеал 4-лиевой алгебры L называется *разрешимым идеалом*, если $I^{(r)} = 0$ для некоторого $r \geq 1$. Когда $L = I$, тогда L называется *разрешимой 4-лиевой алгеброй.*

Идеал I называется *нильпотентным идеалом*, если $I^r = 0$ для некоторого $r \geq 1$. Если $I = L$, тогда I *называется нильпотентной 4-лиевой алгеброй*.

Пусть L 4-лиевая алгебра и I идеал в L. Если I нильпотентная подалгебра, но не нильпотентный идеал, то I называется *гипо-нильпотентным идеалом* L. Если I не является собственным подмножеством никакого другого гипо-нильпотентного идеала, то I называется *максимальным гипо-нильпотентным идеалом* L.

4-лиевая алгебра L размерности m называется *филиформной*, если $dimA^i = m - (3 + i)$ для $i \geq 1$.

Обозначим через N филиформную 4-лиевую алгебру с ненулевыми произведениями в базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, имеющую следующий вид:

$$[e_1, e_2, e_3, e_i] = e_{i+1}, \quad 4 \leq i \leq m-1.$$

Предложение 1. Пусть N m – мерная 4-лиевая алгебра и $\{e_1, \ldots, e_m\}$ является базисом в N. Тогда любое дифференцирование D пространства Der(*N*) имеет следующий вид :

$$D(e_i)=\sum_{k=1}^{m}a_{i,k}e_k,\quad i=1,2,3,\qquad D(e_4)=\sum_{k=4}^{m}a_{4,k}e_k,$$

$$D(e_j)=((j-4)(a_{1,1}+a_{2,2}+a_{3,3})+a_{4,4})e_j+\sum_{k=j+1}^{m}a_{4,k-j+4}e_k,\quad 5\le j\le m.$$

Теорема 2. Пусть $R_{m,4}$ разрешимая $(m+2)-$мерная 4-лиевая алгебра с максимальным гипо-нильпотеным идеалом $_N$. Тогда в $_{\text{ }}$ существует базис $\{x,y,e_1,\ldots,e_m\}$ такой, что таблица умножения в $_{\text{ }}$ имеет следующий вид:

$$R_{m,4}:\begin{cases}[e_1,e_2,e_3,e_i]=e_{i+1},\ 4\le i\le m-1,\\ [x,e_1,e_2,e_3]=e_3,\\ x,e_1,e_2,e_i]=(i-4)e_i,\ 4\le i\le m,\\ [y,e_1,e_2,e_i]=e_i,\ 4\le i\le m,\end{cases}$$

где отсутствующие скобки равны нулю.

Литература

1. V.Filippov, n-Lie algebras, Sib. Mat. J., 26(6), (1985), p. 126-140.
2. R.Bai, C.Shen, Y.Zhang, Solvable 3-Lie algebras with a maximal hypo-nilpotent ideal N*, Electronic Journal of Linear Algebra, Vol. 21, 2010, p. 43-62.

КОНЕЧНОСТЬ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА ОДНОЙ $2\times 2-$ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ

[1,2]Дилмуродов Э.Б.

[1]Бухарский государственный университет,

[2]Бухарское отделение Института математики им. В.И.Романовского

В непрерывном пространстве и на решетке имеются в определенном смысле интересные задачи, возникающие в задачах физики твердого тела [1], квантовой теории поля [2] и статистической физики [3], в которых число частиц не сохраняется. Изучение таких систем сводится к изучению спектральных свойств матриц, элементы которых являются линейными операторами в банаховых или гильбертовых пространствах [4]. Данная работа посвящена к изучению конечность дискретного спектра одной $2\times 2-$ операторной матрицы.

Пусть $\mathbb{T}^3:\equiv(-\pi;\pi]^3-$трёхмерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней, $(\mathbb{T}^3)^2=\mathbb{T}^3\times\mathbb{T}^3-$декартово произведение, $L_2(\mathbb{T}^3)-$гильбертово пространство квадратично интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}^3$,

$L_2^s((\mathbb{T}^3)^2)$ – гильбертово пространство квадратично интегрируемых симметричных (комплекснозначных) функций, определенных на $(\mathbb{T}^3)^2$.

Обозначим через $\mathbb{H}$ прямую сумму пространств $H_1 := L_2(\mathbb{T}^3)$ и $H_2 := L_2^s((\mathbb{T}^3)^2)$, т.е. $H := H_0 \oplus H_1$.

Рассмотрим матричный оператор $\mathcal{A}_\mu$ действующий в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ и задающийся как

$$\mathcal{A}_\mu := \begin{pmatrix} A_{11} & \mu A_{12} \\ \mu A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где операторы $A_{ij} : H_i \to H_j$, $i, j = 1,2$ определяются по формулам

$$(A_{11} f_1)(k) = w_1(k) f_1(k),\ (A_{12} f_2)(k) = \int_{\mathbb{T}^3} f_2(k,t)dt,$$

$$(A_{22} f_2)(k,p) = w_2(k,p) f_2(k,p),\ f_i \in H_i,\ i = 1,2$$

Здесь $\mu > 0$ – параметр взаимодействия, а функции $w_1(\cdot)$ и $w_2(\cdot)$ определены следующим образом:

$$w_1(k) := \varepsilon(k) + \gamma,\ w_2(k,p) := \varepsilon(k) + \varepsilon(\frac{1}{2}(k+p)) + \varepsilon(p)$$

с условием $\gamma \in R$, а функция (дисперсии) $\varepsilon(\cdot)$ определена как

$$\varepsilon(k) := \sum_{i=1}^{3} (1 - \cos k_i), \qquad k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{T}^3$$

Легко можно проверить, что оператор $\mathcal{A}_\mu$, определенный операторной матрицей (1) и действующий в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, является ограниченным и самосопряженным.

Для формулировки основного результата работы вводим ограниченный и самосопряженный оператор (из семейства обобщенной моделей Фридрихса) $\mathcal{A}_\mu(k)$ действующий в $C \oplus L_2(\mathbb{T}^3)$ по формуле

$$\mathcal{A}_\mu(k) := \begin{pmatrix} A_{00} & \mu A_{01} \\ \mu A_{01}^* & A_{11}(k) \end{pmatrix}$$

где матричные элементы действуют по правилам

$$A_{00}(k) f_0 = w_1(k) f_0,\ A_{01} f_1 = \int_{\mathbb{T}^3} f_1(t)dt,\ (A_{11}(k) f_1)(p) = w_2(k,p) f_1(p).$$

С помощью экстремальных свойств фукции $w_2(\cdot,\cdot)$, а также теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега получим, что существует положительный конечный предел [5]

$$\lim_{z \to -0} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{dt}{w_2(\bar{0},t) - z} = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{dt}{w_2(\bar{0},t)}$$

Введем следующие обозначения:

$$\mu_l^0(\gamma) := \sqrt{2\gamma} \left(\int_{\mathbb{T}^3} \frac{dt}{w_2(\bar{0},t)} \right)^{-1/2} \quad \text{для } \gamma > 0;$$

$$\mu_r^0(\gamma) := \sqrt{24-2\gamma}\left(\int\limits_{\mathbb{T}^3}\frac{dt}{w_2(\overline{0},t)}\right)^{-1/2} \quad \text{для } \gamma<12$$

и

$$E_\mu^{(1)} := \min\left\{\bigcup_{k\in\mathbb{T}^3}\sigma_{disc}(\mathcal{A}_{\mu/\sqrt{2}}(k))\cap(-\infty;0]\right\};\ E_\mu^{(2)} := \max\left\{\bigcup_{k\in\mathbb{T}^3}\sigma_{disc}(\mathcal{A}_{\mu/\sqrt{2}}(k))\cap[18;\infty)\right\}.$$

Теперь сформулируем результат о конечности дискретного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$.

Теорема. 1) *Пусть либо* $\gamma\geq 12$ *и* $\mu>0$, *либо* $\mu\neq\mu_r^0(\gamma)$ *для любого* $\gamma<12$. *Тогда операторная матрица* $\mathcal{A}_\mu$ *имеет конечное число собственных значений, лежащих правее* $E_\mu^{(2)}$.

2) *Пусть либо* $\gamma\leq 0$ *и* $\mu>0$, *либо* $\mu\neq\mu_l^0(\gamma)$ *для любого* $\gamma>0$. *Тогда операторная матрица* $\mathcal{A}_\mu$ *имеет конечное число собственных значений, лежащих левее* $E_\mu^{(1)}$.

Замечание. *Если* $\mu=\mu_r^0(\gamma)$, $\gamma<12$ (*соот.* $\mu=\mu_l^0(\gamma)$, $\gamma>0$), *то операторная матрица* $\mathcal{A}_\mu$ *имеет бесконечное число собственных значений, лежащих правее* $E_\mu^{(2)}$ (*соот. левее* $E_\mu^{(1)}$) [6].

В работе [7] показано, что при при $\mu=\mu_l^0(6)=\mu_r^0(6)$ операторная матрица $\mathcal{A}_\mu$ одновременно имеет бесконечное число собственных значений, накапливающихся к нижней (равной 0) и верхней (равной 18) граням существенного спектра.

Литература

1. D.Mattis. The few-body problem on lattice. Rev. Modern Phys., 58 (1986), 361-379.
2. К.О.Фридрихс. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве, Мир, М., 1969.
3. В.А.Малышев, Р.А.Минлос. “Кластерные операторы”, Труды семинара им. И.Г. Петровского, 9 (1983), 63–80.
5. C.Tretter. Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications. Imperial College Press, 2008.
6. T.H.Rasulov, E.B.Dilmurodov. Eigenvalues and virtual levels of a family of 2×2 operator matrices, Methods of Functional Analysis and Topology. 25:3 (2019), 273–281.
7. E.B.Dilmurodov. Discrete eigenvalues of a 2×2 operator matrix. arXiv:2011.0965v1, 19 Nov 2020, 16 pages.
8. Т.Х.Расулов, Э.Б.Дилмуродов. Бесконечность числа собственных значений $2\times 2-$операторных матриц. Асимптотика дискретного спектра, ТМФ, 205:3 (2020), 368-390.

СИМПЛЕКТИК ГРУППА ТАЪСИРИГА НИСБАТАН ИНВАРИАНТ ДИФФЕРЕНЦИАЛ РАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ЖИСМНИНИ ТАШКИЛ ЭТУВЧИЛАРИНИ ТИКЛАШ

[1]Жўрабоев С.С., [2]Мўминов Қ.Қ.
[1]ФарДУ, [2]ЎзМУ

Маълумки [1], инвариантлар назарияси курсининг классик масалалари k майдон устида аниқланган чекли ўлчовли $\breve{}$вектор фазо элементларини қандайдир алгебраик чизиқли $G \subset GL(n,k)$группа таъсирига нисбатан тавсифлаш масалаларига келтирилади. Бу ҳолда инвариантлар сифатида ихтиёрий функциялар эмас, балки G группа таъсирида ўзгармас, кўпҳад кўринишидаги ёки умумий ҳолда рационал функциялар олинади. G группанинг кўпҳад кўринишидаги инвариантлари $\breve{}$ фазонинг барча полиномиал функциялари алгебрасига қисм алгебрани ифодалайди. Бундай қисм алгебра инвариантлар алгебраси дейилади ва $k[V]^G$ орқали белгиланади. Инвариантлар назариясида асосан $k[V]^G$ *алгебранинг ташкил этувчиларини қуриш ва улар орасидаги муносабатларни топиш* масалалари қаралади. Бундай кўринишдаги масалаларнинг ечимлари мос ҳолда инвариантлар назариясининг *биринчи ва иккинчи асосий теоремалари* деб аталади.

Кўплаб классик группалар, хусусан, чизиқли, махсус чизиқли, ортогонал, симплектик группалар учун биринчи ва иккинчи асосий теоремалар ва уларни исботлаш методлари Г.Вейлниг [2] китобида кўрсатиб ўтилган.

Юқорида қўйилган масалаларнинг дифференциал аналоги Дж.Ходжиев, Қ.Қ.Мўминов, И.В.Чилин, Р.Г.Арипов ва бошқа олимлар томонидан ўрганилган бўлиб, олинган натижалар дифференциал геометриянинг бир қатор муҳим масалаларига татбиқ қилинган (м.н [3], [4], [5], [6]).

Аввал санаб ўтилган барча ишларда қўйилган масала ҳақиқий ёки комплекс фазоларнинг чизиқли алмаштиришлар группасини маълум қисмгруппалари таъсирига нисбатан ўрганилган. Замонавий инвариантлар назарияси курсида ҳақиқий, комплекс фазолар билан бир қаторда кватернион вектор фазолар ҳам ўрганилиб, унинг чизиқли алмаштиришлари группаси таъсирига нисбатан инвариант тушунчалар ҳам кенг тадқиқ қилиниб келинмоқда (м.н [7], [8], [9], [10]).

Ушбу ишда кватернион сонлар жисми $\mathbb{H}$устида аниқланган n-ўлчовли вектор фазонинг симплектик (баъзи адабиётларда компакт симплектик дейилади) алмаштиришлари группаси $Sp(n)$ таъсирига нисбатан инвариант, дифференциал рационал функциялар жисмини ташкил этувчиларини қуриш масаласи қаралган.

$V = H^n$-кватернион сонлар жисми устида аниқланган, n ўлчовли вектор фазо бўлсин. Унинг элементларини n-ўлчовли устун-векторлар кўринишида

оламиз, яъни $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)^T$, бу ерда $x_l=x_{l1}+i\cdot x_{l2}+j\cdot x_{l3}+k\cdot x_{l4}\in H$, $x_{lm}\in R$, $i^2=j^2=k^2=-1$, $ij=-ji=k$, $jk=-kj=i$, $ki=-ik=j$. Маълумки [11], $\mathbb{H}$ фазонинг барча тескариланувчи чизиқли алмаштиришлари группа ташкил қилади ва $GL\left(n,H\right)$ кўринишида, шунингдек, $GL\left(n,H\right)$нинг

$$\left\langle x,y\right\rangle=\overline{x}_1y_1+\overline{x}_2y_2+...+\overline{x}_ny_n \tag{1}$$

бичизиқли формани ўзида инвариант сақловчи қисм группаси $Sp\left(n\right)$ кўринишида белгиланади, ҳамда *симплектик группа* дейилади, яъни

$$Sp\left(n\right)=\left\{g\in GL\left(n,H\right):\left\langle gx,gy\right\rangle=\left\langle x,y\right\rangle,\ \forall x,y\in V\right\}.$$

Табиийки, $GL\left(n,H\right)$ группа $n-$тартибли, тескариланувчи, квадрат кватернион матрицалар группасига изоморф бўлиб, унинг $Sp\left(n\right)$ қисм группаси $\overline{g}^Tg=g\overline{g}^T=E$ шартни қаноатлантирувчи $n-$тартибли квтернион матрицалардан иборат бўлади, яъни

$$Sp\left(n\right)=\left\{g\in GL\left(n,H\right):\overline{g}^Tg=g\overline{g}^T=E\right\},$$

бу ерда $E-n$ тартибли бирлик кватернион матрица.

$\mathbb{R}$ орқали кватернионлар жисмининг шундай коммутатив, бирлик ҳалқасини белгилаймизки, $\forall a\in\mathbb{R}$ ва $\forall x\in H$ учун $ax=xa$ тенглик ўринли бўлади[1]. $\mathbb{R}$ ҳалқа устида аниқланган, чексиз сондаги ихтиёрий бутун мусбат даражали, кватернион ўзгарувчили кўпҳадлар тўпламини $\mathbb{R}\left[x_0,x_1,...,x_n,...\right]$ кўринишида белгилаймиз. Унинг ихтиёрий $f\left[x_0,x_1,...,x_n,...\right]\in\mathbb{R}\left[x_0,x_1,...,x_n,...\right]$ элементини

$$f\left[x_0,x_1,...,x_n,...\right]=\sum_{l_1,l_2,...,l_n=0}^{\infty}\sum_{i_1,i_2,...,i_n=0}^{\infty}\alpha_{i_1i_2...i_n...}^{l_1l_2...l_n...}x_{i_1}^{l_1}x_{i_2}^{l_2}...x_{i_n}^{l_n}... \tag{2}$$

бу ерда $\alpha_{i_1i_2...i_n...}^{l_1l_2...l_n...}\in\mathbb{R}$, $i_k\neq i_{k+1}$, $x_{i_k}^{l_k}\in H,k\in Z_0^+$. Табиийки, $\mathbb{R}\left[x_0,x_1,...,x_n,...\right]$ тўпламда $\forall f,g\in\mathbb{R}\left[x_0,x_1,...,x_n,...\right]$ кўпҳадлар учун $f+g$ ва $f\cdot g$ алгебраик амаллар коррект аниқланган бўлиб, $\mathbb{R}\left[x_0,x_1,...,x_n,...\right]$ тўплам бу амалларга нисбатан $\mathbb{R}$ *ҳалқа устида аниқланган, нокоммутатив ўзгарувчили кўпҳадлар ҳалқасини* ташкил қилади, [12].

Айтайлик, d амал $\mathbb{R}$ коммутатив ҳалқанинг ихтиёрий дифференциали бўлсин. $\mathbb{R}\left[x_0,x_1,...,x_n,...\right]$ ҳалқада δ дифференциаллаш амалини қуйидагича оламиз, [5]:

$$\delta\left(x_n\right)=x_{n+1},\delta\left(ax_n\right)=d\left(a\right)x_n+ax_{n+1},n\in Z_0^+ \tag{3}$$

Юқоридаги тенгликлар ёрдамида δ дифференциаллаш $\mathbb{R}\left[x_0,x_1,...,x_n,...\right]$ ҳалқанинг ҳамма қисмида нокоммутативликни сақлаган ҳолда бир қийматли аниқланади, яъни

$$\delta\left(x_kx_n\right)=x_{k+1}x_n+x_kx_{n+1}\neq x_{n+1}x_k+x_nx_{k+1}=\delta\left(x_nx_k\right).$$

[1] Изоҳ: хусусий ҳолда R ҳалқани ҳақиқий сонлар майдони сифатида қарашимиз мумкин.

Ушбу $x_0 = x = x^{(0)},\ x_n = x^{(n)}$ белгилашлар ёрдамида $\delta\left(x^{(n)}\right) = x^{(n+1)}$ тенгликка эга бўламиз. Юқоридаги белгилаш ва тенгликдан фойдаланиб, $\mathbb{R}\left[x_0, x_1, ..., x_n, ...\right]$ $d-$халқани $\mathbb{R}\{x\}$ кўринишида ёзишимиз мумкин. Агар $\mathbb{R}$ ҳалқанинг d дифференциалини майдон муносабатларигача бир қийматли давом эттириш мумкин бўлса, $\delta : \mathbb{R}\{x\} \to \mathbb{R}\{x\}$ дифференциаллаш амалини ҳам

$$\delta\left(f^{-1}\right) = -f^{-1}\delta(f)f^{-1},\quad \delta\left(f^{-1}\cdot g\right) = -f^{-1}\delta(f)f^{-1}\cdot g + f^{-1}\cdot\delta(g)$$

тенгликлар ёрдамида жисм муносабатларигача бир қийматли давом эттириш мумкин. Бундай жисмни хусусий ҳолда, $\mathbb{R}\ x$ кўринишида белгилаймиз, унинг элементлари *нокоммутатив $d-$рационал функция* дейилади ва $f\ x$ кўринишида белгиланади. Шунингдек, *$G-$инвариант нокоммутатив $d-$кўпҳад, $G-$инвариант нокоммутатив $d-$рационал функция,* $\mathbb{R}\ x^{G}$ *$d-$жисм* ва бошқа тушунчалари юқоридаги таърифларга аналог тарзда таърифланади.

Қуйида, $G = Sp(n)$ бўлган ҳолда, $\mathbb{R}\ x^{G}$ $d-$жисмнинг дифференциал ташкил этувчиларини тиклаш масаласини қараймиз. Агар $G = Sp(n)$ бўлса, юқорида киритилган дифференциаллаш амали билан биргаликда $\mathbb{R}\ x$ $d-$жисмда

1) $\left(f^*\right)^* = f, \forall f \in \mathbb{R}\ x$;
2) $\left(a\cdot f\right)^* = a^*\cdot f^*, \forall a \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathbb{R}\ x$;
3) $\left(f+g\right)^* = f^* + g^*, \forall f, g \in \mathbb{R}\ x$;
4) $\left(f\cdot g\right)^* = g^*\cdot f^*, \forall f, g \in \mathbb{R}\ x$;
5) $\left(f^{-1}\right)^* = \left(f^*\right)^{-1}, \forall f \in \mathbb{R}\ x$;
6) $\left(\delta(f)\right)^* = \delta^*(f), \forall f \in \mathbb{R}\ x$

шартларни қаноатлантирувчи $*: \mathbb{R}\ x \to \mathbb{R}\ x$ амални қараймиз, [3].

Кватернион ўзгарувчили рационал функциялар жисми қаралганда $*-$амал эрмит қўшма амали билан устма-уст тушади ва f^* белгилашни $\overline{f}$ белгилашга алмаштирамиз. Бу ҳолда, $\mathbb{R}\{x\}$ ва $\mathbb{R}\ x$ белгилашларнинг ўрнига, мос ҳолда $\mathbb{R}\{x, \overline{x}\}$ ва $\mathbb{R}\ x, \overline{x}$ белгилашлардан фойдаланамиз.

1-теорема. *Барча $Sp(n)-$инвариант $f\left(x_1, ..., x_n, \overline{x}_1, ..., \overline{x}_n\right)$ кватернион ўзгарувчили кўпҳадлар қуйидаги*

$$\left\langle x_l, x_m \right\rangle = \overline{x}_{l1}x_{m1} + \overline{x}_{l2}x_{m2} + ... + \overline{x}_{\ln}x_{mn}$$

кўринишдаги кўпҳадлар орқали рационал ифодаланади, бу ерда $l, m = \overline{1, n}$.

2-теорема (*1-теореманинг дифференциал аналоги***).** *Ихтиёрий $Sp(n)-$инвариант кватернион ўзгарувчили $d-$рационал функция қуйидаги*

$$\left\langle x^{(l)}, x^{(m)} \right\rangle = \overline{x}_1^{(l)}x_1^{(m)} + \overline{x}_2^{(l)}x_2^{(m)} + ... + \overline{x}_n^{(l)}x_n^{(m)} \qquad (4)$$

$Sp(n)$ – *инвариант* d – *кўпҳад орқали* d – *рационал ифодаланади.*

Ушбу теоремалардан фойдаланиб, қўйилган масаланинг ечимини ифодаловчи теоремани келтириб ўтамиз.

3-теорема. *Қуйидаги*

$$\left\langle x^{(l)}, x^{(l+1)} \right\rangle, \ \left\langle x^{(l)}, x^{(l)} \right\rangle, \quad l = \overline{0, n-1} \tag{5}$$

система $\mathbb{R}\ x, \bar{x}^{\ Sp(n)}$ d – *жисмнинг ташкил этувчилар системасини ифодалайди.*

Адабиётлар

1. Винберг Э. Б., Попов В.Л. Теория инвариантов, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 1989.
2. Weyl H. The classical groups. Their invariants and representation. Princeton. Univ. Press. 1997.
3. Хаджиев Дж. Приложение теории инвариантов к дифференциальной геометрии кривых. – Ташкент: Фан, 1998.
4. Арипов Р.Г., Хаджиев Дж. Полная система глобальных дифференциальных и интегральных инвариантов кривой в евклидовой геометрии Известия ВУЗов. Математика, No. 7, 2007.
5. Муминов К.К., Чилин В.И. Эквивалентность кривых в конечномерных пространствах. LAP LAMBERT Academic Publishing. Deutschland (Германия). 2015.
6. Муминов К.К. Equivalence of paths with respect to the action of a symplectic group, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., No. 7, 2002, pp. 27-38.
7. Nagayoshi Iwahori. Some remarks on tensor invariants of O(n), U(n), Sp(n). Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 10, No. 2, 1958.
8. Andreas Bernig. Invariant valuations on quaternionic vector spaces, arxiv: 1005.3654v1.[math.DC.], 2010 Mat.
9. Andreas Bernig., Gil Solanes., Classification of invariant valuations on the quaternionic plane, Journal of Functional Analysis 267 (2014) 2933-2961.
10. Гордеев В.Н. Кватернионы и бикватернионы с приложениями в геометрии и механике. Издательство "Сталь Киев", 2016.
11. Шевалле К. Теория групп Ли. Издательство ИЛ. – Москва, 1948.
12. Michiel Hazewinkel, Nadiya Gubareni. Algebras, Rings and Modules. Non-commutative Algebras and Rings. CRC Press. Taylor and Francis Group, LLC, 2016.
13. Kiep I., Eldred J. Pascoe and other, Non commutative rational functions invariant the action of finite solvable group, arxiv 1909.08.043v2 [mathRu].
14. Кирчей И.И. Правило Крамера для кватернионных систем линейных уравнений, Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, No. 4, pp. 67-94.

СЕЛЕКЦИОННО ТОЧЕЧНО МАКСИМАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И КАРДИНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Жувонов К.Р
ТИИИМСХ
qamariddin.j@mail.ru

В данной заметке рассматриваются кардинальные свойства селекционно точечно максимальных T_1- пространств. А также изучаются геометрические свойства пространств $\exp_n X$, $\exp_w X$, SPX и $SP_G^n X$ определенных точечно максимальных пространствах.

Пусть X топологическое T_1 - пространство. Множество всех непустых замкнутых подмножеств пространства X обозначим через $\exp X$ т.е. $\exp X = \{F : F \subset X,\ F \neq \varnothing,\ F = \overline{F}\}$. Для открытых множеств $U_1, U_2, ...U_n \subset X$ положим $O\langle U_1, U_2, ...U_n\rangle = \left\{F : F \in \exp X : F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i,\ F \cap U_i \neq \varnothing,\ i = \overline{1,n}\right\}$.

Семейство $O\langle U_1, U_2, ...U_n\rangle$ составляет базу топологии Виеториса на пространства $\exp X$ которая называется гиперпространством пространства X. Заметим, что если X есть T_1 - пространство, тогда $\exp X$ тоже T_1 - пространство.

Непрерывное отображение $f : \exp X \to X$ называется селекцией для $\exp X_1$, если $f(S) \in S$ для каждого $S \in \exp X$ (на пространстве $\exp X$ рассматривается выше определенная Виеторисовская топология).

Точка $p \in X$ пространства X называется селекционно - максимальной, если существует такое непрерывное отображение $f : F(X) \to X$ что, из $p \in S \in \exp X$ следует $f(S) = p$. Пространство X называется селекционно-точечно максимальным, если все его точки селекционно максимальны [1].

Для точки $p \in X$ пространства X определяется кардинальный инвариант $sa(\mathrm{p}, X)$ называемый селекционно апрроксимирующим числом пространства X в точке p следующим образом:

а) Если p есть изолированная точка пространства X, то $sa(\mathrm{p}, X) = 0$,

б) Если p неизолированная точка пространства X, то $sa(\mathrm{p}, X)$ есть такое минимальное кардинальное число k, что существует множество $S \subset X \setminus \{p\}$ что $|S| \leq k$ и $p \in \overline{S}$. Значит, если p есть изолированная точка, то $sa(\mathrm{p}, X) = 0$ и $sa(X) = \sup\{S(\mathrm{p}, X) : \mathrm{p} \in X\}$. Кардинальное число $sa(X)$ сравнимо меньше кардинального числа $t(X)$ теснота пространства X, т.е.. $sa(X) \leq t(X)$.

Заметим, что если $sa(X) \leq w$, то X локально сепарабельно и $sa(X \times Y) \leq \max\{sa(X), sa(Y)\}$. Пусть $\Psi(p, X)$ псевдохарактер пространства X

в точке p, т.е. $\Psi(p, X)=\left\{\min\left\{|B|: \cap\{O: O\in B\}=p\right\}\right\}$, $\Psi(X)=\sup\left\{\Psi(x, X): x\in X\right\}$ - псевдохарактер пространства.

На n – й степени X^n компакта X действует симметрическая группа S_n всех перестановок как группа перестановок координат. Множество орбит этого действия с фактор – топологией обозначим через SP^nX точки пространства SP^nX - это конечные подмножества (классы эквивалентности) произведения X^n. При этом две точки $(x_1, x_2, ..., x_n)\in X^n, (y_1, y_2, ..., y_n)\in X^n$ считаются эквивалентным, если существует такая перестановка $ъ\in S_n$, что $y_i=x_{ъ(i)}$. Пространство Sp^nX называется n-й симметрической степенно пространства Ⅹ. Понятие симметрической степени допускает обобщения т.е. пусть G-произвольная подгруппа группы S_n. Тогда G также действует на X^n как группа перестановок координат. Соответственно на X^n возникает отношение G - симметрической эквивалентности. Фактор-пространство произведения X^n по отношению G-симметрической эквивалентности называется G - симметрической степенно пространства Ⅹ и обозначается через SP^n_GX.

Для топологического T_1 - пространства X обозначим пространства $\exp_n(X)$, $SP^n(X)$ и $SP^n_G(X)$. Этими пространствами и понятиями относящихся кардинальным инвариантам можно ознакомиться в работах [2, 3]. Через $\exp_\omega(X)$ обозначим подпространства $\bigcup_{n=1}^{\infty}\exp_n(X)$ пространства $\exp X$ где $\exp_n X=\{F\in \exp X: |F|\le n\}$. Известно, что $\exp_\omega(X)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\exp_n(X)$ всюду плотно в $\exp X$ т.е. $\overline{\exp_\omega(X)}=\exp(X)$.

Нами получены следующие результаты:

Теорема 1. Пусть топологическое пространство X является непрерывной селекцией для $\exp X$, тогда следующие условия эквивалентны:

a) X нульмерно и удовлетворяет первой аксиоме счетности;
b) X является селекционно точечно максимальным пространством и $sa(X)\le\omega$;
c) X является селекционно точечно максимальным пространством и $\Psi(X)\le\omega$;
d) $sa(\exp_n(X))\le\omega$, для любого $n\in N$;e) $\Psi(\exp_n(X))\le\omega$, для любого $n\in N$.

Теорема 2. Пусть топологическое пространство X является непрерывной селекцией для пространства $\exp X$, тогда следующие условия эквивалентны:

a) X нульмерно и удовлетворяет первой аксиоме счетности;
b) $sa(SP^n(X))\le\omega$, для любого $n\in N$; k) $sa(\exp_\omega(X))\le\omega$;
c) $sa(SP_G^{\,n}(X))\le\omega$; m) X - секвенциальное пространство;
d) $\Psi(\exp_\omega(X))\le\omega$; v) $\Psi(SP^n(X))\le\omega$, для любого $n\in N$;

е) $\Psi\left(SP_G^n(X)\right) \le \omega$, для любого $n \in N$.

Литература

1. Gutev V., Nogura T. Selection pointwise - maximal spaces. Top. And its Appli. 2005. V.146-147 p. 397-408.
2. Федорчук В.В. Ковариантные функторы в категории компактов, абсолютные ретракты и Q-многообразия. Успехи мат. Наук, М. 1981, Т-36, выпуск 3,с 63-96.
3. Бешимов Р.Б. Некоторые кардинальные инварианты и ковариантные функторы в категориях топологических пространств Докт. Диссер. НУУз., Ташкент, 2007.

СУПЕРРАСШИРЕНИЯ $\lambda(X)$ И БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

Жувонов К.Р., Атамуродова Д.Р.
ТИИИМСХ, ТГПУ
qamariddin.j@mail.ru

В данной заметке рассматриваются топологические свойства гомеоморфности пар вида (Q^∞, σ) и (R^∞, Σ) бесконечномерных многообразий σ-компактных подпространств пространства суперрасширения $\lambda(X)$ бесконечного топологического компактного пространства X [1].

Пусть X компактного топологическое пространство. Система $\xi = \{F_\alpha : F_\alpha \subseteq X, \overline{F_\alpha} = F_\alpha, \alpha \in A\}$ замкнутых подмножеств компактного пространства X. Система ξ называется сцепленной, если любые два ее элемента имеют непустое пересечение [2]. Сцепленная система ζ максимальнай (коротко, м.с.с), если ζ не является подсемейством другой сцепленной системы ζ'.

Сцепленная система ξ замкнутых подмножеств компактного пространства X называется (является) максимальной, если она обладает следующим свойством:
“если замкнутое множество $A \subset X$ пересекается с каждым элементом из ξ”, то $A \in \xi$. (*)

Напомним, что суперрасширением топологического компактного пространства X называется множество, $\lambda(X)$ состоящее из всех максимально сцепленных систем замкнутых подмножеств пространства X [3].

Пусть X произвольный бесконечный X-компакт. Через $\lambda_n(X)$ мы обозначаем подпространство суперрасширения $\lambda(X)$, состоящее из всех мсс. носитель которых имеет мощность $\le n$. Пусть ζ-м.с.с замкнутых подмножеств пространства X. Подсистему $\zeta' \subset \zeta$ назовем базой, если для любого $F \in \zeta$

существует такое $\Phi \in \xi'$, что $\Phi \subset F$. Система ξ_i наименьших (по включению) элементов м.с.с ξ является наименьшей базой ξ. Носителем м.с.с ξ будем называть множество $H(\xi)=\bigcap \xi_i$. Для бесконечного компакта X положим $\lambda_n(X)=\{\xi:\xi \in \lambda(X) \quad |H(\xi)| \leq n\}$. Заметим прежде всего, что $\lambda_1(X) \simeq X$ (отождествляем м.с.с ξ с ее одноточечным носителем) и $\lambda_2 X = \lambda_1 X_1$ поскольку не существует м.с.с носитель которой состоял бы ровно из двух точек. Однако, при $n \geq 3$ все подмножества $\lambda_n(X)$ различны. В самом деле, для любого $n \geq 3$ нетрудно построить м.с.с $\xi_{\in \lambda X}$, носитель которой состоит из n точек $x_1, x_2, ..., x_n$. Например, ξ можно задать с помощью такой базы $\xi'=\{x_2, ..., x_n\} \cup \{\{x_1, x_k\}:k=2,\ldots,n\}$.

Для любого $n \geq 3$ все подмножества $\lambda_n(X)$ замкнуты в $\lambda(X)$. Следовательно пространства $\lambda_n(X)$ компактны. Для компакта X через $\lambda_\omega(X)$ обозначим множество $\bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_n(X)$ т.е. $\lambda_\omega(X)=\bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_n(X)$ [4]. Очевидно, что для любого компакта X имеем последовательность компактов $\lambda_1(X) \subset \lambda_2(X) \subseteq ....$

Говорят, что пространство X называется k_ω- пространством, если X является возрастающим пределом семейства компактов X_i т.е. $X = \lim_{\rightarrow} X_i$, где $X_1 \subset X_2 \subset ....$ Через R^ω обозначается вверх направленный (возрастающий) предел семейства R^n, каждый элемент R^n есть подмножество R^ωкоторое является счетным произведением действительных прямых. т.е. $R^\infty = \lim_{\rightarrow} R^n$таким же образом определяется пространство Q^∞, где $Q^\infty = \lim_{\rightarrow} Q^n$, где $Q=\prod_{i=1}^{\infty}[-1.1]_i$ - гильбертов куб, где $[-1,1]_i \subset R$. Очевидно, что пространства R^ω и Q^∞ бесконечномерны [1]. Через Σ обозначаем линейную оболочку стандартного кирпича Q' в гильбертовом пространстве l_2 где $Q'=\prod_{i=1}^{\infty}[0, 2^{-i}]$;

Евклидово пространство R^n естественно является подпространством счетного произведения R^ω. Тогда во множестве $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ имеются две естественные топологии: топология предела вверх направленного семейства $R^1 \subset R^2 \subset R^3 \subset ...$и топология индуцированная в произведения R^ω.

Эти пространства соответственно обозначаются $\lim_{\rightarrow} R^n$ и R_f^ω или R^ωи σ.

Битопологическим пространством называется пара (X_1, X_2) состоящая из пространств X определенных в множестве $X(=X_1, =X_2)$ или пространство $X=(X, \tau_1, \tau_2)$ образованное двумя топологиями τ_1 и τ_2 где $X_i=(X, \tau_i), i=\overline{1,2}$[4].

Паракомпактное топологическое пространство X называется многообразием моделированным на пространства Y или Υ- многообразием, если всякая точка пространства X имеет окрестность гомеоморфную открытому подмножеству пространства Y.

Битопологическое пространство $M=(M,\omega,m)$ называется (R^{∞},σ)-многообразием, если топология m метризуема, $m\subset\omega$ и в каждой точке M имеется m-открытая окрестность и которое битопологически открыто вложено вложением $h:(U,\omega,m)\to(R^{\infty},\sigma)$ так чтобы, h не только открыто вложено U_m в σ и оно U_ω открыто вложено в R^{∞}[4].

Заметим, что для метризуемого континиума Пеано $\mathbb{I}$ пространство $\lambda(X)$ гомеоморфно гильбертовому кубу Q и подпространство $\lambda_\omega(X)$ всюду плотно в $\lambda(X)$. т.е. $\overline{\lambda_\omega(X)}=\lambda(X)$.

Получены следующие результаты:

Теорема 1.Битопологическое пространство $(\lambda_\infty(X),\lambda_w(X))$ является (R^{∞},σ)-многообразием (соответственно, (Q^{∞},Σ)-многообразием) тогда и только тогда, когда $\mathbb{I}$ метризуемый континиум Пеано и $\lambda_\infty(X)$ является R^{∞}-многообразием (соответственно, Q^{∞}-многообразием).

Теорема 2.Битопологическое пространство $(\lambda_\infty(X),\lambda_w(X))$ является (R^{∞},σ)-многообразием (гомеоморфно (R^{∞},σ)) тогда и только тогда, когда X (связно) локально связно, конечномерно и локально компактное метризуемое пространство без изолированных точек.

Теорема 3. Для любого метрического k_ω-пространства $\mathbb{I}$ пространство $\lambda(X)$ тоже k_ωпространство.

Следствие. Для каждого (связного) Q-многообразия $\mathbb{I}$ пара $(\lambda_\infty(X),\lambda_w(X))$ является (Q^{∞},Σ)-многообразием(гомеоморфно,(Q^{∞},Σ)).

Литература

1. Banakh T., Sakai K. Characterizations of (R^{∞},σ)- or (Q^{∞},Σ)- manifolds and their applications. Top. and its Appl. 106,2000, p.115-134.
2. J.Van Mill Superextensions of metrizable continue are Hilbert cubes. Fund. Math.107.1980.201-224
3. M. van de Vel Convex Hilbert cubes in superextensions. Top. Appl. 1986. V.22, pp. 255-266
4. А. В. Иванов О пространстве полных сцепленных систем. Сиб.мат.журнал 1986, Т. 27. №6, С. 95 – 110.

ПРОСТРАНСТВА $N(X)$ ПОЛНЫХ СЦЕПЛЕННЫХ СИСТЕМ И ЕГО НЕКОТОРЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА

Жураев Т.Ф

ТГПУ tursunzhuraev@mail.ru

Рассматриваются расположенности некоторых σ-компактных всюду плотных подмножеств пространства $N(X)$ полных сцепленных систем

определенных континиуме $\mathbb{I}$ и некоторые геометрические свойства подпространств являющихся бесконечномерными многообразиями определенных в произвольном метризуемом континиуме X.

Сцепленная система ξ максимальнай (коротко, м.с.с.), если ξ не является подсемейством другой сцепленной системы ξ' [2].

Сцепленная система ξ замкнутых подмножеств пространства X называется максимальной, если она обладает следующим свойством:
“если замкнутое множество $A \subset X$ пересекается с каждым элементом из ξ”, то $A \in \xi$. (*) [3].

Сцепленную систему ξ замкнутых подмножеств X назовем полной, если для всякого замкнутого множества $F \subset X$ верно условие:

“любая окрестность OF множества F содержит множество $\Phi \in \xi$” влечет $\Phi \in \xi$.(**)

Заметим, что для всякой сцепленной системы ξ существует наименьшая полная сцепленная система (коротко, псс) ξ_f, содержащая ξ. Система ξ_f, которую будем называть пополнением ξ, может быть построена путем присоединения к ξ всех замкнутых подмножеств $F \subset X$, удовлетворяющих условию (**)[4]. Суперрасширением топологического пространства $\mathbb{I}$ называется множество $\lambda(X)$состоящее из всех максимальных сцепленных систем замкнутых подмножеств пространства $\mathbb{I}$, а множество всех полных сцепленных систем (п.с.с) замкнутых подмножеств пространства X обозначается через *N(X)*. Заметим, что для множеств (пространств) $\lambda(X)$ и $_{N(X)}$ имеет место: $\lambda(X) \subset N(X)$.

Напомним, что пространство X называется k_ω- пространством, если X является пределом возрастающего семейства компактов X_i т.е. $X = \lim\limits_{\rightarrow} X_i$, где $X_1 \subset X_2 \subset \ldots$. Через R^ω обозначается вверх направленный (возрастающий) предел семейства R^n, каждый элемент R^n есть подмножества R^ωкоторое является счетным произведением R-действительных прямых. Таким образом определяется пространство Q^∞, где $Q^\infty = \lim\limits_{\rightarrow} Q^n$, где Q-гильбертов куб. т.е. $Q = \prod\limits_{i=1}^{\infty} [-1,1]_i, [-1,1]_i$ отрезок в R. Очевидно, что пространства R^ω и Q^∞ бесконечномерны.

Евклидово пространство R^n естественно является подпространством счетного произведения R^ω. Тогда во множестве $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} R^n$ имеются две естественные топологии: топология предела вверх направленного семейства $R^1 \subset R^2 \subset R^3 \subset \ldots$ и топология индуцированная в произведения R^ω. Эти пространства соответственно обозначаются $\lim\limits_{\rightarrow} R^n$ и R_f^ω или R^ω и σ.

Битопологическим пространством называется пара (X_1, X_2) состоящая из пространств определенных в множестве $X(=X_1,=X_2)$ или пространство $X=(X,\tau_1,\tau_2)$ образованное двумя топологиями τ_1,τ_2, где $X_{i_i}=(X,\tau_1), i=\overline{1,2}$[4].

Паракомпактное топологическое пространство называется многообразием моделированным на пространство или - многообразием, если всякая точка пространства имеет окрестность гомеоморфную открытому подмножеству пространства Y.

Битопологическое пространство $M=(M,\omega,m)$ называется (R^∞,σ)-многообразием [1], если топология m метризуема, $m\subset\omega$ и в каждой точке M имеется m-открытая окрестность и которое битопологически открыто вложено вложением $h:(U,\omega,m)\to(R^\infty,\sigma)$ так чтобы, h не только открыто вложено U_m в σ и оно U_ω открыто вложено в R^ω[1].

Для всякой полной сцепленной системы $\xi\in N(X)$ определим её носитель как объединение минимальных по выключению элементов ξ. Следовательно, для любого натурального числа n можно определить подпространство $N^n(X)$ пространства N(X), состоящее из всех п.с.с носитель которых состоит не более чем из n точек. т.е. $N^n(X)=\{\xi\in N(X):|supp\xi|\le n\}$. Очевидно, что для любого метрического компакта X имеем $N_s^1(X)\subset N_s^2(X)\subseteq\ldots$.

Для метризуемо континиума X положим $N^\omega(X)=\bigcup_{n=1}^{\infty}N^n(X)$ и $N^\infty(X)=\lim\limits_{\to}N^n(X)$.

Для метризуемого континиума X пространства $\lambda(X)$ и $N(X)$ гомеоморфны гильбертовому кубу Q. Из того что, эти пространства компактны и $N(X)\supset\lambda(X)$ вытекает, что $N(X)\setminus\lambda(X)$ является Q – многообразием. А подпространство $N^\infty(X)$ σ- компактно т.е. счетное обьединение компактных множеств. Через Σ обозначается линейная оболочка стандартного кирпича Q' где $Q'=\prod_{i=1}^{\infty}[0,2^{-i}]$ в гильбертовом пространстве .

Получены следующие результаты:

Теорема 1. Битопологическое пространство $(N^\infty(X),N^\omega(X))$ является (R^∞,σ) - многообразием (соответственно, (Q^∞,Σ)-многообразием) тогда и только тогда, когда X метризуемо и $N^\infty(X)$ является R^∞-многообразием (соответственно, Q^∞-многообразием).

Теорема 2. Битопологическое пространство $(N^\infty(X),N^\omega(X))$ является (R^∞,σ) - многообразием (гомеоморфно (R^∞,σ)) тогда и только тогда, когда X (связно) локально связно, конечномерно и локально компактное метризуемое пространство без изолированных точек.

Теорема 3. Для любого метрического k_ω-пространства X пространство $N(X)$тоже k_ωпространство.

Следствие. Для каждого (связного) Q-многообразия X пара пространств $(N^{\infty}(X), N^{\omega}(X))$ является (Q^{∞},Σ)-многообразием(гомеоморфно, (Q^{∞},Σ)).

Литература

1. T.Banakh, K. Sakai Characterizations of (R^{∞},σ)- or (Q^{∞},Σ)- manifolds and their applications. Top. And its Appl. 106,2000, p.115-134.
2. J.Van Mill Superextensions of metrizable continue are Hilbert cubes. Fund. Math.107.1980.201-224
3. M. van de Vel Convex Hilbert cubes in superextensions. Top. Appl. 1986. V.22, pp. 255-266.
4. А. В. Иванов О пространстве полных сцепленных систем. Сиб.мат.журнал 1986, Т. 27. №6, С. 95 – 110.

ВЗАИМНО ГОМЕОМОРФНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

Жураев Т.Ф., Мелиев Ш.О
ТГПУ
tursunzhuraev@mail.ru

В этой заметке рассматриваются геометрические и топологические свойства: типа гомеоморфности пар (Q^{∞},σ) и (R^{∞},Σ) бесконечномерных многообразий, σ-компактных подпространств пространства $P(X)$ вероятностных мер. Изучены топологические и геометрические свойства функтора P вероятностных мер и его подфункторов определённых в бесконечном компакте $\mathbb{I}$. Уделено внимание вопросу как те или иные свойства топологического пространства влияют на свойства мер на этом пространстве. Построение общей теории бесконечномерных многообразий повысило интерес к бесконечномерным объектам, существующим в “природе”. А функтор P вероятностных мер, переводящий произвольные бикомпакты в выпуклые подмножества локально выпуклых пространств, как раз и поставляет такие объекты. Исследование функтора P вероятностных мер ведётся на стыке по крайней мере трёх математических дисциплин: топологии, функционального анализа и теории вероятностей. Вероятностные меры не только объект, но и метод исследования. С помощью вероятностных мер А.Пелчинский заложил основы теории пространств Дугунджи и пространств Милютина. Рассматриваем геометрические свойства компактных подмножеств пространства $P(X)$ связанные с расположенностью друг в друге и топологической эквивалентности пары $(P_{\infty}(X), A)$, $((Q^{\infty},\sigma))$, и (R^{∞},Σ).

Для компактов $\mathbb{I}$ имеется простая топологическая классификация пространства $P(X)$. В случае конечного пространства X={n} точки м

пространства $\mathrm{P}(n) = P_n(\mathrm{n})$ являются выпуклыми линейными комбинациями мер Дирака вида:

$$\text{м} = m_0 \text{Д}_{x_0} + m_1 \text{Д}_{x_1} + \cdots + m_{n-1} \text{Д}_{x_{n-1}}$$

По этому они естетственно отождествляются с точками (n-1)-мерного симплекса у^{n-1}. При этом меры Дирака $\text{у}_{(i)}$ образуют вершины симплекса, а массы m_i , помещенные в точки i , являются барицентрическими координатами меры м. Таким образом, компакт $P(n)$ афинно-гомеоморфен симплексу у^{n-1}.

В случае бесконечного компакта X пространство $P(X)$ так же является бесконечном компактом (так как функтор Р сохраняет вес). Далее, оно, содержа симплексы сколь угодно большого числа измерений, бесконечномерно. По теореме Кэли выпуклый компакт $P(X) \subset R^{C(X)}$ афинно вкладывается в l_2. Следовательно, по теореме Кэллера компакт $P(X)$ как бесконечномерный выпуклый компакт, лежащий в l_2, гомеоморфен гильбертовому кубу Q. $Q = \prod_{i=1}^{\infty} [-1,1]_i$ - гильбертов куб, где $[-1,1]_i \subset R$ - отрезок; l_2 - сепарабельное гильбертово пространство; Σ -линейная оболочка стандартного кирпича Q' в гильбертовом пространстве l_2 где $Q' = \prod_{i=1}^{\infty} [0, 2^{-i}]$; σ - линейное подпространство гильбертова пространства l_2, состоящие из всех точек конечное число координат которых отлично от нуля;

Понятия относящиеся к топологическим, геометрическим свойствам функтора Р вероятностных мер и его подфункторам можно найти в работах [1-3]. Для компакта X через $P_n(X)$ обозначим множество вероятностных мер $\mu \in P(X)$, носители которых состоят не более чем из n точек т.е. $P_n(X) = \{\mu \in P(X) : |\operatorname{supp} \mu| \le n\}$. Значит, точки пространства $P_n(X)$ это выпуклые линейные комбинации $\sum_{i=1}^{k} m_i \sigma_{x_i}, k \le n, \sum_{i=1}^{k} m_i = 1, m_i \ge 0$ мер Дирака σ_{x_i}. Очевидно, что $P_n(X) \subset P(X)$ и имеется такая последовательность бесконечных компактов $P_1(X) \subset P_2(X) \subset \ldots \subset P_n(X) \subset \ldots$. Следователь через $P_\omega(X)$ обозначим множество всех вероятностных мер с конечными носителями т.е. $P_\omega(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(X)$. Заметим, что $P_\omega(X)$всюду плотно в $P(X)$ и σ-компактно.

Напомним [4], что пространство X называется k_ω- пространством, если X является возрастающим пределом семейства компактов т.е. $X = \lim_{\rightarrow} X_i$, где $X_1 \subset X_2 \subset \ldots$. Через R^ω обозначается вверх направленный (возрастающий) предел семейства R^n, каждый элемент R^n есть подмножество R^ω, которое является счетным произведением действительных прямых. Таким же образом определяется пространство Q^∞, где $Q^\infty = \lim_{\rightarrow} Q^n$, где Q-гильбертов куб. Очевидно, что пространства R^ω и Q^∞ бесконечномерны.

Евклидово пространство R^n естетственно является подпространством счетного произведения R^ω. Тогда во множестве $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ имеются две естественные топологии: топология предела вверх направленного семейства $R^1 \subset R^2 \subset R^3 \subset \ldots$ и топология индуцированная в произведения R^ω.

Эти пространства соответственно обозначаются $\varinjlim R^n$ и R_f^ω или R^ω и σ.

Битопологическим пространством называется пара (X_1, X_2) состоящая из пространств определенных в множестве $X(=X_1, =X_2)$ или пространство $X=(X,\tau_1,\tau_2)$ образованное двумя топологиями τ_1, τ_2, где $X_i = (X, \tau_i), i = \overline{1,2}$[4].

Напомним, что паракомпактное топологическое пространство X называется многообразием моделированным на пространство ν или ν-многообразием, если всякая точка пространства X имеет окрестность откровенность гомеоморфную открытому подмножеству пространства ν.

Битопологическое пространство $M=(M,\omega,m)$ называется (R^∞,σ)-многообразием, если топология m метризуема, $m \subset \omega$ и в каждой точке M имеется m-открытая окрестность и которое битопологически открыто вложено вложением $h:(U,\omega,m) \to (R^\infty,\sigma)$ так чтобы, h не только открыто вложено U_m в σ и оно U_ω открыто вложено в R^ω[4].

Пусть $P_\infty(X) = \varinjlim P_n(X)$ вверх направленная башня с компактов $P_1(X) \subset P_2(X) \subset \ldots$. Полученны следующие результаты:

1. Для любого метрического σ- компакта X пространства $P_\alpha(X), P_\omega(X)$ и $P_\infty(X)$ являются k_ω-пространством ;
2. Для любого метрического k_ω- пространства X пространства $P_{f,n}(X), P_{f,n}^c(X)$ и $P_n^c(X)$ тоже k_ω- пространства;
3. Для бесконечного ANR пространства X имеет место: $(F_\infty(X), F_\omega(X)) \simeq (R^\infty,\sigma)$ где F есть произвольный локально-выпуклый подфунктор функтора P_n.
4. Для каждого содержащего гильбертов куб Q ANR компакта X имеет место: $(F_\infty(X), F_\omega(X)) \simeq (Q^\infty,\Sigma)$,

Литература

1. Федорчук В.В. Вероятностные меры в топологии Успехи мат. наук Т.46.вып 1, 1991,с.41-80.
2. Жураев Т.Ф. Некоторые геометрические свойства функтора P вероятностных мер , М.МГУ ,канд.диссер.1989,90 с.
3. Федорчук В.В. Расслоения пространств вероятностных мер и геометрия бесконечных итераций некоторых монадочных функторов. ДАН СССР ,1983, Т.301, №1, с.41-45.
4. Banakh T., Sakai K. Characterizations of (R^∞,σ)- or (Q^∞,Σ)- manifolds and their applications. Top. And its Appl. 106,2000, p.115-134.

ОРБИТА ГРУППЫ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРОСТРАНСТВА ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

Заитов А.А
Ташкентский архитектурно-строительный институт

Группа топологических преобразований есть [3] тройка $(G, X, б)$, где G – топологическая группа, X – хаусдорфово топологическое пространство, $б: G Ч X \to X$ – такое непрерывное отображение (называемое действием), что

1) $б\big(g_2, б(g_1, x)\big) = б(g_2 g_1, x)$ для всех $g_1, g_2 \in G$ и $x \in X$;

2) $б(e, x) = x$ для всех $x \in X$, где e – единица группы.

Пусть X – тихоновское пространство, вX – его бикомпактное расширение Стоуна-Чеха. По определению множество $P_в(X)$ задается [2] равенством

$$P_в(X) = \{\mu \in P(вX) : \operatorname{supp} \mu \subset X\},$$

где $P(вX)$ – пространство всех вероятностных мер на вX, снабженное топологией поточечной сходимости. Для краткости положим $P(X) := P_в(X)$.

Для топологической группы G топологического преобразования $(G, X, б)$ положим

$$P(G) = \big\{P\big(б_g\big) : g \in G\big\},$$

где $б_g : X \to X$ – гомеоморфизм, определенно равенством $б_g(x) = б(g, x)$.

Пусть U_g – открытая в G окрестность элемента $g \in G$. Определим множество $U_{P(б_g)} = \big\{P(б_h) : h \in U_g\big\}$ и положим

$$\mathcal{B}_{P(б_g)} = \big\{U_{P(б_h)} : U_g \in ф_G\big\},$$

где $ф_G$ – топология пространства G. Легко проверить, что семейство $\mathcal{B}_{P(б_g)}$ образует систему окрестностей точки $P\big(б_g\big) \in P(G)$.

Известно (см [4], Теорема 1), что множество $P(G)$ является топологической группой относительно операции $P\big(б_{g_2}\big)P\big(б_{g_1}\big) = P\big(б_{g_2 g_1}\big)$, $g_1, g_2 \in G$. При этом $P(б_e)$ – единица группы $P(G)$ и $P\big(б_g\big)^{-1} = P\big(б_{g^{-1}}\big)$ – обратное к $P\big(б_g\big)$, $g \in G$.

Для б можно определить действие $б^P : P(G) Ч P(X) \to P(X)$ по правилу

$$б^P\big(P\big(б_g\big), \mu\big) = P\big(б_g\big)(\mu).$$

Для группы $(G, X, б)$ топологических преобразований тройка $(P(G), P(X), б^P)$ является ([4], Предложение 3) группой топологических преобразований.

Пусть X – некоторое -пространство и $x \in X$. Подмножество $G(x) = \{б(g, x) \in X : g \in G\}$ называется [1] орбитой точки x (относительно действия группы G). Если $б(g, x) = б(h, y)$ для некоторых $g, h \in G$, $x, y \in X$, то $G(x) = G(y)$. Таким образом, орбиты $G(x)$ и $G(y)$ любых двух точек $x, y \in X$ либо не пересекаются, либо совпадают. Через X/G обозначается множество, элементами которого являются орбиты $G(x)$ действия группы G на X.

Пусть $\mathrm{p}: X \to X/G$ – естественное отображение, сопоставляющее точке x ее орбиту $G(x)$. Тогда X/G обычным образом наделяется фактор-топологией (множество $V \subset X/G$ отрыто тогда и только тогда, когда $\mathrm{p}^{-1}V$ открыто в X). Полученное топологическое пространство X/G называется пространством орбит пространства X относительно действия б группы G.

Если $A \subset X$, то множество $\mathrm{p}^{-1}\mathrm{p}(A) = \{\mathrm{б}(g,a): g \in G, a \in A\}$ является объединением орбит элементов из A и называется насыщением множества A. Для открытого $V \subset X$ множество $\mathrm{p}^{-1}\mathrm{p}(V) = G(V)$ тоже открыто, что по определению означает, что множество $\mathrm{p}(V)$ открыто в X/G. Следовательно, проекция $\mathrm{p}: X \to X/G$ – непрерывное открытое отображение.

Множество $P(G)(\mathrm{м}) = \{\mathrm{б}^P(P(\mathrm{б}_g), \mathrm{м}) \in P(X): g \in G\}$ является орбитой меры м относительно действия $\mathrm{б}^P$ группы $P(G)$. Естественно возникает отображение $\mathrm{p}^P: P(X) \to P(X)/P(G)$. Отметим, что $\mathrm{p}^P: P(X) \to P(X)/P(G)$ – непрерывное открытое отображение.

Теперь можем сформулировать основной результат заметки.

Теорема 1. Пусть группа G компактна и X – некоторое Тихоновское -пространство. Тогда:

1) $\mathrm{p}^P: P(X) \to P(X)/P(G)$ – замкнутое отображение;

2) $\mathrm{p}^P: P(X) \to P(X)/P(G)$ – собственное отображение (т. е. прообраз любого компактного множества компактен);

3) хаусдорфово компактность пространства $P(X)$ равносильна хаусдорфово компактности пространства $P(X)/P(G)$;

4) локальная хаусдорфово компактность пространства $P(X)$ равносильна локальной хаусдорфово компактности пространства $P(X)/P(G)$.

Литература

1. Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. Москва, Наука, 1980.
2. Заитов А. А. Геометрические и топологические свойства подпространства $P_f(X)$ вероятностных мер. Известия высших учебных заведений. Математика, т. 63, № 10, 2019, стр. 28–37.
3. Мадиримов М. Размерность и ретракции в теории топологических групп преобразований. Ташкент, Фан, 1987.
4. Мадиримов М., Заитов А. А. Эквивариантные отображения пространства вероятностных мер. Бюллетень Института математики. (Принято к печати).

АЛГЕБРА ЛИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ НУЛЬ-ФИЛИФОРМНЫХ ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБР

Исакова Н.Т
Национальный университет узбекистана,
inazima95@mail.ru

Йордановы алгебры были впервые введены в 1933 году в работе Паскуаля Йордана, посвященной аксиоматизации основ квантовой механики, для формализации понятия алгебры квантовых наблюдаемых. Они были первоначально названы "r-системы счисления, но в 1946 году были переименованы в "йордановы алгебры" А. Альбертом, который начал систематическое изучение общих йордановых алгебр ([2]-[3]).

Алгебры Ли были введены для изучения концепции бесконечно малых преобразований Мариусом Софусом Ли в 1870-х годах и независимо открыты Вильгельмом Киллингом в 1880-х годах. Название Алгебра Ли было дано Германом Вейлем в 1930-х годах ([4], [5]-[6]).

Понятие дифференцирования алгебры обобщалось многими математиками в самых различных направлениях. В свое время йордановы дифференцирования первичных ассоциативных колец характеристики отличной от 2 рассматривал И.Н.Херстейн. Им было показано, что йорданово дифференцирование такого кольца является обычным дифференцированием.

Целью данной работы является описание алгебры Ли дифференцирований нуль-филиформной алгебры Йордана с помощью коммутатора.

Определение 1. Йорданова алгебра - это алгебра *(J, ·)*, у которой операция удовлетворяет следующим аксиомам:

$$x \cdot y = y \cdot x \ \textit{(Коммутативность)}$$

$$(x^2 \cdot y) \cdot x - x^2 \cdot (y \cdot x) = 0 \ \textit{(тождество Йордана)}$$

Определение 2. Алгебра Ли - это алгебра *(A, [·, ·]),* операция которой удовлетворяет следующим аксиомам:

$$[x, y] = -[y, x] \ \textit{(Антикоммутативность)}$$

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \ \textit{(тождество Якоби)}$$

Определение 3. Если F - линейное отображение $\delta : J \to J$ называется дифференцированием алгебры J, $\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)$ для всех $x, y \in J$.

Der(J) – множество всех дифференцирований алгебры J. Зафиксируем некоторое множество D множества *Der(J).*

Напомним, что коммутатор для элементов $x, y \in A$ задается как $[x, y] := xy - yx$. Известно, что множество эндоморфизмов *End(V)* пространства V является алгеброй Ли относительно коммутатора. Более того, множество дифференцирований замкнуто относительно коммутатора, т.е. *Der(J)* является алгеброй Ли.

Определим понятие нуль-филиформных алгебр Йордана. Для произвольной алгебры Йордана J определим ряд ([7]-[8]):

$$J^1 = J, J^2 = J^1J^1, \dots, J^k = J^1 J^{k-2} + J^2 J^{k-2} + \cdots + J^{k-1} J^1, \ k \geq 3$$

Определение 4. Пусть J алгебра Йордана размерности n, назовем ее нуль-филиформной, если $\dim L^i = (n + 1) - i, 1 \leq i \leq n + 1$.

Очевидно, что определение нуль-филиформности алгебры J равносильно тому, что алгебра J имеет максимальный индекс нильпотентности ([1]).

В следующем предложении опишем дифференцирования нуль-филиформных алгебр Йордана.

Предложение. Матричный вид всякого дифференцирования нуль-филиформных алгебр Йордана имеет следующий вид:

$$d = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \dots & \alpha_{1n-1} & \alpha_{1n} \\ 0 & 2\alpha_{11} & 2\alpha_{12} & 2\alpha_{13} & \dots & 2\alpha_{1n-2} & 2\alpha_{1n-1} \\ 0 & 0 & 3\alpha_{11} & 3\alpha_{12} & \dots & 3\alpha_{1n-3} & 3\alpha_{1n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 4\alpha_{11} & \dots & 4\alpha_{1n-4} & 4\alpha_{1n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5\alpha_{1n-5} & 5\alpha_{1n-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n\alpha_{11} \end{pmatrix}$$

Как отмечено выше, множество дифференцирований является алгеброй Ли относительно коммутатора. В следующей теореме мы покажем какой алгебре Ли будут изоморфны алгебры дифференцирований нуль-филиформных Йордановых алгебр.

Теорема. Пусть J – комплексная n-мерная естественным образом градуированная нуль-филиформная алгебра Йордана. Тогда $Der(J)$ изоморфно следующей алгебре:

$$J\{[e_i, e_j] = -(j-i)e_{i+j-1},\ 1 \le i, j \le n,\ i+j \le n$$

Следствие. Полученная алгебра является разрешимой алгеброй Ли с разрешимым нильпотентным нильрадикалом J^2, который не является естественным образом градуированным.

Литература

1. B. A. Omirov, Nilpotent Leibniz algebras and superalgebras, (2006), 50 − 65.
2. A. A. Albert, A structure theory for Jordan algebras, Ann. of Math. 48 (1947), 545-567.
3. P. Jordan, Uber Verallgemeinerungsmoglichkeiten des Formalismus der Quantenmechanik, Nachr. Ges. Wiss. Gottingen (1933), 29 − 64.
4. Н. Джекобсон, Алгебры Ли, Мир, (1964), 5 − 8.
5. W. Killing, Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen, I: Math. Ann., 31 (1888), 252290.
6. H. Weyl, Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen. I, Math. Z., 23 (1925), 271309.
7. N.Cantarini, V. G. Kac, Classification of linearly compact simple Jordan and generalized Poisson superalgebras, J. Algebra 313 (2007), 100 − 124.
8. K. McCrimmon, A Taste of Jordan Algebras, Springer-Verlag New York (2004)

О МОНАДЕ, ПОРОЖДЕННОЙ ФУНКТОРОМ *IS*

Ишметов А.Я., Курбанов Х.Х.

Ташкентский архитектурно строительный институт,
Академия Вооруженных Сил Республики Узбекистан,
ishmetov_azadbek@mail.ru,
qhamid_83@mail.ru

Пусть X – компактное хаусдорфово пространство, $C(X)$ – алгебра всех непрерывных функций, определенных на X, с обычными поточечными алгебраическими операциями и sup-нормой. На множестве $C(X)$ вводят новые операции – новое умножение на число и новое сложение функций по правилам:

1) $\odot: \mathbb{R}\text{Ч}C(X) \to C(X)$ по правилу $\odot(\text{л}, \text{ц}) = \text{л} \odot \text{ц} = \text{ц} + \text{л}_X$, где $\text{ц} \in C(X)$ и л_X – постоянная на X функция, принимающая везде значение $\text{л} \in \mathbb{R}$;

2) $\oplus : C(X)\text{Ч}C(X) \to C(X)$ по правилу $\oplus(\text{ц}, \text{ш}) = \text{ц} \oplus \text{ш} = max\{\text{ц}, \text{ш}\}$, **где** $\text{ц}, \text{ш} \in C(X)$**.**

Определение 1 *[2].* Функционал $\text{м}: C(X) \to \mathbb{R}$ называется идемпотентной вероятностной мерой на X, если он обладает следующими свойствами:

(i) (нормированность): $\text{м}(\text{л}_X) = \text{л}$ для всех $\text{л} \in \mathbb{R}$;

(ii) (max − plus-однородность): имеем $\text{м}(\text{л}\odot\text{ц}) = \text{л}\odot\text{м}(\text{ц})$ для всех $\text{л} \in \mathbb{R}$, и $\text{ц} \in C(X)$;

(iii) (max-plus-аддитивность) $\text{м}(\text{ц}\oplus\text{ш}) = \text{м}(\text{ц})\oplus\text{м}(\text{ш})$ для всех $\text{ц}, \text{ш} \in C(X)$.

Число $\text{м}(\text{ц})$ называется интегралом Маслова, соответствующим к м. Множество всех идемпотентных вероятностных мер на X обозначается [2] через $I(X)$. Всякая идемпотентная вероятностная мера является непрерывной [3]. Следовательно, $I(X) \subset C_p\big(C(X)\big) \subset \mathbb{R}^{C(X)}$. Обеспечим $I(X)$ с индуцированной из $\mathbb{R}^{C(X)}$ топологией. Базу окрестностей идемпотентной вероятностной меры $\text{м} \in I(X)$ относительно этой топологии образуют множества вида

$$\langle \text{м}; \text{ц}_1, \dots, \text{ц}_k; \text{е}\rangle = \{\text{м}' \in I(X): |\text{м}'(\text{ц}_i) - \text{м}(\text{ц}_i)| < \text{е},\ i = 1, \dots, k\}, \quad (1)$$

где $\text{ц}_1, \text{ц}_2, \dots, \text{ц}_k \in C(X)$ и $\text{е} > 0$.

Известно [2], что для всякого компактного хаусдорфово пространства X пространство $I(X)$ также является компактным хаусдорфовым пространством.

Рассмотрим непрерывное отображение $f: X \to Y$ компактных хаусдорфовых пространств. Оно индуцирует следующее естественное отображение $I(f): I(X) \to I(Y)$:

$$I(f)(\text{м})(\text{ц}) = \text{м}(\text{ц} \circ f) \quad (2)$$

Таким образом, конструкция I переводит компактные хаусдорфовы пространства в компактные хаусдорфовы пространства, а непрерывные отображения компактных хаусдорфовых пространств – в непрерывные

отображения компактных хаусдорфовых пространств. В таких случаях говорят, что конструкция I образует функтор, действующий в категории компактных хаусдорфовых пространств и их непрерывных отображений. В работе [2] установлено, что функтор I является нормальным в смысле Е. В. Щепина [1].

Так как функтор I нормален, то для каждой идемпотентной вероятностной меры $\text{м} \in I(X)$ определен ее носитель:

$$\operatorname{supp} \text{м} = \cap \{F\colon F \text{ замкнуто в } X \text{ и } \text{м} \in I(F)\}.$$

Для положительного целого числа n определим следующее множество

$$I_n(X) = \{\text{м} \in I(X)\colon |supp\ \text{м}| \le n\}.$$

Положим

$$I_{\text{щ}}(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n(X)\ .$$

Множество $I_{\text{щ}}(X)$ всюду плотно [2] в $I(X)$. Идемпотентную вероятностную меру $\text{м} \in I_{\text{щ}}(X)$ называют идемпотентной вероятностной мерой с конечным носителем. Для каждой точки $x \in X$ мера Дирака $\text{д}_x\colon C(X) \to \mathbb{R}$, определенная по формуле $\text{д}_x(\text{ц}) = \text{ц}(x)$, $\text{ц} \in C(X)$, является идемпотентной вероятностной мерой с конечным носителем, причем $\operatorname{supp} \text{д}_x = \{x\}$. Дальнейшее продвижение теории идемпотентных мер, и ассоциированные с ней отрасли наблюдалось в работах [3-7].

Следующее определение предложено А. Заитовым.

Определение 2. Функционал $\text{м}\colon C(X) \to \mathbb{R}$ называется max-plus-полуаддитивным, если: $\text{м}(\text{ц} \oplus \text{ш}) \ge \text{м}(\text{ц}) \oplus \text{м}(\text{ш})$ для всякой пары $\text{ц}, \text{ш} \in C(X)$.

Множество всех max-plus-полуаддитивных, нормированных и max-plus-однородных функционалов обозначим через $IS(X)$. Множество $IS(X)$ рассмотрим как подпространство тихоновского произведения

$$\prod_{\text{ц} \in C(X)} \mathbb{R}_{\text{ц}}$$

где $\mathbb{R}_{\text{ц}} = \mathbb{R}$**- числовая прямая для каждой** $\text{ц} \in C(X)$. Множества вида (1), более точно, множества вида

$$\langle \text{м};\ \text{ц}_1, \dots, \text{ц}_k;\ \text{е} \rangle = \{\text{м}' \in IS(X)\colon |\text{м}'(\text{ц}_i) - \text{м}(\text{ц}_i)| < \text{е},\ i = 1, \dots, k\} \quad (1')$$

где $\text{ц}_1, \text{ц}_2, \dots, \text{ц}_k \in C(X)$ и $\text{е} > 0$, образуют базу окрестностей функционала $\mu \in IS(X)$ относительно этой индуцированной топологии. Но, с другой стороны, множества вида (1′) образуют топологию поточечной сходимости на $IS(X)$.

Предложение 1[8]. Каждый max-plus-полуаддитивный, нормированный и однородный функционал $\text{м}\colon C(X) \to \mathbb{R}$ непрерывен.

Рассмотрим непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ компактных хаусдорфовых пространств. Оно индуцирует следующее естественное отображение $I(f)\colon I(X) \to I(Y)$:

$$IS(f)(\text{м})(\text{ц}) = \text{м}(\text{ц} \circ f) \qquad (2')$$

Из предложения 1 вытекает, что отображение $IS(f)$ непрерывно.

Напомним следующее понятие. Пусть $C = \{O, M\}$ и $C' = \{O', M'\}$ – две категории. Отображение $F: C \to C'$, переводящие объекты в объекты, а морфизмы в морфизмы, называется ковариантным функтором из категории C в категории C', если:

$F1)$ для всякого морфизма $f: X \to Y$ из категории C морфизм $F(f)$ действует из $F(X)$ в $F(Y)$;

$F2) F(id_X) = id_{F(X)}$ для всякого $X \in O$;

$F3) F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ для любых морфизмов f и g из M.

Предложение 3[8]. Конструкция IS является ковариантным функтором в категории компактных хаусдорфовых пространств и их непрерывных отображений.

Определение. Монадой (или тройкой) на категории C называется тройка $\boldsymbol{T} = \langle T, д, ш \rangle$, состоящая из ковариантного функтора T, и естественных преобразований $д: Id \to T$ (единица) и $ш: T^2 \to T$ (умножение), для которых выполняются условия:

$$ш_X \circ T(д_X) = ш_X \circ д_{T(X)} = id_{T(X)}.$$

Функтор T, который может быть включен в тройку T, называется монадичным в категории C.

Для функтора IS умножение $ш_X: IS^2(X) \to IS(X)$ определим по формуле $ш_X(б)(ц) = б(\tilde{ц})$, где $б \in IS^2(X)$, $ц \in C(X)$, а $\tilde{ц}: IS(X) \to R$ – непрерывная функция, определяемая формулой $\tilde{ц}(м) = м(ц)$, $м \in IS(X)$.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. Тройка $\boldsymbol{IS} = \langle IS, д, ш \rangle$, образует монаду в категории $Comp$ компактных хаусдорфовых пространств и их непрерывных отображений.

Литература

1. Щепин Е. В. Функторы и несчетные степени компактов. //Успехи математических наук. 1981. Т. 36. №3(219). С. 3-62. http://dx.doi.org/10.1070/RM1981v036n03ABEH004247

2. Заричный М. М. Пространства и отображения идемпотентных мер. //Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2010. Т. 74. №3. С. 45-64. https://doi.org/10.4213/im2785

3. Заитов А. А., Ишметов А. Я. Гомотопические свойства пространства $I_{f(X)}$ идемпотентных вероятностных мер. //Математические заметки. 2019. Т. 106. №4. С. 531-542. https://doi.org/10.1134/S0001434619090244

4. Заитов А. А., Ишметов А. Я. О монаде, порожденной функтором $I_в$. //Вестник НУУз, 2, 2013, С. 61-64.

5. Заитов А. А. Некоторые категорные свойства функторов $O_ф$ и O_R слабо аддитивных функционалов // Математические заметки. 2006. Т. 79. № 5. С. 681-693. https://doi.org/10.1007/s11006-006-0072-0

6. Заитов А. А. Геометрические и топологические свойства подпространства $P_{f(X)}$ вероятностных мер. //Известия высших учебных заведений. Математика. 2019. № 10. С. 28-37. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-10-28-37

7. Ишметов А. Я. О функторе I_f идемпотентных вероятностных мер. //Бюллетень науки и практики. 2019. Т. 5. № 4. С. 24-29. https://doi.org/10.33619/2414-2948/41/02

8. Курбанов Х. Х., Ёдгаров С. Ж. Функтор IS в категории компактных Хаусдорфовых пространств. //Бюллетень науки и практики. 2020. Т. 6. № 3. С. 13-22.

ДИНАМИКА СЕМЕЙСТВА КУБИЧЕСКИХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА

Курганов К. А., Охунова М. О.
Национальный Университет Узбекистана

В симплексе $S^2 = \left\{u = (x, y, z) \in [0,1]^3 : x + y + z = 1\right\}$ общий вид кубических стохастических операторов вольтерровского типа (куб.с.о.в.т.) имеет вид:

(1)

где

$$a,b,c,d,e,f,l_1,l_2,l_3 \in [0,1] \text{ и } l_1 + l_2 + l_3 = 1. \quad (2)$$

В общем случае исследовать $(1)-(2)$ сложно, поскольку пока не найдена вид внутренней неподвижной точки.

Строим оператор с параметром так, чтобы траектория полученного кубического стохастического оператора вольтерровского типа имел «спиралеобразный» характер.

При $a,e,c \in \left[0;\frac{2}{3}\right)$, $b,d,f \in \left(\frac{2}{3};1\right]$ (или обратно) оператор имеет «спиралеобразную» траекторию. Поэтому, примем $a = e = c = l_1 = l_2 = l_3 = \frac{1}{3}$, $b = d = f = p.$ Тогда оператор выглядит:

$$V_p : \begin{cases} x' = x\left[x^2 + xy + 3pxz + 3(1-p)y^2 + 2z^2 + 2yz\right] \\ y' = y\left[y^2 + 3pxy + yz + 2x^2 + 3(1-p)z^2 + 2xz\right] \\ z' = z\left[z^2 + xz + 3pyz + 3(1-p)x^2 + 2y^2 + 2xy\right]. \end{cases} \quad (3)$$

V_p имеет 4 неподвижные точки: $M(1,0,0)$, $M(0,1,0)$, $M(0,0,1)$ и $C\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Характеристические числа относительно $C\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ являютя

$$\lambda_0 = 3\,,\ \lambda_{1,2} = \frac{p+1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}(3p-1)i}{6}\,. \tag{4}$$

Теорема 1. Если $p \in \left[0;\frac{2}{3}\right)$, то V_p является эргодичным (регулярным), т.е. для всех $x \in \operatorname{int} S^2$ вся траектория сходится к $\leftarrow$.

Разделим симплекс S^2 на следующие части:

$$\begin{aligned} G_1 &= \left\{u \in \operatorname{int} S^2 : x > z > y\right\},\ G_2 = \left\{u \in \operatorname{int} S^2 : x > y > z\right\},\\ G_3 &= \left\{u \in \operatorname{int} S^2 : y > x > z\right\},\ G_4 = \left\{u \in \operatorname{int} S^2 : y > z > x\right\},\\ G_5 &= \left\{u \in \operatorname{int} S^2 : z > y > x\right\},\ G_6 = \left\{u \in \operatorname{int} S^2 : z > x > y\right\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Теорема 2. Если $p \in \left(\frac{2}{3};1\right]$, то для любой точки $x \in \operatorname{int} G_1$, отличной от $\leftarrow$, маршрут ее движения по $\operatorname{int} S^2$ задается диаграммой

$$G_1 \to G_2 \to G_3 \to G_4 \to G_5 \to G_6 \to G_1 \to . \tag{6}$$

Теорема 3. 1) Если $p \in \left(\frac{2}{3};\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, то траектории сходятся к $\leftarrow$.

2) Если $p \in \left(\frac{\sqrt{6}}{3};1\right]$, то траектории не сходятся. Множество предельных точек лежит на ∂S^2 и соответствующий оператор V_p является неэргодичным, т.е.не существует $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}V^k x$.

Литература

1. *Jamilov U.U., Kurganov K.A.* On-non ergodicity of volterra cubik stochastic operator. Доклады А.Н.Республики Узбекистан. 2017. 3 стр.8-11.

ЭРГОДИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ СЕМЕЙСТВ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

Курганов К.А., Каримова Ф.А

В симплексе $S^2=\{(x,y,z): x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, x+y+z=1\}$ стохастические операторы вольтеровского типа пятой степени имеют вид:

$$V_p:\begin{cases} x' = x^5+5qx^4y+5x^4z+5(1-q)xz^4+5x^3y^2+5x^3z^2+5x^2y^3+5x^2z^3+5xy^3z+5xyz^3 \\ +10x^3yz+10x^2y^2z+10x^2yz^2+10xy^2z^2, \\ y' = y^5+5xy^4+5qy^4z+5(1-q)x^4y+5x^2y^3+5y^3z^2+5x^3y^2+5y^2z^3+5xy^3z+5x^3yz \\ +10xyz^3+10xy^2z^2+10x^2y^2z+10x^2yz^2, \\ z' = z^5+5qxz^4+5yz^4+5(1-q)y^4z+5x^2z^3+5y^2z^3+5x^3z^2+5y^3z^2+5xyz^3+5x^3yz \\ +10xy^3z+10xy^2z^2+10x^2y^2z+10x^2yz^2. \end{cases}$$

где $a,b,g,l,f,p,c,m,d,k,h,e,u_i,w_i,r_i,s_i,g_i,t_i\in[0;1], i=\overline{1,3}$.

Вершины симплекса $M_1(1;0;0), M_2(0;1;0), M_3(0;0;1)$ являются неподвижными точками. Поскольку собственными числами относительно вершин симплекса являются числа $5(1-a),5(1-b),5(1-l),5(1-f),5(1-g),5(1-p)$, можно считать,

$$c=d=m=k=h=e=\frac{1}{2}, u_1=u_2=w_1=w_3=r_3=r_2=\frac{1}{4}, u_3=w_2=r_1=\frac{1}{2}, s_i=t_i=g_i=\frac{1}{3}, i=\overline{1,3}$$

Нас интересует “спиралеобразное” поведение траекторий, которое возможно при $\{a,f,l\}\in\left[0;\frac{4}{5}\right), \{b,g,p\}\in\left(\frac{4}{5};1\right]$ или обратно. Введем обозначения $a=f=l=p, b=p=g=q$. Тогда оператор V_{52} имеет вид:

$$V_{pq}:\begin{cases} x' = x^5 + 5px^4y + 5qx^4z + 5(1-q)xy^4 + 5(1-p)xz^4 + 5x^3y^2 + 5x^3z^2 + 5x^2y^3 + 5x^2z^3 + 5xy^3z + \\ +5xyz^3 + 10x^3yz + 10x^2y^2z + 10x^2yz^2 + 10xy^2z^2, \\ y' = y^5 + 5qxy^4 + 5py^4z + 5(1-p)x^4y + 5(1-q)yz^4 + 5x^2y^3 + 5y^3z^2 + 5x^3y^2 + 5y^2z^3 + 5xy^3z + \\ +5x^3yz + 10xyz^3 + 10xy^2z^2 + 10x^2y^2z + 10x^2yz^2, \\ z' = z^5 + 5pxz^4 + 5qyz^4 + 5(1-q)x^4z + 5(1-p)y^4z + 5x^2z^3 + 5y^2z^3 + 5x^3z^2 + 5y^3z^2 + 5xyz^3 + \\ +5x^3yz + 10xy^3z + 10xy^2z^2 + 10x^2y^2z + 10x^2yz^2. \end{cases}$$

Оператор V_{pq}, кроме вершин, имеет внутреннюю неподвижную точку $C\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, собственные числа якобиана являются

$$\lambda_0 = 5, \lambda_{1,2} = \frac{5}{162}\left(8 + 9(p+q) \pm i\sqrt{75(p-q)^2 - 16}\right)$$

Пусть $A = 675(p+q)^2 + 625(p-q)^2 - 8348$

Теорема1: 1) Если $A>0$, то множество предельных точек бесконечно и лежит на границе симплекса. Тогда V_{pq} являются неэргодичными;

2) Если $A<0$, то для любых $x^0 \in \operatorname{int} S^2, x^0 \neq C$ траектория "спиралеобразно" сходится к $\leftarrow$. V_{pq} являются регулярными.

Если $a = f = l = q, b = p = g = 1$, то стохастические операторы вольтеровского типа пятой степени имеют вид:

$$V_q:\begin{cases} x' = x^5 + 5qx^4y + 5x^4z + 5(1-q)xz^4 + 5x^3y^2 + 5x^3z^2 + 5x^2y^3 + 5x^2z^3 + 5xy^3z + 5xyz^3 \\ +10x^3yz + 10x^2y^2z + 10x^2yz^2 + 10xy^2z^2, \\ y' = y^5 + 5xy^4 + 5qy^4z + 5(1-q)x^4y + 5x^2y^3 + 5y^3z^2 + 5x^3y^2 + 5y^2z^3 + 5xy^3z + 5x^3yz \\ +10xyz^3 + 10xy^2z^2 + 10x^2y^2z + 10x^2yz^2, \\ z' = z^5 + 5qxz^4 + 5yz^4 + 5(1-q)y^4z + 5x^2z^3 + 5y^2z^3 + 5x^3z^2 + 5y^3z^2 + 5xyz^3 + 5x^3yz \\ +10xy^3z + 10xy^2z^2 + 10x^2y^2z + 10x^2yz^2. \end{cases}$$

Теорема2: V_q являются регулярным, т.е. для любой $x^0 \in \operatorname{int} S^2, x^0 \neq C$ траектория сходится к $\leftarrow$.

Если $a = f = l = \frac{2}{5}, b = p = g = p$, то стохастические операторы вольтеровского типа пятой степени имеет вид:

$$V_p:\begin{cases} x' = x^5 + 2x^4y + 5px^4z + 5(1-p)xy^4 + 3xz^4 + 5x^3y^2 + 5x^3z^2 + 5x^2y^3 + 5x^2z^3 + 5xy^3z + 5xyz^3 \\ +10x^3yz + 10x^2y^2z + 10x^2yz^2 + 10xy^2z^2, \\ y' = y^5 + 5pxy^4 + 2y^4z + 3x^4y + 5(1-p)yz^4 + 5x^2y^3 + 5y^3z^2 + 5x^3y^2 + 5y^2z^3 + 5xy^3z + 5x^3yz \\ +10xyz^3 + 10xy^2z^2 + 10x^2y^2z + 10x^2yz^2, \\ z' = z^5 + 2xz^4 + 5pyz^4 + 3y^4z + 5(1-p)x^4z + 5x^2z^3 + 5y^2z^3 + 5x^3z^2 + 5y^3z^2 + 5xyz^3 + 5x^3yz \\ +10xy^3z + 10xy^2z^2 + 10x^2y^2z + 10x^2yz^2. \end{cases}$$

Теорема3: V_p является регулярным, т.е. для любой $x^0 \in \operatorname{int} S^2, x^0 \neq C$ траектория сходится к $\leftarrow$.

Литература

1.Jamilov U.U., Kurganov K.A. On-non ergodicity of volterra cubik stochastic operator . Доклады А.Н. Республики Узбекистан 2017. 3 стр.8-11.

ДИНАМИКА СЕМЕЙСТВА СТОХАСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ В ДВУМЕРНОМ СИМПЛЕКСЕ

Курганов К. А., Адхамжонов М. Б.
Национальный Университет Узбекистана

В симплексе $S^2=\left\{u=(x,y,z)\in[0,1]^3 : x+y+z=1\right\}$ стохастические операторы вольтерровского типа четвертой степени имеет вид:

$$V_{4,2}:\begin{cases} x'=x^4+4ax^3y+4dx^3z+4(1-b)xy^3+4(1-c)xz^3+6kx^2y^2+6(1-l)x^2z^2+12\left[h_1x^2yz+s_2xy^2z+g_3xyz^2\right] \\ y'=y^4+4bxy^3+4ey^3z+4(1-a)x^3y+4(1-f)yz^3+6my^2z^2+6(1-k)x^2y^2+12\left[s_1xy^2z+h_2x^2yz+g_2xyz^2\right] \\ x'=z^4+4cxz^3+4fyz^3+4(1-d)x^3z+4(1-e)y^3z+6lx^2z^2+6(1-m)y^2z^2+12\left[g_1xyz^2+h_3x^2yz+s_3xy^2z\right] \end{cases} \tag{1}$$

где $a,b,c,d,e,f,k,l,m,h_i,s_i,g_i\in[0,1], i=\overline{1,3}.$

Вершины симплекса $M_1(1,0,0), M_2(0,1,0), M_3(0,0,1)$ являются неподвижными точками. Поскольку собственные числа относительно вершин симплекса являются числа

$$4(1-a),4(1-b),4(1-c),4(1-d),4(1-e),4(1-f),$$

можем считать, $k=l=m=\frac{1}{2}$, $s_i=g_i=h_i=\frac{1}{3}$. Нас интересует «спиралеобразное» поведения траекторий, который возможна при $\{a,c,e\}\subset\left[0;\frac{3}{4}\right),\{b,f,d\}\subset\left(\frac{3}{4};1\right]$ или обратно. Пусть $a=c=e=\frac{1}{2}$. Введем обозначение: $b=d=f=q$. Тогда оператор V_{42} имеет вид :

$$V_q:\begin{cases} x'=x^4+2x^3y+4qx^3z+4(1-q)xy^3+2xz^3+3\left(x^2y^2+x^2z^2\right)+4\left[x^2yz+xy^2z+xyz^2\right] \\ y'=y^4+4qxy^3+2y^3z+2x^3y+4(1-q)yz^3+3\left(y^2z^2+x^2y^2\right)+4\left[xy^2z+x^2yz+xyz^2\right] \\ x'=z^4+2xz^3+4qyz^3+4(1-q)x^3z+2y^3z+3\left(x^2z^2+y^2z^2\right)+4\left[xyz^2+x^2yz+xy^2z\right] \end{cases}$$

Оператор V_q кроме вершин, имеет внутреннюю неподвижную точку $C\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$, собственные числа якобиана являются $\lambda_0 = 4$, $\lambda_{1,2} = \frac{2}{27}\times\left[\left(6+6q\right)\pm 4\sqrt{3}\left|\frac{1}{2}-q\right|\times i\right]$.

Теорема. Для любых $x^0 \in \operatorname{int} S^2, x^0 \neq C$, траектории «спиралеобразно» сходятся к $_$. V_q является регулярным.

Литература

1. *Jamilov U.U., Kurganov K.A.* On-non ergodicity of volterra cubik stochastic operator. Доклады А.Н.Республики Узбекистан. 2017. 3 стр.8-11.

О СПЕКТРЕ ДВУХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С ТОЧЕЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Кулжанов У.Н.
Самаркандский государственный университет

Гамильтониан (оператор энегии) рассматриваемой двухчастичной системы задается как некоторое расширение $_$ следующего симметрического оператора $\widetilde{H}_0$, действующего в гильбертовом пространстве $L_2(R^2) \equiv L_2$ по формуле

$$\widetilde{H}_0 = (-\frac{1}{2m_1}\Delta_{x_1} - \frac{1}{2m_2}\Delta_{x_2})\varphi(x_1, x_2)$$

и определенного на множестве функций

$$D(\widetilde{H}_0) = \left\{\varphi \in L_2 : (\Delta_{x_1} + \Delta_{x_2})\varphi \in L_2, \varphi(x,x) = 0\right\}$$

где Δ_{x_i}-оператор Лапласа по переменной $x_i \in R$, m_i-масса $_$-й частицы, $i = 1,2$.

После соответствующего преобразования Фурье оператор $_$ перейдет в оператор

$$H_0 f(p_1, p_2) = (\frac{1}{2m_1}p_1^2 + \frac{1}{2m_2}p_2^2) f(p_1, p_2),$$

определенный на множестве $D(H_0) \subset L_2$ функций $f(p_1, p_2)$, удовлетворяющих условиям:

$$\int_R (p_1^4 + p_2^4)\left|f(p_1, p_2)\right|^2 dp_1 dp_2 < \infty, \int_{\Gamma_p} f(p_1, p_2) d\nu_p = 0.$$

Здесь $\Gamma_p = \{(p_1, p_2) \in R^2 : p_1 + p_2 = p, p \in R\}$- семейство трехмерных многообразий с естественной Лебеговой мерой $d\nu_p$. Замена переменных $P = p_1 + p_2$, $p = \frac{m_2}{M} p_1 - \frac{m_1}{M} p_2$ осуществляем естественный изоморфизм между пространствами

$$L_2(R^2) \quad \text{и} \quad L_2(R_p) \otimes L_2(\Gamma_p).$$

Последнее пространство может быть отождествлено с пространством $L_2(R) \otimes L_2(R)$, при этом оператор но записывается в виде тензорной суммы следующие операторов

$$H_0 = \left(\frac{1}{2M} P^2 + \frac{1}{2m} h_0 \right) \otimes I,$$

где I- единичный оператор, $M = m_1 + m_2$, $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, $(1/2M)P^2$ - оператор умножения на функцию $(1/2M)P^2$ в пространстве $L_2(R)$, и является самосопряженным, h_0-замктнутый неотрицательный симметрический оператор, действующий в $L_2(R)$ по формуле:

$$h_0 f(p) = p^2 f(p)$$

и его область определения $D(h_0)$ состоит из функций $f \in L_2(R)$, удовлетворяющих условиям:

$$\int p^4 |f(p)|^2 dp < \infty; \int f(p) dp = 0,$$

В дальнейшем интеграл без указания пределов понимается как интегрирование по всему пространству R.

Теперь выберем расширения оператора h_0. Для любого $\varepsilon \in R$ ставим соответствие множество $D(h_\varepsilon), D(h_0) \subset D(h_\varepsilon) \subset D(h_0^*)$, следующим образом:

$$D(h_\varepsilon) = \left\{ g \in D(h_0^*) : g(p) = f(p) + \frac{c}{p^2 + 1} + \frac{(\varepsilon - 2)c}{(p^2 + 1)^2}, f \in D(h_0) \right\}$$

Сужение оператора h_0^* на область $D(h_\varepsilon)$ обазначим через h_ε. По определению h_ε является расширением оператора h_0.

Основным результатом этой работы является следующая теорема.

Теорема 2. Для любого $\varepsilon \in R$ существенный спектр оператора h_ε совпадает с полуосью $[0, \infty)$. Если $\varepsilon \geq 0$, то h_ε не имеет отрицательного собственного значения и если $\varepsilon < 0$, то h_ε имеет одно простое собственное значение $z = -\frac{4}{\varepsilon^2}$, соответствующая собственная функция с точностью до постоянного множителя имеет вид

$$g_\varepsilon(p) = \frac{1}{p^2 + \frac{4}{\varepsilon^2}}..$$

Литература

1. Ф. А. Березин, Л.Д. Фаддеев // Замечание об уравнение Шредингера с сингулярным потенциалом. ДАН СССР, 1961, Т.137, №5.
2. Р.А. Минлос, М.Х. Шерматов // Вестник МГУ, сер.1, 1989, №6, с.7-14.
3. М.Х.Шерматов, У.Н.Кулжанов. О спектре двухчастичного оператора Шредингера с точечным потенциалом // Узбекский математический журнал. 2010, №3, ст.188-195.
4. У.Н.Кулжанов. О спектре двухчастичного оператора Шредингера с точечным потенциалом в одномерном случае // Научный вестник СамГУ, 2020, №1, ст.48-53.

МИНИМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ПОЛУЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА R_3^1

Курбонов.Э., Файзуллаев Ш., Кувондиков С
ДЖГПИ
dilshod_quralov@mail.ru

В данной работе изучена минимальные поверхности полуевклидова пространства R_3^1.

Известно [1], что в евклидовом пространстве минимальные поверхности определяются как поверхности с нулевой средней кривизной. Эти поверхности имеют наименьшую площадь среди поверхностей с общими краями, которые являются заданным замкнутым контуром.

Минимальные поверхности галилеева пространства так же, как в евклидовом пространстве, определяем как поверхность средней кривизны, которая обращается в нуль. Тогда имеем $2 = N = 0$.

Легко доказать, что поверхность с нулевой средней кривизной в R_3^1 обладает свойством минимальной поверхности в R_3^1.

Площадь минимальной поверхности будет наименьшей среди поверхностей с общим краем в R_3^1.

Действительно, предположим, что D – выпуклая область на плоскости общего положения (т.е. $z = 0$) и α –граница этой области. Рассмотрим пространственную кривую $\overline{\alpha}$, взаимно однозначно проектирующуюся на α. Площадь поверхности Φ, однозначно проектирующаяся на область D с краем $\overline{\alpha}$, вычисляется по формуле

$$S = \iint_D \sqrt{G(u,v)}dudv,$$

где $G(u,v)$- коэффициент первой квадратичной формы поверхности Φ . Так как область D – выпуклая, двойной интеграл можно вычислить с помощью повторных интегралов, т.е.

$$S = \iint\limits_D \sqrt{G(u,v)}dudv = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(a)}^{\varphi_2(a)} \sqrt{G(u,v)}dv \right] du .$$

Выражение $\int\limits_{\varphi_1(a)}^{\varphi_2(a)} \sqrt{G(u,v)}dv$ - на плоскости $x = u = const$ дает длину дуги кривой γ , образованной пересечением особой плоскости с заданной поверхностью [2].

Следовательно, площадь поверхности прямо пропорционально длине дуги кривой γ; так как край поверхности $\bar{\alpha}$ имеет только две общие точки с плоскостью $x = const$, то длина кривой $\bar{\alpha}$, соединяющим эти точки, будет наименьшей тогда, когда $\bar{\alpha}$ является отрезком, соединяющим эти точки. Кроме того, коэффициент N пропорционален кривизне кривой γ. Равенство нулю N означает, что γ является отрезком.

Значит, минимальность площади достигается только в этом случае.
Отсюда можно сделать следующее утверждение.

Утверждение. Циклические поверхности являются минимальными поверхностями галилеевой поверхности.

Известно, что минимальные поверхности являются седловыми поверхностями евклидова пространства [3]. Седловые поверхности – поверхности с отрицательной полной кривизной. Но в галилеевом пространстве поверхности с отрицательной полной кривизной разделяются на две класса: седловые и циклические. Установлен лишь факт, что циклические поверхности являются минимальными поверхностями галилеева пространства. Циклические поверхности являются подклассом поверхностей с отрицательной полной кривизной.

Аналогия циклической поверхности седловым поверхностям евклидова пространства позволяет поставить следующую задачу.

Задача. Найти условие, когда циклическая поверхность галилеева пространства является минимальной поверхностью евклидова пространства.
При рассмотрении этого вопроса воспользуемся методом наложенного пространства, т.е. поверхность рассмотрим одновременно в галилеевом и евклидовом пространствах.

Для удобства рассмотрим только поверхность F галилеева пространства, однозначно проектирующуюся на плоскость общего положения ().
Пусть поверхность F задана уравнением

$$z = f(x,y), (x,y) \in D \subset (xOy).$$

Тогда средняя кривизна F, рассматриваемой как поверхность в евклидовом пространстве, вычисляется по формуле:

$$2H=\frac{\begin{vmatrix} F_{yy} & F_{yz} & F_y \\ F_{yz} & F_{zz} & F_2 \\ F_y & F_x & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xz} & F_x \\ F_{xz} & F_{zz} & F_z \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}}{F_x^2+F_y^2+F_z^2} \qquad (1)$$

В нашем случае $F(x,y,z)=z(x,y)-z=0.$

Учитывая линейчатость поверхности, имеем:

$$F_{yy}=0,\ F_{yz}=0,\ F_y=z_y,\ F_{zz}=0,\ F_z=-1,\ F_x=z_x,$$
$$F_{xx}=z_{xx},\ F_{xz}=0,\ F_{xy}=z_{xy}.$$

Подставляя полученные производные в формулу (1) и приравнивая к нулю среднюю кривизну, получим

$$\frac{z_{xx}}{2z_x}=\frac{z_{xy}}{z_y-1}$$

$$\frac{1}{2}\ln z_x=\ln\left(z_y-1\right)+\ln c,\quad c\in R$$

$$z_y=c_1\sqrt{z_x}+1,\quad где\quad c_1=\frac{1}{c}$$

$$c_1\sqrt{z_x}-z_y+1=0. \qquad (2)$$

Следовательно, при выполнении условия (2) циклической поверхности галилеева пространства соответствует минимальная поверхность евклидова пространства.

Значит, что на не омбилической точке поверхности евклидова и галилеева пространства совпадают.

Литература

1. Бакельман И.Я., Вернер А.Л., Кантор Б.Е. Введение в дифференциальную геометрию в целом. М., 1973. 440ст.
2. А. Артыкбаев., Д.Д. Соколов. Геометрия в целом в плоском пространстве-времени. Ташкент. “ФАН”. 1991. 177ст.
3. Э. К. Курбонов. Циклические поверхности галилеева пространства. // УзМЖ, 2000, №2, ст51-57.

РАЗРЕШИМЫЕ АЛГЕБРЫ ЛЕЙБНИЦА С КВАЗИ-ФИЛИФОРМНЫМ НИЛЬРАДИКАЛОМ И ДОПОЛНЯЮЩИМ ПРОСТРАНСТВОМ МАКСИМАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Муртазакулов З., Эгамберганова Г
Национальный университет Узбекистана,
zafarbekmurtozaqulov.@gmail.com, adashevjq@mail.ru

Алгебры Лейбница были введены в начале 90-х годов прошлого столетия французским математиком Ж.-Л.Лоде как алгебры, характеризующиеся тождеством Лейбница [5]. Алгебры Лейбница являются обобщениями алгебр Ли, и поэтому многие свойства, справедливые для алгебр Ли, продолжаются на случай алгебр Лейбница.

В 1945 году А.И.Мальцев доказал, что разрешимая алгебра Ли определяется однозначно ее нильрадикалом. Далее, в 1963 году Г.М.Мубаряксянов разработал метод построения разрешимых алгебр Ли с помощью нильрадикала и ниль-независимых дифференцирований нильрадикала. Методом Мубаряксянова, в работах [1,6,7] были получены описания некоторых классов разрешимых алгебр Ли. Описанию разрешимых алгебр Лейбница с некоторыми заданными нильрадикалами посвящены работы [3,4].

В данной работе приведена классификация разрешимых алгебр Лейбница с естественный образом градуированным квази-филиформным нильрадикалом и дополняющим пространством максимальной размерности.

Определение 1. Алгебра L над полем F называется *алгеброй Лейбница*, если для любых $x, y, z \in L$ выполняется тождество:

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y],$$

где $[,]$ - умножение в L.

Для произвольной алгебры Лейбница L определим ряды:

$$L^{[1]} = L,\ L^{[k+1]} = [L^{[k]}, L^{[k]}];\ L^1 = L,\ L^{k+1} = [L^k, L^1].$$

Определение 2. Алгебра Лейбница L называется *разрешимой* (*нильпотентной*), если существует $s \in N$ такое, что $L^{[s]} = 0$ ($L^s = 0$). Минимальное число, обладающее таким свойством, называется *индексом разрешимости* (*нильпотентности*) алгебры L.

Максимальный нильпотентный (разрешимый) идеал алгебры Лейбница L называется нильрадикалом (радикалом).

Определение 3. Линейное отображение d из L в себя называется *дифференцированием*, если для любых $x, y \in L$ выполняется тождество:

$$d([x,y]) = [d(x),y] + [x,d(y)].$$

Линейные отображения $f_1,...,f_k$ называются *ниль-независимыми*, если

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + ... + \alpha_k f_k$$

не нильпотентно при всех значениях α_i, кроме нуля.

Пусть R - разрешимая алгебра Лейбница, следовательно, R можно записать как сумму векторных пространств $R = N + Q$, где N – нильрадикал в R и Q - дополняющее векторное пространство

Предложение 1.[3] Пусть R - разрешимая алгебра Лейбница. Тогда размерность Q не превышает максимального числа ниль-независимых дифференцирований N.

Теперь рассмотрим следующую алгебру. Эта алгебра является естественным образом градуированной квази-филиформной алгеброй Лейбница, которая получена в работе [2].

$$\mathcal{L}_n^{3,-1}: \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, 1 \le i \le n-3, \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n + e_2, \\ [e_1, e_{n-1}] = -e_n, \end{cases}$$

Приведем описание дифференцирования алгебры $L_n^{3,-1}$.

Предложение 2. Произвольное дифференцирование d алгебры $L^{3,-1}$ имеет следующий вид:

$$\begin{cases} d(e_1) = \sum_{t=1}^{n} a_t e_t, \\ d(e_i) = (ia_1 + a_{n-1})e_i + \sum_{t=i+1}^{n-2} a_{t-i+1} e_t, \quad 2 \le i \le n-2, \\ d(e_{n-1}) = \sum_{t=2}^{n} b_t e_t, \\ d(e_n) = (b_{n-3} - a_{n-3})e_{n-2} + (b_{n-1} + a_1)e_n, \end{cases}$$

где $b_i = a_i, 2 \le i \le n-3, b_{n-1} = a_1 + a_{n-1}$.

Теорема 1. Пусть R - разрешимая алгебра Лейбница с нильрадикалом $L_n^{3,-1}$ и дополняющим пространством максимальной размерности. Тогда существует базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, x, y\}$ в алгебра такой что, умножение в этом базисе имеет следующий вид:

$$R\mathcal{L}_n^{3,-1}$$
$$: \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-3 \\ [e_i, x] = e_1 - e_{n-1}. & [e_i, x] = (i-1)e_i, \\ [x, e_n] = -e_n & [e_1, y] = e_{n-1} \\ [e_{n-1}, y] = e_{n-1} & [e_n, y] = e_n \\ [y, e_n] = e_2 - e_n \end{cases}, \quad \begin{matrix} [e_{n-1}, e_1] = e_n + e_2, & [e_1, e_{n-1}] = -e_n, \\ [e_n, x] = e_n, & [x, e_1] = -e_1 + e_{n-1} \\ [e_i, y] = e_i & 2 \le i \le n-2 \\ [y, e_1] = -e_{n-1} & [y, e_1] = -e_{n-1} \end{matrix}$$

Литература

1. J. M. Ancochea Bermúdez, R. Campoamor-Stursberg, L. Garca Vergnolle Classification of Lie algebras with naturally graded quasi-filiform nilradicals. J. Geom. Phys., vol. 61(11), 2011, p. 2168-2186.

2. L.M. Camacho, J.R. Gómez, A.J. González, B.A. Omirov, Naturally graded quasi-filiform Leibniz algebras. J. Symbolic Comput. 2009, 44(5):527--539. DOI: 10.1016/j.jsc.2008.01.006.
3. E.M. Cañete, A. Kh. Khudoyberdiyev The classification of 4-dimensional Leibniz algebras. Lin. Alg. Appl., vol. 439(1), 2013, p. 273--288.
4. J.M. Casas, M. Ladra, B.A. Omirov, I.A. Karimjanov Classification of solvable Leibniz algebras with null-filiform nilradical. Lin. Multilin. Algebra, vol. 61(6), 2013, p. 758--774.
5. J.-L. Loday Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz. Enseign. Math. (2), vol. 39(3-4), 1993, p. 269--293.
6. J.C. Ndogmo, P. Winternitz Solvable Lie algebras with abelian nilradicals. J. Phys. A, vol. 27(2), 1994, p. 405--423.
7. S. Tremblay, P. Winternitz Solvable Lie algebras with triangular nilradicals. J. Phys. A, vol. 31(2), 1998, p. 789--806.

АЛГОРИТМЫ НАХОЖДЕНИЯ ЧИСЛА π

Маматов А.И.
Бухарский инженерно-технологический институт, Бухара
mamatov.tulkin@mail.ru

Цель работы — нахождение новых формул, подобных формуле Матчина, для вычисления числа π.

Пусть $t_x = arctg\frac{1}{x}$, или же $t_x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{7x^7} + \frac{1}{9x^9} - \frac{1}{11x^{11}} + \ldots$, назовем t_x числом Грегори, когда x- любая дробь или целое число.

Число Штёрмера – положительное целое число n, для которого p есть наибольший простой делитель n^2+1, где p не превосходит $2n$. Любое число Грегори, не являющиеся числом Штёрмера, можно представить как сумму чисел t_n, для которых n есть число Штёрмера.

Будем использовать числа Грегори для представления их через числа Штёрмера. Воспользовавшись тем, что $t_x = arctg(1) = \frac{\pi}{4}$, получаем новые формулы для вычисления числа π. Из этих формул можно выделить те, сходимость которых более быстрая, чем у формулы Матчина $t_1 = 4t_5 - t_{239}$. Например, одна из таких формул, найденная нами есть

$$t_1 = 2t_5 + t_6 + 2t_9 + t_{60} - t_{80} - t_{45765}. \quad (1)$$

Для нахождения формул для вычисления числа π используется алгоритм Штёрмера. Программа получения новых формул написана с помощью системы Mathematica. Всего получены и рассмотрены новые формулы, использующие t_x, для всех $x < 100000$. Изучена сходимость данных формул. Лучшая из этих формул есть формула (1), которая превосходит классическую формулу Матчина по сходимости на порядок.

Литература

1. J. H. Conway and R. K. Guy, The Book of Numbers, New York: Copernicus Books/Springer, 2006 pp. 242–247.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ

Маматов Т.Ю.
Бухарский инженерно-технологический институт

Решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) имеет большое значение, поскольку к такой проблеме сводится широкой круг сложных практических задач. Вычислительные трудности решения СЛАУ во многом обусловлены заполненностью матриц, приводящей к огромному объему вычислений. Для решения СЛАУ с плотными матрицами традиционно используются точные методы, например, метод исключения Гаусса. Но их вычислительные затраты существенно ограничивают круг решаемых задач даже на высокоскоростных компьютерах. Необходимость решения сложных задач привела к широкому применению итерационных методов [1,2].

Цель работы – разработка оптимального алгоритма для решения систем линейных алгебраических уравнений, как с плотными, так и с разреженными матрицами.

Рассмотрим метод сопряженных градиентов для решения системы $Ax = b$. Он является наиболее предпочтительным по быстродействию для симметричных положительно определенных систем. К открытию метода сопряженных градиентов (CG) независимо пришли М.Хестенес и Э.Штифель.

Основной алгоритм метода сопряженных градиентов имеет вид:

1. Выбрать x^0, положить $p^0 = r^0$, вычислить $\left(r^0, r^0\right)$.
2. Для $k = 0,1,...$

$$a_k = -\frac{\left(r^k, r^k\right)}{\left(p^k, Ap^k\right)},$$

$$x^{k+1} = x^k - a_k p^k,$$

$$r^{k+1} = r^k + a_k Ap^k.$$

3. Если $\left\|r^{k+1}\right\|^2 \geq \varepsilon$, продолжать

$$\beta_k = \frac{\left(r^{k+1}, r^{k+1}\right)}{\left(r^k, r^k\right)},$$

$$p^{k+1} = r^{k+1} + \beta_k p^k .$$

где x–точное решение, x^k- k-е приближение к точному решению, $r^k = b - Ax^k$ – вектор невязки, p^k- вектор направлений $(x, y) = x^T y$-скалярное произведение, $\left\| r^k \right\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(r^k \right)^2}$ - норма вектора.

Теорема (о сопряженных направлениях). Если A вещественная симметрическая положительно определенная матрица $n \times n$, а $p^0, ..., p^{n-1}$- ненулевые векторы, удовлетворяющие условию $(p')^T Ap' = 0, i \neq j$, то при любом начальном приближении x^0 итерационные приближения $x^{k+1} = x^k - \alpha_k p^k$, где $\alpha_k = \dfrac{\left(p^k \right)^T \left(Ax^k - b \right)}{\left(p^k \right)^T Ap^k}$, сходится к точному решению системы $Ax = b$ не больше чем за n шагов [3].

Теорема гарантирует не только сходимость итераций, но и то, что в отсутствии ошибок округления для сходимости требуется конечное число итераций, не превосходящее n.

Скорость сходимости метода сопряженных градиентов существенно зависит от значения числа обусловленности матрицы A. Для ускорения сходимости итераций применяется предобусловливание матрицы A, которое происходит с помощью преобразования конгруэнтности.

$\hat{A} = SAS^T$, где S – невырожденная матрица, выбранная таким образом, что $cond\left(\hat{A}\right) < cond(A)$.

Этот подход основан на использовании симметричной положительно определенной матрицы M, аппроксимирующей матрицу A, и матрица S фигурирует лишь неявным образом в соответствии с формулой $\left(S^T S \right)^{-1} = M$. Поскольку обычно известна матрица M, но не M^{-1}, вспомогательный вектор $\bar{r}$ находится путем решения линейной системы $M\bar{r} = r$. Сформулируем предобусловленный метод сопряженных градиентов PCG:

1. Выбрать x^0, положить $r^0 = b - Ax^0$.
2. Решить систему $M\bar{r}^0 = r^0$, положить $p^0 = \bar{r}^0$.
3. Для $k = 0,1,...$

   $$a_k = -\frac{\left(\bar{r}^k, r^k \right)}{\left(p^k, Ap^k \right)},$$

   $$x^{k+1} = x^k - a_k p^k ,$$

   $$r^{k+1} = r^k + a_k Ap^k .$$

4. Проверить сходимость итераций, решить систему

$$M\bar{r}^{k+1} = r^{k+1}$$

$$\beta_k = \frac{\left(\bar{r}^{k+1}, r^{k+1}\right)}{\left(\bar{r}^{k}, r^{k}\right)},$$

$$p^{k+1} = \bar{r}^{k+1} + \beta_k p^k .$$

В данной работе в среде Delphi реализуется решение поставленной задачи с помощью предобусловленного метода сопряженных градиентов с применением неполной факторизации Холесского, Зейделя и Якоби для плотнозаполненной симметричной положительно определенной матрицы размерности $n \times n$ при $n = 1000$ и разреженной матрицы.

$$\begin{cases} nx_1 + x_2 + ... + x_n = 2n-1 \\ x_1 + nx_2 + ... + x_n = 2n-1 \\ ..... \\ x_1 + x_2 + ... + nx_n = 2n-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ ..... \\ -x_{n-1} + 2x_n = 1 \end{cases}$$

Первая система характеризуется числом обусловленности $\mu = cond(A) = \|A\|_2 \left\|A^{-1}\right\|_2 = 3$, а вторая - $\mu = 5 \times 10^5$, т.е. является плохообусловленной.

При численном решении рассмотренных задач использовался компьютер со следующими характеристиками: процессор Pentium® Dual-Core CPU 2.20 GHz, 64-разряная операционная система.

Для примера работа программ, основанных на применении метода сопряженных градиентов, в том числе и предобусловленного метода, закончилась на 1-й итерации за 1 сек (см.Табл).

Таблица

Число обусловленности	**Метод сопряженных градиентов**	**Предобусловленный метод сопряженных градиентов**		
		Неполная факторизация Холесского	**Метод Якоби**	**Метод Зейделя**
3	1	1	2	1
500000	15	1	232	46

На основе результатов, полученных при реализации различных методов, можно сделать вывод о том, что эффективным методом для хорошо обусловленной СЛАУ с симметричной положительно определенной матрицей является метод сопряженных градиентов. А для плохо обусловленной СЛАУ с диагональным преобладанием оптимальным является предобусловленный метод сопряженных градиентов с использованием неполной факторизации Холесского, значительно сокращающий время работы программы и объем вычислений.

Литература

1. Ильин В.П. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем// -М.: Физматлит, 1995. – 288 с.
2. Меркулова Н.Н. Методы вычислений// учеб.пособие.-Томск: Том.гос.ун-т, 2005.-257 с.
3. Ортега Дж. Введение в параллельные векторные методы решения линейных систем: пер. с англ./ - М.: Мир, 1991.-367 с.

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТРИКИ ДЛЯ L_0-ЗНАЧНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Мамиров У. Э.
Самаркандский государственный университет

Пусть Ω– непустое множество, **F** – некоторая **б** – алгебра его подмножеств и $L_0 = L_0$ **(T, Σ, m)** алгебра всех классов m – эквивалентных измеримых функции на некотором вероятностном пространстве **(T, Σ, m)** наделенная топологией сходимости по мере m, L_0– значной мерой **P** на Ω назовём отображение.

P: F → L_0 , удовлетворяющие условиям $P(A) \geq$ и для любого $A \epsilon F$, где и– нулевой элимент в L_0; $\boldsymbol{P}(UA_n) = \sum \boldsymbol{P}(A_n)$ для любой счетной совокупности попарно непересекающийся подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ из F, где ряд $\sum_n P(A_n)$ сходится по топологии пространство L_0. Если **P(Ω)=1**, где **1 –** еденица L_0, то **P** назовём L_0 – значной вероятностью и тройку (Ω, F, **P**) – вероятностное пространством.

Настоящая работа является продолжением указанных иследований в ней обобщены некоторые результаты [1], [2], для L_0 – значных вероятностей.

Пусть (Ω, F, **P**) обозначает вероятностное пространство, в котором Ω является множеством чисел из интервала (0,1), F – системой всех борелевских множеств из Ω и **P** – L_0– значной мерой множеств.

Рассмотром множество $X = \{X_{(щ)}\}$ всевозможных вещественных F - измеримых функций, определенных на R^1. В теории вероятностей функции X(щ) интерпретуруется как случайные величины заданнные на одном вероятностним пространсве (Ω, F, **P**).

Пусть D– какие либо непустое множество из X, обладающем тем свойством, что с каждой случайной величиной X, входящей состав D, к этому множеству принадлежат любая случайная величина, совпадающая с X с вероятностью **1**. Мы будем называть множество такого типа допустимыми.

Определение 1. Метрикой (полу метрикой) в допустимом множестве D с X называется каждая отображение $\mathcal{P}: D^2 = D \text{Ч} D \to R_+^1 = (0; +\infty)$, обладающее следующими тремя свойствами. Какова бы ни были X, Y, Z из D.

1° (свойство полной идентификаций для метрики) $\mathcal{P}$ (X, Y)=и в том и только томслучае, когда **P**(X=Y)=**1.**

2° A (свойство не полной идентификаций для полуметрики) $\mathcal{P}$ (X,Y)=и в том случае, когда **P**(X=Y)=**1.**

3° (свойство симметрии)

$$\mathcal{P}(X,Y) = \mathcal{P}(Y,X)$$

4° (неравенство треугольника)

$$\mathcal{P}(X,Y) = \mathcal{P}(X,Z) + \mathcal{P}(Z,Y)$$

Пусть D – какое – либо допустимое множество из X. Множество $D^2 =$ DЧD выделяет из пространство совместных распределений ц^2 множество ц$(D^2) = \{\boldsymbol{P}_{x,y}(X,Y)\epsilon D^2\}$

Определение 2. Отображение $\mathcal{P}$: ц$(D^2) \to R_+^1 = [0,+\infty)$ называется вероятностной метрикой в D, если оно представляет собой в этом множестве полуметрику в смысле определение 1.

Определение 3. Вероятностная метрика м в допустимом множестве D называется простой, если она постепенная в пределах каждого из множеств D^2 на которые разбивается D^2 .Вероятностная метрика $\mathcal{P}$ на D, которые не является простой, называется сложной.

Определение 4. Для любой сложной метрики $\mathcal{P}$ (X, Y) метрику $\hat{\mathcal{P}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \hat{\mathcal{P}}(P_x, P_y)$ называется минимальная метрика для $\mathcal{P}$.

Определение 5. Для заданной простой метрики м каждая сложная метрики которая обладает свойством м^o = м, называется противо минимальной метрикой м.

Существование противоминимальной метрики м̂ для заданной простой метрики м проще всего было бы установлено доказав существование сложной метрики м$_0$ для котором минимальная метрика $\widehat{м_0}$ тождественно равна нулю. В этом случае метрика м̌ = м$_0$ + м, с одной стороны, была бы сложной а с другой очевидно противоминиамальной для м, так как м̌ = $\widehat{м_0}$ + м̂ = м

Теорема 1. Пусть **P – L₀ –** значной вероятность. Предположим, что допустимое множество D, на котором определена простая метрика м, содержит только такие случайные величины, функции распределения которых непрерывны и строго монотонны. Тогда для метрики м существует противоминимальная метрика.

Теорема 2. Пусть **P – L₀ –** значной вероятность и пусть м - какая – либо простая метрика, определенная на допустимом множестве D. Существует полуметрика, определенная в D, такие, что соответствующая ей минимальная полуметрика совпадает с м.

Пусть d(x,y) – какая – либо метрика (в обычном смысле) в пространстве R^1, представляющая собой измеримую функцию по совокупности обеих переменных. Примером такой метрики может служить функция $d(x,y) =$

ш($|x-y|$), где ш(u) неубывающая и вогнутая на полуоси $u \geq 0$ функция со значением ш$(+0) = 0$.

Рассмотрим функционал $\phi(X,Y,d) = Ed(X,Y)$, который, как показывает элементарная проверка, является сложном метрикой в некотором допустимом множестве D, выделяемом из X условием $\phi(X,Y,d) < \infty$ для $X,Y \epsilon D$. Вместе со сложной метрикой $\phi(X,Y,d)$ мы рассмотрим простую метрику (метрику (метрику Канторовига) $\S(X,Y,d) = sup\{|E(f(X)) - f(Y)|: f \epsilon F(d)\}$); где F(d) – множество ограниченных вещественных функций на R, удовлетворяющих условию Лепщица

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x,y), \qquad x,y \epsilon R$$

Теорема 3. Пусть **P**-L_0-значной вероятность. В пределах множества D метрика § является минимальная для метрики ф , m.e.

$$\widehat{\phi}(X,Y,d) = \S(X,Y,d). \quad (1)$$

Следствие 1. Частным случаем теоремы 3 является упоминавшийся вышие результат Даль Ашо. Именно, в том случае, когда d(x,y)=d$_0(x,y)$=$|x-y|$ и $\phi_1(X,Y,d)$ = ф (X,Y) мы имеем согласно равенству (1), что

$$\phi_1(x,y) = sup\left\{\left|\int (x) dF_x(x) - F_y(x)\right| : f \epsilon F(d_{(0)})\right\}.$$

Теорема 4. Пусть **P**- L_0 – значной вероятность. Метрика – Леви-Прохорова $p(X,Y)$ является минимальной для метрики Ки Фан, т.е. $K(X,Y) = p(X,Y)$ (2).

Литература

1. Кучкаров Я. Вероятностные распределение созначениями в пространствах измиримых функций. Ташкент, ФАН.1984.176 стр.
2. Золоторев В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. Москва «Наука» 1986 г. 415 стр.

ГРУППЫ, ВСЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОТОРЫХ, ВПОЛНЕ ПРИВОДИМЫ.

Муминов К.К. , Султонова Б.Р

1. Введение. В работе Т. Спрингера ([l]. С.27) предложенаса следующая важная характеризация редуктивных групп в классе линейных алгебраических групп: линейная алгебраическая группа G является редуктивной тогда и только тогда, когда любое ее рациональное представление полупросто (представление с группы G в векторном пространстве E называется полупростым, если для любого

$\mathrm{c}(G)$ инваринтного подпространства в E существует $\mathrm{c}(G)$—инвариантное дополнение).

Под рациональным представлением линейной алгебраической группы G понимается такое представление с в конечномерном векторном пространстве E , у которого элементы матрицы $\mathrm{c}(g)$ (в некотором базисе пространства E) являются рациональными функциями от элементов g_{ij} матрицы $\mathrm{c} \in G$. Возникает естественный вопрос об описании класса групп у которых все представления, а но только рациональные, обладают свойством полупростоты. Исследование класса редуктивных групп осуществлено в серии работ [2-6], где, в частности, доказано, что всякое представление группы G является полупростым в том и только в том случае, когда G - конечная группа. Кроме того, введены классы групп, представления которых обладают теми или иными свойствами, связанными с наличием инвариантных векторов или инвариантных функционалов. Установлены связи между этими классами групп и другие полезные свойства (помимо полупростоты), которыми обладают представления конечных и компактных групп.

В [2-6] вводятся варианты понятия линейной редуктивноти и изучаются их взаимосвязи, В данной работе продолжается исследование некоторых классов групп, введенных в [2-6], и приведен пример, группы, не являющейся $f\mathrm{б}$ –группой. Терминология и обозначения взяты из [1-6].

2. Предварительные сведения

Напомним, что совокупность элементов G; называется группой, если в G заданы две операции: каждой паре g, h элементов из G ставится в соответствие их произведение $g \cdot h$ из G и каждому элементу g из G; ставится в соответствие элемент g^{-1}из G . При этом должны иметь место следующие свойства:

1) $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$;

2) Существует такой элемент $1 \in G$ у, что$1 \cdot g = g \cdot 1 = g$;

3) $g \cdot g^{-1} = 1$.

Отображение f группы G в группу $G`$ называется гомоморфизмом из $G$ в $G`$, если $f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1) \cdot f(g_2)$ для любых $g_1, g_2 \in G$.

Пусть E линейное пространство над полем действительных чисел R.

Представлением группы G в векторном пространстве E называется всякий гомоморфизм группы G в группу $Aut\, E$, где Aut -группа автоморфизмов (обратимых линейных операторов) пространства X. Другими словами, представление группы G в пространстве E есть операторная функция $\mathrm{c}: G \to End\ E$, удовлетворяющая соотношением:

$\mathrm{c}(g_1 \cdot g_2) = \mathrm{c}(g_1) \cdot \mathrm{c}(g_2)$, $\mathrm{c}(e) = 1$ [7].

3. Алгебраические варианты понятия линейной редуктивности, их взаимосвязи.

Пусть E векторное пространство над полем вещественных чисел R, $E^{`}$- линейное пространство всех линейных функционалов на E, $Aut(E)$– группа автоморфизмов (обратимых линейных операторов) пространства E. Пусть G- некоторая группа и $c: G \to Aut(E)$– линейное представление G в E (если фиксировано, то вместо $c(g) \cdot x$ будет использоваться запись gx). Через E^G обозначим подпространство G - инвариантных элементов в E т.е. $E^G=\{x: gx = x$ для всех $g \in G\}$. а через $(E^{`})^G$ обозначим подпространство $G$ – инвариантных функционалов в $E^{`}$, т.е. $(E^{`})^G=\{f: gf = f$ для всех $g \in G\}$ для всех , где $(gf)(x) = f\big(g(x)\big), x \in E$.

Группу G назовем б– группой, если для любого линейного представления $c: G \to Aut(E)$ и любого вектора $x \in E^G, x \neq 0$ существует G- линейный функционал $f \in (E^{`})^G$,обладающий свойством $f(x) \neq 0$.

Группа G называется в- группой [2], если для любого ее линейного представления $c: G \to Aut(E)$ и любого $(E^{`})^G$ ненулевого $f \in \big(E^{`}\big)^G$ существует элемент $x \in E^G$, такой, что $f(x) \neq 0$.

Пусть $c: G \to Aut(E)$ линейное представление группы G. Подпространство

$U \subset E$ называется *инвариантным* если $c(g)\, u \in U$ для всех $u \in U$ и всех $g \in G$.

Группу G называется г- группой, если для любого линейного представления $c: G \to Aut(E)$ и любого G - инвариантного подпространства U в E существует G инвариантное дополнение (т.е. $E = U \oplus W$– есть прямая сумма подпространств U и W).

Предложение 1. Всякая г — группа является -группой.

Теорема 1. Для группы G следующие условия эквивалентны:

(1). G является группой класса в.

(2). G является группой класса г.

Следствие 1. Всякая р группа является а — группой.

Группу назовем группой класса fб (соответственно fв и fг), если всякое ее конечномерное линейное представление является б (соответственно в и г) – представлением.

Имеет место [8]

Теорема 2. Следующие условия эквивалентны:

1) G является группой класса fб;

2) G является группой класса fв;

3) G является группой класса fг.

Приведем пример группы, не являющейся fб - группой .

Пусть $G_0 + GL(n, R)$. Через $G_0 \ltimes R^n$ обозначим множество всех пар (g_0, t), $g_0 \in G_0$, $t \in R^n$, наделенное следующей алгебраической операцией:

$$(g_0, t)(g_0^{`}, t^{`} = (g_0 g_0^{`}, t^{`} + (t^T g_0^{`})^T), \text{ где } t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t_n \end{pmatrix} \in R^n,$$

$$t^T = (t_1 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad t_n),\ (t_1 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad t_n)^T = \begin{pmatrix} t_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t_n \end{pmatrix}.$$

Предложение 2. Множество $G_0 \ltimes R^n$ с введенной алгебраической операцией является группой, при этом G_0 отождествляется с подгруппой $\{(g_0, 0): g_0 \in G_0\}$а R^n с нормальным делителем $\{(e, t): t \in R^n\}$, где e единица в G_0 , а 0 нуль в R^n.

Предложение 3. Группа $G_0 \ltimes R^n$ не является fб группой.

С другой стороны по определению действия G в $E`$имеем

$$\left(\mathrm{c}_{(g_0,t)}f\right)(x)=f(\mathrm{c}_{(g_0,t)}x)=f\begin{pmatrix} x_0 + t^T x` \\ g_0 x` \end{pmatrix} = f_0\left(x_0 + t^T x`\right) + f`\left(g_0 x`\right) =$$
$$f_0(x) + f_0\left(t^T x`\right) + f`\left(g_0 x`\right).$$

В частности при $g_0 = e$ имеем

$$\left(\mathrm{c}_{(e,t)}f\right)(x)=f_0(x) + f_0\left(t^T x`\right) + f` x`$$

Следовательно, равенство $\left(\mathrm{c}_{(e,t)}f\right)(x) = f(x) = f_0(x) + f` x`$. выполняется для всех $t \in R^n,\ x \in E^G$ тогда и только тогда, когда $f_0 = 0$. Отсюда следует, что если $f \in E`$и $f_0 = f(e_0) \neq 0$, то f не может быть инвариантным. Это означает, что группа G не является fб- группой.

Литература

1. Спрингер Т. Теория инвариантов М. Мир. 1981. 192с.
2. КК. Муминов. ”Различные варианты понятия линейной редуктивности и их свойства”. Узбекский математический журнал. 1994, № 1,с. 47-51.
3. КК. Muminov ”The property (ta) fop locally compact connected groups” ”Algebra and operator theory” Proceedings of the colloquium in Tashkent sept.-oct., 1997. kLUWER Academic Publishers, 1998 207-211.
4. КК. Muminov certain representation of topological groups” Bulletin of the Malaysian Mathematical Society (second series) V .21 № 2. 1998, p. 107-112.
5. КК. Муминов ”Ссвойства редуктивности для дискретьлх топологических групп“ Узбекский математический журнал. 1999, №2. с. 39-43.
6. КК. Муминов “Критерий компактности линейно редуктивных групп“ ДАН РУз. 1999 № 2. С. 9-12.
7. Желобенко Д.П. Введение в теорию представлений. М.: Фактории пресс. 2001.136 с.

ОБ ОСНОВНЫХ СОСТОЯНИЯХ ДЛЯ НС-МОДЕЛИ С ДВУМЯ СОСТОЯНИЯМИ

Махкамов Х.К.
Кокандский государственный педагогический институт

Пусть $\Gamma^k = (V, L, i)$ есть дерево Кэли порядка $k \geq 1$, где V есть множество вершин Γ^k, L – множество его ребер и i – функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то x и y называются *ближайшими соседями вершины* и обозначается $l = \langle x, y \rangle$. Пусть $d(x, y), x, y \in V$ есть расстояние между вершинами x, y, т.е. количество ребер кратчайшей пути, соединяющей x и y.

Для фиксированного $x^0 \in V$ обозначим

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, V_n = \bigcup_{j=0}^{n} W_j.$$

Для $x \in W_n$ обозначим (множество прямых потомков вершины x)

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}.$$

Для любого $x \in G_k$ множество $\{y \in G_k : \langle x, y \rangle\} \setminus S(x)$ имеет единственный элемент, которого обозначим через $x_{\downarrow}$

Пусть $\Phi = \{0,1\}$ и $\sigma \in \Phi^V$ – конфигурация, т. е. $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi : x \in V\}$, где $\sigma(x) = 1$ означает, что вершина x на дереве Кэли занятая, а $\sigma(x) = 0$ означает, что она свободная. Конфигурация σ называется допустимой, если $\sigma(x)\sigma(y) = 0$ для любых соседних $\langle x, y \rangle$ из V(V_n или W_n, соответственно) и обозначим множество таких конфигураций через Ω (Ω_{V_n} и Ω_{W_n}).

Известно, что существует взаимнооднозначное соответствие между множеством V вершин дерева Кэли порядка $k \geq 1$ и группой G_k, являющейся свободным произведением $k+1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, ..., a_{k+1}$, соответственно (см. [1]). Поэтому множество V можно отождествлять с множеством G_k.

Предположим, что на Ω действует группа пространственных переходов. Определим *периодическую конфигурацию* F_k как конфигурацию $\sigma(x)$, которая является инвариантной относительно подгруппы $F_k \subset G_k$ конечного индекса, т.е. $\sigma(xy) = \sigma(x)$ для любых $x \in G_k, y \in F_k$. Для данной периодической конфигурации индекс подгруппы называется *периодом конфигурации*. А конфигурация, которая является инвариантной относительно всех переходов, называется *трансляционно-инвариантной*.

Гамильтониан НС-модели определяется по формуле

$$H(\sigma) = J \sum_{x \in V} \sigma(x), \quad \sigma \in \Omega, \quad J \in R.$$

Пусть M – множество единичных шаров с вершинами в V.

Будем называть сужение конфигурации σ на шаре $b \in M$ ограниченной конфигурацией σ_b. Определим энергию конфигурации σ_b на шаре b следующим образом:

$$U(\sigma_b) \equiv U(\sigma_b, J) = \frac{1}{2} J \sum_{x \in b} \sigma(x), \quad J \in R$$

Лемма. При $k = 2$ для любого конфигурации $U(\sigma_b)$ имеет вид:

$$U(\sigma_b) \in \{U_1, U_2, U_3, U_4\},$$

где $U_1 = 0, \quad U_2 = \frac{1}{2} J, \quad U_3 = J, \quad U_3 = \frac{3}{2} J.$

Определение. Конфигурация σ называется *основным состоянием* для гамильтониана H, если $U(\varphi_b) \in \min\{U_1, U_2, U_3, U_4\}$ для всех $b \in M$.

Для каждого *m* обозначим через A_m множество точек *J* таких, что

$$A_m = \left\{ J \in R : U_m(J) \le \min\{U_1(J), U_2(J), U_3(J), U_4(J)\} \right\}.$$

Легко видеть, что

$$A_1 = \{J \in R : J \ge 0\}, \qquad A_2 = \{J \in R : J = 0\},$$
$$A_3 = \{J \in R : J = 0\}, \qquad A_4 = \{J \in R : J \le 0\}.$$

Обозначим $C_i = \{\sigma : U(\sigma_b) = U_i\}, \quad i = 1...4.$

Теорема 1. 1. Если $J = 0$, то $GS(H) = \Omega$;

2. Если $J > 0$, то в множестве A_1 и только в нем существует ровна одна трансляционно-инвариантное основное состояние и он имеет вид $\sigma(x) = 0$ при любых $\forall x \in V$.

Мы найдём основные состояния в множествах A_2, A_3, A_4, которые отличны от трансляционно-инвариантного основного состояния. Тогда

$$A_2' = \{J \in R : J \ge 0\}, \quad A_3' = \{J \in R : J = 0\}, \quad A_4' = \{J \in R : J \le 0\}.$$

Теорема 2. Если $J > 0$, то в множестве A_2' и только в нем существует основное состояние и он имеет вид:

$$\sigma(x) = \begin{cases} \{0;0\} \text{ если } \sigma(x_\downarrow) = 1, \sigma(x) = 0; \\ \{0;0\} \text{ если } \sigma(x_\downarrow) = 0, \sigma(x) = 1; \\ \{0;1\}, \{1;0\} \text{ если } \sigma(x_\downarrow) = 0, \sigma(x) = 0. \end{cases} \quad \text{при любых } \forall x \in V.$$

Здесь $\{m, n\}$ – область значений вершин в *S(x).*

Литература

1. Ганиходжаев Н.Н., Розиков У.А. ТМФ, **111**: 1, 1997, 109-117.
2. Георги Х.-О. Гиббсовские меры и фазовые переходы. Москва. “Мир” 1992.
3. Rozikov U. A., Gibbs Measures on Cayley Trees, World Sci., Singapore 2013.

ДОПОЛНЕНИЕ К ЗАКОНУ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ, КОГДА ИСКЛЮЧЕНЫ КРАЙНИЕ СЛАГАЕМЫЕ

Назаров З. А.,Исмоилова М.О.
Национального университета Узбекистана.

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин с общей функцией распределения $G(x)$.

Положим $X_n^{(r)} = X_j$, $1 \le r \le n$, если $|X_j|$ является r-максимум из $|X_1|, |X_2|, ..., |X_n|$. Другими словами, если $M_n(j)$, $j = 1, 2, ..., n$ обозначает число X_i, удовлетворяющих либо $|X_i| > |X_j|$, $1 \le i \le n$, либо $|X_i| = |X_j|$, $1 \le i \le j$. Тогда $X_n^{(r)} = X_j$, если $M_n(j) = r$.

Положим $F(x) = P(|X_1| > x)$. Определим

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \ {}^{(0)}S_n = S_n \quad \text{и} \quad {}^{(r)}S_n = S_n - \sum_{k=1}^{r} X_n^{(k)}, \quad r = 1, 2, ..., n.$$

В предыдущих статьях [1, 2, 3] мы обсуждали усиленный закон больших чисел для ${}^{(r)}S_n$, включая скорости сходимости. В этой заметке мы приводим дополнительный результат, который пытается прояснить влияние крайних членов в законе больших чисел. Фактически мы заключаем, что крайние члены не имеют никакого влияния на слабый закон больших чисел. Однако если мы рассмотрим скорость сходимости, окажется, что крайние члены действительно оказывают влияние, как можно увидеть в теореме ниже.

Теорема. Пусть $r \ge 0$ целое число и $t \ge 1$, $0 < \alpha < 2$. Тогда для того чтобы

$$n^{t-1} P\left(\left| {}^{(r)}S_n \right| > n^{1/\alpha} \varepsilon \right) \to 0, \quad \forall \varepsilon > 0, \ n \to \infty,$$

необходимо и достаточно выполнения следующих отношений

$$n^{\alpha(r+t)/(1+r)} F(n) \to 0, \ n \to \infty \tag{1}$$

и

$$n^{1-1/\alpha} \int_{|x| < n^{1/\alpha}} x \cdot dG(x) \to 0, \ n \to \infty \cdot \tag{2}$$

Замечание 1. Непосредственно из теоремы вытекает, что эквивалентны следующие два утверждения:

$$P\left(|S_n|>n^{1/\alpha}\varepsilon\right)=o\left(n^{-\beta}\right),\ \text{для любого}\ \varepsilon>0$$

и

$$P\left(|{}^{(r)}S_n|>n^{1/\alpha}\varepsilon\right)=o\left(n^{-(1+\alpha)\beta}\right),\ \text{для любого}\ \varepsilon>0.$$

В частности, ${}^{(r)}S_n / n^{1/\alpha} \xrightarrow{P} 0$ тогда и только тогда, когда $S_n / n^{1/\alpha} \xrightarrow{P} 0$.

Замечание 2. Когда $0<\alpha<1$, из (1) следует (2), так как

$$\left| n^{1-1/\alpha} \int\limits_{|x|<n^{1/\alpha}} x\cdot dG(x) \right| \le n^{1-1/\alpha} \int\limits_{|x|<n^{1/\alpha}} |x|\cdot dG(x) \le n^{1-1/\alpha} \int\limits_{0}^{n^{1/\alpha}} F(x)dx = o(1).$$

Литература

1. Hirohisa H, Makoto M, Toshio M.: Supplement to the Law of Large Numbers when Extreme Terms are Excluded. Z.Wahrscheinlichketstheorie verw. Gebiete 52. 229-234 (1980).
2. Amosova N.: On the rate of convergence in one-sided law of large numbers. (In Russian) Litovsk. Mat. Sb. 16. 3. 5-12 (1976).
3. Hatori H, Maejima M, Mori T.: Convergence rates in the law of large numbers when extreme terms are excluded. Z.Wahrscheinlichketstheorie verw. Gebiete 47. 1-12 (1979).

ОБ ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Очилов С., Пардаева Д.Н.
Самаркандский государственный университет

Рассматривается задача оптимизации времени прохождения через область объектом, поведение которого описывается линейной дифференциальной системой с запаздыванием. Задача имеет своим источником важные практические проблемы. Она решает такие задачи, когда требуется найти траекторию некоторой динамической системы, которая минимальное время находится в заражённой области, причём это область может перемещаться со временем, задача быстрейшего прохождения самолётом грозового фронта при его внезапном, не предсказанном появлении и невозможности обхода, и другие нетрадиционные задачи оптимального управления. Работа является продолжением исследований в [1-4]. когда движение динамической системы задается дифференциальным уравнением без запаздывания. Следует отметит, что аналогичные задачи рассмотрены в [5] для перехода в управляемых системах, а в работе [6-7] задача

оптимального управления для автономного дифференциального включения со свободным временем и интегральным функционалом, содержащим характеристическую функцию заданного замкнутого множества $M \subset R^n$. При помощи метода аппроксимаций получены необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума.

Пусть поведение объекта определяется системой дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1 x(t-h) + Bu(t)$$

где $x(t)$, $t \in [0,1]$ - n-мерная вектор-функция состояния, A, A_1, B – матрицы соответствующих размерностей, $h > 0$ - постоянное запаздывание, $u(t)$ - m - мерная вектор-функция управления из заданного класса кусочно-непрерывных вектор-функций U при $t \in [0,1]$.

Задано множество

$$M_1 = \{x \in R^n : ц_j(x) \le 0, ц_j(x) \in C^{(1)}, j = 1,..s\},$$

многозначное отображение $M(\cdot)$ отрезка $[0,1]$ в множество всевозможных подмножеств пространства R^n

$$M(t) = \{x \in R^n : ц_0(x,t) \le 0, t \in [0,1]\},$$

где $ц_0(x,t)$ - непрерывно дифференцируемая функция по обеим переменным и начальное условие

$$x(t) = x_0(t), t \in [-h, 0],$$

удовлетворяющие условиям

$$M_1 \cap M(1) = \emptyset, \quad x(0) \notin M(0).$$

Требуется выбрать управление $u(\cdot) \in U$ и начальную функцию $x(t) = x_0(t)$, $t \in [-h, 0]$ так, чтобы $x(1) \in M_1$, а время, в течение которого выполнено включение $x(t) \in M(t)$ было бы минимальным (рис.1.).

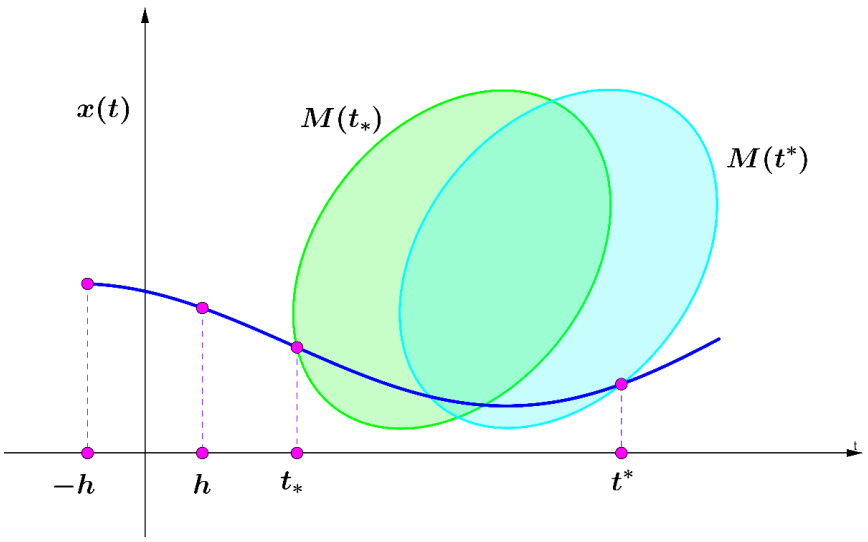


Рис.1.

На основе введения условия согласованности и регулярности и применяя метода линеаризации получены необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина. В математическом

пакете Maple создана программа для внедрения результатов исследований в практические задачи.

Литература

1. Пшеничный Б.Н., Очилов С. "Оптимизация времени прохождения через область", Кибернетика и системный анализ, N 3. 167-171, (1993).
2. Очилов С. О задаче оптимизации времени прохождения через область нелинейной системы/ ТАТУ хабарлари, Вестник ТУИТ, TUIT Bulletin, 2/2008
3. A.N.Shakhidze., S.Ochilov. The necessary conditions in special task speedy passage of area. European applied sciences. # 12 – 2013, 22-27 p. ORT Publishing Schwieberdingerstr, 59 70435 Stuttgard, Germany.
4. Очилов С., Д.А.Ибрагимова. Задача оптимального прохождения области с разрывным интегралом. СамГУ Научный Вестник, 2019. №5 (117) - С. 68–73.
5. Тухтасинов М., Маматов М.Ш. О задачах перехода в управляемых системах, Дифференциальные уравнения 45 (3), 425-430, (2009).
6. Асеев С.М., Смирнов А.И. Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального прохождения через заданную область. Доклады Академии наук, 395:5, 583-585, (2004).
7. Асеев С.М., Смирнов А.И. Необходимые условия оптимальности первого порядка для задачи оптимального прохождения через заданную область. Нелинейная динамика и управление. Вып. 4, ред. С.В.Емельянов, С.К.Коровин. Физматлит, М., 2004, 179-204.

QD АЛГОРИТМ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Расулов С.И.
ТГТУ

Задача вычисления собственного значения и собственной функции интегральных операторов играют очень важную роль в науке и технике. В частности, задача определения собственных колебаний сводится к определению собственного значения интегрального оператора.

Рассмотрим интегральный оператор

$$K\varphi = \int k(x,*)\varphi(x)dx \qquad (1)$$

с ядром $k(x,*)-$ действующий из L в L, где L – некоторое банахово пространство интегрируемых функций, φ и μ-собственная функция и собственное значение оператора K, соответственно[3].

Рассмотрим задачу о вычислении первых собственных значений $\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot .....\mu_n$ оператора K из (1), которые предполагаются простыми и расположенными в порядке убывания по модулю, т.е.

$$|\mu_1| \rangle |\mu_2| \rangle \cdots \rangle |\mu_n| \qquad (2)$$

Предполагаем, что n первых собственных значений образует часть дискретного спектра и существует полный набор собственных функций оператора K.

При сделанных предположениях известно[1], что

$$\mu_1 = \lim_{m\to\infty} \frac{s_{m+1}}{s_m} \tag{3}$$

где $s_m = (\mathrm{K}^m f, h),\ f \in L, h \in L$. Для определения последующих собственных значений можно применять следующий алгоритм, так называемый алгоритмом частных и разностей (QD) [2]. Например, для нахождения μ_2 может служить соотношение

$$\mu_2 = \lim_{m\to\infty} \frac{\begin{vmatrix} s_{m+1} & s_{m+2} \\ s_{m+2} & s_{m+3} \end{vmatrix} s_{m+1}^{-1}}{\begin{vmatrix} s_m & s_{m+1} \\ s_{m+1} & s_{m+2} \end{vmatrix} s_m^{-1}} \tag{4}$$

В качестве примера вычислялись собственные значения оператора K, ядро которого имеет следующий вид

$$k(x,y) = \begin{cases} 12x(1-y) & x \le y \\ 12y(1-x) & x \ge y \end{cases} \qquad x, y \in [0,1]$$

Точные характеристические значения ядра есть

$$\lambda_n = \frac{(\pi n)^2}{12} \quad \text{n=1,2,}$$

Ниже приводятся результаты вычисления второго собственного значения оператора K с помощью QD-алгоритма. Результаты счета для 1000 испытаний приведены в нижеследующей таблице:

Число итерац.	Монте-Карловская оценка
1	3.1944 ± 0.21
2	3.2179 ± 0.19
3	3.2258 ± 0.18
4	3.2560 ± 0.20
5	3.2472 ± 0.12
6	3.2639 ± 0.09

Из этой таблицы видно, что результаты полученные методом Монте – Карло хорошо согласуются с точными решениями задачи.

Литература

1. Елепов Б.С., Кронберг А.А., Михайлов Г.А. Решение краевых задач методом Монте-Карло. - Новосибирск,: Наука, 1980 г. С.73-78.

2. Фадеев Д.К., Фадеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. - М.: Физматгиз, 1963 г. С. 431-434.

3. Михайлов Г.А. Войтишек А.В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. -М.: Академия, 2014 г. С. 25-34.

ОБ ОСНОВНЫХ СОСТОЯНИЯХ МОДЕЛИ ПОТТСА-ИЗИНГА НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ.

Рахматуллаев М.М., Исаков Б.М.
Қўқон Давлат Педагогика Институт

Каждой мере Гиббса сопоставляется одна фаза физической системы. Если существует более чем одна мера Гиббса, то говорят, что существуют фазовые переходы. Основная проблема для данного гамильтониана – это описание всех отвечающих ему предельных мер Гиббса. Известно, что фазовая диаграмма Гиббсовых мер для данного гамильтониана близко к фазовой диаграмме основных изолированных (устойчивых) состояний этого гамильтониана. При низких температурах основному состоянию соответствует предельная мера Гиббса (см.[4], [5]). Поэтому, естественно возникает задача описания основных состояний.

Известно, что $\Gamma^k = (V, L), k \geq 2$ – дерево Кэли можно представить как свободное произведение $k+1$ циклических групп второго порядка (см., например, [1-4]), где V – множество вершин Γ^k, L – множество ребер Γ^k. Обозначим эту группу как G_k. Две вершины $x, y \in V$ называются соседними, если они представляют собой концевые точки некоторого ребра $l \in L$, и в этом случае мы будем писать $l =< x, y >$. Мы рассмотрим модель, где спин принимает значения из множества $\Phi = \{-1,0,1\}$. Конфигурация σ на $\cup$ определяется как функция $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$.

Пусть $G_k / G_k^* = \{H_1, ..., H_r\}$ – фактор группа, где G_k^* – нормальний делитель индекса $r \geq 1$.

Определения 1. Конфигурация $\sigma(x)$ называется G_k^* – периодической, если $\sigma(x) = \sigma_i$ при $x_i \in H_j$, $\forall x \in G_k$. G_k – периодическая конфигурация называется трансляционно- инвариантной.

Обозначим через $S(x)$ множество "прямых потомков" точки $x \in V_n$, т.е. если $x \in W_n$, то $S(x) = \{y \in W_{n+1} :< x, y >\}$. Через $S_1(x)$ обозначим множество всех ближайших соседей точки $x \in G_k$, т.е. $S_1(x) = \{y \in V :< x, y >\}$ и $x_\downarrow = S_1(x) \setminus S(x)$.

Определения 2. Конфигурация $\sigma(x)$ называется G_k^* – слабо периодической, если $\sigma(x) = \sigma_{i,j}$ при $x_i \in H_i, \forall x_\downarrow \in H_j$, то есть значения $\sigma(x)$ зависит от классов принадлежности x и $x_\downarrow$.

Для данной периодической конфигурации индекс нормального делителя называется периодом конфигурации. В работе рассмотрено модель

Поттс-Изинга на дереве Кэли. Гамильтониан рассматриваемой модели имеет вид:

$$H(\sigma) = -J_1 \sum_{<x,y>\in L} \sigma(x)\sigma(y) - J_2 \sum_{<x,y>\in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \quad (1)$$

где $J = (J_1, J_2) \in R^2$, $\delta_{i,j}$ – символ Кронкера.

Пусть M множество единичных шаров с вершинами в V. Мы назовем сужение конфигурации σ на шаре $b \in M$ ограниченной конфигурацией σ_b. Определим энергию конфигурации σ_b на шаре b следующим образом:

$$U(\sigma_b) = -\frac{1}{2} J_1 \sum_{<x,y>\in L} \sigma(x)\sigma(y) - \frac{1}{2} J_2 \sum_{<x,y>\in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}. \quad (2)$$

Рассмотрим случай $k = 2$. Легко видеть, что $U(\sigma_b) \in \{U_1, U_2, U_3, ..., U_{12}\}$ для любого σ_b, где

$$U_1 = 0, U_2 = -\frac{3}{2}J_1 - \frac{3}{2}J_2, U_3 = \frac{3}{2}J_1, U_4 = -J_1 - J_2, U_5 = -\frac{1}{2}J_1 - \frac{1}{2}J_2, U_6 = -\frac{1}{2}J_1 - J_2,$$

$$U_7 = \frac{1}{2}J_1 - \frac{1}{2}J_2, U_8 = J_1, U_9 = \frac{1}{2}J_1, U_{10} = -\frac{1}{2}J_2, U_{11} = -\frac{3}{2}J_2, U_{12} = -J_2.$$

Определение 3. Конфигурация φ называется основным состоянием гамильтониана (1), если $U(\varphi_b) = \min\{U_1, U_2, U_3, ..., U_{12}\}$ для любого $b \in M$.

Для $m = 1,2,..12$, введем следующие обозначение:

$$A_m = \{(J_1, J_2) \in R^2 \mid U_m = \min\{U_k\}, k = \overline{1,12}\}.$$

Нетрудный, но достаточно громоздкий анализ показывает, что A_i имеет вид:

$$A_1 = \{(J_1, J_2) \in R^2 \mid J_1 \geq 0; J_2 \leq -J_1\}, A_2 = \{(J_1, J_2) \in R^2 \mid J_1 \geq 0; J_2 \geq -J_1\},$$

$$A_3 = \{(J_1, J_2) \in R^2 \mid J_1 \leq 0; J_2 \leq -J_1\}, A_4 = A_5 = \{(J_1, J_2) \in R^2 \mid J_1 = -J_2; J_2 \leq 0\},$$

$$A_6 = A_7 = A_{10} = \{(J_1, J_2) \in R^2 \mid J_1 = 0; J_2 = 0\}, A_{12} = \{(J_1, J_2) \in R^2 \mid J_1 \leq 0; J_2 = 0\}$$

$$A_8 = A_9 = \{(J_1, J_2) \in R^2 \mid J_1 = 0; J_2 \leq 0\}, A_{11} = \{(J_1, J_2) \in R^2 \mid J_1 \geq -J_2; J_2 \geq 0\}.$$

Легко проверить, что

$$R^2 = \bigcup_{i=1}^{12} A_i.$$

Для трансляционно-инвариантных основных состояний доказана следующая теорема:

Теорема 1. Пусть $k = 2$. Для модели Поттс-Изинга верна следующие утверждение:

1) На множестве A_{11} существует единственная трансляционно-инвариантная основная состояния и оно имеет вид $\varphi(x) = 0, \forall x \in G_k$.

2) На множестве A_2 существуют две основных состояний и они имеют вид $\varphi(x) = \pm 1, \forall x \in G_k$.

3) Если $(J_1, J_2) \in R^2 \setminus (A_{11} \cup A_2)$, тогда не существуют трансляционно-инвариантных основных состояний.

Пусть $G_k^{(2)} = \{x \in G_k : |x| - \text{четно}\}$, где $|x|$ – длина слова x. Очевидно, что $G_k^{(2)}$ – является нормальным делителем индекса два (см.[4]).

Пусть $G_k \setminus G_k^{(2)} = \{G_k^{(2)}, G_k \setminus G_k^{(2)}\}$ – фактор-группа. Для простоты, введем обозначения $H_0 = G_k^{(2)}, H_1 = G_k \setminus G_k^{(2)}$. $G_k^{(2)}$ – периодическая конфигурация имеет следующий вид:

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_1, \text{если} \quad x \in H_0, \\ \sigma_2, \text{если} \quad x \in H_1, \end{cases} \tag{3}$$

где $\sigma_1, \sigma_2 \in \Phi\{-1,0,1\}$.

В работе изучена $G_k^{(2)}$ – периодические основные состояния и доказана следующая:

Теорема 2. Пусть $k = 2$. Тогда для модели Поттс-Изинга верны следующие утверждения:

1) На множестве A_3 существуют две $G_k^{(2)}$ – периодических основных состояний и они имеют следующий вид:

$$\varphi(x) = \pm \begin{cases} 1, \text{если} \quad x \in H_0, \\ -1, \text{если} \quad x \in H_1. \end{cases}$$

2) На множестве A_1 существуют четыре $G_k^{(2)}$ – периодических основных состояний и они имеют следующий вид:

$$\varphi_2(x) = \pm \begin{cases} i, \text{ если} \quad x \in H_0, \\ j, \text{ если} \quad x \in H_1. \end{cases}$$

где $|i - j| = 1$.

Замечание 1. Теорема 2 показывает что, для модели Поттс-Изинга существует $G_k^{(2)}$ – слабо периодических основных состояний, отличных от трансляционно-инвариантных.

Пусть $A \subset \{1,2,,k+1\}$. Известно(см[4]), что любой нормальный делитель индекса два имеет следуюший вид

$$H_A = \{x \in G_k : \sum_{i \in A} \omega_x(a_i) - \text{четно}\}.$$

Рассмотрим фактор группу $G_k \setminus H_A = \{H_0, H_1\}$, где $H_0 = H_A, H_1 = G_k \setminus H_0$. Изучим H_A – слабо периодическое основное состояние. H_A – слабо периодическая конфигурация имеет следующий вид:

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_{0,0}, \text{если} \ x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_0, \\ \sigma_{0,1}, \text{если} \ x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_1, \\ \sigma_{1,0}, \text{если} \ x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_0, \\ \sigma_{1,1}, \text{если} \ x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_1, \end{cases}$$

где $\sigma_{i,j} \in \Phi\{-1,0,1\}, \ i, j = \overline{0,1}$.

Доказана следующая теорема

Теорема3. Пусть $k=2$, $|A|=1$.Тогда вернны следующие утверждения:

1) На множестве $_{A_4}=A_5=\{(J_1,J_2)\in R^2 \mid J_1=-J_2; J_2\le 0\}$ существуют шесть H_A–слабо периодические (не периодических) основных состояний, и они имеют следующий вид:

$$\sigma_1(x)=\begin{cases}1, \text{если } x_\downarrow\in H_0, x\in H_0,\\ 1, \text{если } x_\downarrow\in H_0, x\in H_1,\\ 0, \text{если } x_\downarrow\in H_1, x\in H_0,\\ 1, \text{если } x_\downarrow\in H_1, x\in H_1,\end{cases}, \sigma_2(x)=\begin{cases}-1, \text{если } x_\downarrow\in H_0, x\in H_0,\\ -1, \text{если } x_\downarrow\in H_0, x\in H_1,\\ 0, \text{если } x_\downarrow\in H_1, x\in H_0,\\ -1, \text{если } x_\downarrow\in H_1, x\in H_1,\end{cases}$$

$$\sigma_3(x)=\begin{cases}1, \text{если } x_\downarrow\in H_0, x\in H_0,\\ 0, \text{если } x_\downarrow\in H_0, x\in H_1,\\ 1, \text{если } x_\downarrow\in H_1, x\in H_0,\\ 1, \text{если } x_\downarrow\in H_1, x\in H_1,\end{cases}, \sigma_4(x)=\begin{cases}-1, \text{если } x_\downarrow\in H_0, x\in H_0,\\ 0, \text{если } x_\downarrow\in H_0, x\in H_1,\\ -1, \text{если } x_\downarrow\in H_1, x\in H_0,\\ -1, \text{если } x_\downarrow\in H_1, x\in H_1,\end{cases}$$

$$\sigma_5(x)=\begin{cases}-1, \text{если } x_\downarrow\in H_0, x\in H_0,\\ 0, \text{если } x_\downarrow\in H_0, x\in H_1,\\ 0, \text{если } x_\downarrow\in H_1, x\in H_0,\\ 1, \text{если } x_\downarrow\in H_1, x\in H_1,\end{cases}, \sigma_6(x)=\begin{cases}1, \text{если } x_\downarrow\in H_0, x\in H_0,\\ 0, \text{если } x_\downarrow\in H_0, x\in H_1,\\ 0, \text{если } x_\downarrow\in H_1, x\in H_0,\\ -1, \text{если } x_\downarrow\in H_1, x\in H_1.\end{cases}$$

2). Всякие H_A–слабо периодические основные состояния кроме конфигурации указанных в пункте 1 являются трансляционно-инвариянтными.

Литература

1. Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков Описание периодических крайних гиббсовских мер некоторых решеточных моделей на дереве Кэли, Теоретическая и математическая физика, том 111, номер 1, 1997, стр.109-117.
2. Mukhamedov F., Chin Hee Pah, Rahmatullaev M., Hakim Jamil. Periodic and Weakly Periodic Ground States for the λ-Model on Cayley Tree, J. Phys.:Conf.Ser., 949012021. 2017.
3. Rahmatullaev M., Rasulova M. Periodic and Weakly Periodic Ground States for the Potts Model with Competing Interactions on the Cayley Tree, Siberian Advances in Mathematics, Vol. 26, No. 3, 2016, pp. 215-229.
4. U.A.Rozikov Gibbs Measures on Cayley Trees, orld Scientific, Haversack, 2013.
5. Синай Я.Г., Теория фазовых переходов. Строгие результаты. М.:Наука.1980

О ПОДПРОСТРАНСТВАХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

Рахматуллаев А.Х., Жураева Г.Р
ТИИИМСХ, ТГПУ
olimboy56@gmail.com

Рассматриваются геометрически свойства бесконечномерных многообразий возникающие из прямых пределов ANR компактов в категории M-метрических пространств.

Изучаются топологические свойства функтора P вероятностных мер и его подфунктора P_f. Пусть X бесконечный компакт. Непрерывные функционал $\mu \in C(X) \to \mathrm{R}$ называется мерой на X. Мера μ называется положительной (символически $\mu \geq 0$), если $\mu(\varphi) \geq 0$ для всякого $\varphi \geq 0$. Мера μ называется нормированной, если $\|\mu\| = 1$. Положительная нормированная мера называется вероятностной.

Для компакта X через $P(X)$ обозначается множество всех вероятностых мер определенных в этом множестве X. Базу окрестностей элемента $\mu \in P(X)$ образуют множества $O(\mu_1, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varepsilon) = \{\mu' \in P(X) : \left| \mu(\varphi_i) - \mu'(\varphi_i) \right| \quad <$, $\varepsilon > 0, \varphi_i \in C(X)\}$ На множестве $C(X) = \{ f : X \to R$-непрерывно$\}$ рассматривается компактно-открытая топология. С общими топологическими, функториальными и геометрическими свойствами пространства вероятностных мер $P(X)$ можно ознакомиться в работах [1.2]. Для компактов X имеется простая топологическая классификация пространства $P(X)$. В случае конечного пространства $X = n$ точки μ пространства $P(n) = P_n(n)$ являются выпуклыми линейными комбинациями мер Дирака: $\mu = m_0 \delta_{x_0} + m_1 \delta_{x_1} + ... + m_n \delta_{x_{n-1}}$ по этому они естественно отождествляются с точками (n-1)-мерного симплекса σ^{n-1}.

При этом меры Дирака $\sigma_{(i)}$ образуют вершины симплекса, а массы m_i помещенные в точки i , являются барицентрическими координатами меры μ. Таким образом, компакт P(n) афинно-гомеоморфен симплексу σ^{n-1}. В случае бесконечного компакта X пространство P(X) является компактом (так как P сохраняет вес). Далее, оно, содержа симплексы сколь угодно большого числа измерений, бесконечномерно. По результатам Кэли выпуклый компакт $P(X) \subset R^{C(X)}$ аффинно вкладывается в l_2- гильбертово пространство т.е. $l_2 = \prod_{i=1}^{\infty} (-1,1)_i$ - гильбертово пространство, где $(-1,1)_i$ - интервал в R , где R – действительная прямая. Следовательно, по результатам Келлера компакт $P(X)$ как бесконечномерный выпуклый компакт, лежащий в e_2, гомеоморфен гильбертовому кубу Q, где $Q = \prod_{i=1}^{\infty} \left[-1,1\right]_i$ - гильбертов куб, $\left[-1,1\right]_i \subset R$- отрезок в R.

Е.В.Шепин определил один интересный подфунктор P_f функтора P обладающий следующим свойством: если носитель меры μ состоит из n точек $x_1, x_2, ..., x_n$, то мера по крайней мере одной из точек не меньше

$1-1/(n+1)$. Функтор интересен тем, что является функтором с конечными носителями, не имеющим конечной степени.

Пусть τ паракомпактное топологическое пространство. Топологическое пространство X называется τ-многообразием, если каждая точка $x \in X$ имеет окрестность гомеоморфную открытому множеству пространства τ. Пространство τ называется модельно X или τ называется модельным пространством.

Обозначим через R_f^ω $\{(y_1, y_2, ..., y_j, ...) \in \mathrm{R}^w$: множество только конечное число x_i отлично от нуля$\}$ а через Q_f^ω-множество $\{(y_1, y_2, ..., y_j, ...) \in Q^\omega$: только конечное число y_j отлично от точки $O = (0, 0, ..., 0, ...) \in Q\}$.

Пусть M-категория метрических пространств и их непрерывных изометрий.

Прямой предел в категории M будем обозначать $\underrightarrow{\lim}_m$ и называть метрическим пределом.

Отметим полученные следующие результаты:

Теорема 1. Пусть $M - R^\infty$ многообразие и $M = \underrightarrow{\lim} X_k$ где $X_1 \subset X_2 \subset ... X_R \subset ...$ - последовательность компактов. Тогда компакты $P_f(X_k)$ можно метризовать таким образом, что $\underrightarrow{\lim}_m P_f(X_k)$ будет R_f^ω -многообразием.

Через Q^∞ обозначим $\underrightarrow{\lim}\, Q^n$ и $R^\infty = \underrightarrow{\lim} R^n$ [3].

Теорема 2. Пусть $M - Q^\infty$- многообразие и $M = \underrightarrow{\lim} X_k$ где $X_1 \subset X_2 \subset ... X_R \subset ...$ - последовательность компактов. Тогда компакты X_k можно метризовать таким образом, что $\underrightarrow{\lim}_m P_f(X_k)$ будет Q_f^ω - многообразием.

Литература

1. В.В.Федорчук Вероятностные меры в топологии Успехи мат. наук. Т.46, вып 1, 1991, с.41-80.
2. Т.Ф.Жураев Некоторые геометрические свойства функтора вероятностных мер и его подфункторов М. МГУ, канд.диссер, 1989, 90 с.
3. R.E.Heisey Stability, open embeddings and classification of founded weak*-manifolds- Gen.Top.Appl. 1976,6:3, p.327-338.

ТИП РАСПОЛОЖЕННОСТИ ПОДПРОСТРАНСТВ

Рахматуллаев А.Х.
olimboy56@gmail.com

В этой заметки рассматривается связь различных типов расположений типа d, dP, dF и Z – расположенности подпространств в объемлющем топологическом пространстве, которое имеют своим следствием

монотонность размерности dim и ковариантных функторов конечной степени действующие в категории $Tych$ -тихоновских пространств и непрерывных отображений в себя. Целым неотрицательным числом k обозначаем дискретное пространство, состоящее k точек (если $k=0$, то будем считать, что k гомеоморфно $\varnothing$), через $C(k,X)$ обозначим пространство отображений из k в X в компактно-открытой топологии. Для функтора F, тихоновского пространства X и целого неотрицательного числа k определим отображение $\pi_{F,X,k}: C(k,X)\times F(k)\to F(X)$ формулой

$$\pi_{F,X,k}(\eta,t)=F(\eta)\cdot t \text{ при } \eta\in C(k,X),\ t\in F(k).$$

Поскольку функтор F непрерывен, это отображение также непрерывно. Определим подфунктор F_k функтора F следующем образом: для пространства X пространство $F_k(X)$ есть образ пространство $C(k,X)\times F(k)$ отображении $\pi_{F,X,k}$ и для отображения $f: X\to Y$ отображение $F_k(f)$ есть сужение $F(f)$ на $F_k(X)$. Функтор F называется функтором конечной степени n, если $F_n(X)=F(X)$ для произвольного пространства X и $F_{n-1}(X)\neq F(X)$ Известно , что нормальные функторы F конечной степени содержит в себе тождественного функтора Id
в качестве подфунктора т.е. $Id\subset F$ т.е. для любого пространства (тихоновского) X имеет место $\eta(X)\subset F(X)$, где $\eta: X\to F(X)$ вложение.

Напомним, что [1] подпространство Y топологического пространства X называется dP- расположенным (d- расположенным) в X, если для любого функционально открытого в Y множества $O\subset Y$, существует функционально открытое семейство U в Y такое что (1) $U\wedge Y$ является σ-локально конечным семейством в Y; (2) $(\cup U)\cap Y=O$ A подпространство Y топологического пространства X называется dF- расположенным [2], если для любых замкнутых и функционально отделимых в Y множеств $F_1\subset Y$ и $F_2\subset Y$ существует функционально открытое семейство U в X такое, что

$(1')$ $U\wedge Y$ является σ-локально конечным семейством в Y;

$(2')$ $Y\subset(\cup U)$;

$(3')$ $(\cup U)\cap\left([F_1]_X\cap[F_2]_X\right)=\varnothing$

Получено следующая

Теорема 1. Для тихоновского пространства X и нормального функтора F конечной степени n имеет место:

а) пространство $\eta(X)$ dP расположенным в $F(X)$;

б) пространство $\eta(X)$ d расположенным в $F(X)$;

в) пространство $\eta(X)$ dF расположенным в $F(X)$.

Говорят, что подпространство Y топологического пространства X

Z – расположенным в X, если для любых двух замкнутых и функционально отделимых в Y подмножеств F_1 и F_2 существует метрическое пространство Z размерности $\dim Z = 0$, непрерывное отображение $f : Y \to Z$ и семейство $U = \cup\{U_i : i \in N\}$ открытых F_σ- множеств произведения $\beta X \times Z$ не пересекающих множество $\left([F_1]_{\beta X} \cap [F_2]_{\beta X}\right) \times Z$, причем для графика $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in Y\}$ отображения f имеем $G(f) \subset \cup U$ и для любого $i \in N$ семейство $U_i \wedge G(f)$ является локально конечным в $G(f)$. Через βX обозначается стоуно чеховское расширение пространства X.

Имеет место следующие

Теорема 2. Для любого тихоновского пространства X нормального функтора F конечной степени n пространство ηX является Z вложенным в $F(X)$.

Теорема 3. В условиях теоремы 1-2 имеет место для размерности $\dim$: $\dim X \le \dim F(X)$.

Необходимые понятия относящимся к нормальным функторам можно найти в [3,4].

Литература

1. Б.А. Пасынков. О монотонности размерности// ДАН СССР, 1982, т.267, с.546-552.
2. В.В. Филиппов. О нормально расположенных пространствах// Труды матем. Ин-т АН СССР, 1983, с.239-251.
3. Е.В. Щепин. Функторы и несчетные степени компактов// УМН, 1981, т.36, вып. 5, с.3-62.
4. В.В. Федорчук. Общая топология. Основные конструкции. М. Из-во МГУ, 1988, с.252.

ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ ОСНОВНЫЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ ПОТТСА С ВНЕШНИМ ПОЛЕМ НА ДЕРЕВО КЕЛИ ПОРЯДКА ТРИ

Рахматуллаев М., Расулова М., Мамадалиева М
Наманганский государственный университет
mrahmatullaev@rambler.ru, m_rasulova_a@rambler.ru

Известно, что дерево Кэли $\Gamma^k, k \ge 1$ можно представить как свободное произведение $k+1$ циклических групп второго порядка (см., например, [1]). Обозначим эту группу как G_k. Две вершины $x, y \in V$ называются соседнимы, если они представляют собой концевые точки некоторого ребра $l \in L$, и в этом случае мы будем писать $l = \langle x, y \rangle$.

Расстояние $d(x,y), x,y \in$ на дереве Кэли вводится следующим образом: $d(x,y)=d$, если d есть минимальное значение, при котором найдутся вершины $x=x_0,x_1,x_2,\dots,x_{d-1},x_d=y$

такие, что $(x_0,x_1),\dots,(x_{d-1},x_d)-$ ближайшее соседи. Положим

$W_n=\{x\in V|d(x,x^0)=n\},\ V_n=\{x\in V|d(x,x^0)\le n\},\ L_n=$ $\{\langle x,y\rangle\in L|(x,y)\in V_n\}$где вершины $x^0\in V$ фиксированы (см. [1]) .

Мы рассмотрим модель, где спин принимает значения из множества $\Phi=\{1,2,\dots,q\}$. Конфигурация у на V определяются как функция $x\in V\to$ $\mathrm{у}(x)\in\Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega=\Phi^V$.

Пусть $G_k/G_k^*=\{H_1,H_2,\dots,H_r\}-$ фактор-группа, где G_k^*- нормальный делитель индекса $r\ge 1$.

Определение 1. Конфигурация $\mathrm{у}(x)$ называется G_k^*- периодической, если $\mathrm{у}(x)=\mathrm{у}_i$, при $x\in H_i,\forall x\in G_k$. G_k - периодическая конфигурация называется трансляционно-инвариантной.

Для данной периодической конфигурации индекс нормального делится называется периодом конфигурации.

Гамильтониан модели Поттса с внешним полем имеет вид:

$$H(\sigma)=\ \mathrm{J}\sum_{\langle x,y\rangle}\mathrm{Д}_{\mathrm{у}(x)\mathrm{у}(y)}+\mathrm{б}\sum_{x\in V}\mathrm{у}(x),\qquad(1)$$

где $\mathrm{J},\mathrm{б}\in R$.

Пусть $M-$ множество единичных шаров с вершинами в V. Мы назовем сужение конфигурации у на шаре $b\in M$ ограниченной конфигурацией $\mathrm{у}_b$. Определим энергию конфигурации $\mathrm{у}_b$ на b следующим образом:

$$U(\mathrm{у}_b)=\frac{1}{2}J\sum_{\substack{\langle x,y\rangle\\ x,y\in b}}\mathrm{Д}_{\mathrm{у}(x)\mathrm{у}(y)}+\mathrm{б}\mathrm{у}(c_b),\qquad(2)$$

здес $\mathrm{с}_b$ $-$центр единичного шара b.

Рассмотрим случай $k=3$ и $q=3$. Легко видеть, что

$U(\mathrm{у}_b)=\{U_1,U_2,\dots,U_{15}\}$ для любого $\mathrm{у}_b$, где

$$U_1=2J+\mathrm{б},\ U_2=2J+2\mathrm{б},\ U_3=2J+3\mathrm{б},\ U_4=\frac{3}{2}J+\mathrm{б},U_5=\frac{3}{2}J+2\mathrm{б},$$

$$U_6=\frac{3}{2}J+3\mathrm{б},U_7=J+\mathrm{б},U_8=J+2\mathrm{б},U_9=J+3\mathrm{б},U_{10}=\frac{1}{2}J+\mathrm{б},$$

$$U_{11}=\frac{1}{2}J+2\mathrm{б},\quad U_{12}=\frac{1}{2}J+3\mathrm{б},\quad U_{13}=\mathrm{б},\quad U_{14}=2\mathrm{б},\quad U_{15}=3\mathrm{б},.$$

Определение 2. Конфигурация ц называется основным состоянием гамильтониана Н, если $U(\mathrm{ц}_b)=min\{U_1,U_2,\dots,U_{15}\}$ для любого $b\in M$.

В работе [3] изучены основные состояния для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дерево Кели. В этой работе изучим основные состояния для модели (1).

Введем обозначение

$$A_m = \left\{(\text{Ј}, \text{б}) \in R^2 \mid U_m = \min_{1 \le k \le 15} \{U_k\}\right\}.$$

при k=3, q=3 получим, что A_i имеет следуюший вид:

$$A_1 = \{(\text{Ј}, \text{б}) : \ \text{Ј} \in (-\infty; 0], \text{б} \in [0; \infty)\},$$

$$A_2 = \{(\text{Ј}, \text{б}) : \ \text{Ј} \in (-\infty; 0], \text{б} = 0\},$$

$$A_3 = \{(\text{Ј}, \text{б}) : \text{Ј} \in (-\infty; 0], \text{б} \in (-\infty, 0]\},$$

$$A_4 = \{(\text{Ј}, \text{б}) : \text{Ј} = 0, \text{б} \in [0; \infty)\}, \qquad A_5 = \{(0,0)\},$$

$$A_6 = \{(\text{Ј}, \text{б}) : \text{Ј} = 0, \text{б} \in (-\infty, 0]\}, \qquad A_7 = \{(\text{Ј}, \text{б}) : \text{Ј} = 0, \text{б} \in [0; \infty)\},$$
$$A_8 = \{(0,0)\}$$

$$A_9 = \{(\text{Ј}, \text{б}) : \text{Ј} = 0, \text{б} \in (-\infty, 0]\}, \qquad A_{10} = \{(\text{Ј}, \text{б}) : \text{Ј} = 0, \text{б} \in [0; \infty)\},$$
$$A_{11} = \{(0,0)\}$$

$$A_{12} = \{(\text{Ј}, \text{б}) : \text{Ј} = 0, \text{б} \in (-\infty, 0]\}, A_{13} = \{(\text{Ј}, \text{б}) : \text{Ј} \in [0; \infty), \text{б} \in [0; \infty)\},$$

$$A_{14} = \{(\text{Ј}, \text{б}) : \text{Ј} \in [0; \infty), \text{б} = 0\}, A_{15} = \{(\text{Ј}, \text{б}) : \text{Ј} \in [0; \infty), \text{б} \in (-\infty, 0]\},$$

Легко проверить, что $\bigcup_{i=1}^{15} A_i \in R^2$.

Пусть $H_A = \{x \in G_k : \sum_{i \in A} \text{щ}_x(a_i) - \text{четный}\}$, где $\text{щ}_x(a_i)$ есть количество букв a_i в слове x. Известно, что H_A является нормальным делителям индекса два (см.[2]). Пуст $G_k/H_A = \{H_A, G_k/H_A\}$ фактор группа. Для простоты введем обозначения

$$H_0 = H_A, \qquad H_1 = G_k/H_A.$$

В этой работе изучаются трансляционно-инвариантные и H_0-периодические основные состояния. $\square_0$-периодическая конфигурация имеет следуюший вид:

$$\text{у}(x) = \begin{cases} \text{у}_1, & \text{если } x \in H_0, \\ \text{у}_2, & \text{если } x \in H_1, \end{cases}$$

где $\text{у}_i \in \Phi = \{1,2,3\}, \ i = 1,2.$

Отметим, что в случае $\text{у}_1 = \text{у}_2 \ \ H_0 -$ периодическая конфигурация является трансляционно-инвариантними.

Доказана следующая теорема.

Теорема 1.

Пусть $k = 3$ и $q = 3$. Тогда для модели Поттса с внешним полем верны следуюшие утверждения:

1) На множестве A_1 существует единственное трансляционно-инвариантное основное состояние и оно и имеет вид: $\text{ц}(x) = 1, \ \forall x \in G_k$.

2) На множестве A_2 существует единственное трансляционно-инвариантное основное состояние и оно и имеет вид: $\text{ц}(x) = 2, \ \forall x \in G_k$.

3) На множестве A_3 существует единственное трансляционно-инвариантное основное состояние и оно и имеет вид: $\text{ц}(x) = 3, \ \forall x \in G_k$.

Замечание: Отметим, что трансляционно-инвариантная конфигурация $\text{ц}(x) = 2, \forall x \in G_k$ не является основным состоянием при $\text{б} \neq 0$.

Для периодических основных состояниях доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $k = 3$ и $q = 3$. Для модели Поттса с внешним полем не существует $H_A -$ периодические (не трансляционно-инвариантное) основные состояния.

Литература

1. U.A.Rozikov, *Gibbs Measures on Cayley Trees*, World Scientific, 2013.
2. Н.Н. Ганиходжаев, У.А. Розиков, *ТМФ,* 111:1 (1997), 109-117.
3. Rahmatullayev M., Rasulova M. *Periodic and Weakly Periodic Ground States for the Potts Model with Competing Interactions on the Cayley Tree //* Siberian Advances in Mathematics, 2016.

О ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫХ ОСНОВНЫХ СОСТОЯНИЯХ ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ С ВНЕШНИМ ПОЛЕМ

[1]Рахматуллаев М.М., [2]Расулова М.А., [3]Маликжонова Х.

[1] Института математики им. В.И.Романовского АН РУз,

[1,2,3] Наманганский государственный университет

Пусть $\tau^k = (V, L)$, $k \geq 1$ есть дерево Кэли порядка k, где V - множество вершин, L - множество ребер τ^k. Известно, что G_k можно представить как G_k - свободное произведение $k+1$ циклических групп второго порядка (см. [1]).

Мы рассматриваем модель, где спин принимает значения из множества $\Phi = \{-1,1\}$. Тогда конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \mapsto \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$.

Через $S_1(x)$ обозначим множество всех ближайших соседей точки $x \in G_k$, т.е. $S_1(x) = \{y \in G_k : < x, y >\}$.

Пусть $G_k / G_k^* = \{H_1, ..., H_r\}$ фактор группа, где G_k^* – нормальный делитель индекса $r \geq 1$.

Определение 1. Конфигурация $\sigma(x)$ называется G_k^* – периодической, если $\sigma(x) = \sigma_i$ при $x \in H_i$, $\forall x \in G_k$. G_k – периодическая конфигурация называется трансляционно-инвариантной.

В работах [1], [2] описаны основные состояния для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями, в работах [3]-[5] описаны основные состояния для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли.

В данной работе мы исследовали основные состояния для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями и с внешним полем на дереве Кэли порядка два.

Гамильтониан модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями и с внешним полем имеет вид

$$H(\sigma)=J_1\sum_{\langle x,y\rangle\in L}\sigma(x)\sigma(y)+J_2\sum_{\substack{x,y\in V:\\ d(x,y)=2}}\sigma(x)\sigma(y)+\alpha\sum_{x\in V}\sigma(x) \tag{1}$$

где $J_1, J_2, \alpha\in R-$ константы не равны нулю, α – внешнее поле.

Пусть $M-$ множество единичных шаров с вершинами в V. Мы назовем сужение конфигурации σ на шаре $b\in M$ *ограниченной конфигурацией* σ_b. Символом c_b обозначим центр единичного шара b. Определим энергию конфигурации σ_b на b следующим образом:

$$U(\sigma_b)=\frac{1}{2}J_1\sum_{x\in S_1(c_b)}\sigma(c_b)\sigma(x)+J_2\sum_{\substack{x,y\in b:\\ d(x,y)=2}}\sigma(x)\sigma(y)+\frac{\alpha}{k+2}\sum_{x\in b}\sigma(x), \tag{2}$$

Пусть $k=2$. Следующая лемма доказана.

Лемма. Для каждой конфигурации φ_b мы имеем

$$U(\varphi_b)\in\{U_i: i=1,2,...,7\},$$

где

$$U_1=\frac{3J_1}{2}+3J_2+\alpha,\ U_2=\frac{3J_1}{2}+3J_2-\alpha,\ U_3=\frac{J_1}{2}-J_2+\frac{\alpha}{2},\ U_4=\frac{J_1}{2}-J_2-\frac{\alpha}{2},$$
$$U_5=-\frac{J_1}{2}-J_2,\ U_6=-\frac{3J_1}{2}+3J_2-\frac{\alpha}{2},\ U_7=-\frac{3J_1}{2}+3J_2+\frac{\alpha}{2}. \tag{3}$$

Определение 2. Конфигурация φ называется основным состоянием для гамильтониана H, если

$$U(\varphi_b)=\min\{U_1,U_2,U_3,...,U_7\}$$

для любого $b\in M$.

Обозначим

$$A_\xi=\{(J_1,J_2,\alpha)\in R^3: U_\xi=\min\{U_1,U_2,U_3,...,U_7\}\}. \tag{4}$$

С помощью (4) найдем следующие множества:

$$A_1=\{(J_1,J_2,\alpha)\in R^3:\alpha\le 0, 6J_1+\alpha\le 0, 2J_1+8J_2+\alpha\le 0\},$$
$$A_2=\{(J_1,J_2,\alpha)\in R^3:\alpha\ge 0, 6J_1-\alpha\le 0, 2J_1+8J_2-\alpha\le 0\},$$
$$A_3=\{(J_1,J_2,\alpha)\in R^3:(\alpha\le 0, 6J_1+\alpha\le 0, 2J_1+8J_2+\alpha\ge 0)\vee(\alpha\le 0, -\alpha\le 6J_1\le -3\alpha, J_1-2J_2\le 0)\},$$
$$A_4=\{(J_1,J_2,\alpha)\in R^3:(\alpha\ge 0, 6J_1-\alpha\le 0, 2J_1+8J_2-\alpha\ge 0)\vee(\alpha\ge 0, \alpha\le 6J_1\le 3\alpha, J_1-2J_2\le 0)\},$$
$$A_5=\{(J_1,J_2,\alpha)\in R^3: 2J_1+|\alpha|\ge 0, 2J_1-8J_2-|\alpha|\le 0\},$$
$$A_6=\{(J_1,J_2,\alpha)\in R^3:(\alpha\ge 0, \alpha\le 6J_1\le 3\alpha, J_1-2J_2\ge 0)\vee(\alpha\ge 0, 2J_1-\alpha\ge 0, 2J_1-8J_2+\alpha\ge 0)\},$$
$$A_7=\{(J_1,J_2,\alpha)\in R^3:(\alpha\le 0, -\alpha\le 6J_1\le -3\alpha, J_1-2J_2\ge 0)\vee(\alpha\le 0, 2J_1+\alpha\ge 0, 2J_1-8J_2-\alpha\ge 0)\},$$

и $\bigcup_{i=1}^{7}A_i=R^3$.

Найдем

$$A_3\cap A_7=\{(J_1,J_2,\alpha)\in R^3:(\alpha\le 0, 6J_1+\alpha=0, 12J_2+\alpha=0)\vee(\alpha\le 0, 2J_1+\alpha=0, 4J_2+\alpha=0)\},$$
$$A_4\cap A_6=\{(J_1,J_2,\alpha)\in R^3:(\alpha\ge 0, 6J_1-\alpha=0, 12J_2-\alpha=0)\vee(\alpha\ge 0, 2J_1-\alpha=0, 4J_2-\alpha=0)\}.$$

Пусть $G_k^{(2)}=\{x\in G_k:|x|-\text{четно}\}$, где $|x|$ - длина слова x. $G_k^{(2)}$ является нормалным делителем индекса 2 в G_k.

Рассмотрим фактор группу $G_k/G_k^{(2)}=\{G_k^{(2)}, G_k\setminus G_k^{(2)}\}$.

$G_k^{(2)}$ – периодические конфигурации имеют следующий вид:

$$\varphi(x)=\begin{cases} a_0, \text{ если } x\in G_k^{(2)}, \\ a_1, \text{ если } x\in G_k\setminus G_k^{(2)}, \end{cases}$$

где $a_0, a_1 \in \Phi$.

Обозначим $B_1 = A_3 \cap A_7, B_2 = A_4 \cap A_6$.

Теорема 1. Пусть $k=2$. Тогда для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями и с внешним полем $\alpha \neq 0$ верны следующие утверждения:

I. а) $\varphi(x)=1, \forall x\in V$ конфигурация является трансляционно-инвариантным основным состоянием на множестве A_1;

б) $\varphi(x)=-1, \forall x\in V$ конфигурация является трансляционно-инвариантным основным состоянием на множестве A_2;

II. Всякие $G_k^{(2)}$ – периодические основные состояния являются трансляционно-инвариантными.

Теорема 2. На множествах B_1, B_2, A_5 сушествуют бесконечно много нетрансляционно-инвариантные основные состояния.

Литература

1. Розиков У.А., Рахматуллаев М.М. Слабо периодические основные состояния и меры Гиббса для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли. // Теор. и матем. физика, 2009, т.160, №3.- с507-516.
2. Rahmatullaev M.M. Desription of weak periodic ground states of Ising model with competing interactions on Cayley tree. // Applied mathematics and Information science, AMIS USA, 4(2) 2010, 237-241.
3. Рахматуллаев М.М. Слабо периодические меры Гиббса и основные состояния для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли. // Теор. и матем. физика, 2013, т.176, №3. –с. 478-494.
4. Рахматуллаев М.М., Расулова М.А. Существование слабо периодических основных состояний для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли. // ДАН РУз. – Ташкент, 2013. - № 3. С. 10-13. (01.00.00; №7).
5. Rakhmatullaev M.M., Rasulova M.A. Periodic and Weakly Periodic Ground States for the Potts Model with Competing Interactions on the Cayley Tree. 2016. ISSN 1055-1344, Siberian Advances in Mathematics, Vol. 26, No.3, pp.215 - 229.

ОРТОНОРМАЛЬНАЯ СИСТЕМА ДЛЯ МАТРИЧНОГО ШАРА ВТОРОГО ТИПА

[1]Рахмонов У.С., [2]Абдуллаев Ж.Ш., [3]Куромбоев Х.Н.

[1,3]Ташкентский государственный технический университет,

[2]Национальный университет Узбекистана

Рассмотрим пространство m^2 комплексных переменных, обозначаемое $\mathbb{C}^{m^2}$. В некоторых вопросах точки Z этого пространства удобно представлять в виде квадратных $[m\times m]$- матриц, т.е. в виде $Z=(z_{ij})_{i,j=1}^{m}$. При таком представлении точек пространство $\mathbb{C}^{m^2}$ будем обозначать $\mathbb{C}[m\times m]$. Прямое произведение $\underbrace{\mathbb{C}[m\times m]\times\cdots\times\mathbb{C}[m\times m]}_{n}$ n экземпляров пространств $[m\times m]$-матриц обозначим $\mathbb{C}^n[m\times m]$.

Пусть $Z=\ Z_1,...,Z_n\ $ - вектор, составленный из квадратных матриц Z_j порядка m, рассматриваемых над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Можно считать, что Z - элемент пространства $\mathbb{C}^n\left[m\times m\right]\cong\mathbb{C}^{nm^2}$.

Матричное «скалярное» произведение:

$$\left\langle Z,W\right\rangle=Z_1W_1^*+\cdots+Z_nW_n^*,$$

где W_j^* есть матрица, сопряженная и транспонированная для матрицы W_j .

Определим матричные шары $B_{m,n}^{(1)}$, $B_{m,n}^{(2)}$ и $B_{m,n}^{(3)}$ первого, второго и третьего типов, соответственно:

$$B_{m,n}^{(1)}=\ \ (Z_1,...,Z_n)=Z\in\mathbb{C}^n\left[m\times m\right]:I-\left\langle Z,Z\right\rangle>0\ \ ,$$

$$B_{m,n}^{(2)}=\ \ (Z_1,...,Z_n)=Z\in\mathbb{C}^n\left[m\times m\right]:I-\left\langle Z,Z\right\rangle>0,\forall Z_v'=Z_\nu,\ \nu=1,2,...,n$$

и

$$B_{m,n}^{(3)}=\ \ (Z_1,...,Z_n)=Z\in\mathbb{C}^n\left[m\times m\right]:I+\left\langle Z,Z\right\rangle>0,$$

$$\forall\, Z_\nu'=-Z_\nu,\ \ \nu=1,2,...,n\ \ .$$

Остовы (границы Шилова) матричных шаров $B_{m,n}^{(k)}$, обозначим через $X_{m,n}^{(k)},\ \ k=2,3$, т.е.,

$$X_{m,n}^{(1)}=\ \ Z\in\mathbb{C}^n\left[m\times m\right]:\left\langle Z,Z\right\rangle=I\ \ ,$$

$$X_{m,n}^{(2)}=\ \ Z\in\mathbb{C}^n\left[m\times m\right]:\left\langle Z,Z\right\rangle=I,\ \ Z_v'=Z_\nu,\ \nu=1,2,...,n\ \ ,$$

$$X_{m,n}^{(3)}=\ \ Z\in\mathbb{C}^n\left[m\times m\right]:I+\left\langle Z,Z\right\rangle=0,\ Z_\nu'=-Z_\nu,\ \ \nu=1,2,...,n\ \ .$$

Заметим, что $B_{1,1}^{(1)}$, $B_{1,1}^{(2)}$ и $B_{2,1}^{(3)}$ - единичные круги, а $X_{1,1}^{(1)}$, $X_{1,1}^{(2)}$ и $X_{2,1}^{(3)}$-единичные окружности в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Если $n=1,\ m>1$, то $B_{m,1}^{(k)},\ \ k=1,2,3$ - классические области первого, второго и третьего типов (по классификации Э.Картана), а остовы $X_{m,1}^{(1)}$, $X_{m,1}^{(2)}$ и $X_{m,1}^{(3)}$ - унитарные, симметрические унитарные и кососимметрические унитарные матрицы, соответственно.

В данной работе представлен ортонормальная система для матричного шара второго типа.

АСИМПТОТИКА БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННОГО РЯДА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ

Сабирова Р

Бухарский инженерно-технологический институт

В [1] для класса функций $H_{\rho,2}=\left\{f\in C^{\infty}_{[-1;1]}:\left|f^{(n)}(x)\right|\le c(f)\rho^n 2^{n^2}\right\}$ были построены ряды, названные обобщенными рядами Тейлора.

Пусть $N_0=\{-1,0,1\}$, $N_n=\left\{k\in Z:|k|\le 2\cdot 4^{n-1}\right\}$ для $n\in N; x_{0,k}=k$ при $k\in N_0$, $x_{n,k}=\dfrac{k}{2\cdot 4^{n-1}}$ при $k\in N_n$ и $n>0$; $D_n=\left\{1,2,...,4^{n+1}-1\right\}\setminus\{2k\}$ при $k\in N$; $x^*_{n,p}=-1+\dfrac{p}{2\cdot 4^n}$ при $p\in D_n$. Согласно [1], если $f\in H_{\rho,2}$ $(1<\rho<4)$, то имеет место $f^{(1)}(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{k\in N_n}a_{n,k}\varphi^{(1)}_{n,k}(x)+\sum\limits_{p\in D_n}b_{n,p}\psi^{(1)}_{n,k}(x)\right)$, где $a_{n,k}=f^{(n)}\left(x_{n,k}\right)$ и $b_{n,p}=f^{(n)}\left(x^*_{n,p}-\dfrac{1}{2\cdot 4^n}\right)-2f^{(n)}\left(x^*_{n,p}\right)+f^{(n)}\left(x^*_{n,p}+\dfrac{1}{2\cdot 4^n}\right)$. При этом ряд в правой части сходится равномерно при каждом l=0,1,2,…. Обобщенные ряды Тейлора позволяют восстанавливать функции f по значениям $f^{(n)}(x)$, $x\in\Lambda_n$ $n=0,1,2,...$ с достаточно простыми конечными множествами Λ_n.

Базисные функции $\varphi_{n,k}$, $\psi_{n,p}$ строятся при помощи функции $\mathrm{mup}_2(x)$, которая является финитным решением функционально-дифференциального уравнения $y'(x)=2\cdot\left(y(4x+3)-y(4x-1)+y(4x+1)-y(4x-3)\right)$. Приведенные в [2] рекуррентные формулы для нахождения этих функций являются достаточно громоздкими и неудобными в использовании для больших n. В связи с этим была поставлена задача: исследовать поведение базисных функций $\varphi_{n,k}$, $\psi_{n,p}$ для больших n и найти удобные для их вычисления формулы.

Рассмотрим функцию $ab_2(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\lambda^n\mathrm{mup}_2\left(x-\dfrac{1}{2\cdot 4^n}\right)$, где λ- наименьший по модулю корень функции $V(z)=-\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\mathrm{mup}_2\left(-1+\dfrac{1}{4^{k+1}}\right)z^k}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\mathrm{mup}_2\left(-1+\dfrac{1}{2\cdot 4^{k+1}}\right)z^k}$ (с точностью 10^{-6} $\lambda=-9{,}617232$). С использованием $ab_2(x)$ были построены асимптотические формулы для $\varphi_{n,k}(x)$ и $\psi_{n,p}(x)$, которые позволяют приближенно вычислять их при больших n.

Литература

1. Рвачев В.А., Старец Г.А. Некоторые атомарные функции и их применение // ДАН УССР. Серия А. №11. (1983) С.22-24
2. Старец Г.А. Построение базисных функций обобщенных рядов Тейлора// Математические методы анализа динамических систем. №8. (1984) С. 16-19

НЕ СОХРАНЕНИЕ ВЕСА ПРИ НЕПРЕРЫВНОМ ОТОБРАЖЕНИИ В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ.

Содикхужаева Ш.Х.
Национальный университет Узбекистана
shahnoz2019@gmail.com

В работе приведен пример взаимно-однозначного непрерывного отображения, которое не является открытым. Это отображение является непрерывно-однозначным, но сохраняется вес.

Топологическое пространство - это пара (X,τ), состоящая из множества X и некоторого семейства τ подмножеств множества X, удовлетворяющего следующим условиям:

1. $\varnothing \in \tau$ и $X \in \tau$.
2. Если $U_1 \in \tau$ и $U_2 \in \tau$, то $U_1 \cap U_2 \in \tau$.
3. Если $A \in \tau$, то $\cup A \in \tau$.

Определение [1]. Множество X в этом случае называется пространством, его элементы называются точками пространства; подмножество X, принадлежащее семейству τ, называется также топологией на X.

Определение 2 [3]. Открытое множество - это множество, каждый элемент которого входит в него вместе с некоторой окрестностью.

Определение 3 [3]. Множество, которое одновременно и открыто и замкнуто, называется открыто-замкнутой.

Определение 4. [1]. Пусть (X,τ) - топологическое пространство и $A \subset X$ - открыто-замкнутое множество.

Если каждое множество $A \subset X$ совпадает со своим замыканием и со своей внутренностью, тогда пространство называется дискретным, а τ - дискретной топологией.

Определение 5 [1]. Семейство $\mathcal{B} \subset \tau$ называется базой топологического пространства (X,τ), если каждое непустое открытое подмножество пространства X можно представить в виде объединения некоторого подсемейство семейства $\mathcal{B}$.

Определение 6 [1]. Множество всех кардинальных чисел вида $|\mathcal{B}|$, где $\mathcal{B}$ - база топологического пространства (X,τ), имеет наименьший элемент (так

как всякое множество кардинальных чисел вполне упорядочено отношением $<$). Это наименьшее кардинальное число называется весом топологического пространства (X,τ) и обозначается через $w((X,\tau))$, т.е.

$$w((X,\tau)) = \min\{|\mathcal{B}(x)|\}, \text{ где } \mathcal{B}(x) \text{ - база в точке.}$$

Определение 7 [1]. Пусть (X,τ_1) и (Y,τ_2) - два топологических пространства. Отображение f из X в Y называется непрерывным, если $f^{-1}(U)$ из τ_1 для любого U из τ_2, т.е., если прообраз любого открытого подмножества пространства Y является открытым подмножеством пространства X. Тот факт, что f - непрерывное отображение пространства X в Y, записывается в виде $f: X \to Y$.

Определение 8 [1]. Непрерывное отображение $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ называется открытым отображением, если для любого открытого подмножества G из X образ в Y тоже открыто.

Теорема 1. [1] Непрерывное отображение $f: X \to Y$ открыто тогда и только тогда, когда для каждого $B \subset Y$ и каждого замкнутого множества $A \subset X$ содержащего $f^{-1}(B)$, существует замкнутое множество $C \subset Y$ содержащий B и такое, что $f^{-1}(C) \subset A$.

Теорема 2 [1]. Для любого открытого отображения $f: X \to Y$ и любой точки $x \in X$ имеем $\chi(f(x), Y) \le \chi(x, X)$. Если кроме того, $f(x) = Y$, то $w(Y) \le w(X)$ и $\chi(Y) \le \chi(X)$.

Замечание. Существует взаимно-однозначное непрерывное отображение, которое не является открытым.

Пример. Пусть на числовой прямой рассмотрим две топологии. $X = (R,\tau_d)$ определено дискретная топология и $Y = (R,\tau)$ - обычная топология. Рассмотрим непрерывное отображение f отображающее пространство X в Y, $f:(R,\tau_d)\to(R,\tau)$ по формуле $id_X: \{x\} \to x$.

Это отображение является взаимно-однозначным и непрерывным. Возьмем интервал $(a,b) \subset (R,\tau)$, тогда прообраз интервала $f^{-1}(a,b) = (a,b)_d$ есть открытое множество в (R,τ_d). Покажем, что это отображение не является открытым. Пусть возьмем точку 0 из (R,τ_d), тогда $\{0\}$ это множество открыто в (R,τ_d). Рассмотрим образ этого множества $f(0) = 0 \in (R,\tau)$, но $\{0\}$ - замкнутое подмножество в (R,τ) с обычной топологией. Значит, отображение f является непрерывным, но не является открытым, при этом сохраняется вес.

Литература

1. Энгелькинг Р. Общая топология. Москва, Мир, 1986.
2. Nagata J. Modern general topology. New York, Oxford, 1985.
3. Виро О.Я., Иванов О.А., Нецветаев Н.Ю., Элементарная топология, Санкт-Петербург. 1984.

РАЗРЕШИМЫЕ СУПЕРАЛГЕБРЫ ЛЕЙБНИЦА С НИЛЬРАДИКАЛОМ $F_{2,2}^2$

Сапарбаева С.С.
НУУз
s_saparbayeva@mail.ru

Из теории алгебр известно, что для произвольной категории алгебр с помощью оболочки Грассмана можно определить Z_2- градуированные алгебры, которые называются супералгебрами данной категории. Обычно в Z_2-градуированных пространствах, одно из пространств называют четной частью, а второе нечетной. Характерной особенностью многообразий определенных супералгебр является тот факт, что четная часть есть не что иное, как многообразие этих алгебр. В частности, четная часть супералгебр Ли и супералгебр Лейбница является алгеброй Ли и алгеброй Лейбница, соответственно.

Понятие супералгебры Лейбница впервые было введено в работе Альбеверио С., Аюпова Ш.А. и Омирова [2] в 2005 году.

Для изучения таких объектов мы задаем некоторые условия, таких как, нильпотентность, разрешимость, характеристическая последовательность и т.д. Нильпотентные супералгебры Лейбница с заданной характеристической последовательностью получены в работах Б.А.Омирова, А.Х.Худойбердиева и других [1], [3], [4]. Следующим шагом изучения супералгебр Лейбница является изучение разрешимых супералгебр Лейбница.

Определение. Z_2-градуированное векторное пространство $L = L_0 \oplus L_1$ называется супералгеброй Лейбница если она снабжена произведением $[-,-]$ которая удовлетворяет следующее условие:

$$\big[x,[y,z]\big] = \big[[x,y],z\big] - (-1)^{\alpha\beta}\big[[x,z],y\big] - \text{супертождество Лейбница}$$

для всех $x \in L,\ y \in L_\alpha,\ z \in L_\beta$.

В данной работе получены разрешимые супералгебры Лейбница, у которых нильрадикалом является четырехмерная филиформная супералгебра Лейбница $F_{2,2}^2$.

В следующей теореме приводим четырехмерные филиформные супералгебры Лейбница с нильиндексом 4.

Теорема: [5] Пусть L- супералгебра Лейбница с нильиндексом, равным 4. Тогда она изоморфна одной из следующих двух неизоморфных супералгебр:

$$F_{2,2}^1: \begin{cases} [y_1, e_1] = y_2, & [e_2, y_1] = y_2, \\ [y_1, e_2] = 2y_2, & [y_1, y_1] = e_2, \end{cases}$$

$$F_{2,2}^2: \begin{cases} [y_1, e_1] = y_2, \quad [e_2, y_1] = y_2, \\ [e_1, y_1] = \frac{1}{2} y_2, \\ [y_1, e_2] = 2y_2, \quad [y_1, y_1] = e_2, \end{cases}$$

где $L_0 = \{e_1, e_2\}$, $L_1 = \{y_1, y_2\}$.

Предложение 1: Пространство дифференцирований супералгебры $F_{2,2}^2$ имеет следующий вид:

$$\mathrm{D}_0\left(\mathrm{F}_{2,2}^2\right) := \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 2b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 3b_1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{D}_1\left(\mathrm{F}_{2,2}^2\right) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}b_1 - b_2 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Предложение 2: Пусть L разрешимая супералгебра Лейбница с нильрадикалом $F_{2,2}^2$. Тогда она изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных супералгебр:

$$SF_1^2(\text{б}): \begin{cases} [e_1, x] = -[x, e_1] = \text{б}e_1 + \left(1 - \frac{1}{2\text{б}}\right) e_2, \\ [e_2, x] = -[x, e_2] = 2e_2, \\ [y_1, x] = -[x, y_1] = y_1, \\ [y_2, x] = 3y_2. \end{cases}$$

$$SF_2^2(\text{б}, \text{в}): \begin{cases} [e_1, x] = -[x, e_1] = e_1 - \frac{1}{2} e_2, \\ [y_1, x] = \text{б}y_2, \\ [x, y_1] = \text{в}y_2. \end{cases}$$

$$SF_3^2: \begin{cases} [e_1, x] = -[x, e_1] = e_2, \\ [e_2, x] = -[x, e_2] = 2e_2, \\ [y_1, x] = -[x, y_1] = y_1, \\ [y_2, x] = 3y_2. \end{cases}$$

Литература

1. Ayupov Sh. A., Khudoyberdiyev A.Kh., Omirov B.A. *The classification of filiform Leibniz superalgebras of nilindex* $n+m$. Acta Math. Sinica (English Series), 25(1), 2009, 171–190.
2. Albeverio S., Ayupov Sh.A., Omirov B.A. *On nilpotent and simple Leibniz algebras.* Comm. in Algebra, 33(1), 2005, 159–172.
3. Camacho L.M., Gómez J.R., Navarro R.M., Omirov B.A. *Classification of some nilpotent class of Leibniz superalgebras.* Acta Math. Sinica (English Series), 26(5), 2010, 799–816.
4. Gómez J.R., Omirov B.A, Khudoyberdiyev A.Kh. *The classification of Leibniz superalgebras of nilindex* $n+m$ $(m \neq 0)$. Journal of Algebra, 324(10), 2010, 2786–2803.

5. А.Х.Худойбердиев, *Классификация некоторых конечномерных комплексных нильпотентных градуированных алгебр Лейбница*. Кандидатская диссертация, 2010, 105 стр.

ПРИМЕРЫ НАХОЖДЕНИЯ СОПРЯЖЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Тагаймуротов А.О.
Чирчикский государственный педагогический институт

В данной заметке приводим способы нахождения сопряженных функций и норм. В работе применены методы из работ [1], [2].

Пусть f – функция, значения которой суть либо действительные числа, либо символы $+\infty$, $-\infty$, а область определения есть подмножество S пространство $\mathbb{R}^n$.

Множество $\{(x,\mu)\,|\,x\in S,\ \mu\in\mathbb{R},\ \mu\geq f(x)\}$ называется надграфиком или эпиграфом f, и обозначать через $\operatorname{epi} f$.

Эффективной областью, или эффективным множеством выпуклой функции f на S (обозначение: $\operatorname{dom} f$), называется проекция на $\mathbb{R}^n$ надграфика функции f: $\operatorname{dom} f=\{x\,|\,\exists\mu,(x,\mu)\in\operatorname{epi} f\}=\{x\,|\,f(x)<\infty\}$.

Выпуклую функцию называют собственной, если ее надграфик не пусть, и не содержит вертикальных прямых, иначе говоря, если по меньшей мере для одного x выполнено неравенство $f(x)<+\infty$ и для всех x выполнено неравенство $f(x)>-\infty$. Выпуклые функции, не являющиеся собственными, называют несобственными.

Индикаторная функция выпуклого множества $C\subset\mathbb{R}^n$ определяется, полагая $\delta(x\,|\,C)=\begin{cases}0, & \text{если } x\in C\\ +\infty, & \text{если } x\notin C\end{cases}$.

Опорной функцией $\delta^*(\cdot\,|\,C)$ выпуклого множества $C\subset\mathbb{R}^n$ называется функция, определяемая так: $\delta^*(x\,|\,C)=\sup\{\langle x,y\rangle\,|\,y\in C\}$.

Калибровочной функцией $\gamma(\cdot\,|\,C)$ множества C называют функцию $\gamma(x\,|\,C)=\inf\{\lambda\geq 0\,|\,x\in\lambda C\}$, $C\neq\varnothing$.

Функцией (евклидова) расстояния $d(\cdot,C)$ называют функцию $d(x,C)=\inf\{|x-y|\,|\,y\in C\}$.

Если f – конечная выпуклая функция и C – непустое выпуклое множество, то $f(x)+\delta(x\,|\,C)=\begin{cases}f(x), & \text{если } x\in C,\\ +\infty, & \text{если } x\notin C,\end{cases}$ где $\delta(\cdot\,|\,C)$ – индикаторная функция множества C.

Операция умножения слева на неотрицательное число сохраняет выпуклость: $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$.

Имеется еще одна важная операция, сохраняющая выпуклость, умножения справа, соответствующие гомотетическому преобразованию надграфиков. Для любой выпуклой функции f на $\mathbb{R}^n$ и любого λ, $0 \le \lambda < \infty$, определим $f\lambda$ как выпуклую, $(f\lambda)(x) = \lambda f(\lambda^{-1}x)$, $\lambda > 0$ Если $\lambda = 0$ то $(f0)(x) = \delta(x \mid 0)$, $f \ne \infty$.

Множество $B = \{x \mid |x| \le 1\} = \{x \mid d(x,0) \le 1\}$ есть евклидов шар в R^n.

Для любого множество C в $\mathbb{R}^n$ множество точек x, находящиеся от C на расстоянии, не превосходящем ε, есть

$$\{x \mid \exists y \in C, d(x,y) \le \varepsilon\} = \bigcup\{y + \varepsilon B \mid y \in C\} = C + \varepsilon B.$$

Замыкание $\mathrm{cl}C$ и внутренность $\mathrm{int}\,C$ множества даются формулами

$$\mathrm{cl}\,C = \bigcap\{C + \varepsilon B \mid \varepsilon > 0\},$$

$$\mathrm{int}\,C = \{x \mid \exists \varepsilon > 0, x + \varepsilon B \subset C\}$$

Относительной внутренностью выпуклого множество C в $\mathbb{R}^n$ (обозначение $\mathrm{ri}\,C$) называется совокупность внутренних точек C, если это множество рассматривать как подмножество его аффинной оболочки. Таким образом, $\mathrm{ri}\,C$ состоит из точек $x \in \mathrm{aff}C$, для которых существует $\varepsilon > 0$, такое, что $y \in C$, лишь только $y \in \mathrm{aff}C$, $d(x,y) \le \varepsilon$. Другими словами, $\mathrm{ri}\,C = \{x \in \mathrm{aff}C \mid \exists \varepsilon > 0, (x + \varepsilon B) \cap (\mathrm{aff}C) \subset C\}$. Ясно, что $\mathrm{ri}\,C \subset C \subset \mathrm{cl}\,C$.

Замкнутую выпуклую функцию f можно задать как поточечный супремум совокупности всех аффинных функций h, таких, что $h \le f$ (Теоремы 12.1 из [1]).

Пуст f есть замкнутая выпуклая функция на $\mathbb{R}^n$. В силу Теоремы 12.1 из [1] мы можем описать ее двойственным образом через множество F^*, состоящее из всех пар (x^*, μ^*) в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, таких, что аффинная функция $h(x) = \langle x, x^* \rangle - \mu^*$ мажорируется функцией f. Неравенство $h(x) \le f(x)$ выполняется при всех x тогда и только тогда, когда $\mu^* \ge \sup\{\langle x, x^* \rangle - f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$. Таким образом, F^* есть в действительности надграфик функции f^* в пространстве $\mathbb{R}^n$, определенной следующим образом: $f^*(x^*) = \sup_x\{\langle x, x^* \rangle - f(x)\} = -\inf_x\{f(x) - \langle x, x^* \rangle\}$. Эта функция f^* называется сопряженной к функции f. Имеем

$$f(x) = \sup_{x^*}\{\langle x, x^* \rangle - f^*(x^*)\} = -\inf_{x^*}\{f^*(x^*) - \langle x, x^* \rangle\},$$

$$\langle x, x^* \rangle \le f(x) + f^*(x^*).$$

Полученное неравенство называется неравенством Фенхеля.

Приведем примеры.

1. Для функции $f(x)=kx+b$ применяя формулу

$$f^*(x^*)=\sup_x\left\{\left\langle x,x^*\right\rangle - f(x)\right\}=-\inf_x\left\{f(x)-\left\langle x,x^*\right\rangle\right\}$$

определим ее сопряженную:

$$f^*(x^*)=\sup_x\left\{\left\langle x,x^*\right\rangle - kx-b\right\}=\sup_x\left\{xx^*-kx-b\right\}=\sup_x\left\{x\cdot(x^*-k)-b\right\}=\begin{cases}+\infty,\ x^*\neq k,\\ -b,\ x^*=k.\end{cases}$$

Таким образом, сопряженная функции $f(x)=kx+b$ есть точка с координатами $(k,-b)$.

2. Для функции $f(x)=Ax_1+Bx_2+C$ ее сопряженная определяется так:

$$f^*(x^*)=\sup_x\left\{\left\langle x,x^*\right\rangle - f(x)\right\}=\sup_x\left\{\left\langle x,x^*\right\rangle-(Ax_1+Bx_2+C)\right\}=$$

$$=\sup_x\left\{x_1x_1^*+x_2x_2^*-Ax_1-Bx_2-C\right\}=\sup_x\left\{x_1\cdot(x_1^*-A)+x_2\cdot(x_2^*-B)-C\right\}=$$

$$=\begin{cases}+\infty,\ (x_1^*\neq A)\vee(x_2^*\neq B),\\ -C,\ (x_1^*=A)\wedge(x_2^*=B).\end{cases}$$

Таким образом, сопряженная функции $f(x)=Ax_1+Bx_2+C$ есть точка с координатами $(A,B,-C)$.

Можно показать, что сопряженная аффинной функции $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, заданной равенством $f(x)=a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n+b$, есть точка $(a_1,a_2,...,a_n,-b)$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$.

3. Рассмотрим теперь функцию, не являющуюся аффинной, и укажем ее сопряженную. Пусть $f(x)=x_1\ln x_1+x_2\ln x_2$. Тогда, по определению

$$f^*(y)=\sup_x\left\{\left\langle x,x^*\right\rangle - x_1\ln x_1-x_2\ln x_2\right\}=\sup_x\left\{x_1y_1+x_2y_2-x_1\ln x_1-x_2\ln x_2\right\}=$$

$$=\sup_x\left\{x_1(y_1-\ln x_1)-x_2(y_2-\ln x_2)\right\}.$$

В этом случае задача сводится к нахождению супремума функции двух переменных $z(x_1,x_2)=x_1(y_1-\ln x_1)-x_2(y_2-\ln x_2)$. Находим частные производные первого порядка и приравниваем нулю

$$z'_{x_1}=y_1-\ln x_1-1=0,\ z'_{x_2}=y_2-\ln x_2-1=0.$$

Отсюда $x_1=e^{y_1-1},\ x_2=e^{y_1-1}$.

Находя частные производные второго порядка $z''_{x_1x_1}=-\dfrac{1}{x_1}$, $z''_{x_1x_2}=0$, $z''_{x_2x_2}=-\dfrac{1}{x_2}$, и проверяя достаточные условия экстремума:

$$A=z''_{x_1x_1}\left(e^{y_1-1},e^{y_2-1}\right)=-e^{1-y_1},\ B=z''_{x_1x_2}\left(e^{y_1-1},e^{y_2-1}\right)=0,\ C=z''_{x_2x_2}\left(e^{y_1-1},e^{y_2-1}\right)=-e^{1-y_2},$$

$$\Delta=AC-B^2=e^{2-y_1-y_2},$$

так как $A<0$ и $\Delta>0$, убеждаемся в том, что $f^*(y)=e^{y_1-1}+e^{y_2-1}$.

Дуальная норма заданной нормы $\|\cdot\|$ в точке x обозначается $\|x\|_*$ и определяется равенством $\|x\|_* = \sup\limits_{\|u\|\le 1}\langle x,u\rangle$, где u переменная.

Дуальная норма Фенхеля заданной нормы – это индикаторная функция на единичном шаре дуальной нормы:

$$\|x\|^* = \sup_u\{\langle x,u\rangle - \|u\|\} = \delta_{\|x\|_*\le 1}(x) = \begin{cases} 0, & \|x\|_* \le 1, \\ +\infty, & \|x\|_* > 1. \end{cases}$$

Для случая $\|x\|_* \le 1$ покажем, что $\|x\|^* = 0$ и для случая $\|x\|_* > 1$ установим равенство $\|x\|^* = \infty$.

Случай 1. Пусть $\|x\|_* \le 1$. Тогда по определению дуальной нормы имеем $\sup\limits_{\|u\|\le 1}\langle x,u\rangle \le 1$. Покажем, что $\langle x,u\rangle \le \|x\|_*\|u\|$ справедливо для всех u. Случай $u = 0$ тривиален. Пусть $u \ne 0$. Тогда $\left\|\dfrac{u}{\|u\|}\right\| = 1 \le 1$. Поэтому

$$\left\langle x, \frac{u}{\|u\|}\right\rangle \le \sup_{\|u\|\le 1}\{\langle x,u\rangle\} = \|x\|_*. \qquad (1)$$

Умножая все части (1) на $\|u\|$, получим

$$\left\langle x, \frac{u}{\|u\|}\right\rangle \|u\| = \langle x,u\rangle \le \sup_{\|u\|\le 1}\{\langle x,u\rangle\}\|u\| = \|x\|_*\|u\|,$$

т. е. $\langle x,u\rangle \le \|x\|_*\|u\|$, отсюда вытекает, что неравенство $\sup\limits_u\{\langle x,u\rangle\} \le \|x\|_*\|u\|$ верно для произвольного u. Таким образом, при $\|x\|_* \le 1$ имеем

$$\sup_u\{\langle x,u\rangle\} \le \|u\|, \quad \forall u. \qquad (2)$$

Из (2) вытекает, что $\sup\limits_u\{\langle x,u\rangle - \|u\|\} \le \|u\| - \|u\| = 0$. Таким образом, при $\|x\|_* \le 1$ справедливо $\|x\|^* = 0$.

Случай 2. $\|x\|_* > 1$. Из определения дуальной нормы $\sup\limits_{\|u\|\le 1}\langle x,u\rangle > 1$. Существует u такой, что

$$\|u\| \le 1 \text{ и } \langle x,u\rangle > 1 \qquad (3)$$

По определению сопряженности Фенхеля

$$\|x\|^* = \sup_u\{\langle x,u\rangle - \|u\|\}.$$

Из неравенств (3) получим $\langle x,u\rangle - \|u\| > 0$. Сделаем замену $u = tz$. Тогда

$$\langle x,u\rangle - \|u\| = t(\langle x,z\rangle - \|z\|) > 0$$

при $t > 0$. Теперь стало ясно, что $\langle x,u\rangle - \|u\| \to +\infty$ при $t \to +\infty$.

Таким образом, установлено, что

$$\|x\|^* = \begin{cases} 0, & \|x\|_* \le 1, \\ +\infty, & \|x\|_* > 1. \end{cases}$$

Литература

1. R. T. Rockafellar. Convex Analysis. Princeton, New Jersey Princeton University press, 1970.
2. Andersen Ang. Fenchel conjucateof norm = indicator function on unit ball of dual norm. UMONS, Belgium. 2019.

ЛОКАЛЬНО ПОЗИТИВНЫЕ И НЕГАТИВНЫЕ ГРУППЫ

Усубжонов А.А., Кутлимуратова З.А.
НУУз
adhamusubjonov@gmail.com
zkutlimuratova@gmail.com

Базовые понятия, используемые в работе, содержатся в [1–4]. Напомним, что всюду определенная функция из множества натуральных чисел ω в ω называется *вычислимой*, если существует вычисляющий ее алгоритм [1]. Подмножество $\alpha \subseteq \omega$ называется *вычислимым* (*перечислимым*, соответственно *коперечислимым*), если вычислима его характеристическая функция (α (соответственно $\omega \setminus \alpha$) – область значений некоторой вычислимой функции). Эти определения естественным образом переносятся на многоместные функции и отношения.

Следуя Ю. Л. Ершову и С. С. Гончарову [2–4], приведем ряд основных определений. Если $\langle A;\Sigma\rangle$ – счетная универсальная алгебра эффективной сигнатуры Σ, то ее *нумерацией* будем называть всякое отображение ν множества натуральных чисел ω на основное множество алгебры A, для которого существует эффективное семейство A вычислимых функций, представляющих Σ – операции алгебры A в нумерации ν, т. е. всякая операция $\sigma \in \Sigma$ представляется соответствующей ей такой вычислимой функцией $f \in F$, что $\forall x$ $(\sigma \nu \bar{x} = \nu f \bar{x})$. Если η – эквивалентность на ω, то алгебру $\langle A;\Sigma\rangle$ будем называть *представимой* над η, если существует нумерация этой алгебры с нумерационной эквивалентностью, равной η, т. е. найдется такое эффективное семейство F вычислимых функций, согласованных с эквивалентностью η (из η – эквивалентности аргументов следует η – эквивалентность значений функций на этих аргументах), что $\langle A;\Sigma\rangle$ изоморфна фактор-алгебре вычислимой алгебры $\langle \omega; F\rangle$ по конгруэнции η.

Фундаментальные алгебраические понятия группы являются классическим объектом математической логики, которая, в частности

занимается описанием алгоритмических свойств групп, заданных теми или иными представлениями. Важнейшими среди алгоритмических представлений этих объектов являются вычислимые, т.е. такие, которые изоморфны группам, носителями которых являются вычислимые подмножества множества натуральных чисел, бинарная операция группы представлена подходящей вычислимой операцией.

Определение 1. Нумерованной группой называется пара (G,ν), где G группа с операцией "$*$", $\nu : G \to \omega$ – отображение со следующим свойством:

Для "$*$" бинарной операции существует такая рекурсивная функция f, что $\nu n * \nu m = \nu\left(f\left(n,m\right)\right)$.

В [5] введены следуюшие понятия:

Определение 2. Нумерация алгебры называется локально позитивной (негативной), если хотя бы один смежный класс ядра этой нумерации является перечислимым (коперечислимым).

Отметим, что, в то время как позитивность и негативность являются "глобальными" понятиями, подразумевающими наличие единообразной эффективной процедуры порождения нумерационной эквивалентности или соответственно ее дополнения, "локальность", вообще говоря, означает отсутствие такой процедуры. При этом, к примеру, число локально позитивных (негативных) эквивалентностей даже с не более чем двухэлементными смежными классами есть континуум, тогда как число позитивных (негативных) эквивалентностей счетно. Очевидно, что всякая эквивалентность с конечными смежными классами является как локально позитивной, так и локально негативной, однако ее алгоритмическая сложность может быть какой угодно. Тем не менее свойства симметрии в группах и полях позволяют равномерно эффективно переходить от локальной позитивности (негативности) их представлений к глобальной, т. е. алгоритмы позитивности (негативности) оказываются изначально присутствующими в структурах самих этих систем, что проявляется и в свойствах их алгоритмических представлений. В [5] доказан следующий результат.

Предложение 1. Для всякой локально позитивной (локально негативной) группы любой смежный класс ее ядра перечислим (коперечислим).

Теорема 1. Если нумерация группы G является локально позитивной и локально негативной, то она вычислима.

Литература

1. Соар И. Р. Вычислимо перечислимые множества и степени. Казань: Казаньское мат. общество, 2000.
2. Ершов Ю. Л. Теория нумераций. М.: Наука, 1977.

3. Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.
4. Гончаров С. С., Ершов Ю. Л. Конструктивные модели. Новосибирск: Науч. книга, 1999.
5. Н. Х. Касымов, Ф. Н. Ибрагимов, Отделимые нумерации тел и эффективная вложимость в них колец, Сиб. матем. журн., 2019, том 60, №1, С.82–94

НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТИПА ЭЙЛЕРА ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

[1]Хасанов А., [2]Жалилов И.
[1]Институт математики
[2]Ферганский государственный университет

Как известно, многие задачи современной математики и теоретической физики приводят к исследованию гипергеометрических функций многих комплексных переменных. К ним относятся, например, задачи теории супер струн [1], аналитического продолжения интегралов типа Меллина-Бернса [2] и алгебраической геометрии [3]. Системы дифференциальных уравнений гипергеометрического типа широко используются в качестве нетривиальных модельных примеров при реализации и отладке алгоритмов для символьных вычислений, используемых в современных системах компьютерной алгебры [4].

Гипергеометрические функции многих переменных возникают в квантовой теории поля как решения уравнений Книжника-Замолодчикова [5]. Эти уравнения могут рассматриваться как обобщенные уравнения гипергеометрического типа, а их решения допускают интегральные представления, обобщающие классические интегралы Эйлера для гипергеометрических функций одной переменной. Такой подход позволяет связать специальные функции гипергеометрического типа и актуальные задачи теории представлений алгебр Ли и квантовых групп. В работах [6] – [17] изучены свойства гипергеометрических функций и эти свойства использованы при решении краевых задач для вырождающихся дифференциальных уравнений.

Первоначально специальные функции вводились многими не связанными между собой способами. Их возникновение определялось, как правило, необходимостью решения задач, которые приводили к дифференциальным уравнениям (или системам таких уравнений),

неразрешимым в классе элементарных функций. Так возникли функции Бесселя, функции Эрмита, гипергеометрическая функция Гаусса.

Гипергеометрические функции занимают важное место в ряду специальных функций математической физики. В настоящий момент существует, по крайней мере, четыре подхода к понятию гипергеометрической функции многих переменных. Такие функции могут определяться как суммы степенных рядов определенного вида, как решения систем дифференциальных уравнений, как интегралы типа Эйлера и интегралы Меллина-Бернса.

В этом докладе мы определим некоторые интегральные представления типа Эйлера для гипергеометрической функции Кампе де Фериет [19] от двух аргументов четвертого порядка

$$u(x,y)=F_{0;3;3}^{2;2;2}\left[\begin{matrix}a_1,a_2: & b_1,b_2; & c_1,c_2;\\ -:\beta_1,\beta_2,\beta_3; & \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3; & \end{matrix}x,y\right]$$
$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(b_1)_m(b_2)_m(c_1)_n(c_2)_n}{(\beta_1)_m(\beta_2)_m(\beta_3)_m(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n(\gamma_3)_n\,m!n!}x^m y^n, \tag{1}$$

где $(a)_k=\dfrac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}=a(a+1)(a+2)...(a+k-1),\ \ a\in\mathbb{C},\ k\in N_0$ - обозначение Похгаммера [18]. Имеет место следующие интегральные представления

$$F_{0;3;3}^{2;2;2}\left[\begin{matrix}a_1,a_2: & b_1,b_2; & c_1,c_2;\\ -:\beta_1,\beta_2,\beta_3; & \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3; & \end{matrix}x,y\right]$$
$$=\frac{\Gamma(\beta_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(\beta_1-b_1)}\int_0^1\xi^{b_1-1}(1-\xi)^{\beta_1-b_1-1}F_{0;2;3}^{2;1;2}\left[\begin{matrix}a_1,a_2: & b_2; & c_1,c_2;\\ -:\beta_2,\beta_3; & \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3; & \end{matrix}x\xi,y\right]d\xi, \tag{2}$$

$\operatorname{Re}\beta_1>\operatorname{Re}b_1>0,$

$$F_{0;3;3}^{2;2;2}\left[\begin{matrix}a_1,a_2: & b_1,b_2; & c_1,c_2;\\ -:\beta_1,\beta_2,\beta_3; & \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3; & \end{matrix}x,y\right]=\frac{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(\beta_1-b_1)\Gamma(\beta_2-b_2)}$$
$$\times\int_0^1\int_0^1\xi^{b_1-1}\eta^{b_2-1}(1-\xi)^{\beta_1-b_1-1}(1-\eta)^{\beta_2-b_2-1}F_{0;1;3}^{2;0;2}\left[\begin{matrix}a_1,a_2: & -; & c_1,c_2;\\ -:\beta_3; & \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3; & \end{matrix}x\xi\eta,y\right]d\xi d\eta, \tag{3}$$

$\operatorname{Re}\beta_1>\operatorname{Re}b_1>0,\operatorname{Re}\beta_2>\operatorname{Re}b_2>0,$

$$F_{0;3;3}^{2;2;2}\left[\begin{matrix}a_1,a_2: & b_1,b_2; & c_1,c_2;\\ -:\beta_1,\beta_2,\beta_3; & \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3; & \end{matrix}x,y\right]=\frac{\Gamma(b_1+c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c_1)}$$
$$\times\int_0^1\xi^{b_1-1}(1-\xi)^{c_1-1}F_{0;3;3}^{3;1;1}\left[\begin{matrix}a_1,a_2,b_1+c_1: & b_2; & c_2;\\ -:\beta_1,\beta_2,\beta_3; & \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3; & \end{matrix}x\xi,y(1-\xi)\right]d\xi, \tag{4}$$

$\operatorname{Re}b_1>0,\operatorname{Re}c_1>0,$

$$F_{0;3;3}^{2;2;2}\left[\begin{matrix} a_1, a_2: & b_1, b_2; & c_1, c_2; \\ -: \beta_1, \beta_2, \beta_3; & \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; & \end{matrix} x, y\right]$$

$$= \frac{\Gamma(b_1 + c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c_1)} \frac{\Gamma(b_2 + c_2)}{\Gamma(b_2)\Gamma(c_2)} \int_0^1 \int_0^1 \xi^{b_1 - 1} \eta^{b_2 - 1} (1-\xi)^{c_1 - 1} (1-\eta)^{c_2 - 1} \tag{5}$$

$$\times F_{0;3;3}^{4;0;0}\left[\begin{matrix} a_1, a_2, b_1 + c_1, b_2 + c_2: & -; & -; \\ -: \beta_1, \beta_2, \beta_3; & \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; & \end{matrix} x\xi\eta, y(1-\xi)(1-\eta)\right] d\xi d\eta,$$

$$\operatorname{Re} b_1 > 0, \operatorname{Re} b_2 > 0, \operatorname{Re} c_1 > 0, \operatorname{Re} c_2 > 0,$$

$$F_{0;3;3}^{2;2;2}\left[\begin{matrix} a_1, a_2: & b_1, b_2; & c_1, c_2; \\ -: \beta_1, \beta_2, \beta_3; & \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; & \end{matrix} x, y\right]$$

$$= \frac{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\Gamma(\gamma_1)\Gamma(\gamma_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)\Gamma(\beta_1 - b_1)\Gamma(\beta_2 - b_2)\Gamma(\gamma_1 - c_1)\Gamma(\gamma_2 - c_2)}$$

$$\times \int_0^1 \cdots \int_0^1 \xi_1^{b_1 - 1} \xi_2^{b_2 - 1} \xi_3^{c_1 - 1} \xi_4^{c_2 - 1} (1-\xi_1)^{\beta_1 - b_1 - 1} (1-\xi_2)^{\beta_2 - b_2 - 1} (1-\xi_3)^{\gamma_1 - c_1 - 1} (1-\xi_3)^{\gamma_2 - c_2 - 1} \tag{6}$$

$$\times F_4(a_1, a_2; \beta_3, \gamma_3; x\xi_1\xi_2, x\xi_3\xi_4)\, d\xi_1 \cdots d\xi_4,$$

$$\operatorname{Re} \beta_1 > \operatorname{Re} b_1 > 0, \operatorname{Re} \beta_2 > \operatorname{Re} b_2 > 0, \operatorname{Re} \gamma_1 > \operatorname{Re} c_1 > 0, \operatorname{Re} \gamma_2 > \operatorname{Re} c_2 > 0,$$

где

$$F_4(\alpha, \beta; \gamma_1, \gamma_2; x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n} (\beta)_{m+n}}{(\gamma_1)_m (\gamma_2)_n\, m! n!} x^m y^n, \tag{7}$$

$$F_{l;i;j}^{p;q;k}\left[\begin{matrix} (a_p): (b_q); (c_k); \\ (\alpha_l): (\beta_m); (\gamma_n); \end{matrix} x, y\right] = \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{p} (a_j)_{r+s} \prod_{j=1}^{q} (b_j)_r \prod_{j=1}^{k} (c_j)_s}{\prod_{j=1}^{l} (\alpha_j)_{r+s} \prod_{j=1}^{m} (\beta_j)_r \prod_{j=1}^{n} (\gamma_j)_s\, r! s!} x^r y^s. \tag{8}$$

Справедливость интегральных представлений (2)-(6), доказываются разложением в ряд подынтегральных функций и используются интегральное представление Вета функции Эйлера.

Литература

1. Candelas P. de la Ossa X. , Greene P. , Parkes L. A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble super conformal theory. Nucl. Phys. 1991. V. B539. P. 21-74.

2. Horja R. P. Hypergeometric functions and mirror symmetry in toric varieties. Preprint. 1999. math.AG/9912109. P. 1-103.

3. Saito M. , Sturmfels B. , Takayama N. Grobner Deformations of Hypergeometric Differential Equations. Springer Verlag. Berlin, Heidelberg. 1999.

4. Virchenko A. Multidimensional Hypergeometric Functions and Representation Theory of Lie Algebras and Quantum Groups. Advanced Series in Mathematical Physics 21. World Scientific. 1995.

5. Passare M. , Tsikh A. , Zhdanov O. A multidimensional Jordan residue lemma with an application to Mellin-Barnes integrals, Aspects Math. E. 26, 1994, pp. 233–241.

6. Hasanov A. Fundamental solutions of generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation, Complex Variables and Elliptic Equations. 52 (8), 2007, pp. 673–683.
7. Hasanov A. The solution of the Cauchy problem for generalized Euler-Poisson-Darboux equation, Inter. J. Appl. Math. Statist. 8 (7), 2007, pp.30–44.
9. Opps S.B. , Saad N. , Srivastava H.M. Some reduction and transformation formulas for the Appell hypergeometric function, J. Math. Anal. Appl. 302, 2005, pp. 180–195.
10. Padmanabham P. A. , Srivastava H. M. Summation formulas associated with the Lauricella function, Appl. Math. Lett. 13 (1), 2000, pp. 65–70.
11. Lohofer G. Theory of an electromagnetically deviated metal sphere. 1: absorbed power, SIAM J. Appl. Math. 49, 1989, pp. 567–581.
12. Niukkanen A. W. Generalised hypergeometric series N F (x 1 ,...,x N)arising in physical and quantum chemical applications, J. Phys. A: Math. Gen. 16, 1983, pp. 1813–1825.
14. Sneddon I. N. Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry, third ed., London, New York, 1980.
15. Srivastava H. M. , Kashyap B. R. K. Special Functions in Queuing Theory and Related Stochastic Processes, Academic Prees, New York, London, San Francisco, 1982.
16. Bers L. Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics, Wiley, New York, 1958.
17. Франкль Ф. И. Избранные труды по газовой динамике. Москва, Наука, 1973.
18. A. Erde'lyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi, Higher Transcendental Functions, Vol. 1, McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto and London, 1953.
19. Appell P., Kampe de Feriet J. Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques; Polynomes d'Hermite._Paris: Gauthier-Villars, 1926.

ОБ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ МЕРАХ ГИББСА ДЛЯ НС-МОДЕЛИ С ДВУМЯ СОСТОЯНИЯМИ

[1]Хакимов Р.М., [2]Махаммадалиев М.Т
[1]Наманганское отделение Института математики АН РУз,
[2]Наманганский государственный университет,
rustam-7102@rambler.ru, mmtmuxtor93@mail.ru

Пусть $\Gamma^k = (V, L, i)$ есть дерево Кэли порядка $k \geq 1$, где V есть множество вершин Γ^k, $L-$множество его ребер и $i-$функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то x и y называются *ближайшими соседями*

вершины и обозначается $l = \langle x, y \rangle$. Пусть $d(x, y), x, y \in V$ есть расстояние между вершинами x, y, т.е. количество ребер кратчайшей пути, соединяющей x и y

Для фиксированного $x^0 \in V$ обозначим

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, V_n = \bigcup_{j=0}^{n} W_j.$$

Для $x \in W_n$ обозначим (множество прямых потомков вершины x)

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}.$$

Пусть $\Phi = \{0,1\}$ и $\sigma \in \Phi^V -$ конфигурация, то есть $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi : x \in V\}$, где $\sigma(x) = 1$ означает, что вершина x на дереве Кэли занятая, а $\sigma(x) = 0$ означает, что она свободная. Конфигурация σ называется допустимой, если $\sigma(x)\sigma(y) = 0$ для любых соседних $\langle x, y \rangle$ из $V(V_n$ или W_n, соответственно) и обозначим множество таких конфигураций через Ω (Ω_{V_n} и Ω_{W_n}).

Гамильтониан НС-модели определяется по формуле

$$H(\sigma) = J \sum_{x \in V} \sigma(x), \quad \sigma \in \Omega, \quad J \in R.$$

Известно, что существует взаимнооднозначное соответствие между множеством V вершин дерева Кэли порядка $k \geq 1$ и группой G_k, являющейся свободным произведением $k+1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, ..., a_{k+1}$, соответственно (см. [1]). Поэтому множество V можно отождествлять с множеством G_k.

Понятие меры Гиббса вводится стандартным образом (см. [2]-[3]).

Известно [4], что каждой мере Гиббса для НС-модели на дереве Кэли можно сопоставлять совокупность величин $z = \{z_x, x \in G_k\}$, удовлетворяющих

$$z_x = \prod_{y \in S(x)} (1 + \lambda z_y)^{-1}, \tag{1}$$

где $\lambda = e^{J_1} > 0 -$ параметр, $J_1 = -J\beta$, $\beta = 1/T$, $T > 0 -$ температура.

Определение 1. Совокупность величин $z = \{z_x, x \in G_k\}$ называется $\widehat{G}_k -$периодической, если $z_{yx} = z_x$ для $\forall x \in G_k, y \in \widehat{G}_k$.

G_k-периодические совокупности называются трансляционно-инвариантными.

Определение 2. Мера μ называется $\widehat{G}_k -$ периодической, если она соответствует $\widehat{G}_k -$периодической совокупности величин z.

Ниже мы построим новые решения функционального уравнения (1). А именно, положим m и $r -$ неотрицательные целые числа такие, что $0 \leq m \leq k$, и $0 \leq r \leq k$.

Рассмотрим граничное условие $z=\{z_x, x\in G_k\}$, вершины в *S(x)* принимающими значения z_1, z_2 определяется следующими шагами:

- если в вершине *x* имеем $z_x = z_1$, тогда на *m* вершин в *S(x)* поставим значение z_1, а на остальные вершины значение z_2;
- если в вершине *x* имеем $z_x = z_2$, тогда на *r* вершин в *S(x)* поставим значение z_2, а на остальные вершины значение z_1.

Мера, соответствующая z_x, определенная указанным выше методом, называется $(m;r)-$альтернативной мерой Гиббса. Отсюда, в силу (1) имеем

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{1}{(1+\lambda z_1)^m \cdot (1+\lambda z_2)^{k-m}}; \\ z_2 = \dfrac{1}{(1+\lambda z_2)^r \cdot (1+\lambda z_1)^{k-r}}. \end{cases} \tag{2}$$

Известна следующие теоремы.

Теорема 1 [5]. Для любого нормального делителя $\mathcal{G}\subset G_k$ всякая $\mathcal{G}$-периодическая мера Гиббса НС-модели является либо трансляционно-инвариантной, либо $G_k^{(2)}$-периодической мерой Гиббса, где

$$G_k^{(2)} = \{x\in G_k : |x| - \text{четное число}\}.$$

Теорема 2 [4]. Для НС модели при

$$\lambda \le \lambda_{cr} = (k-1)^{-1}\left(\frac{k}{k-1}\right)^k. \tag{3}$$

существует ровно одна $G_k^{(2)}$-периодическая мера Гиббса μ_0, которая совпадает с единственной трансляционно-инвариантной мерой Гиббса μ^* и при $\lambda > \lambda_{cr}$ существуют ровно три $G_k^{(2)}$-периодические меры Гиббса μ_0, μ_1, μ_2, где мера μ_0 является трансляционно-инвариантной, а меры μ_1 и μ_2 являются $G_k^{(2)}$-периодическими (не трансляционно-инвариантными).

Замечание. 1. $(0;0)-$альтернативные меры Гиббса совпадают с $G_k^{(2)}$-периодическими мерами Гиббса.

2. $(k;k)-$альтернативные меры Гиббса совпадают с трансляционно-инвариантной мерой Гиббса.

3. $(m;r)-$альтернативные меры Гиббса совпадают с $(r;m)-$альтернативными мерами Гиббса.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $k=3$, $\lambda_{cr} = \dfrac{27}{4}$. Тогда для НС-модели при $\lambda \le \lambda_{cr}$ $(1;0)-$альтернативная $((0;1)-$альтернативная$)$ мера Гиббса единственна, которая является трансляционно-инвариантной, а при $\lambda > \lambda_{cr}$ существуют

ровно три $(1;0)-$альтернативные $((0;1)-$альтернативные$)$ меры Гибсса, одна из которых является трансляционно-инвариантной, а две другие $(1;0)-$ альтернативными $((0;1)-$альтернативными$)$ (не периодическими) мерами Гибсса.

Теорема 4. Пусть $m+r \geq k-1$. Тогда для НС-модели $(m;r)-$ альтернативная мера Гиббса единственна. Более того, эта мера совпадает с единственной трансляционно-инвариантной мерой Гиббса.

Литература

1. Ганиходжаев Н.Н., Розиков У.А., Теор. Мат. Физ., **111**: 1, 1997, 109-117.
2. Георги Х.-О. Гиббсовские меры и фазовые переходы. М. "Мир" 1992.
3. Rozikov U. A., Gibbs Measures on Cayley Trees, World Sci., Singapore 2013.
4. Suhov Yu.M., Rozikov U.A. Queueing Systems, **46**, 2004, p. 197-212
5. Розиков У. А., Хакимов Р. М. Теор. Мат. Физ. **173 :** 1, 2012, 60–70.
6. D.Gandolfo, F.Haydarov, U. Rozikov, J.Ruiz New, Journal of Statistical Physics, **153**, 2013, 400-411.

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ МЕРАХ ГИББСА ДЛЯ ОДНОЙ ПЛОДОРОДНОЙ НС МОДЕЛИ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ ПОРЯДКА ЧЕТЫРЕ

[1]Хакимов Р.М., [2]Орифжонова Ф.Ш

[1]Институт математики

[2]НамГУ

Известно, что существуют четыре типа плодородных Hard-Core (HC) моделей с параметром активности $\lambda > 0$ и тремя состояниями на дереве Кэли. В случае "жезл" на дереве Кэли порядка четыре найдено точное значение параметра λ, при которых существуют ровно три два-периодические меры Гиббса.

Понятие меры Гиббса и других понятий вводится стандартным образом (см. например, [1]).

Пусть $\Im^k = (V, L, i)$ есть дерево Кэли порядка $k \geq 1$, где V есть множество вершин $\Im^k$, $L-$множество его ребер и $i-$функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то x и y называются *ближайшими соседями вершины* и обозначаются через $l = \langle x, y \rangle$.

Для фиксированной $x^0 \in V$ положим

$$W_n = \{x \in V | d(x, x^0) = n\}, \qquad V_n = \bigcup_{m=0}^{n} W_m, \qquad L_n = \{\langle x, y\rangle \in L \,|\, x, y \in V_n\},$$

где $d(x, y)$ есть расстояние между вершинами x и y на дереве Кэли.

Множество прямых потомков вершины x обозначим через $S(x)$, т.е. если $x \in W_n$, то

$$S(x) = \{y_i \in W_{n+1} \,|\, d(x, y_i) = 1, i = 1, 2, \ldots, k\}.$$

Пусть $\Phi = \{0,1,2\}$ и $\sigma \in \Omega = \Phi^V$ есть конфигурация, т.е. $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi : x \in V\}$. Значения $\sigma(x) = 1, 2$ означают, что вершина x ‘занята’, а значение $\sigma(x) = 0$ означает, что вершина x ‘вакантна’. Множество всех конфигураций на V (V_n, W_n) обозначается через Ω (Ω_{V_n}, Ω_{W_n}).

Рассмотрим множество Φ как множество вершин некоторого графа G. С помощью графа G определим G-допустимую конфигурацию следующим образом. Конфигурация σ называется G-*допустимой конфигурацией* на дереве Кэли (в V_n или W_n), если $\{\sigma(x), \sigma(y)\}$-ребро графа G для любой ближайшей пары соседей x, y из V (из V_n). Обозначим множество G-допустимых конфигураций через Ω^G ($\Omega^G_{V_n}$).

Множество активности [2] для графа G есть функция $\lambda : G \to R_+$. Значение λ_i функции λ в вершине $i \in \{0,1,2\}$ называется ее “активностью”.

Для данных G и λ определим гамильтониан $G-$НС-модели как

$$H^{\lambda}_G(\sigma) = \begin{cases} \sum_{x \in V} \log \lambda_{\sigma(x)}, & \text{если } \sigma \in \Omega^G, \\ +\infty, & \text{если } \sigma \notin \Omega^G. \end{cases}$$

Определение 1.([2]) Граф называется плодородным, если существует набор активности λ такой, что соответствующий гамильтониан имеет не менее двух ТИМГ.

В этой работе мы рассмотрим случай $\lambda_0 = 1, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и изучим периодические меры Гиббса в случае плодородного графа $G =$ *жезл*:

$$\text{жезл}: \{0,1\}\{0,2\}\{1,1\}\{2,2\}.$$

Для $\sigma_n \in \Omega^G_{V_n}$ положим $\#\sigma_n = \sum_{x \in V_n} \mathbf{1}(\sigma_n(x) \geq 1)$ число занятых вершин в σ_n. Пусть $z : x \mapsto z_x = (z_{0,x}, z_{1,x}, z_{2,x}) \in R^3_+$ векторнозначная функция на V. Для $n = 1, 2, \ldots$ и $\lambda > 0$ рассмотрим вероятностную меру $\mu^{(n)}$ на $\Omega^G_{V_n}$, определяемую как

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = \frac{1}{Z_n} \lambda^{\#\sigma_n} \prod_{x \in W_n} z_{\sigma(x),x}. \qquad (1)$$

Здесь Z_n – нормирующий делитель:

$$Z_n = \sum_{\sigma_n \in \Omega^G_{V_n}} \lambda^{\#\sigma_n} \prod_{x \in W_n} z_{\sigma(x),x}.$$

Говорят, что последовательность вероятностных мер $\mu^{(n)}$ является согласованной, если $\forall\ n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Omega^G_{V_{n-1}}$:

$$\sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) \mathbf{1}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega^G_{V_n}) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}). \qquad (2)$$

В этом случае существует единственная мера μ на $(\Omega^G, \mathbf{B})$ такая, что для всех n и $\sigma_n \in \Omega^G_{V_n}$

$$\mu(\{\sigma \in \Omega^G : \sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n),$$

где $\mathbf{B}$ есть σ-алгебра, порожденная цилиндрическими подмножествами Ω^G

Определение 2. Мера μ, определенная формулой (1) с условием согласованности (2), называется G-НС-*мерой Гиббса* с $\lambda > 0$, *соответствующей функции* $z : x \in V \setminus \{x^0\} \mapsto z_x$.

Пусть $L(G)-$ множество ребер графа G, обозначим через $A \equiv A^G = (a_{ij})_{i,j=0,1,2}$ матрицу смежности G, т.е.

$$a_{ij} \equiv a^G_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{если } \{i,j\} \in L(G), \\ 0, & \textit{если } \{i,j\} \notin L(G). \end{cases}$$

В следующей теореме сформулировано условие на z_x, гарантирующее согласованность меры $\mu^{(n)}$.

Теорема 1. [1] Вероятностные меры $\mu^{(n)}$, $n = 1,2,\ldots$, заданные формулой (1), согласованны тогда и только тогда, когда для любого $x \in V$ имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} z'_{1,x} &= \lambda \prod_{y \in S(x)} a_{10} + a_{11} z'_{1,y} + a_{12} z'_{2,y} a_{00} + a_{01} z'_{1,y} + a_{02} z'_{2,y}, \\ z'_{2,x} &= \lambda \prod_{y \in S(x)} a_{20} + a_{21} z'_{1,y} + a_{22} z'_{2,y} a_{00} + a_{01} z'_{1,y} + a_{02} z'_{2,y}, \end{aligned} \qquad (3)$$

где $z'_{i,x} = \lambda z_{i,x}/z_{0,x}$, $i = 1,2$.

В (3) мы полагаем, что $z_{0,x} \equiv 1$ и $z_{i,x} = z'_{i,x} > 0, i = 1,2$. Тогда в силу теоремы 1 существует единственная G-НС-мера Гиббса μ тогда и только тогда, когда для любых функций $z : x \in V \mapsto z_x = (z_{1,x}, z_{2,x})$ выполняется равенство

$$z_{i,x} = \lambda \prod_{y \in Sx} \frac{a_{i0} + a_{i1} z_{1,y} + a_{i2} z_{2,y}}{a_{00} + a_{01} z_{1,y} + a_{02} z_{2,y}}, i = 1,2. \qquad (4)$$

Известно, что между множеством вершин V и группой G_k, являющейся свободным произведением $k+1$ циклических групп второго порядка, существует взаимнооднозначное соответствие (см. [1]).

Понятия трансляционно-инвариантной, периодический, $G_k^{(2)}$-периодической меры Гиббса вводятся обычном образом (см. например, [1]).

В работах [3]-[5] изучены трансляционно-инвариантные меры Гиббса для НС модели с тремя состояниями.

А в [6] изучены периодические меры Гиббса для этой модели в случае $G = жезл$ и доказана следующая теорема.

Теорема 2. [6] Пусть $H-$ нормальный делитель конечного индекса и $G_k^{(2)}-$ подгруппа, состоящая из слов четной длины в G_k. Тогда для НС-модели всякая H-периодическая мера Гиббса является либо $G_k^{(2)}$-периодической, либо трансляционно-инвариантной.

В силу теоремы 2 имеются только $G_k^{(2)}$-периодические меры Гиббса и для них из (4) получена следующая система уравнений:

$$\begin{cases} t_1 = \lambda\left(\dfrac{1+z_1}{z_1+z_2}\right)^k,\ t_2 = \lambda\left(\dfrac{1+z_2}{z_1+z_2}\right)^k, \\ z_1 = \lambda\left(\dfrac{1+t_1}{t_1+t_2}\right)^k,\ z_2 = \lambda\left(\dfrac{1+t_2}{t_1+t_2}\right)^k. \end{cases}$$

В той же работе [6] рассмотрены следующие инвариантные множества:

$$I_1 = \{(t_1,t_2,z_1,z_2) \in R^4 : t_1 = t_2 = z_1 = z_2\},\ I_2 = \{(t_1,t_2,z_1,z_2) \in R^4 : t_1 = t_2, z_1 = z_2\},$$

$$I_3 = \{(t_1,t_2,z_1,z_2) \in R^4 : t_1 = z_1, t_2 = z_2\},\ I_4 = \{(t_1,t_2,z_1,z_2) \in R^4 : t_1 = z_2, t_2 = z_1\},$$

и, в частности, на дереве Кэли второго и третьего порядка найдены условия, при которых существуют $G_k^{(2)}$-периодические меры Гиббса, отличные от трансляционно-инвариантных, где $G_k^{(2)} = \{x \in G_k : |x| - \text{четное}\}$ подгруппа в G_k.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Пусть $k = 4$ и $\lambda_{cr} = \dfrac{243}{16}$. Тогда для НС-модели в случае $G = жезл$ на I_2 при $\lambda \geq \lambda_{cr}$ существует ровно одна $G_k^{(2)}$-периодическая мера Гиббса, которая совпадает с трансляционно-инвариантной мерой Гиббса μ_0, а при $0 < \lambda < \lambda_{cr}$ существует ровно три $G_k^{(2)}$-периодические меры Гиббса μ_0, μ_1, μ_2, где μ_1, μ_2 являются $G_k^{(2)}$-периодическими (не трансляционно-инвариантными) мерами Гиббса.

Литература

1. Rozikov U. A. Gibbs measures on Cayley trees, World Scientific, 2013.
2. Brightwell G., Winkler P. Graph homomorphisms and phase transitions, J.Combin. Theory Ser.B., 77, 1999, стр.221-262.
3. Rozikov U. A., Shoyusupov Sh. A. Fertile HC models with three states on a Cayley tree, Theor. Math. Phys., 156(3), 2008, p.1319-1330.
4. Khakimov R. M. Translation-invariant Gibbs measures for fertile three-state "Hard Core"models on a Cayley tree, Theor. Math. Phys., 183(3), 2015, p.441-449.
5. Rozikov U. A., Khakimov R. M. Gibbs measures for the fertile three-state hard core models on a Cayley tree, Queueing Systems. 81(1), 2015, p.49-69.
6. Khakimov R. M., Umirzakova K.O. Existence and extremality of periodic Gibbs measures for fertile three-state Hard-Core models in the case Wand, arXiv:2007.14611v2[math-ph].

О КРАЙНОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ МЕР ГИББСА ДЛЯ НС МОДЕЛИ В СЛУЧАЕ ЖЕЗЛ

[1]Хакимов Р.М., [2]Умирзакова К.О
[1]Институт математики
[2]НамГУ

Известно, что множество всех предельных мер Гиббса образует выпуклое компактное подмножество в множестве всех вероятностных мер (см. например, [1]) и каждая точка этого выпуклого множества однозначно разлагается по его крайним точкам, то особый интерес представляет описание всех крайних точек этого выпуклого множества, т. е. крайних мер Гиббса.

Данная работа посвящена изучению плодородных Hard-Core (HC) моделей с тремя состояниями и параметром активности $\lambda > 0$ на дереве Кэли порядка два и три. Известно, что существуют четыре типа плодородных HC моделей с тремя состояниями. Для рассматриваемой модели в случае "жезл" найдены условия трансляционно-инвариантности периодических мер Гиббса и условия существования два-периодических (не трансляционно-инвариантных) мер Гиббса. Кроме того, доказано, что два-периодические меры Гиббса являются крайними в области их существования на дереве Кэли порядка два.

Пусть $\Im^k = (V, L, i)$ есть дерево Кэли порядка $k \geq 1$, где V есть множество вершин $\Im^k$, $L -$ множество его ребер и $i -$ функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то x и y называются *ближайшими соседями вершины* и обозначаются через $l = \langle x, y \rangle$. Расстояние $d(x, y)$ между

вершинами x и y на дереве Кэли есть количество ребер кратчайшей пути, соединяющей вершины x и y.

Для фиксированной $x^0 \in V$ положим

$$W_n = \{x \in V | d(x, x^0) = n\}, \qquad V_n = \bigcup_{m=0}^{n} W_m.$$

Множество прямых потомков вершины x обозначим через $S(x)$, т.е. если $x \in W_n$, то

$$S(x) = \{y_i \in W_{n+1} \mid d(x, y_i) = 1, i = 1, 2, \ldots, k\}.$$

Пусть $\Phi = \{0,1,2\}$ и $\sigma \in \Omega = \Phi^V$ есть конфигурация, т.е. $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi : x \in V\}$. Значения $\sigma(x) = 1,2$ означают, что вершина x ‘занята’, а значение $\sigma(x) = 0$ означает, что вершина x ‘вакантна’. Множество всех конфигураций на V (V_n, W_n) обозначается через Ω (Ω_{V_n}, Ω_{W_n}).

Рассмотрим множество Φ как множество вершин некоторого графа G. С помощью графа G определим G-допустимую конфигурацию следующим образом. Конфигурация σ называется *G-допустимой конфигурацией* на дереве Кэли (в V_n или W_n), если $\{\sigma(x), \sigma(y)\}$-ребро графа G для любой ближайшей пары соседей x, y из V (из V_n). Обозначим множество G-допустимых конфигураций через Ω^G ($\Omega^G_{V_n}$).

Множество активности [2] для графа G есть функция $\lambda : G \to R_+$. Значение λ_i функции λ в вершине $i \in \{0,1,2\}$ называется ее “активностью”.

Для данных G и λ определим гамильтониан $G-$НС-модели как

$$H^{\lambda}_G(\sigma) = \begin{cases} \sum_{x \in V} \log \lambda_{\sigma(x)}, & \text{если } \sigma \in \Omega^G, \\ +\infty, & \text{если } \sigma \notin \Omega^G. \end{cases}$$

Определение 1.([2]) Граф называется плодородным, если существует набор активности λ такой, что соответствующий гамильтониан имеет не менее двух ТИМГ.

В этой работе мы рассмотрен случай $\lambda_0 = 1, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и изучены периодические меры Гиббса в случае плодородного графа $G =$ *жезл*:

$$\text{жезл}: \{0,1\}\{0,2\}\{1,1\}\{2,2\}.$$

Для $\sigma_n \in \Omega^G_{V_n}$ положим $\#\sigma_n = \sum_{x \in V_n} \mathbf{1}(\sigma_n(x) \geq 1)$ число занятых вершин в σ_n. Пусть $z : x \mapsto z_x = (z_{0,x}, z_{1,x}, z_{2,x}) \in R^3_+$ векторнозначная функция на V. Для $n = 1,2,\ldots$ и $\lambda > 0$ рассмотрим вероятностную меру $\mu^{(n)}$ на $\Omega^G_{V_n}$, определяемую как

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = \frac{1}{Z_n} \lambda^{\#\sigma_n} \prod_{x \in W_n} z_{\sigma(x),x}. \qquad (1)$$

Здесь Z_n – нормирующий делитель: $Z_n = \sum_{\sigma_n \in \Omega^G_{V_n}} \lambda^{\#\sigma_n} \prod_{x \in W_n} z_{\sigma(x),x}$.

Говорят, что последовательность вероятностных мер $\mu^{(n)}$ является согласованной, если $\forall\ n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Omega^G_{V_{n-1}}$:

$$\sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n)\mathbf{1}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega^G_{V_n}) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}). \qquad (2)$$

В этом случае существует единственная мера μ на $(\Omega^G, \mathbf{B})$ такая, что для всех n и $\sigma_n \in \Omega^G_{V_n}$

$$\mu(\{\sigma \in \Omega^G : \sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n),$$

где $\mathbf{B}$ есть σ-алгебра, порожденная цилиндрическими подмножествами Ω^G.

Пусть $L(G)$ – множество ребер графа G, обозначим через $A \equiv A^G = (a_{ij})_{i,j=0,1,2}$ матрицу смежности G, т.е.

$$a_{ij} \equiv a^G_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{если } \{i,j\} \in L(G), \\ 0, & \textit{если } \{i,j\} \notin L(G). \end{cases}$$

В следующей теореме сформулировано условие на z_x, гарантирующее согласованность меры $\mu^{(n)}$.

Теорема 1. [1] Вероятностные меры $\mu^{(n)}$, $n = 1,2,\ldots$, заданные формулой (1), согласованны тогда и только тогда, когда для любого $x \in V$ имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} z'_{1,x} &= \lambda \prod_{y \in S(x)} a_{10} + a_{11} z'_{1,y} + a_{12} z'_{2,y} a_{00} + a_{01} z'_{1,y} + a_{02} z'_{2,y}, \\ z'_{2,x} &= \lambda \prod_{y \in S(x)} a_{20} + a_{21} z'_{1,y} + a_{22} z'_{2,y} a_{00} + a_{01} z'_{1,y} + a_{02} z'_{2,y}, \end{aligned} \qquad (3)$$

где $z'_{i,x} = \lambda z_{i,x}/z_{0,x}$, $i = 1,2$.

В (3) мы полагаем, что $z_{0,x} \equiv 1$ и $z_{i,x} = z'_{i,x} > 0, i = 1,2$. Тогда в силу теоремы 1 существует единственная G-НС-мера Гиббса μ тогда и только тогда, когда для любых функций $z : x \in V \mapsto z_x = (z_{1,x}, z_{2,x})$ выполняется равенство

$$z_{i,x} = \lambda \prod_{y \in Sx} \frac{a_{i0} + a_{i1} z_{1,y} + a_{i2} z_{2,y}}{a_{00} + a_{01} z_{1,y} + a_{02} z_{2,y}}, i = 1,2. \qquad (4)$$

Известно, что между множеством вершин V и группой G_k, являющейся свободным произведением $k+1$ циклических групп второго порядка, существует взаимнооднозначное соответствие (см. [1]).

Понятие меры Гиббса и других понятий, в частности, понятия трансляционно-инвариантной, периодической, $G_k^{(2)}$-периодической мер Гиббса вводятся обычном образом (см. например, [1]).

В работах [3]-[5] изучены трансляционно-инвариантные меры Гиббса (ТИМГ) для НС модели с тремя состояниями.

Для периодических мер Гиббса для этой модели в случае $G = жезл$ доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $H-$ нормальный делитель конечного индекса и $G_k^{(2)}-$подгруппа, состоящая из слов четной длины в G_k. Тогда для НС-модели всякая H-периодическая мера Гиббса является либо $G_k^{(2)}$-периодической, либо трансляционно-инвариантной.

В силу теоремы 2 имеются только $G_k^{(2)}$-периодические меры Гиббса и для них из (4) получена следующая система уравнений:

$$\begin{cases} t_1 = \lambda\left(\dfrac{1+z_1}{z_1+z_2}\right)^k,\ t_2 = \lambda\left(\dfrac{1+z_2}{z_1+z_2}\right)^k, \\ z_1 = \lambda\left(\dfrac{1+t_1}{t_1+t_2}\right)^k,\ z_2 = \lambda\left(\dfrac{1+t_2}{t_1+t_2}\right)^k. \end{cases} \tag{5}$$

Рассмотрим следующие множества, которые являются инвариантными:

$$I_1 = \{(t_1,t_2,z_1,z_2) \in R^4 : t_1 = t_2 = z_1 = z_2\},\ I_2 = \{(t_1,t_2,z_1,z_2) \in R^4 : t_1 = t_2, z_1 = z_2\},$$

$$I_3 = \{(t_1,t_2,z_1,z_2) \in R^4 : t_1 = z_1, t_2 = z_2\},\ I_4 = \{(t_1,t_2,z_1,z_2) \in R^4 : t_1 = z_2, t_2 = z_1\}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Для НС-модели в случае $G = жезл$ справедливы следующие утверждения:

1. Пусть $k \geq 2$ и $\lambda > 0$. Тогда на I_1 и I_4 любая $G_k^{(2)}$-периодическая мера Гиббса является трансляционно-инвариантной.

2. Пусть $k \geq 2$ и $\lambda > 0$. Тогда на I_3 любая $G_k^{(2)}$-периодическая мера Гиббса является трансляционно-инвариантной и она не единственна.

3. Пусть $k = 2$ $(k = 3)$ и $\lambda_{cr} = 1$ $\left(\lambda_{cr} = \dfrac{128}{27}\right)$. Тогда на I_2 при $\lambda \geq \lambda_{cr}$ существует ровно одна $G_k^{(2)}$-периодическая мера Гиббса, которая совпадает с единственной ТИМГ ν_0, а при $0 < \lambda < \lambda_{cr}$ существует ровно три $G_k^{(2)}$-периодические меры Гиббса ν_0, μ_1, μ_2, где μ_1, μ_2 являются $G_k^{(2)}$-периодическими (не трансляционно-инвариантными) мерами Гиббса, где $G_k^{(2)} = \{x \in G_k : |x| - \text{четное}\}$ подгруппа в G_k.

При $k = 2$ имеем $G_k^{(2)}$-периодические меры μ_1 и μ_2. Изучена задача их (не) крайности, используя методы из работ [6], [7] для ТИМГ. Для каждой ТИМГ рассматривается цепь Маркова с состояниями $\{0,1,2\}$, индексированная на дереве Кэли, т.е. предположим, что нам даны дерево Кэли с множеством вершин V, вероятностная мера ν, и матрица вероятностных переходов $\mathbb{P} = \left(P_{ij}\right)$ на множестве $\{0,1,2\}$. В случае периодических мер матрица $\mathbb{P}$ зависит от t_1, t_2, z_1 и z_2, где $t_1 \neq z_1$, $t_2 \neq z_2$ и

$(t_1, t_2, z_1, z_2)-$ решение системы уравнений (5). С другой стороны, мы рассматриваем меры μ_1 и μ_2, соответствующие совокупности величин из $I_2 : t_1 = t_2 = t, z_1 = z_2 = z$. Кроме того, заметим, что $zt = 1$. Тогда, матрица вероятностных переходов P_{il}, определенная данной периодической мерой Гиббса μ_1 (соот. μ_2) $\mathbb{P} \equiv \mathbb{P}_{z,t} = \mathbf{P}_{\mu_1}$ (соот. $\mathbf{P}_{\mu_2}$) есть произведение двух матрицы вероятностных переходов:

$$\mathbf{P}_{\mu_1} = \mathbb{P}_z \mathbb{P}_t == \begin{pmatrix} \frac{1}{1+t} & \frac{t}{2(1+t)} & \frac{t}{2(1+t)} \\ \frac{z}{(1+z)(1+t)} & \frac{t+3}{2(1+z)(1+t)} & \frac{1}{2(1+z)} \\ \frac{z}{(1+z)(1+t)} & \frac{1}{2(1+z)} & \frac{t+3}{2(1+z)(1+t)} \end{pmatrix}$$

Таким образом, матрица $\mathbf{P}_{\mu_1}$ определяет марковскую цепь на дереве Кэли порядка k^2, которое состоит из вершин исходного дерева в четных местах.

Достаточное условие Кестена-Стигума не крайности меры Гиббса μ_1, соответствующей матрице $\mathbf{P}_{\mu_1}$ есть: $k^2 s_2^2 > 1$, где s_2 есть второе максимальное по абсолютной величине собственное значение $\mathbf{P}_{\mu_1}$.

Достаточным условием крайности меры Гиббса μ является $k\kappa(\mu)\gamma(\mu) < 1$ (см. например, [5]), но для рассматриваемых $G_k^{(2)}$-периодических мер это условие выглядит: $k^2\kappa(\mu)\gamma(\mu) < 1$.

Доказана следующая теорема.

Теорема 4. Пусть $k = 2$. Тогда для НС-модели в случае $G = жезл$ $G_k^{(2)}$-периодические меры Гиббса μ_1 и μ_2 при $0 < \lambda < 1$ являются крайними.

Литература

1. Rozikov U. A. Gibbs measures on Cayley trees, World Scientific, 2013.
2. Brightwell G., Winkler P. Graph homomorphisms and phase transitions, J.Combin. Theory Ser.B., 77, 1999, стр.221-262.
3. Rozikov U. A., Shoyusupov Sh. A. Fertile HC models with three states on a Cayley tree, Theor. Math. Phys., 156(3), 2008, p.1319-1330.
4. Khakimov R. M. Translation-invariant Gibbs measures for fertile three-state "Hard Core"models on a Cayley tree, Theor. Math. Phys., 183(3), 2015, p.441-449.
5. Rozikov U. A., Khakimov R. M. Gibbs measures for the fertile three-state hard core models on a Cayley tree, Queueing Systems. 81(1), 2015, p.49-69.
6. Kesten H, Stigum B.P. Additional limit theorem for indecomposable multi-dimensional Galton-Watson processes, Ann. Math. Statist., 37, (1966), 1463–1481.

7. Martinelli F., Sinclair A., Weitz D. Fast mixing for independent sets, coloring and other models on trees, Random Structures and Algoritms, 31, (2007), 134–172.

Р-АДИК ПОТТС МОДЕЛИ УЧУН ДАВРИЙ УМУМЛАШГАН ГИББС ЎЛЧОВЛАРИНИНГ МАВЖУДЛИГИ

Ҳакимов О.Н.
В.И.Романовский номидаги Математика институти
hakimovo@mail.ru

$\Gamma_+^k = (V, L)$ ярим Кэли дарахти ва $\Psi = \{1, 2, ..., q\}$ чекли тўплам берилган бўлсин. $\sigma : V \to \Psi$ акслантиришга ярим Кэли дарахтида аниқланган спин қийматлари Ψ тўпламда ўзгарувчи конфигурация дейилади. Ярим дарахтдаги барча конфигурациялар тўпламини Ω билан белгилаймиз. Табиийки, конфигурацияни $\Lambda \subset V$ қисм тўпламда ҳам аниқлаш мумкин ва бу ҳолда Λ тўпламдаги барча конфигурацияларни Ω_Λ каби белгилаймиз. $\Lambda \subset V$ чекли тўпламда қуйидагича аниқланган Ҳамилтонианни (физик системанинг энергияси) қараймиз:

$$H_\Lambda(\sigma) = J \sum_{\substack{<x,y>: \\ x,y \in \Lambda}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \qquad \forall \sigma \in \Omega_\Lambda, \tag{1}$$

бу ерда $J \in \mathbb{Q}_p$, $< x, y > \in L$ ва δ_{ij} Кронеккер символи. Ушбу Ҳамилтониан спин қийматлари q та бўлган р-адик Поттс моделини тавсифлайди.

Гиббс ўлчовлари назариясининг асосий масалаларидан бири бу берилган Ҳамилтониан учун эҳтимоллик ўлчовларини қуриш ва улар учун фаза алмашишларини ўрганишдан иборат. Бизнинг мақсадимиз эса р-адик Поттс модели учун р-адик Гиббс ўлчовлари мавжудлиги ва етарли даражада кўплигини текширишдан иборат. Бунинг учун динамик системалар назариясининг хаотиклиги каби ажойиб хоссаси р-адик Поттс моделидан ҳосил бўлган Поттс-Бете акслантириши учун ўринли бўладиган параметрларни аниқлашга ҳаракат қиламиз.

Айтайлик $x^{(0)} \in \Gamma_+^k$ ярим Кэли дарахтининг илдизи бўлсин. Маълумки, Кэли дарахтида $d(x, y)$ метрикани қуйидагича киритиш мумкин: x ва y учларни туташтирувчи энг қисқа йўлдаги қирралар сонига шу учлар орасидаги масофа деймиз. Ярим дарахтнинг илдизи ва ундаги метрика ёрдамида қуйидаги муҳим тўпламларни киритамиз:

$$W_n = \{x \in V : d(x, x^{(0)}) = n\},\ V_n = \bigcup_{m=0}^{n} W_m, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+,$$

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(y, x) = 1\}, \ \forall x \in W_n.$$

Равшанки, $V_n \subset V_{n+1}$ ва $\bigcup_{n \geq 0} V_n = V$ ўринли. Киритилган бу тўпламлар ёрдамида ярим дарахтда координатали структурани аниқлаш мумкин.

Дарахтнинг ҳар бир $x \in W_n$ учига $(i_1, i_2, ..., i_n)$ ёзувни мос қўямизки, бунда $i_m \in \{1, 2, ..., k\}, 1 \le m \le n$. Шунингдек, $x^{(0)} \in \Gamma_+^k$ илдизга (0) ёзувини мос қўямиз. Бошқача айтганда бу ёзув дарахт учининг қайси қаватдалигини ва бу учга дарахт илдизидан қандай йўл орқали бориш мумкинлигини ифодалайди.

Энди дарахтда бинар амал аниқлаймиз. Берилган $x = (i_1, i_2, ..., i_n)$ ва $x = (j_1, j_2, ..., j_m)$ учлар учун $x \circ y = (i_1, i_2, ..., i_n, j_1, j_2, ..., j_m)$ ҳамда $x \circ x^{(0)} = x^{(0)} \circ x = (i_1, i_2, ..., i_n)$ каби бинар амал аниқлаш мумкин. Кўриш мумкинки, бу амалга нисбатан дарахт учлари тўплами нокоммутатив, бири бор ярим группа бўлади. Бу ярим группанинг биз учун муҳим бўлган қуйидаги қисм ярим группаси борлигини таъкидлаш жоиз

$$G_m = \{x \in V : d(x, x^{(0)}) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, m)\}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Ҳар бир $n \in \mathbb{N}$ учун Ω_{V_n} тўпламларда p-адик эҳтимоллик ўлчовларини қуцидагича аниқлаймиз:

$$\mu_h^{(n)}(\sigma) = \frac{\exp_p(H_{V_n}(\sigma)) \prod_{x \in W_n} h_{\sigma(x),x}}{Z_{n,h}}, \quad \forall \sigma \in \Omega_{V_n}, \tag{2}$$

бу ерда $h_{\sigma(x),x} \in \mathbb{Q}_p$ ва $Z_{h,n}$ нормаллаштирувчи ўзгармас.

Агар Ω да аниқланган μ_h эҳтимоллик ўлчови учун иҳтиёрий $\Lambda \subset V_n$ ($n = 1, 2, 3, ...$) олинганда ҳам ҳар бир σ_Λ, σ_n конфигурациялар учун

$$\mu_h(\{\sigma \in \Omega : \sigma_{|V_n} \equiv \sigma_n\}) = \mu_h^{(n)}(\{\sigma_n \in \Omega_{V_n} : \sigma_{n|\Lambda} \equiv \sigma_\Lambda\})$$

ўринли бўлса, у ҳолда μ_h ўлчовга p-адик Поттс моделига мос умумлашган Гиббс ўлчови дейилади. Колмогоров теоремасининг ноарҳимед муқобилига кўра (2) тенглик билан берилган эҳтимоллик ўлчовлари кетма-кетлиги мувофиқлашган бўлса, у ҳолда Ω да аниқланган p-адик Поттс моделига мос ягона умумлашган Гиббс ўлчови мавжуд.

Қуйидаги теоремани (2) тенглик билан берилган эҳтимоллик ўлчовларининг мувофиқлашганлик шартининг мезони сифатида қараш мумкин.

1-Теорема. [1] $\{\mu_h^{(n)}\}_{n \ge 1}$ p-адик эҳтимоллик ўлчовлари мувофиқлашган бўлиши учун иҳтиёрий $x \in V \setminus \{x^{(0)}\}$ учда қуйидаги тенглик ўринли бўлиши зарур ва етарли:

$$h_x = \prod_{y \in S(x)} \frac{\theta h_y + q - 1}{h_y + q + \theta - 2}, \tag{3}$$

бу ерда $h_x = \frac{h_{1,x}}{h_{-1,x}}$, $\theta = \exp_p(2J)$.

Юқоридаги теореманинг маъноси шундан иборатки, (3) тенгламалар системасини қаноатлантирувчи ҳар бир $\{h_x : x \in V \setminus \{x^{(0)}\}\}$ функционал битта p-адик умумлашган Гиббс ўлчовини аниқлайди. Айтиш мумкинки, (3) системани умумий ечимларини топиш осон эмас. Биз унинг ўзгармас, яъни

$h_x \equiv h$ кўринишдаги ечимларини қидирамиз. Бошқача айтганда, (3) системанинг ечими бўладиган қуйидаги акслантиришнинг даврий нуқталарини топиш билан шуғулланамиз:

$$f(h) = \left(\frac{\theta h + q - 1}{h + q + \theta - 2} \right)^k .$$

Юқоридаги функция p-адик Поттс-Бете аклантириши дейилади. Поттс-Бете акслантиришининг ҳар бир m-даврий нуқтасига битта G_m – даврий p-адик умумлашган Гиббс ўлчови мос келади. Поттс-Бете акслантиришининг динамикасини ўрганиш ёрдамида топилган қуйидаги асосий натижани келтирамиз.

2-Теорема. $p \geq 3, k \geq 2, q \geq 3$, $|q|_p < 1$ ва $|\theta - 1|_p < 1$ берилган бўлсин. У (1) тенглик билан аниқланган p-адик Поттс модели учун ҳолда қуйидаги тасдиқлар ўринли:

i. Агар $|k|_p \leq |q + \theta - 1|_p$ бўлса, у ҳолда ягона даврий умумлашган Гиббс ўлчови мавжуд.

ii. Агар $|k|_p > |q + \theta - 1|_p$ ва $|\theta - 1|_p < |q^2|_p$ бўлса, у ҳолда даврий умумлашган Гиббс ўлчовлари сони $(k, p-1)+1$ та, бу ерда $(k, p-1)$ сони k ва $p-1$сонларининг ЭКУБи. Шунингдек, $(k, p-1) > 1$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий m натурал сони учун G_m – даврий умумлашган Гиббс ўлчови мавжуд.

Адабиётлар

1. Ganikhodjaev N.N., Mukhamedov F.M., Rozikov U.A., Phase transitions of the Ising model on Z in the p-adic number field. *Uzbek Math J,* 1998;4:23–9.
2. Mukhamedov F.M., Rozikov U.A., On inhomogeneous p -adic Potts model on a Cayley tree. *Infin Dimens Anal Quantum Probab Relat Top,* 2005;8:277–90 .

О КВАДРАТИЧЕСКОМ СТОХАСТИЧЕСКОМ ПРОЦЕССЕ ТИПА $(12|a)$

[1,2]Худаяров С.С.

[1]Бухарский государственный университет,
[2]Бухарское отделение Института математики им. В.И.Романовского

Введем обозначение $I = \{0,1,2,...,m-1\}$. Пусть $\mathfrak{C}$ - множество всех m^3-мерных кубических матриц над полем действительных чисел. Обозначим через E_{ijk}, $i, j, k \in I$ базисные кубические матрицы в $\mathfrak{C}$, т.е. (i, j, k)-элемент равно 1, остальные равно 0

Определим умножения единичных кубических матрицы E_{ijk} и E_{lnr} следующем образом.

$$E_{ijk} *_a E_{lnr} = \delta_{kl} E_{ia(j,n)r}, \tag{1}$$

где $a(i, j)$

$$a(i, j) = (i + j)(\mathrm{mod}\, m).$$

Умножение двух кубических матриц $A = (a_{ijk}) \in \mathfrak{C}$ и $B = (b_{ijk}) \in \mathfrak{C}$ определяется как $A *_a B = (c_{ijk})$, где

$$c_{ijk} = \sum_{l,n:a(l,n)=j} \sum_{r} a_{ilr} b_{rnk}.$$

Надо отметить, что если $\{l, n : a(l, n) = j\} = \varnothing$ то, $c_{ij\kappa} = 0$.

Обозначим через $\mathcal{S}$ множество всевозможных видов стохастичности, а через $\mathbb{M}$ множество всех возможных правил умножения кубических матриц. Пусть параметры $s \geq 0, t \geq 0$ считаются временем.

Обозначим $\mathcal{M}^{[s,t]} = \left(P_{ijk}^{[s,t]}\right)_{i,j,k=0}^{m-1}$ кубической матрицей с двумя параметрами s, t.

Определение ([1]). Семейство $\left\{\mathcal{M}^{[s,t]} : s, t \in \mathbb{R}_+\right\}$ называется Марковским процессом кубических матриц (или квадратичным стохастическим процессом (КСП)) типа $(\sigma \mid \mu)$, если для каждого момента времени s и t кубическая матрица $\mathcal{M}^{[s,t]}$ является стохастической в смысле $\sigma \in \mathcal{S}$ и удовлетворяет через уравнения Колмогорова-Чепмена (для кубических матриц), т.е.

$$\mathcal{M}^{[s,t]} = \mathcal{M}^{[s,\tau]} *_\mu \mathcal{M}^{[\tau,t]} \text{ для всех } 0 \leq s < \tau < t \tag{2}$$

относительно умножения $\mu \in \mathbb{M}$.

Кубическая матрица $M^{[s,t]}$ называется $(1,2)$-стохастической, если все его элементы неотрицательные и

$$\sum_{i,j=0}^{m-1} p_{ijk} = 1, \text{ для каждого } k = \overline{0, m-1}$$

Случае $m = 2$ построим КСП типа $(12 \mid a)$, где 12 означает $(1,2)$-стохастичность.

Запишем кубическую матрицу в следующем виде:

$$\mathcal{M}^{[s,t]} = \left(\begin{array}{cc|cc} P_{000}^{[s,t]} & P_{001}^{[s,t]} & P_{100}^{[s,t]} & P_{101}^{[s,t]} \\ P_{010}^{[s,t]} & P_{011}^{[s,t]} & P_{110}^{[s,t]} & P_{111}^{[s,t]} \end{array}\right) \tag{3}$$

Предполагаем, что

$$P_{000}^{[s,t]} = P_{001}^{[s,t]} = P_{100}^{[s,t]} \equiv g(s,t)$$

1) Пусть $g(s,t) \equiv 1/4$ тогда $(12 \mid a)-$стохастическая кубическая матрица имеет вид

$$\mathcal{M}^{[s,t]} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1/4 & 1/4 & 1/4 & \mathrm{F(s,t)} \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/2 - F(\mathrm{s,t}) \end{array}\right) \tag{4}$$

где функция $F(s,t)$ должно удовлетворять следующему уравнению

$$F(s,t) = P_{101}^{[s,t]} = P_{100}^{[s,\tau]}P_{001}^{[\tau,t]} + P_{110}^{[s,\tau]}P_{011}^{[\tau,t]} + P_{101}^{[s,\tau]}P_{101}^{[\tau,t]} + P_{111}^{[s,\tau]}P_{111}^{[\tau,t]}$$
$$= 2F(s,\tau)F(\tau,t) - \frac{1}{2}F(s,\tau) - \frac{1}{2}F(\tau,t) + \frac{3}{8}.$$

Обозначив $G(s,t) = 4F(s,t) - 1$ можно переписать это уравнение в следующем виде

$$G(s,t) = \frac{1}{2}G(s,\tau)G(\tau,t).$$

Последнее уравнение имеет решения $G(s,t) \equiv 0$, $G(s,t) = \dfrac{2\psi(t)}{\psi(s)}$ (для любых $\psi \neq 0$) и

$$G(s,t) = \begin{cases} 2, & \text{если } 0 \le s < t \le a \\ 0, & \text{если } t > a. \end{cases}$$

Этим решениям соответствуют (по (4)) следующие КСП типа $(12|a)$:

$$\mathcal{M}_3^{[s,t]} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array}\right) \tag{5}$$

$$\mathcal{M}_4^{[s,t]} = \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{\psi(\mathrm{t})}{2\psi(\mathrm{s})} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{\psi(\mathrm{t})}{2\psi(\mathrm{s})} \end{array}\right) \tag{6}$$

где ψ такое что $-\dfrac{1}{2} \le \dfrac{\psi(t)}{\psi(s)} \le \dfrac{1}{2}$. Это условие может быть выполнено для функции ψ, когда время дискретно, т.е., $t \in N$.Тогда например можно взять $\psi(n) = 2^{-n}$.

Случай $G(s,t) = 2$ не определяет КПС, потому что в этом случае $F(s,t) > 1/2$.

2) Пусть $g(s,t) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\varphi(t)}{\varphi(s)} + 1\right)$ (где $\varphi \neq 0$ - произвольная функция). $(12|a)$-стохастическая кубическая матрица имеет вид

$$\mathcal{M}^{[s,t]} = \left(\begin{array}{cc|cc} g(\mathrm{s,t}) & g(\mathrm{s,t}) & g(\mathrm{s,t}) & \mathrm{L(s,t)} \\ \frac{1}{2} - g(\mathrm{s,t}) & 1/4 & \frac{1}{2} - g(\mathrm{s,t}) & \frac{1}{2} - L(\mathrm{s,t}) \end{array}\right), \tag{7}$$

где $g(s,t)=\frac{1}{4}\left(\frac{\varphi(t)}{\varphi(s)}+1\right)$ с $-1\le\frac{\varphi(t)}{\varphi(s)}\le 1$. В частности, это условие выполняется для положительной убывающей функции φ. Здесь функция $L(s,t)$ должна удовлетворять следующему уравнению

$$L(s,t)=2L(s,\tau)L(\tau,t)-\frac{1}{2}(L(s,\tau)+L(\tau,t))+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}g(s,t). \qquad (8)$$

Отметим, что уравнение (8) имеет решение $L(s,t)=g(s,t)=\frac{1}{4}\left(\frac{\varphi(t)}{\varphi(s)}+1\right)$

Другого решения (8) нам не известно.

Таким образом

$$\mathcal{M}_5^{[s,t]}=\left(\begin{array}{cc|cc} g(s,t) & g(s,t) & g(s,t) & g(s,t) \\ \frac{1}{2}-g(s,t) & 1/4 & \frac{1}{2}-g(s,t) & \frac{1}{2}-g(s,t) \end{array}\right), \qquad (9)$$

где $g(s,t)=\frac{1}{4}\left(\frac{\varphi(t)}{\varphi(s)}+1\right)$ с $-1\le\frac{\varphi(t)}{\varphi(s)}\le 1$ порождает КПС типа $(12|a)$.

3) Пусть

$$g(s,t)=\begin{cases}1/2, & \textit{если } s\le t<c\\ 1/4, & \textit{если } t\ge c,\end{cases} \qquad \text{где } c>0.$$

Тогда соответствующая матрица

$$\mathcal{M}_6^{[s,t]}=\begin{cases}\left(\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \text{если } s\le t<c\\ \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right), \text{если } t\ge c\end{cases} \qquad (10)$$

Утверждение ([2]). *Матрицы* $\mathcal{M}_i^{[s,t]}$, $i=3,5,6$, *определенные выше, порождают КПС типа* $(12|a)$. *Матрицы* $\mathcal{M}_4^{[n,m]}$, $n,m\in\mathbb{N}$, $n<m$ *порождают КПС с дискретным временем типа* $(12|a)$.

Литература

1. M. Ladra, U.A. Rozikov, Flow of finite-dimensional algebras. J. Algebra 470 (2017) 263–288.

2. Mamurov B.J., Rozikov U.A., Xudayarov S.S. Quadratic stochastic processes of type (σ|μ) Markov Processes Related Fields}. 2020. V. 26, No.5, p. 915-933.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА $(A,b)-$АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Хурсанов Ш.Я., Бахриддинова Х.У.
Ўзбекистон Миллий университети
shohruhmath@mail.ru, bahriddinovahilola1709@gmail.com

А.Садуллаев, Н.М.Жабборов и Т.У.Отабоев исследовали некоторые свойства $A-$ аналитических функций (см [1-3]). В этой статье мы рассматриваем более широкий класс, чем А-аналитические функции. Назовем этот класс классом $(A,b)-$аналитических функций.

Пусть $A,b-$антианалитическая, $\frac{\partial A}{\partial z}=\frac{\partial b}{\partial z}=0$ в области $D\subset\mathbb{C}$ такая, что $|A(z)|\le C<1,\ \forall z\in D.$ Положим

$$\bar{D}_{A,b}f(z)=\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}-A(z)\frac{\partial f(z)}{\partial z}-b(z)f(z).$$

Функция $f\in C^1(D)$ называется $(A,b)-$аналитической в D, если она удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}-A\frac{\partial f}{\partial z}=bf. \tag{1}$$

Тогда согласно (1) класс $(A,b)-$аналитических функций $f\in O_{A,b}(D)$ характеризуется тем, что $\bar{D}_{A,b}f=0.$

Теперь зафиксируем $z_0\in D$ и рассмотрим следующие функции

$$\psi(z,z_0)=z-z_0+\overline{\int\limits_{\gamma(z_0,z)}\bar{A}(\tau)d\tau} \tag{2}$$

и

$$\varphi(z,z_0)=e^{\overline{\int\limits_{\gamma(z_0,z)}\bar{b}(\tau)d\tau}} \tag{3}$$

где $\gamma(z_0,z)-$ гладкая кривая, соединяющая точек $z_0,z\in D.$

Отметим, что $\frac{\partial\psi(z)}{\partial z}=1,\frac{\partial\psi(z)}{\partial\bar{z}}=A(z),\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z}=0,\frac{\partial\varphi(z)}{\partial\bar{z}}=b(z)\varphi(z).$

Теорема 1 (Аналог теоремы Коши). Если $f\in O_{A,b}(D)\bigcap C(\bar{D}),$ где $D\subset\mathbb{C}-$ область со спрямляемой границей $\partial D,$ то

$$\int\limits_{\partial D}f(z)e^{-\overline{\int\limits_{\gamma(z_0,z)}\bar{b}(\tau)d\tau}}\left(dz+A(z)d\bar{z}\right)=0.$$

Теорема 2 (Формула Коши). Пусть $D\subset\mathbb{C}-$выпуклая область и $G\subset D-$произвольная подобласть, с кусочно гладкой границей ∂G. Тогда для любой функции $f(z)\in O_{A,b}(G)\bigcap C(\overline{G})$ имеет место формула

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{e^{\overline{\int\limits_{\gamma(\xi,z)}\overline{b(\tau)}d\tau}}f(\xi)}{\xi-z+\overline{\int\limits_{\gamma(z_0,\xi)}\overline{A(\tau)}d\tau}}\left(d\xi+A(\xi)d\overline{\xi}\right),\ \ z\in G.$$

Следствия 1. Если $f\in O_{A,b}(D)$ и то для произвольной точки $z_0\in D$ и $L(z_0,R)\subset D$ выполняется равенство

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{|\psi(\xi,z_0)|=r}f(\xi)e^{\overline{\int\limits_{\gamma(\xi,z_0)}\overline{b(\tau)}d\tau}}\left|d\xi+A(\xi)d\overline{\xi}\right|,\ \forall r<R.$$

Следствия 2. Если $f\in O_{A,b}(D)$ и то для произвольной точки $z_0\in D$ и $L(z_0,R)\subset D$ выполняется неравенство

$$\left|f(z_0)\right|\le\frac{e^{\frac{r\|b\|_{L(z_0,R)}}{1-C}}}{2\pi r}\int\limits_{|\psi(\xi,z_0)|=r}\left|f(\xi)\right|\left|d\xi+A(\xi)d\overline{\xi}\right|,\ \forall r<R.$$

Литература

1. Sadullaev A., Jabborov N.M. On a class of A-analitic functions // Siberian Federal University, Maths&Physics, 2016, Vol. 9(3), pp. 374-383.
2. Tishabaev Zh.K., Otaboyev T.U., Khursanov Sh.Y., Residues and argument principle for A(z)-analitic functions // Journal of mathematical sciences. 2020,Vol 345, No. 3, pp. 350-358
3. Жабборов Н.М., Отабоев Т.У. Аналог интегральной формулы Коши для A(z)-аналитических функций // Узбекский математический журнал, 2016, №4, ст. 50-59

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ УСЕЧЕННЫХ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТИПА ψ –МАРШО-АДАМАРА

Яхшибоев М. У.
Самаркандский филиала ТУИТ имени Мухамада Ал-Хоразимий

В статье [3] представлена обобщенная форма для дробных операторов типа Адамара, названных дробными операторами типа $\psi-$Адамара,

получены и доказаны важные свойства новых обобщенных операторов ψ – Адамара в обобщенном пространстве $L^p_{\psi,c}(a,b)$.

В работе получены интегральные представления усеченных смешанных дробных производных ψ –Маршо-Адамара и типа ψ –Маршо-Адамара в весовых пространствах Лебега.

Определение 1 ([3]). Пусть $\alpha>0, -\infty\le a<b\le\infty$ и $\mu\in\mathbf{C}$, и пусть функция φ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $\psi\in C^1([a,b])$ является положительной возрастающей функцией такой, что $\psi'(x)\neq 0$ для всех $x\in(a,b)$. Левосторонние и правосторонние дробные интегралы типа ψ – Адамара функции φ относительно другой функции ψ на отрезке $[a,b]$, с порядком α и параметром μ, определяются следующим образом:

$$\left(J^{\alpha,\psi}_{a+,\mu}\varphi\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\frac{\psi(t)}{\psi(x)}\right)^{\mu}\left(\ln\frac{\psi(x)}{\psi(t)}\right)^{\alpha-1}\varphi(t)\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}dt \text{ при } x>a, \qquad (1)$$

и

$$\left(J^{\alpha,\psi}_{b-,\mu}\varphi\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b\left(\frac{\psi(x)}{\psi(t)}\right)^{\mu}\left(\ln\frac{\psi(t)}{\psi(x)}\right)^{\alpha-1}\varphi(t)\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}dt \text{ при } x<b \qquad (2)$$

соответственно.

Определение 2. Пусть $0<\alpha<1, -\infty\le a<b\le\infty$ и $\mu\in\mathbf{C}$ и пусть функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $\psi\in C^1([a,b])$ является положительной возрастающей функцией такой, что $\psi'(x)\neq 0$ для всех $x\in(a,b)$. Левосторонние и правосторонние производные типа ψ –Адамара функции f относительно другой функции ψ на $[a,b]$, с порядком α и параметром μ, определяются следующим образом:

$$\left(D^{\alpha,\psi}_{a+,\mu}f\right)(x)=\frac{\psi^{1-\mu}(x)}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x(\psi(t))^{\mu}\left(\ln\frac{\psi(x)}{\psi(t)}\right)^{-\alpha}f(t)\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}dt,\ x>a$$

и

$$\left(D^{\alpha,\psi}_{b-,\mu}f\right)(x)=-\frac{\psi^{1+\mu}(x)}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_x^b(\psi(t))^{-\mu}\left(\ln\frac{\psi(t)}{\psi(x)}\right)^{-\alpha}f(t)\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}dt,\ x<b$$

соответственно.

Пусть $-\infty\le a<b\le\infty, c\in R$ и $1\le p\le\infty$ и пусть $L^p_{\psi,c}(a,b)$ пространство таких комплекснозначимых по Лебегу функций f определенных на $[a,b]$, т.е. $f:[a,b]\to\mathbf{C}$, для которых $\|f\|_{L^p_{\psi,c}(a,b)}<\infty$, где

$$\|f\|_{L^p_{\psi,c}(a,b)}=\left\|f;L^p_{\psi,c}\right\|=\left(\int_a^b\left|\psi(x)^c\,f(x)\right|^p\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}dx\right)^{\frac{1}{p}} \text{ при } 1\le p<\infty, c\in\mathbb{R}$$

и

$$\|f\|_{L^{\infty}_{\psi,c}(a,b)} = \left\| f; L^{\infty}_{\psi,c} \right\| = \operatorname*{ess\,sup}_{a\le x\le b} \left| \psi(x)^{c} f(x) \right| \text{ при } p=\infty, c\in\mathbb{R}.$$

Именно, рассмотрим операторы вида

$$\left(A^{\mu}_{\rho}\varphi\right)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t)\rho^{\mu t}\varphi\left(\psi^{-1}\left(\psi(x)\cdot\rho^{t}\right)\right)dt,\ \rho>0,\ x\in(a,b). \tag{3}$$

Лемма 1. Пусть $\varphi\in L^{p}_{\Psi,c}, 1\le p\le\infty, \mu, c\in\mathbb{R}$ и пусть $\psi\in C^{1}([a,b])$ является положительной возрастающей функцией такой, что $\psi'(x)\neq 0$ для всех $x\in(a,b)$ и $q_{\mu} := \int_{-\infty}^{\infty} |k(t)|\rho^{(\mu-c)t}dt < +\infty$. Тогда оператор A^{μ}_{ρ} ограничен в $L^{p}_{\Psi,c}$ и

$$\left\|A^{\mu}_{\rho}\varphi; L^{p}_{\Psi,c}\right\| \le q_{\mu}\left\|\varphi; L^{p}_{\Psi,c}\right\| .$$

Следствие 1. Пусть $\varphi\in L^{p}_{\Psi,c}, 1\le p\le\infty, \mu, c\in\mathbb{R}$, $\mu\ge c$ и пусть $\psi\in C^{1}([a,b])$ является положительной возрастающей функцией такой, что $\psi'(x)\neq 0$ для всех $x\in(a,b)$. Если $k(t)\equiv 0$ при $t<0$, тогда условие $k(t)\in L^{1}(\mathbb{R}_{+})$ достаточно для ограниченности оператора (3) в пространстве $L^{p}_{\psi,c}$ при $0<\rho<1$,

$$\left\|A^{\mu}_{\rho}\varphi; L^{p}_{\psi,c}\right\| \le \left\|k; L^{1}(\mathbb{R}_{+})\right\|\left\|\varphi; L^{p}_{\psi,c}\right\|.$$

Теорема 1. Пусть $f(x) = \left(J^{\alpha,\psi}_{a+,\mu}\varphi\right)(x)$, $\varphi\in L^{p}_{\psi,c}$, где $0<\alpha<1, 1\le p<\infty$, $\mu\ge 0, c\in\mathbb{R}, \mu>c$ и $0<\rho<1$ и пусть $\psi\in C^{1}([a,b])$ является положительной возрастающей функцией такой, что $\psi'(x)\neq 0$ для всех $x\in(a,b)$. Тогда усеченная дробная производная $\left(D^{\alpha,\psi}_{a+,\mu}f\right)(x)$ имеет следующее интегральное представление

$$\left(D^{\alpha,\psi}_{a+,\mu;1-\rho}f\right)(x) = \int_{0}^{r(x,\rho)} K^{+}_{\alpha,\mu}(t,\rho)\varphi\left(\psi^{-1}\left(\psi(x)\rho^{t}\right)\right)dt,$$

где $r(x,\rho) = \dfrac{1}{\ln\dfrac{1}{\rho}}\ln\dfrac{\psi(x)}{\psi(a)}$,

$$K^{+}_{\alpha,\mu}(t,\rho) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{\rho^{\mu t}}{t}\left[(\alpha\Gamma\left(-\alpha,\mu\ln\frac{1}{\rho}\right)+\Gamma(1-\alpha))\left(\mu\ln\frac{1}{\rho}\right)^{\alpha}t_{+}^{\alpha}-(t-1)_{+}^{\alpha}\right],$$

$K^{+}_{\alpha,\mu}(t,\rho)\in L^{1}(\mathbb{R})$ и $K^{+}_{\alpha,\mu}(t,\rho)>0$ при $t>0$ (см. [2], с. 8).

Следствие 1. Пусть $f(x) = \left(J^{\alpha,\psi}_{a+}\varphi\right)(x)$, $\varphi\in L^{p}_{\psi,c}$, где $0<\alpha<1, 1\le p<\infty$, $c\in\mathbb{R}$, $c<0$ и $0<\rho<1$, пусть $\psi\in C^{1}([a,b])$ является положительной

возрастающей функцией такой, что $\psi'(x)\neq 0$ для всех $x\in(a,b)$. Тогда усеченная дробная производная $\left(D^{\alpha,\psi}_{a+,\mu}f\right)(x)$ имеет следующее интегральное представление

$$\left(D^{\alpha,\psi}_{a+;1-\rho}f\right)(x)=\int_0^{r(x,\rho)}K^+_\alpha(t)\varphi\left(\psi^{-1}\left(\psi(x)\rho^t\right)\right)dt,$$

где ядро

$$K^+_\alpha(t)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[t_+^\alpha-(t-1)_+^\alpha\right]\in L_1(\mathbb{R}) \tag{4}$$

является усредняющим $\int_0^\infty K^+_\alpha(t)dt=1$ и $K^+_\alpha(t)>0$ (см. **[**3**]**, с. 105).

Следствие 2. Пусть $\psi(x)=x$, $f(x)=\left(J^\alpha_{a+}\varphi\right)(x)$, $\varphi\in L^p_c(a,b)$, где $0<\alpha<1$, $1\le p<\infty$, $c\in\mathbb{R}$, $c<0$ и $0<\rho<1$. Тогда

$$\left(D^{\alpha}_{a+;1-\rho}f\right)(x)=\int_0^{\frac{1}{\ln\frac{1}{\rho}}\ln\frac{x}{a}}K^+_\alpha(t)\varphi\left(x\rho^t\right)dt,$$

где $K^+_\alpha(t)$ – ядро (4).

Литература

1. Килбас А.А., Титюра А.А. Дробная производная типа Маршо-Адамара и обращение дробных интегралов типа Адамара. Доклады НАН Беларуси. — 2006. — Т. 50, № 4. — С. 5–10.
2. Самко С. Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: «Наука и техника», 1987. — 688 с.
3. Fahad H.M., Rehman M., Siddiqi M. New $\psi-$Hadamard-type fractional and derivatives // Classical Analysis and ODEs J. —2019. — Vol. 1. —P. 1-21.

PIFAGOR VA EYLER G‘ISHTLARI

[1]Abdullayev J.I., [2]Ibragimov H.H
[1]Samarqand davlat universiteti,
[2]Denov tadbikorlik va pedagogika instituti

Qadimda matematikaga doir ishlarda (3,4,5) Pifagor uchligi ma’lum bo‘lib, uning yordamida to‘g‘ri burchaklarni yasashgan.

Vitruviy bu uchlikni matematikaning oliy yutug‘i deb, Platon esa birdamlik ramzi sifatida talqin qilgan. Me’morchilikda qadimgi Messopotamiya qabr toshlarida ikkita 9, 12 va 15 o‘lchamli uchburchaklardan tuzilgan teng yonli

uchburchak uchraydi. Firavn Snofru piramidalari 20, 21 va 29 hamda 18, 24 va 30 o‘lchamli uchburchaklardan foydalanib qurilgan.

Shu bilan birga yaqin o‘tmishda ham Pifagor sonlari, Pifagor taxtasi, Pifagor g‘ishti, Eyler g‘ishti kabi tushunchalar bilan ko‘plab matematiklar shug‘ullanishgan [1] - [5]. Biz Pifagor uchligi, Pifagor taxtasi, Pifagor g‘ishti, Eyler g‘ishti, Pifagor uchliklari sinfi, bu sinfni yaratuvchilari kabi tushunchalar bilan ishlaymiz. Bu mavzuda biz Pifagor uchliklari sinfi yaratuvchisi yordamida boshqa sinf yaratuvchisini qurish usulini bayon qilamiz.

Pifagor sonlari haqida juda ko‘p ma’lumotlar bo‘lsada, bu sonlarni o‘rganish jarayonida yangi va qiziqarli ma’lumotlarga duch kelaveramiz. Bu sonlar haqida ko‘pchilik tushunchaga ega va ulardan kundalik hayotda ko‘p foydalanamiz.

1-ta’rif. *Agar butun musbat a, b va c sonlari uchun $a^2 + b^2 = c^2$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, $(a, b; c)$ uchlikka Pifagor uchligi deyiladi. Bu holda tomonlari a va b bo‘lgan to‘g‘ri burchakli to‘rtburchak Pifagor taxtasi deyiladi.[1]*

2-ta’rif. *Xuddi shunday a, b, c va d butun musbat sonlari uchun $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, $(a, b, c; d)$ ga Pifagor to‘rtligi deyiladi. Bu holda qirralari a, b va c bo‘lgan to‘g‘ri burchakli parallelepiped Pifagor g‘ishti deyiladi.*

Yuzasi eng kichik bo‘lgan Pifagor taxtasiga mos Pifagor uchligi $-$ bu $(3{,}4; 5)$ dir. Hajmi eng kichik bo‘lgan Pifagor g‘ishtiga $(1{,}2{,}2; 3)$ Pifagor to‘rtligi mos keladi. Pifagor uchligi $(a, b; c)$ ning a va b sonlari Pifagor taxtasining tomonlari bo‘lganligi uchun ularni a va b tomonlar deb ham ishlatadilar, c ni esa gipotenuza deb ham atashadi.

Agar aksi aytilmagan bo‘lsa, $(a, b; c)$ Pifagor uchligida $a < b$ deb tushunamiz. Ravshanki, agar $(a, b; c)$ Pifagor uchligi bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ uchun $(na, nb; nc)$ ham Pifagor uchligi bo‘ladi. Xuddi shunga o‘zshash tasdiq Pifagor to‘rtligi uchun ham o‘rinli.

3-ta’rif. *Agar $(a, b; c)$ va $(a_1, b_1; c_1)$ Pifagor uchliklari uchun shunday $n \in \mathbb{N}$ mavjud bo‘lib, $a_1 = na$, $b_1 = nb$ tengliklar o‘rinli bo‘lsa, u holda $(a, b; c)$ va $(a_1, b_1; c_1)$ Pifagor uchliklari bir sinfga qarashli deyiladi.*

4-ta’rif. *Agar* o *sinfga qarashli $(a, b; c)$ Pifagor uchligining a va b tomonlari o‘zaro tub bo‘lsa, $(a, b; c)$ Pifagor uchligiga shu sinfning yaratuvchisi deyiladi.*

Masalan, $(3{,}4; 5)$ Pifagor uchligi

$$\text{o} = \{(3{,}4; 5), (6{,}8; 10), (9{,}12; 15), \dots, (3n, 4n; 5n), \dots\} \quad (1)$$

sinfni $(5{,}12; 13)$ Pifagor uchligi esa

$$\text{ж} = \{(5{,}12; 13), (10{,}24; 26), (15{,}36; 39), \dots, (5n, 12n; 13n), \dots\}$$

sinfni yaratuvchisi bo‘ladi.

Ma’lumki, istalgan $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$ sonlari yordamida hosil qilingan

$$a = n^2 - m^2, \quad b = 2nm, \quad c = n^2 + n^2 \quad (2)$$

$(a, b; c)$ uchlik Pifagor uchligini hosil qiladi. (2) formula yordamida istalgan Pifagor uchligini hosil qilish mumkin [2].

Endi bir Pifagor uchligi berilgan bo‘lsa, u yordamida yangi Pifagor uchligini hosil qilish usulini bayon qilamiz.

1-teorema. *Bizga* $(a,b;c)$ *Pifagor uchligi berilgan bo‘lsin. U holda quyidagi*

$$a_1 = 2a + b + 2c, \quad b_1 = a + 2b + 2c, \quad c_1 = 2a + 2b + 3, \qquad (3)$$

tengliklar yordamida aniqlangan $(a_1, b_1; c_1)$ uchlik Pifagor uchligi bo‘ladi.

Bu teoremani $(a_1, b_1; c_1)$ uchlikka qo‘llab, yangi $(a_2, b_2; c_2)$ Pifagor uchligini hosil qilamiz. Shunday qilib bir Pifagor uchligi berilsa, u yordamida cheksiz ko‘p Pifagor uchliklarini hosil qilish mumkin.

Faraz qilaylik, $(a,b;c)$ Pifagor uchligidan, 1-teoremani qo‘llab yangi $(a_1, b_1; c_1)$ Pifagor uchligini hosil qilgan bo‘laylik. 1-teoremadagi (3) formuladan ko‘rinadiki Pifagor uchligining tomonlari orasidagi farq saqlanadi, ya’ni $b - a = b_1 - a_1$ tenglik o‘rinli. $(3{,}4; 5)$ Pifagor uchligi (1) bilan aniqlangan o sinfning yaratuvchisi va $b - a = 1$. Shunday ekan biz quyidagi natijaga kelamiz.

2-teorema. $(3{,}4; 5)$ *Pifagor uchligidan (3) formula yordamida hosil qilingan*

$$(20{,}21{,}29),\ (119{,}120{,}160),\ (696{,}697{,}985), \ldots$$

Pifagor uchliklarining barchasi biror sinfning yaratuvchi Pifagor uchligi bo‘ladi.

3-teorema. *Bizga* $(a,b;c)$ *Pifagor taxtasi (uchligi) berilgan bo‘lsin. U holda quyidagi*

$$a_1 = c - a, \quad b_1 = c - b, \quad c_1 = a + b - c, \quad d_1 = 2c - a - b, \qquad (4)$$

tengliklar yordamida aniqlangan $(a_1, b_1, c_1; d_1)$ to‘rtlik Pifagor g‘ishtining qirralari va diagonali bo‘ladi.

Masalan, $(3{,}4; 5)$ Pifagor taxtasidan 3-teoremadagi (4) formula yordamida hosil qilingan $(a_1, b_1, c_1; d_1)$ Pifagor g‘ishtining qirralari va diagonali quyidagi sonlar bo‘ladi:

$$a_1 = 2, \quad b_1 = 1, \quad c_1 = 2, \quad d_1 = 3.$$

Quyida biz 3-teorema yordamida hosil qilingan Pifagor taxtalariga mos Pifagor g‘ishtlarining dastlabki 5 tasini keltiramiz:

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \qquad 2^2 + 1^2 + 2^2 = 3^2$$
$$20^2 + 21^2 = 29^2 \qquad 9^2 + 8^2 + 12^2 = 17^2$$
$$119^2 + 120^2 = 160^2 \qquad 40^2 + 41^2 + 79^2 = 81^2$$
$$696^2 + 697^2 = 985^2 \qquad 288^2 + 289^2 + 408^2 = 577^2$$
$$4059^2 + 4060^2 = 5741^2 \qquad 1681^2 + 1682^2 + 2378^2 = 3363^2.$$

Ba’zi maqolalarda a va b lar o‘zaro tub bo‘lsa, u holda ulardan biri albatta tub son bo‘lishi kerak degan taxminni ilgari surishgan. Quyidagi teorema ko‘rsatadiki bu tasdiq noto‘g‘ri.

4-teorema. *Agar* $(a,b;\ c)$ *Pifagor uchligi bo‘lsa, u holda ixtiyoriy* r *butun son uchun quyidagi:*

$$a_1 = a[(br)^2 - c^2], \quad b_1 = b[(br)^2 - c^2(2r-1)], \quad c_1 = c[c^2 + (r^2 - 2r)b^2]$$

musbat sonlar ham Pifagor uchliklari bo‘ladi.

Xususan $r = 0$ bo‘lsa, u holda

$$a_1 = a \cdot c^2, \quad b_1 = b \cdot c^2, \quad c_1 = c \cdot c^2$$

Agar $r = 1$ bo‘lsa, u holda

$$a_1 = a \cdot a^2, \quad b_1 = b \cdot a^2, \quad c_1 = \mathrm{c} \cdot a^2$$

Agar $r = 2$ bo‘lsa, u holda

$$a_1 = a \cdot (4b^2 - c^2), \quad b_1 = b \cdot (4b^2 - 3c^2), \quad c_1 = \mathrm{c} \cdot c^2$$

4-teoremadan kelib chiqadigan natija.

Natija. *Agar* $(a_1, b_1;\ c_1)$ *lar Pifagor uchliklari bo’lsa, u holda ixtiyoriy* p *butun son uchun quyidagi*

$a_2 = a_1((b_1 p)^2 - c_1^2),\ b_2 = b_1((b_1 p)^2 - c_1^2(2p - 1)),\ c_2 = c_1(c_1^2 + (p^2 - 2p)b_1^2)$

sonlarlar ham Pifagor uchliklari bo’ladi, ya’ni

$$a_2^2 + b_2^2 = c_2^2.$$

Endi Eyler g‘ishtlari haqida.

5-ta’rif. *Agar butun musbat* e, l, r *sonlari uchun*

$$e^2 + l^2 = d_{el}^2, \quad l^2 + r^2 = d_{lr}^2 \quad r^2 + e^2 = d_{re}^2,$$

tengliklar o‘rinli bo‘lib, d_{el}, d_{lr}, d_{re} sonlari ham butun bo‘lsa, u holda qirralari e, l, r bo‘lgan to‘g‘ri parallelepiped Eyler g‘ishti, (e, l, r) uchlikka Eyler uchligi deyiladi [2].

Masalan, hajmi minimal bo‘lgan Eyler g‘ishti tomonlari $117, 44, 240$.

$$117^2 + 44^2 = 125^2,$$
$$117^2 + 240^2 = 276^2,$$
$$44^2 + 240^2 = 244^2.$$

Quyida Eylerning o’zi tomonidan keltirilgan Eyler g‘ishtlarini qurishning 1-chi va 2-chi parametrik tenglamalarini keltiramiz (5 va 6-teoremalarga qarang).

5-teorema. *Agar* $(a, b;\ c)$ *Pifagor uchligi bo‘lsa, u holda*

$$x = a(4b^2 - c^2),$$
$$y = b(4a^2 - c^2),$$
$$z = 4abc$$

musbat x, y, z sonlari Eyler g‘ishtining qirralari bo‘ladi.

Bu yerda $a = 3, b = 4, c = 5$ deyilsa,

$$x = 3(64 - 25) = 3 \cdot 39 = 117,$$
$$y = 4(4 \cdot 9 - 5^2) = 4(36 - 25) = 44,$$
$$z = 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 12 \cdot 20 = 240$$

ni olamiz.

Quida Pifagor uchliklariga mos Eyler g‘ishtlari keltirilgan:

$$(5{,}12; 13) \to (2035, -828{,}3120),$$
$$(15{,}8; 17) \to (-495{,}4888{,}8160),$$
$$(7{,}24; 25) \to (11753, -10296{,}16800),$$
$$(20{,}21; 29) \to (15939{,}48460{,}48720),$$
$$(9{,}40; 41) \to (42471, -54280{,}59040).$$

Ma’lumki, Eyler g‘ishtlari juft-juft bo’ladi. Bu formulada a va b sonlar joyini almashtirib yangi Eyler g‘ishtlarini olish mumkin.

Eyler g‘ishtlarini qurishning 2-parametrik tenglamasi.

6-teorema. *Agar* $(a, b;\ c)$ *Pifagor uchligi bo‘lsa, u holda*

$$x = \frac{1}{2}\, c^2(2a^2 - 2b^2 + 3ab),$$
$$y = \frac{1}{8}\, ab(-12a^2 + 12b^2 + 7ab),$$
$$z = \frac{1}{4}\, bc(8a^2 - 3b^2 + 2ab)$$

musbat x, y, z sonlari Eyler g‘ishtining qirralari bo‘ladi.

Bu yerda $a = 3, b = 4, c = 5$ deyilsa,

$x = \frac{1}{2} \cdot 25(2 \cdot 9 - 2 \cdot 16 + 3 \cdot 3 \cdot 4) = \frac{1}{2} \cdot 25(18 - 32 + 36) = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 22 = 275,$

$y = \frac{1}{8} \cdot 3 \cdot 4(12 \cdot 9 - 12 \cdot 16 + 7 \cdot 3 \cdot 4) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (12 \cdot 7 + 7 \cdot 12) = 3 \cdot 12 \cdot 7 = 252,$

$z = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 5 \cdot (8 \cdot 9 - 3 \cdot 16 + 2 \cdot 3 \cdot 4) = 5 \cdot (72 - 48 + 24) = 5 \cdot 48 = 240$

ni olamiz.

$$(5{,}12; 13) \to (4901{,}7560, -4368).$$

Quyida Eyler g‘ishtini topishning yana bir usulini keltiramiz:

7-teorema. *Agar p va q butun sonlar bo‘lsa, u holda*

$$e = 2(p^2 + pq - q^2)(4pq - p^2 + q^2)(p^2 + q^2)^2,$$
$$l = 4pq(p^2 + pq - q^2)(p^2 + q^2)(3pq - 2p^2 + 2q^2),$$
$$r = pq(3p^2 + 2pq - q^2)(p^2 + 2pq - 3q^2)(3pq - 2p^2 + 2q^2)$$

musbat (nolmas) e, l, r sonlari Eyler g‘ishtining qirralari bo‘ladi.

8-teorema. *Bizga Pifagor taxtasi* $(a, b; c)$ *berilgan bo‘lsin,* a *toq bo‘lganda,*

$$e = 2(2b + a)(2a - b)c^2,$$
$$l = ac(2b + a)(3a - 4b), \qquad (5)$$
$$r = a(3b^2 + 4ab)(3a/2 - 2b)$$

musbat (e, l, r) sonlari Eyler g‘ishtining qirralarini beradi.

Masalan, $a = 3, b = 4, c = 5$ bo’lganda Eyler g‘ishtining qirralarini hamda diagonallarini toping.

Yechish, buning uchun (5) formuladan foydalanamiz:

$$e = 2(2b + a)(2a - b)c^2 = 2 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 25 = 1100,$$

$$l = ac(2b + a)(3a - 4b) = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot (-7) = -1155,$$

$$r = a(3b^2 + 4ab)(3a/2 - 2b) = 3 \cdot 96 \cdot (-\frac{7}{2}) = -1008,$$

$$d_{el} = c(2b + a)[(2a - b)^2 + c^2] = 5 \cdot 11 \cdot 29 = 1595,$$

$$d_{lr} = a[(2b + a)^2 + c^2][3a/2 - 2b] = 3 \cdot (121 + 25) \cdot (-\frac{7}{2}) = 1533,$$

$$d_{re} = 2[((2a - b)(b + a/2))^2 + c^4] = 2(121 + 625) = 1492.$$

Adabiyotlar

1. A. A'zamov. Eyler g'ishtlari. Fizika, matematika va informatika. 2012.№1, 52-56.
2. R. Spira. The diophantine equation. Amer. Math. Monthly.1962. T. 69. C. 360-365.
3. Иэн Стюарт. Величайшие математические задачи. М: Альпина нон-фикшн, 2016. 460 с.
4. B.D. Sokolowsky, A. G. Van Hooft, R. M. Volkert, C. A. Reiter. Math. Comp. 83(2014), №. 289, P. 2441—2454.
5. А.В.Ворон. Способ получения эйлеровых параллелепипедов на основе значений котангенса пифагоровых троек «Академия Тринитаризма», М., публ. 25656, 17.08. 2019.

R_2^1 - Yarim Yevklid Tekisligidagi Ikkinchi Tartibli Chiziqlar

Abdusaidov S., G'afforov J
JDPI
dilshod_quralov@mail.ru

Ushbu maqolada yarim yevklid tekisligidagi ikkinchi tartibli chiziqlar o'rganilgan.

Ikkinchi tartibli chiziqlar tushunchasi yevklid tekisligida yetarlicha o'rganilgan bo'lsada, noyevklid tekisliklardagi metrikalar asosida yangicha ta'rif berish hamda analitik ifodalarni keltirib chiqarish yangi ishdir. Chunki ellipsga, giperbolaga va parabolaga yevklid ma'nosida berilgan ta'riflar bo'yicha ularni yarim yevkilid tekisligidagi ko'rinishlarini o'rganib bo'lmaydi.

1-ta'rif. R_2^1- yarim yevklid tekisligi A_2- affin tekislik bo'lib, bu tekislikda $\bar{a}(a_1,a_2)$ va $\bar{b}(b_1,b_2)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi

1. $(\bar{a}\bar{b})_1 = a_1b_1$, agar $(\bar{a}\bar{b})_1 = 0$ bo'lsa,
2. $(\bar{a}\bar{b})_2 = a_2b_2$

songa teng. Shuningdek, $A(x_1,y_1)$ va $B(x_2,y_2)$ nuqtalar orasidagi masofa $|\overline{AB}|$ vektor uzunligiga tengdir [1].

2-ta'rif. O'zaro kesishuvchi a va b to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak, markazi shu to'g'ri chziqlarning kesishgan nuqtasida bo'lgan birlik aylana yoyi uzunligiga tengdir.

3-ta'rif. Ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasidan oldindan berilgan A va B nuqtalarigacha bo'lgan masofalar yig'indisi $MA+MB=AB$ shartni qanoatlantiruvchi hamda

$\angle MAB$ va $\angle MBA$ burchaklar ko‘paytmasi o‘zgarmas songa teng bo‘lgan nuqtalar to‘plamining geometrik o‘rniga yarim yevklid tekiligidagi ellips deb ataladi.

Ellips tenglamasini keltirib chiqarish uchun koordinatalar sistemasini qulay ko’rinishda kiritamiz. Berilgan A va B nuqtalar orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqni absissalar o‘qi deb, $[AB]$ kesmaning o‘rta perpendikulyar to‘g‘ri chizig‘ini ordinatalar o‘qi deb qabul qilamiz. Bu erda Ox- o‘q yarim yevkilid to‘g‘ri chizig’i, Oy-o‘qi esa yevkilid to‘g‘ri chizig’idir. U holda kiritilgan koordinatalar sistemasiga nisbatan berilgan nuqtalar $A(-a,0)$ va $B(a,0)$ ko‘rinishdagi koordinatalarga ega bo‘ladi. Shuningdek, bu erda $\angle MAB$ va $\angle MBA$ burchaklar yarim yevklid ma’nosidagi o‘zaro teng burchaklardir.

Yarim yevklid tekisligiga hamda bu tekislikdagi burchakka berilgan yuqoridagi ta’rifga asosan: $AB = 2a$, $(\angle MAB)\cdot(\angle MBA) = \dfrac{b^2}{a^2}$ larga ega bo’lamiz. U holda $A(-a,0)$ va $B(a,0)$ nuqtalardan foydalanib, $\overline{AB}$ va bu vektor yo’nalishidagi $\overline{AB}_1$ birlik vektorlarni aniqlash mumkin. Ya’ni,

$$\overline{AB}(2a,0) \Rightarrow \overline{AB_1}(1,0)$$

$$\overline{AM}(x+a, y) \Rightarrow \overline{AM}_1\left(1, \frac{y}{x+a}\right)$$

U xolda $\angle MAB = |B_1M_1| = \dfrac{y}{x+a}$. Shuningdek, $\overline{BM}$ va $\overline{BA}$ vektorlarning birlik vektorlari

$$\overline{BM}(x-a, y) \Rightarrow \overline{BM}_2\left(1, \frac{y}{x-a}\right), \quad \overline{BA}(-2a,0) \Rightarrow \overline{BA_2}(1,0)$$

$$M_2\left(1, \frac{y}{x-a}\right), A_2(1,0)$$

ko‘rinishdagi koordinatalarga ega bo‘ladilar. U holda $\angle MBA$ burchak $\angle MBA = |A_2M_2| = \dfrac{y}{x-a}$ ga teng bo‘ladi. Tarifga ko‘ra

$$\frac{y}{a-x}\cdot\frac{y}{a+x} = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Oxirgi tenglama yarim Yevklid tekisligilagi ellips tenglamasidir. Yarim yevklid tekisligi yuqorida ta’kidlaganimizdek, affin tekislik bo’lganligi uchun ellipsning affin xossalari yarim yevklid tekisligida ham o’rinli bo’ladi [2].

4-ta’rif. Ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasidan oldindan berilgan A va B nuqtalarigacha bo‘lgan masofalar ayirmasi $MA - MB = AB$ shartni qanoatlantiruvchi hamda $\angle MAB$ va $\angle MBA$ burchaklar ko‘paytmasi o‘zgarmas songa teng bo‘lgan nuqtalar to‘plamining geometrik o‘rniga yarim yevklid tekiligidagi giperbola deb ataladi.

Giperbola tenglamasini keltirishda yuqoridagi belgilashlardan hamda kiritilgan koordinatalar sistemasidam foydalansak, giperbola tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

ko'rinishda bo'ladi. Yarim yevklid tekisligida, yarim yevklid ma'nosidagi hamda yevklid (maxsus) ma'nosidagi yo'nalishlar mavjud bo'lganligi uchun bu tekislikda giperbolalarning maxsus sihfi mavjud. Aniqroq aytganda, yarim yevklid tekisligidagi harakat bilan hozirgina ta'rifi keltirilgan giperbolani quyida keltiriladigan maxsus giperbolaga o'tkazib bo'lmaydi. Ya'ni R_2^1 da giperbolalar ikki xil bo'ladi [3].

**5–ta`rif.** $R_2^1$- tekisligidagi maxsus giperbola deb, shunday nuqtalar to`plamiga aytiladiki, bu to`plamga tegishli ixtiyoriy nuqta radius vektori bilan absissalar o`qi orasidagi burchakni shu radius vektor uzunligi kvadratiga ko`paytmasi o`zgarmas songa teng.

$M(x,y)$ ta'rifda keltirilgan ixtiyoriy nuqta bo'lsin. U holda uning radius vektori uzunligini kvadrati $\left|\overline{OM}\right|^2=x^2$, shuningdek $\overline{OM}$ vektor bilan absissalar o`qi orasidagi burchak $\angle\left(Ox,\overline{OM}\right)=\frac{y}{x}$ ga teng bo`ladi. U holda ularning ko`paytmasi

$$\frac{y}{x}\cdot x^2=k=const,\quad xy=k.$$

Oxirgi tenglik yarim yevklid tekisligidagi maxsus giperbola tenglamasidir.

**6-ta`rif.** Ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqta radius vektori $\overline{OM}$ bilan absissalar o`qi orasidagi burchagi kvadratini radius vektor $\left|\overline{OM}\right|$ uzunligiga ko`paytmasi o`zgarmas bo`lgan nuqtalar to`plamining geometrik o`rniga yarim yevklid tekisligidagi parabola deb ataladi.

Odatdagidek, yuqoridagi belgilashlardan va yuqorida kiritilgan koordinatalar sistemasidan foydalanamiz. $\angle\left(\overline{OM},Ox\right)=\frac{y}{x}$ ga uning kvadrati esa $h=\frac{y^2}{x^2}$ ga, shuningdek $\left|OM\right|=x$ eksnligini hisobga olsak, u holda ta`rifga ko`ra ularni ko`paytmasi

$$\frac{y^2}{x^2}\cdot x=2p=const\Rightarrow y^2=2px.$$

Oxirgi tenglama yarim yevklid tekisligidagi parabola tenglamasidir.

Adabiyotlar

1. А. Артыкбаев., Д.Д. Соколов. Геометрия в целом в плоском пространстве-времени. Ташкент. "ФАН". 1991.
2. Yuzbasi Z.K., Yoon D.W. On geometry of isophote curves in Galilean space. AIMS Mathematics, 6(1) (2020), pp. 66-76.

QO'ZG'ALISHI BIR O'LCHAMLI BO'LGAN DISKRET SHRÖDINGER OPERATORINING REZOLVENTASI

[1]Axralov H.Z., [2]Madatova F.A., [3]Qurbonov O.I.
[1,3]Toshkent davlat texnika universiteti,
[2]O'zbekiston milliy universiteti

Panjara operatorlarining spektral muammolari yuz yillardan buyon matematiklarda katta qiziqish uyg'otdi. Qattiq jismlar fizikasi modellarida, hamda panjaradagi maydonlar nazariyasi muammolarini o'rganish, bir zarracha va ko'p zarrachali diskret Shrödinger operatorlarini o'rganish muhim sanaladi.

$\mathbf{T}^d \equiv (-\pi;\pi]^d$ $(d \geq 1)$ d-o'lchamli tor bo'lsin.

Bir zarrachali diskret Shrödinger operatorining kvaziimpuls tasviri $L^2(\mathbf{T}^d)$-$\mathbf{T}^d$ da kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalarning Hilbert fazosida quyidagicha tasir etadi:

$$H = H_0 - V,$$

bunda H_0 operator $\mathbf{T}^d$ torda shartli manfiy aniqlangan haqiqiy qiymatli uzluksiz $e(p)$ funksiyaga ko'paytirish operatori:

$$(H_0 f)(p) = e(p) f(p), \quad f \in L^2(\mathbf{T}^d),$$

V esa rangi birga teng integral operator:

$$(Vf)(p) = \frac{\lambda}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{T}^d} \varphi(p) \cdot \overline{\varphi(q)} \cdot f(q) dq, \quad f \in L^2(\mathbf{T}^d), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$e(p)$ funksiya uzluksiz funksiya va V kompakt operator bo'lgani sababli, H operator o'z-o'ziga qo'shma va chegaralangan operator bo'ladi ([1] ga qarang).

Ta'rif. *Berilgan* $\varepsilon(\cdot): \mathbf{T}^d \to \mathbb{C}$ *funksiya* $\forall n \in \mathbf{N}$ *(*$\mathbf{N}$*-natural sonlar to'plami),* $\forall p_1, p_2, ..., p_n \in \mathbf{T}^d$ *va* $z = (z_1, z_2, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n \left(\sum_{i=1}^{n} z_i = 0 \right)$ *uchun quyidagi tengsizlikni*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon(p_i - p_j) z_i \overline{z_j} \leq 0$$

qanoatlantirsa, $\varepsilon(\cdot)$ *shartli manfiy aniqlangan funksiya deyiladi.*

Misol. Standart diskret Laplasianga mos dispersion funksiya

$$\varepsilon(p) = \sum_{i=1}^{n} (1 - \cos p_i)$$

formula bilan aniqlanadi va shartli manfiy aniqlangan.

V integral operatorning rangi birga teng bo'lgani sababli Veylning muhim spektr turg'unligi haqidagi teoremasiga asosan quyidagi tasdiq o'rinli

Tasdiq. *H operatorning muhim spektri uchun quyidagi munosabat o'rinli*

$$\sigma_{ess}(H) = \sigma_{ess}(H_0) = \sigma(H_0) = [e_{\min}, e_{\max}],$$

bunda

$$e_{\min}=\min_{p\in\mathbf{T}^d}e(p),\ e_{\max}=\max_{p\in\mathbf{T}^d}e(p).$$

Har qanday $\lambda\in\mathbb{R}$ uchun H operatorning Fredgolm determinantini z o'zgaruvchining funksiyasi sifatida quyidagicha aniqlaymiz:

$$\Delta(\lambda;z)=1-\frac{\lambda}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{T}^d}\frac{|\varphi(q)|^2}{e(q)-z}dq,\qquad z\in\mathbb{C}\setminus[e_{\min};e_{\max}].$$

Lemma. *$z\in\mathbb{C}\setminus[e_{\min};e_{\max}]$ bo'lsin. $z\in\sigma_\alpha(H)$ bo'lishi uchun $\Delta(\lambda;z)=0$ bo'lishi zarur va yetarli, bunda $\sigma_\alpha(H)$ - H operatorning diskret spektri.*

H o'z-o'ziga qo'shma va chegaralangan, hamda $\sigma_{ess}(H)=[e_{\min},e_{\max}]$ bo'lgani sababli H ning diskret spektri (agar mavjud bo'lsa) ushbu $(-\infty,e_{\min})\cup(e_{\max},+\infty)$ da yotadi.

Quyidagi qiymatlarni kiritamiz

$$\lambda_m=\left(\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbf{T}^d}\frac{\varphi^2(q)dq}{e(q)-e_{\min}}\right)^{-1}$$

va

$$\lambda_M=\left(\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbf{T}^d}\frac{\varphi^2(q)dq}{e(q)-e_{\max}}\right)^{-1}.$$

Ko'rish mumkinki $\lambda_m\ge 0\ge\lambda_M$.

Teorema 1. *H operatorning ko'pi bilan bitta xos qiymati bo'ladi,*

a) $\lambda>\lambda_m$ bo'lsa, H ning $(-\infty,e_{\min})$ oraliqda yagona bir karrali xos qiymati mavjud;

b) $\lambda_m\ge\lambda\ge\lambda_M$ H ning xos qiymati yo'q;

c) $\lambda<\lambda_M$ bo'lsa, H ning $(e_{\max},+\infty)$ oraliqda yagona bir karrali xos qiymati mavjud.

Teorema 2. *H operatorning rezolventasi quyidagiga teng:*

$$R(z)f(p)=\frac{f(p)}{e(p)-z}+\frac{\lambda}{\Delta(\lambda;z)}\frac{\varphi(p)}{(2\pi)^d\cdot(e(p)-z)}\int_{\mathbf{T}^d}\frac{\varphi(q)f(q)dq}{e(q)-z},\quad f\in L^2(\mathbf{T}^d),$$

bunda $z\in\rho(H)=\mathbb{C}\setminus\sigma(H)$ va $\sigma(H)$ esa H operatorning spektri.

Adabiyotlar

1. Rid M., Saymon B. "Metody sovremennoy matematicheskoy fiziki T.1. Funksionlaniy analiz. M.: Mir. 1977.
2. Rid M., Saymon B. "Metody sovremennoy matematicheskoy fiziki T.4. Analiz operatorov. M.: Mir. 1982.
3. J.I.Abdullayev, R.N.G'anixo'jayev, M.H.Shermatov, O.I.Egamberdiyev. "Funksional analiz va integral tenglamalar" Toshkent "Yangi asr avlodi" 2013.

EVIDENT FORMS OF ELEMENTS OF THE ORTHOGONAL GROUP OF THE TWO-DIMENSIONAL BILINEAR-METRIC SPACE WITH THE FORM $x_1y_1 + 11x_2y_2$ OVER THE FIELD OF RATIONAL NUMBERS

Beshimov G., Khadjiev D., Gafurov I.
National University of Uzbekistan

Let Q be the field of rational numbers, Q^2 be the 2-dimensional vector space over Q. For $x = (x_1, x_2) \in Q^2$ and $y = (y_1, y_2) \in Q^2$ put $з(x, y) = x_1y_1 + 11x_2y_2$. The form $з(x, y)$ is a bilinear form on Q^2. Consider the two-dimensional bilinear-metric space Q^2 with the form $з(x, y)$.

Definition 1 . *A mapping* $F: Q^2 \to Q^2$ *is called* з*-orthogonal if* $з(Fx, Fy) = з(x, y), \forall x, y \in Q^2$.

Denote the set of all з-orthogonal transformations of Q^2 by $O(з, Q^2)$.

Proposition 1 *Every* з*-orthogonal transformation of* Q^2 *is linear.*

Proposition 1 implies that every з-orthogonal transformation of Q^2 has a matrix form.

Proposition 2 . *Let* $H \in O(з, Q)$. *Then* $det(H) = 1$ *or* $det(H) = -1$.

$O(з, Q^2)$ is a group with respect to the multiplication operation of matrices. For a description of an evident form of elements of $O(з, Q^2)$, we introduce an algebraic structure in Q^2 using the bilinear form $з(x, y)$.

Consider an element $(a_1, a_2) \in Q^2$ in the the following form $a = a_1 + \sqrt{-11}a_2$. The set of all elements $a = a_1 + \sqrt{-11}a_2$, where $(a_1, a_2) \in Q^2$, denote by $Q^2(\sqrt{-11})$. We define the addition and the multiplication operations of elements $a = a_1 + \sqrt{-11}a_2$, $b = b_1 + \sqrt{-11}b_2$ of the set $Q^2(\sqrt{-11})$ as follows: $a + b = (a_1 + b_1) + \sqrt{-11}(a_2 + b_2)$, $a \cdot b = (a_1 \cdot b_1 - 11a_2 \cdot b_2) + \sqrt{-11}(a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$.

Proposition 3 .$Q^2(\sqrt{-11})$ *with the these the addition and the multiplication operations is a field.*

Below we will consider the bilinear-metric space $\{Q^2, з(x, y)\}$ in the form $\{Q^2(\sqrt{-11}), з(x, y)\}$.

Let $a \in Q^2(\sqrt{-11})$. Consider in $Q^2(\sqrt{-11})$ the multiplication operator by an element $a \in Q^2(\sqrt{-11})$: $F: Q^2(\sqrt{-11}) \to Q^2(\sqrt{-11})$, where $F(x) = a \cdot x, \forall x \in Q^2(\sqrt{-11})$. Denote this operator as follows:F_a. Denote by Щ(x) the quadratic form $x_1^2 + 11x_2^2$.

Theorem 1 . *Let* $a \in Q^2(\sqrt{-11})$. *Then* F_a *is* з*-orthogonal if and only if* Щ$(a) = 1$.

Denote the set $\{F_a, \forall a \in Q^2(\sqrt{-11}) | Щ(a) = 1\}$ by $SO(Q^2(\sqrt{-11}))$.

For an arbitrary element $x = x_1 + \sqrt{-11}x_2 \in Q^2(\sqrt{-11})$, we put $W(x) = \overline{x} = x_1 - \sqrt{-11}x_2$.

Proposition 4 . *The operator* $W: Q^2(\sqrt{-11}) \to Q^2(\sqrt{-11})$ *is* з*-orthogonal.*

Proposition 5 . *Let* $a \in Q^2(\sqrt{-11})$. *Then the multiplication* $W \cdot F_a$ *is* з*-orthogonal if and only if* Щ$(a) = 1$.

Denote the set $\{W \cdot F_a, \forall a \in Q^2(\sqrt{-11})|$Щ$(a) = 1\}$ by $WSO(Q^2(\sqrt{-11}))$.

Theorem 2 . *The equality* $O($ц$, Q^2) = SO(Q^2(\sqrt{-11})) \cup WSO(Q^2(\sqrt{-11}))$ *holds.*

Let $a = a_1 + \sqrt{-11}a_2) \in Q^2(\sqrt{-11})$. Denote by Ш$_a$ the matrix of the form $\begin{pmatrix} a_1 & -11a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$.

Proposition 6 . *Let* $a = a_1 + \sqrt{-11}a_2 \in Q^2(\sqrt{-11})$ *be such that* Щ$(a) = 1$. *Then* $F_a =$ Ш$_a$.

Proposition 6 means that Ш$_a$ is he matrix form of the operator F_a in the basis $e_1 = (1.0), e_2 = (1,1)$ in Q^2.

Theorem 2 and Proposition 6 imply that a completely description of all з-orthogonal transformations of Q^2 reduced to a description of all pairs (x, y) of rational numbers x, y such that $x^2 + 11y^2 = 1$.

The answer to this problem is given in the following theorem

Theorem 3 . (1). *There is not exists an element* (x, y) *such that* $x = 0$ *and* $x^2 + 11y^2 = 1$.

(2). There exists only two pairs $(x, y) \in Q^2$ such that $y = 0$ and $x^2 + 11y^2 = 1$. They are $(1,0)$ and $(-1,0)$.

(3). Assume that $(x, y) \in Q^2$ such that $y \neq 0$ and $x^2 + 11y^2 = 1$. Then there exists $r \in Q$ such that $r \neq 0$ and the following equalities hold

$$x = \frac{11 - r^2}{11 + r^2}, y = \frac{2r}{11 + r^2}.$$

Conversely, assume that $r \in Q$, $r \neq 0$ and $(x, y) \in Q^2$ such that the above equalities hold. Then $y \neq 0$ and the equality $x^2 + 11y^2 = 1$ holds.

ON THE ORTHOGONAL GROUP OF THE TWO-DIMENSIONAL BILINEAR-METRIC SPACE WITH THE FORM $x_1y_1 + 7x_2y_2$ OVER THE FIELD OF RATIONAL NUMBERS

Beshimov G., Khadjiev D., Sadullaeva M.
National University of Uzbekistan

Let Q^2 be the 2-dimensional vector space over the field of rational numbers Q. Consider the two-dimensional bilinear-metric space Q^2 with the form $г(x,y) = x_1y_1 + 7x_2y_2$.

We introduce an algebraic structure in Q^2 using the bilinear form (x,y) as follows. Let $(a_1,a_2) \in Q^2$. We write this element in the the following form $a = a_1 + \sqrt{-7}a_2$. Denote by $Q^2(\sqrt{-7})$ the set of all elements $a = a_1 + \sqrt{-7}a_2$, where $(a_1,a_2) \in Q^2$. We define the addition and the multiplication operations of elements $a = a_1 + \sqrt{-7}a_2$, $b = b_1 + \sqrt{-7}b_2$ of the set $Q^2(\sqrt{-7})$ as follows: $a + b = (a_1 + b_1) + \sqrt{-7}(a_2 + b_2)$, $a \cdot b = (a_1 \cdot b_1 - 7a_2 \cdot b_2) + \sqrt{-7}(a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$.

Proposition 1 .*$Q^2(\sqrt{-7})$ with the these the addition and the multiplication operations is a field.*

Definition 1 . *A mapping $F: Q^2 \to Q^2$ is called* г*-orthogonal if* $г(Fx,Fy) = г(x,y), \forall x,y \in Q^2$.

The set of all г-orthogonal transformations of Q^2 denote by $O(г,Q^2)$.

Proposition 2 *Every* г*-orthogonal transformation of Q^2 is linear.*

By Proposition 1, every г-orthogonal transformation of Q^2 has a matrix form.

Proposition 3 . *Let $F \in O(ц,Q)$. Then $det(F) = 1$ or $det(F) = -1$.*

It is known that $O(ц,Q^2)$ is a group with respect to the multiplication operation of matrices.

Below we will consider the bilinear-metric space $\{Q^2, ц(x,y)\}$ in the form $\{Q^2(\sqrt{-7}), ц(x,y)\}$.

Let $a \in Q^2(\sqrt{-7})$. Consider in $Q^2(\sqrt{-7})$ the multiplication operator by an element $a \in Q^2(\sqrt{-7})$: $F: Q^2(\sqrt{-7}) \to Q^2(\sqrt{-7})$, where $F(x) = a \cdot x, \forall x \in Q^2(\sqrt{-7})$. Denote this operator as follows:F_a. Denote by $Щ(x)$ the quadratic form $x_1^2 + 7x_2^2$.

Theorem 1 . *Let $a \in Q^2(\sqrt{-7})$. Then F_a is* г*-orthogonal if and only if* $Щ(a) = 1$.

Denote the set $\{F_a | \forall a \in Q^2(\sqrt{-7}), Щ(a) = 1\}$ by $SO(Q^2(\sqrt{-7}))$.

Let $x = x_1 + \sqrt{-7}x_2 \in Q^2(\sqrt{-7})$. We put $W(x) = \overline{x} = x_1 - \sqrt{-7}x_2$.

Proposition 4 . *The operator $W: Q^2(\sqrt{-7}) \to Q^2(\sqrt{-7})$ is* г*-orthogonal.*

Proposition 5 . *Let $a \in Q^2(\sqrt{-7})$. Then the multiplication $W \cdot F_a$ is* г*-orthogonal if and only if* $Щ(a) = 1$.

Denote the set $\{W \cdot F_a | \forall a \in Q^2(\sqrt{-7}), Щ(a) = 1\}$ by $WSO(Q^2(\sqrt{-7}))$.

Theorem 2 . *The equality $O(ц,Q^2) = SO(Q^2(\sqrt{-7})) \cup WSO(Q^2(\sqrt{-7}))$ holds.*

Let $a = a_1 + \sqrt{-7}a_2) \in Q^2(\sqrt{-7})$. Denote by M_a the matrix of the form $\begin{pmatrix} a_1 & -7a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$.

Proposition 6 . *Let* $a = a_1 + \sqrt{-7}a_2 \in Q^2(\sqrt{-7})$ *be such that* Ц$(a) = 1$. *Then* $F_a = M_a$.

Proposition 6 means that M_a is the matrix form of the operator F_a in the basis $e_1 = (1.0), e_2 = (1,1)$ in Q^2.

Denote by $M(Q^2\sqrt{-7})$ the set $\{M_a | a \in Q^2(\sqrt{-7})\}$. We consider on the set $M(Q^2\sqrt{-7})$ standard matrix operations: the component-wise addition and the multiplication of matrices.

Theorem 3 . *The set* $M(Q^2\sqrt{-7})$ *is a field with respect to the standard matrix operations: the component-wise addition and the multiplication of matrices. In it the unit element is the unit matrix.*

Theorem 4 . *The mapping* $M: Q^2(\sqrt{-7}) \to M(Q^2\sqrt{-7})$, *where* $M: a \to M_a, \forall a \in Q^2(\sqrt{-7})$, *is an isomorphism of fields* $Q^2(\sqrt{-7})$ *and* $M(Q^2\sqrt{-7})$.

Theorem 2 and Proposition 6 imply that a completely description of all ц-orthogonal transformations of Q^2 reduced to a description of all pairs (x, y) of rational numbers x, y such that $x^2 + 7y^2 = 1$.

The answer to this problem is given in the following theorem

Theorem 5 . (1). *There is not exists an element* (x, y) *such that* $x = 0$ *and* $x^2 + 7y^2 = 1$.

(2). There exists only two pairs $(x, y) \in Q^2$ such that $y = 0$ and $x^2 + 7y^2 = 1$. They are $(1,0)$ and $(-1,0)$.

(3). Assume that $(x, y) \in Q^2$ such that $y \neq 0$ and $x^2 + 7y^2 = 1$. Then there exists $r \in Q$, such that $r \neq 0$ and the following equalities hold

$$x = \frac{7 - r^2}{7 + r^2}, y = \frac{2r}{7 + r^2}.$$

Conversely, assume that $r \in Q$, $r \neq 0$, and $(x, y) \in Q^2$ such that the above equalities hold. Then $y \neq 0$ and the equality $x^2 + 7y^2 = 1$ holds.

GROUND STATES FOR POTTS MODEL WITH A COUNTABLE SET OF SPIN VALUES AND COMPETING INTERACTIONS ON A CAYLEY TREE

Botirov G.I., Qayumov U.U.
botirovg@mathinst.uz, qayumovu@yandex.ru

In this paper we consider ground states for Potts model with competing inter actions and countable spin values Ц $= \{0,1,2, \ldots\}$ on a Cayley tree of order four, started in Botirov, Rakhmatullayev [1].

The Cayley tree (Bethe lattice) Γ^k of order $k \geq 1$ is an infinite tree, i.e., a graph without cylcles, such that exactly $k + 1$ edges originate from each vertex (see [1]). Let $\Gamma^k = (V, L)$ where V is the set of vertices and L the set of edges. Two

vertices *x* and *y* are called *nearest neighbors* if there exists $l \in L$ connecting them and we denote $l =< x, y >$.

On this tree, there is a natural distance to be denoted $d(x, y)$, being the number of nearest neighbor pairs of the minimal path between the vertices *x* and *y* (by path one means a collection of nearest neighbor pairs, two consecutive pairs sharing at least a given vertex).

For a fixed $x^0 \in V$, the root, let

$$W_n = \{x \in V : d(x, x^0) = n\}, \quad W_n = \{x \in V : d(x, x^0) \leq n\},$$

Be respectively the sphere and the ball of radius *n* with center at x^0, and for $x \in W_n$ let

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}$$

Be the set of direct successors of *x*

It is well-known that there exists a one-to-one correspondence between the set *V* of vertices of the Cayley tree of order $k \geq 1$ and the group G_k of the free products of $k + 1$ cyclic groups of second order with generators $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ (see [2], [3]).

For each $x \in G_k, let\ S(x)$ denote the set of direct successors of *x*, i.e., if $x \in W_n$ then

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}.$$

For each $x \in G_k$,let $S(x)$ denote the set of all neighbors of *x*.

We consider the models in which the spin takes values in the set Ц $= \{0,1,2, \dots\}$. A *configuration* у on the set *V* is then defined as a function $x \in V \to \text{у}(x) \in$ Ц; the set of all configurations coincides with Щ $=$ Ц^V.

Let G_k^* is a subgroup of index *r* with $r \geq 1$. Consider the set of right coset $G_k / G_k^* = \{H_1, \dots, H_r\}$, where G_k^* is a subgroup.

Definition 1. A configuration $\text{у}(x)$ is said to be G_k^* - *periodic* if $\text{у}(x) = \text{у}_i$ for all $x \in G_k$ with $x \in H_i$. A G_k-periodic configuration is said to be *translation invariant.*

The period of a periodic configuration is the index of the corresponding subgroup.

The Hamiltonian of the Potts model with competing interactions has the form

$$H(\text{у}) = J_1 \sum_{\substack{<x,y> \\ x,y \in V}} Д_{\text{у}(x)\text{у}(y)} + J_2 \sum_{\substack{x,y \in V \\ d(x,y)=2}} Д_{\text{у}(x)\text{у}(y)} \qquad (1)$$

where $J_1, J_2 \in \mathbb{R}$.

For pair of configurations у and ц coinciding almost everywhere, i.e., everywhere except at a finite number of points, we consider the relative Hamiltonian $H(\text{у}, \text{ц})$ of the difference between the energies of the configurations у and ц, i.e.,

$$H(\text{у}, \text{ц}) = J_1 \sum_{\substack{<x,y> \\ x,y \in V}} \left(Д_{\text{у}(x)\text{у}(y)} - Д_{\text{ц}(x)\text{ц}(y)}\right) + J_2 \sum_{\substack{x,y \in V \\ d(x,y)=2}} \left(Д_{\text{у}(x)\text{у}(y)} - Д_{\text{ц}(x)\text{ц}(y)}\right), \qquad (2)$$

Where $J = (J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2$ is an arbitrary fixed prametr.

Let *M* be the set of all unit balls with vertices in *V*. By the *restricted configuration* у_b on we mean the restriction of a configuration $-$ to a ball $b \in M$. The energy of a configuration у_b on *b* is defined by the formula

$$U(\mathrm{y}_b) \equiv U(\mathrm{y}_b, J) = \frac{1}{2} J_1 \sum_{\substack{<x,y> \\ x,y \in V}} Д_{\mathrm{y}(x)\mathrm{y}(y)} + J_2 \sum_{\substack{x,y \in V \\ d(x,y)=2}} Д_{\mathrm{y}(x)\mathrm{y}(y)}, \qquad 3)$$

where $J = (J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2$.

Note that, in [4] studying ground states for the Potts model, i.e. in the case *k=2 a*nd Ц $= \{1,2,3\}$ all periodic (in particular translation-invariant) ground states are given and this case **coincides** with case $k = 2$ for the model (1).

We consider the case $k = 4$. It is easy to see that $U(\mathrm{y}_b) \in \{U_1, U_2, \dots, U_{19}\}$ for any y_b where

$U_1 = \frac{5}{2} J_1 + 10 J_2 \quad U_2 = 2J_1 + 6J_2 \quad U_3 = \frac{3}{2} J_1 + 4J_2 \quad U_4 = \frac{3}{2} J_1 + 3J_2$

$U_5 = J_1 + 4J_2 \quad U_6 = J_1 + 2J_2 \quad U_7 = J_1 + J_2 \quad U_8 = \frac{1}{2} J_1 + 6J_2$

$U_9 = \frac{1}{2} J_1 + 3J_2 \quad U_{10} = \frac{1}{2} J_1 + 2J_2 \quad U_{11} = \frac{1}{2} J_1 + J_2 \quad U_{12} = \frac{1}{2} J_1$

$U_{13} = 10J_2 \quad U_{14} = 6J_2 \quad U_{15} = 4J_2 \quad U_{16} = 3J_2 \quad U_{17} = 2J_2 \quad U_{18} = J_2 \; U_{19} = 0$

Definition 2 A configuration ц is called the *ground state* of relative Hamiltonian *H* if $U(\mathrm{y}_b) = min\{U_1, U_2, \dots, U_{19}\}$ for any $b \in M$.

We set $C_i = \{\mathrm{y}_b : U(\mathrm{y}_b) = U_i\}$ and $U_i(J) = U(\mathrm{y}_b, J)$ if $\mathrm{y}_b \in C_i, \; i = 1,2, \dots, 19$.

If a ground state is a periodic configuration, then we call it a *periodic ground state.* For any $i = 1,2, \dots, 19$ we put

$$A_i = \left\{ J \in \mathbb{R}^2 : U_i = min\{U_1, U_2, \dots, U_{19}\} \right\}. \qquad (4)$$

Quite cumbersome but not difficult calculations show that

$$A_1 = \{ J \in R^2 : J_1 \le 0, \quad J_1 + J_2 \le 0 \} \cup \{ J_1 \le 0, \quad J_2 \le 0 \},$$

$$A_2 = \{ J \in R^2 : J_1 \le 0, \quad -8J_2 \le J_1 \le -6J_2 \},$$

$$A_3 = A_5 = A_6 = A_8 = A_9 = A_{10} = A_{11} = \{ J \in R^2 : J_1 \le 0, \quad J_2 = 0 \},$$

$$A_4 = \{ J \in R^2 : J_1 \le 0, \quad -6J_2 \le J_1 \le -4J_2 \},$$

$$A_7 = \{ J \in R^2 : J_1 \le 0, \quad -4J_2 \le J_1 \le -2J_2 \},$$

$$A_{12} = \{ J \in R^2 : J_1 \le 0, \quad J_1 \ge -2J_2 \},$$

$$A_{13} = \{ J \in R^2 : J_1 \ge 0, \quad J_2 \le 0 \},$$

$$A_{14} = A_{15} = A_{16} = A_{17} = A_{18} = \{ J \in R^2 : J_1 \ge 0, \quad J_2 = 0 \},$$

$$A_{19} = \{ J \in R^2 : J_1 \ge 0, \; J_2 \ge 0 \}, \text{ and } R^2 = \cup A_n.$$

Theorem 3.3. *For any class* $C_i, \; i = 1,2, \dots, 19$, *and any bounded configuration* $\mathrm{y}_b \in C_i$, *there exists a periodic configuration* ц *(on the Cayley tree) such* $\mathrm{y}_{b'} \in$ C_i *for any* $b' \in M$ *and* $\mathrm{ц}_b = \mathrm{y}_b$.

References

1. Botirov G.I., Rakhmatullaev M.M., Ground states for Potts model with a countable set of spin values on a Cayley tree // Algebra, complex analysis, and pluripotential theory, Springer Proc. Math. Stat., 2018, 264, pp.5971.
2. Rozikov U.A.: Gibbs measures on Cayley trees. World Scienti c, (2013), 484 p.
3. Gankhodjaev N.N. Group represantation and automorphisms of the Cayley tree//Dokl.Akad.nauk Resp. Uzbekistan, (1994) No.4, pp.3-6.
4. Botirov G.I., Rozikov U.A. Potts model with competing interactions on the Cayley tree: The contour method// Theor. Math. Phys, 153, (2007), pp. 1423-1433.

REGULARITY OF A NON-VOLTERRA QUADRATIC OPERATOR ON S^2

Jamilov U. U., Tursunov A. M.
V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics
uygun.jamilov@mathinst.uz, a.tursunov1@mail.ru

Let $E=\{1,...,m\}$ be a finite set and the set of all probability distributions on E

$$S^{m-1}=\left\{x=(x_1,x_2,...,x_m)\in R^m : x_i\geq 0,\ for\ any\ i\ and\ \sum_{i=1}^{m}x_i=1\right\}$$

be the $(m-1)-$ dimensional simplex.

A map V of S^{m-1} into itself is called a *quadratic stochastic operator* (QSO) if

$$(Vx)_k=\sum_{i,j=1}^{m}p_{ij,k}x_ix_j \tag{1}$$

for any $x\in S^{m-1}$ and for all $k=1,\ \ldots,m$ where

$$p_{ij,k}\geq 0,\ p_{ij,k}=p_{ji,k},\ \sum_{k=1}^{m}p_{ij,k}=1. \tag{2}$$

Assume $\{x^{(n)}\in S^{m-1}: n=0,1,2,...,\}$ is the trajectory (orbit) of the initial point $x\in S^{m-1}$, where $x^{(n+1)}=V(x^{(n)})$ for all $n=0,1,2,\ ...,$ with $x^{(0)}=x$. Let $\omega_V(x^{(0)})$ be the set of limit points of the trajectory $\left\{x^{(n)}\in S^{m-1}: n=0,1,2,...\right\}$.

The main problem in mathematical population genetics consists of the study of the asymptotical behavior of the trajectories for a given QSO V. In other words, the main task is the description of the set $\omega_V(x^{(0)})$ for any initial point $x^{(0)}\in S^{m-1}$ for a given QSO. This problem is an open problem even in two-dimensional case (see e.g. [2,3,4]).

The main problem was completely solved for Volterra QSOs. A quadratic stochastic operator is called a Volterra if

$$p_{ij,k}=0,\ for\ any\ k\notin\{i,j\},\ i,j,k=1,...,m.$$

The asymptotic behavior of trajectories Volterra QSOs was analyzed in [1].

Definition 1. A point $x \in S^{m-1}$ is called a *fixed point* of V if $V(x) = x$.

Let $D(V(x^*)) = (\partial V_i / \partial x_j)(x^*)$ be a Jacobian of V at the point x^*.

Definition 2. A fixed point x^* is called *hyperbolic* if its Jacobian $D(V(x^*))$ has no eigenvalues on the unit circle. A hyperbolic fixed point x^* is called:

i) *attracting*, if all the eigenvalues of the Jacobian $D(V(x^*))$ are less than 1 in absolute value;

ii) *repelling*, if all the eigenvalues of the Jacobian $D(V(x^*))$ are greater than 1 in absolute value;

iii) a *saddle*, otherwise.

A QSO V is called *regular* if the limit $\lim_{n\to\infty} V^n(x)$ exits for any initial $x \in S^{m-1}$.

Let us consider a non-Volterra QSO defined on the two-dimensional simplex which has the form

$$V:\begin{cases} x_1' = \frac{1}{3}x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{1}{3}x_3^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + x_1x_3 + \frac{1}{2}x_2x_3 \\ x_2' = \frac{1}{3}x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{1}{3}x_3^2 + \frac{2-\beta}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1x_3 + \frac{1+\beta}{2}x_2x_3 \\ x_3' = \frac{1}{3}x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{1}{3}x_3^2 + \frac{2+\beta}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1x_3 + \frac{2-\beta}{2}x_2x_3 \end{cases}$$

where $0 \le \beta \le 1$.

Theorem 1. The following statements are true for the QSO V:

i) The center $C = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ is a unique attracting fixed point;

ii) For any $x^{(0)} \in S^2$ we have $\lim_{n\to\infty} V^n(x^{(0)}) = C$;

iii) A QSO V is a regular transformation.

References

1. R. N. Ganikhodzhaev. Quadratic stochastic operators, Lyapunov functions and tournaments. *Sb. Math.* 76 (2) (1993), pp. 489 – 506.

2. U. U. Jamilov. On a family of strictly non-volterra quadratic stochastic operators. *Jour. Phys. Conf. Ser.* 697 (2016), 012013.

3. A. Yu. Khamraev. On the dynamics of a quasistrictly non-Volterra quadratic stochastic operator. *Ukrainian Math. J.* 71 (8) (2019), pp. 1116–1122.

4. U. U. Zhamilov, U. A. Rozikov. On the dynamics of strictly non-Volterra quadratic stochastic operators on a two-dimensional simplex. *Sb. Math.* 200 (9) (2009), pp. 1339 – 1351.

ON TRAJECTORIES OF A NON VOLTERRA QUADRATIC STOCHASTIC OPERATOR ON S^3

Jamilov U. U., Khudoyberdiev Kh. O.
V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics;
jamilovu@yandex.ru, xudoyberdiyev.x@mail.ru

Let

$$S^{m-1}=\left\{x=(x_1,x_2,...,x_m)\in R^m:\ x_i\geq 0,\ for\ any\ i\ and\ \sum_{i=1}^{m}x_i=1\right\}$$

$(m-1)-$ dimensional simplex. A map V of S^{m-1} into itself is called a *quadratic stochastic operator* (QSO) if

$$(Vx)_k=\sum_{i,j=1}^{m}p_{ij,k}x_ix_j \tag{1}$$

for any $x\in S^{m-1}$ and for all $k=1,\ \ldots,\ m$ where

$$p_{ij,k}\geq 0,\ p_{ij,k}=p_{ji,k},\ \sum_{k=1}^{m}p_{ij,k}=1. \tag{2}$$

A quadratic stochastic operator is called a Volterra if

$$p_{ij,k}=0,\ for\ any\ k\notin\{i,j\},\ i,j,k=1,...,m.$$

Assume $\{x^{(n)}\in S^{m-1}:n=0,1,2,...,\}$ is the trajectory (orbit) of the initial point $x\in S^{m-1}$, where $x^{(n+1)}=V(x^{(n)})$ for all $n=0,1,2,\ ...,$ with $x^{(0)}=x$. Let $\omega_V(x^{(0)})$ be the set of limit points of the trajectory $\left\{x^{(n)}\in S^{m-1}:n=0,1,2,...\right\}$.

A QSO V is called *regular* if the limit $\lim\limits_{n\to\infty}V^n(x)$ exits for any initial $x\in S^{m-1}$.

We let $intS^{m-1}$ denote the interior of S^{m-1} be the set $intS^{m-1}=\left\{x\in S^{m-1}:x_1x_2\cdots x_m>0\right\}$;

The asymptotic behavior of trajectories Volterra QSOs was analyzed in [1].

Definition 1. A point $x\in S^{m-1}$ is called a *periodic point* of V if there exists an n so that $V^n(x)=x$. The smallest positive integer n satisfying the above is called the prime period or least period of the point x. A period-one point is called a *fixed point* of V.

Denote the set of all fixed points by $Fix(V)$ and the set of all periodic points of (not necessarily prime) period n by $Per_n(V)$. Evidently that the set of all iterates of a periodic point form a periodic trajectory (orbit).

Let $D(V(x^*))=\left(\partial V_i/\partial x_j\right)(x^*)$ be a Jacobian of V at the point x^*.

Definition 2. A *fixed* point x^* is called hyperbolic if its Jacobian $D(V(x^*))$ has no eigenvalues on the unit circle. A hyperbolic fixed point x^* is called:

i) *attracting*, if all the eigenvalues of the Jacobian $D(V(x^*))$ are less than 1 in absolute value;
ii) *repelling*, if all the eigenvalues of the Jacobian $D(V(x^*))$ are greater than 1 in absolute value;
iii) a *saddle*, otherwise.

Let a face of the simplex S^{m-1} be the set $\Gamma_I = \left\{x \in S^{m-1} : x_i = 0,\ i \notin I \subset \{1,2,...,m\}\right\}$; let $e_i = (\delta_{1i}, \delta_{2i}, ..., \delta_{mi}) \in S^{m-1}, i = 1,...,m$, denote of the vertices of the simplex S^{m-1}, where δ_{ij} is the Kronecker delta.

Let us consider a non-Volterra QSO defined on the three-dimensional simplex which has the form

$$V: \begin{cases} x_1' = x_1^2 + (x_2 + x_3 + x_4)^2 + (1-\alpha)x_1x_2 + (1-\beta)x_1x_3 + (1-\gamma)x_1x_4 \\ x_2' = (1+\gamma)x_1x_4 \\ x_3' = (1+\alpha)x_1x_2 \\ x_4' = (1+\beta)x_1x_3 \end{cases} \tag{3}$$

where $\alpha, \beta, \gamma \in [-1,1]$.

It worth mentioning that if $\alpha = \beta = \gamma$ then the QSO (3) coincides with the non-Volterra QSO which is studied in [2].

Denote

$$S_\alpha = \left\{ x \in S^3 : x_1 = \frac{1}{1+\alpha},\ x_2 + x_3 + x_4 = \frac{\alpha}{1+\alpha} \right\}.$$

Proposition 1. If $0 < \alpha = \beta = \gamma \le 1$ then for the QSO (3) the following statements are true hold:

i) $Per_3(V) = S_\alpha$;

ii) if $n = 2$ *and* $n \ge 4$ *then* $Per_n(V_\tau) = \theta$.

The solutions of the equation $V(x) = x$ are fixed points of the operator (3) and the fixed points of the operator and they are given in the following proposition.

Theorem 1. For the QSO (3) the following statements are true:

i) If $\alpha = \beta = \gamma = -1$ and $\tau \le 0$ then $Fix(V) = \{e_1\}$;

ii) If $\tau > 0$ then $Fix(V) = \{e_1, \tilde{x}\}$, where $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ and

$$\tilde{x} = \left(\frac{1}{\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}}, \frac{\sqrt[3]{1+\gamma}}{\sqrt[3]{1+\alpha}} z, \frac{\sqrt[3]{1+\alpha}}{\sqrt[3]{1+\beta}} z, \frac{\sqrt[3]{1+\beta}}{\sqrt[3]{1+\gamma}} z \right).$$

where

$$z = \frac{\sqrt[3]{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)} - 1}{\sqrt[3]{(1+\beta)(1+\gamma)^2} + \sqrt[3]{(1+\alpha)^2(1+\beta)} + \sqrt[3]{(1+\alpha)(1+\beta)^2}} \text{ and}$$

$$\tau \equiv \tau(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha + \beta + \gamma + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\beta\gamma.$$

iii) If $\tau < 0$ (resp. $\tau = 0$, $\tau > 0$) then the fixed point e_1 is an attracting (resp. a non-hyperbolic, a repelling) point;

iv) The fixed point $\tilde{x}$ is a non-hyperbolic point.

For any $x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},x_3^{(0)},x_4^{(0)})\in S^3\setminus\{e_1\}$ we denote

$$\hat{x}_1=\frac{x_2^{(0)}+x_3^{(0)}+x_4^{(0)}}{(1+\alpha)x_2^{(0)}+(1+\beta)x_3^{(0)}+(1+\gamma)x_4^{(0)}},\ \hat{x}_2=\frac{x_2^{(0)}(\alpha x_2^{(0)}+\beta x_3^{(0)}+\gamma x_4^{(0)})}{(1-x_1^{(0)})\left((1+\alpha)x_2^{(0)}+(1+\beta)x_3^{(0)}+(1+\gamma)x_4^{(0)}\right)},$$

$$\hat{x}_3=\frac{x_3^{(0)}}{x_2^{(0)}}\hat{x}_2 \text{ and } \hat{x}_4=\frac{x_4^{(0)}}{x_2^{(0)}}\hat{x}_2.$$

$$\tilde{x}_1=1-\tilde{x}_2-\tilde{x}_3-\tilde{x}_4\ \tilde{x}_2=(1+\gamma)\hat{x}_1\hat{x}_4,\ \tilde{x}_3=(1+\alpha)\hat{x}_1\hat{x}_2,\ \tilde{x}_4=(1+\beta)\hat{x}_1\hat{x}_2,$$

$$\hat{x}=(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_3\hat{x}_4),\ \tilde{x}=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_3,\tilde{x}_4),\ \overline{x}=(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3,\overline{x}_4),$$

$$\overline{x}_1=1-\overline{x}_2-\overline{x}_3-\overline{x}_4,\ \overline{x}_2=(1+\gamma)\tilde{x}_1\tilde{x}_4,\ \overline{x}_3=(1+\alpha)\tilde{x}_1\tilde{x}_2,\ \overline{x}_4=(1+\beta)\tilde{x}_1\tilde{x}_2,$$

$$x_\alpha=\left(\tfrac{1}{1+\alpha},\tfrac{\alpha}{1+\alpha},0,0\right),\ x_\beta=\left(\tfrac{1}{1+\beta},0,\tfrac{\beta}{1+\beta},0\right) \text{ and } x_\gamma=\left(\tfrac{1}{1+\gamma},0,0,\tfrac{\gamma}{1+\gamma}\right).$$

Theorem 2. For the V – QSO (3) the following statements are true:

$$\omega\left(x^{(0)}\right)=\begin{cases}\{e_1\}, & \text{if } x^{(0)}\in\Gamma_{\{2,3,4\}}\cup\{e_1\} \text{ and } -1\le\alpha,\beta,\gamma\le 1,\\ \{e_1\}, & \text{if } x^{(0)}\in S^3\setminus\left(\Gamma_{\{2,3,4\}}\cup\{e_1\}\right) \text{ and } \tau<0,\\ \{x_\alpha,x_\beta,x_\gamma\}, & \text{if } x^{(0)}\in\left(\Gamma_{\{1,2,3\}}\cup\Gamma_{\{1,3,4\}}\cup\Gamma_{\{1,2,4\}}\right)\setminus\{e_1\} \text{ and } \tau\ge 0,\\ \{\hat{x},\tilde{x},\overline{x}\}, & \text{if } x^{(0)}\in intS^3 \text{ and } \tau\ge 0.\end{cases}$$

References

1. R. N. Ganikhodzhaev. Quadratic stochastic operators, Lyapunov functions and tournaments. *Sb. Math*. 76 (2) (1993), pp. 489 – 506.
2. U. U. Jamilov, Kh. O. Khudoyberdiev, M. Ladra. Quadratic operators corresponding to permutations. *Stoch. Anal. Appl.* 38(5) (2020), pp. 929 – 938.
3. U. U. Jamilov. On a family of strictly non-Volterra quadratic stochastic operators. *Jour. Phys. Conf. Ser.* 697 (2016), 012013.
4. A. Yu. Khamraev. On the dynamics of a quasi-strictly non-Volterra quadratic stochastic operator. *Ukrainian Math. J.* 71 (8) (2019), pp. 1116–1122.
5. U. U. Zhamilov, U. A. Rozikov. On the dynamics of strictly non-Volterra quadratic stochastic operators on a two-dimensional simplex. *Sb. Mat.* 200 (9) (2009), pp. 1339 – 1351.

ERKIN GRUPPANING INDEKSI 3 BO'LGAN NORMAL QISM GRUPPASI

Jiyanbekov E.Y., Akmalova R.A
O'ZMU
akmalovaroziya@gmail.com,
esonalijiyanbekov@gmail.com

$A=\{a_1,a_2,a_3,...,a_r\}$ to'plam berilgan bo'lsin . $f:A\to A$ bieksiyani qaraymiz.

$f(a_i)=b_i\in A$ $b_i\overset{def}{=}a^{-1}{}_i$ deb olamiz, $a_i^{\varepsilon_i}$ $(\varepsilon_i=\pm 1)$ simvol(harf)lardan iborat

barcha so‘zlar to‘plamini F_r deb belgilaymiz. F_r to‘plam elementlari quyidagi $a_{i_1}^{\varepsilon_1}a_{i_2}^{\varepsilon_2}a_{i_3}^{\varepsilon_3}....a_{i_m}^{\varepsilon_m}$ $\varepsilon_j = \pm 1$ $(m = 0,1,2,3,....)$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bu to‘plamda quyidagicha binar amal kiritamiz: ikkita so‘zning ko‘paytmasi deganda bir so‘zdan keyin ikkinchi so‘zni yozib qo’yish tushuniladi.

F_r to’plam bu ko‘paytmaga nisbatan gruppa tashkil etadi va bu gruppa yasovchilari $a_1, a_2, a_3, ..., a_r$ bo‘lgan erkin gruppa deyiladi [1,2].

Hech qanday harfdan iborat bo‘lmagan bo‘sh so‘z bu gruppaning birlik elementi bo‘ladi. $\forall a_{i_1}^{\varepsilon_1}a_{i_2}^{\varepsilon_2}a_{i_3}^{\varepsilon_3}...a_{i_m}^{\varepsilon_m} \in F_r$ so‘z uchun $a_{i_m}^{-\varepsilon_m}...a_{i_2}^{-\varepsilon_2}a_{i_1}^{-\varepsilon_1}$ so‘z teskari so‘z bo‘ladi.

Misol. $\left(a_1a_2a_1^{-1}a_3\right)^{-1}$ ga teskari so‘z $a_3^{-1}a_1a_2^{-1}a_1^{-1}$ bo‘ladi.

Agar so‘zda $a_i^{\varepsilon_i}$ va $a_i^{-\varepsilon_i}$ harflar yonma –yon tursa bu qisqaradigan so‘z deyiladi. Bu so‘z $a_3a_1^{-1}a_1a_2$ qisqargandan so‘ng so‘zni a_3a_2 deb olamiz.

[1] da erkin gruppalarni qism gruppalar sonini hisoblaydigan quyidagi formula berilgan:

$N_{1,r} = 1$ $N_{n,r} = n(n!)^{r-1} - \sum_{i=1}^{n-1}(n-1)!^{r-1}N_{i,r}$ bu yerda n qism gruppa indeksi, r esa erkin gruppaning yasovchilari soni.

Gruppalar nazariyasidan ma’lumki indeksi 2 bo‘lgan qism gruppa normal qism gruppa bo‘ladi. Indeksi 3 ga teng bo‘lgan qism gruppalar normal qism gruppa bo‘lmasligi ham mumkin. Ushbu ishda erkin gruppaning indeksi 3 ga teng bo‘lgan qism gruppasi umumiy ko‘rinishini aniqlaymiz.

Teorema. F_2 - erkin gruppa va $(Z_3, +_3)$ gruppalar bo‘lsin. $\forall x = a^{\varepsilon_1}b^{\delta_1}...a^{\varepsilon_n}b^{\delta_n} \in F_2$ uchun

$$f(x) = f\left(a^{\varepsilon_1}b^{\delta_1}a^{\varepsilon_2}b^{\delta_2}...a^{\varepsilon_n}b^{\varepsilon_n}\right) = \begin{cases} \bar{0}, agar \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i = 3k \\ \bar{1}, agar \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i = 3k+1 \\ \bar{2}, agar \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i = 3k+2 \end{cases}$$

akslantirish gomomorfizm va $H = Ker\, f$ F_2 ning indeksi 3 bo‘lgan normal qism gruppasi bo‘ladi. Bu yerda $F_2 = < a, b >$ yasovchilari soni 2 ta bo‘lgan erkin gruppa.

Izoh. Xuddi shunday usul bilan erkin gruppaning ixtiyoriy chekli indeksli normal qism gruppasini qurish mumkin.

Adabiyotlar

1. Marshall Hall, Jr. ,, The Theory of Groups'' New York 1959.
2. И.И. Богданов ,, Теория групп'' ФИВТ МИФТИ 2016

ON SUBGROUPS OF INDEX FOUR FOR A GROUP REPRESENTATION OF THE CAYLEY TREE AND INVARIANCE PROPERTY

Ilyasova R.A.
National University of Uzbekistan

There are several thousand papers and books devoted to the theory of groups. But still there are unsolved problems, most of which arise in solving of problems of natural sciences such as physics, biology etc. In particular, if configuration of physical system is located on a lattice (in our case on the graph of a group) then the configuration can be considered as a function defined on the lattice. Usually, more important configuration (functions) are periodic ones. It is well-known that if the lattice has a group representation then periodicity of a function can be defined by a given subgroup of the representation. More precisely, if a subgroup, say H, is given, then one can define H - periodic function as a function, which has a constant value (depending only on the coset) on each (right or left) coset of H. So the periodicity is related to a special partition of the group (that presents the lattice on which our physical system is located). There are many works devoted to several kind of partitions of groups (lattices).

A *Cayley tree (Bethe lattice)* Γ^k of order $k \geq 1$ is an infinite homogeneous tree, i.e., a graph without cycles, such that exactly $k+1$ edges originate from each vertex. Let $\Gamma^k = (V, L)$ where V is the set of vertices and L that of edges (arcs). Two vertices x and y are called nearest neighbors if there exists an edge $l \in L$ connecting them. We will use the notation $l = \langle x, y \rangle$. A collection of nearest neighbor pairs $\langle x, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \ldots \langle x_{d-1}, y \rangle$ is called a *path* from x to y. The distance $d(x, y)$ on the Cayley tree is the number of edges of the shortest path from x to y.

Let G_k be a free product of $k+1$ cyclic groups of the second order with generators $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$, respectively.

It is known that there exists a one to one correspondence between the set of vertices V of the Cayley tree Γ^k and the group G_k.

To give this correspondence we fix an arbitrary element $x_0 \in V$ and let it correspond to the unit element e of the group G_k. Using $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$ we numerate the nearest-neighbors of element e moving by positive direction. Now we'll give numeration of the nearest-neighbors of each $a_i, i = 1,2,...,k+1$ by $a_i a_j, j = 1,2,...,k+1$. Since all a_i have the common neighbor e we give to it $a_i a_i = a_i^2 = e$. Other neighbor are numerated starting from $a_i a_i$ by the positive direction. We numerate the set of all the nearest-neighbors of each $a_i a_j$ by words $a_i a_j a_q, q = 1,2,...,k+1$ starting from $a_i a_j a_j = a_i$ by the positive direction. Iterating this argument one gets a one-to-one correspondence between the set of vertices V of the Cayley tree Γ^k and the group G_k.

Let $N_k = \{1,2,...,k+1\}$ and $A_0 \subset N_k, 0 \le |A_0| \le k-2$. (A_1, A_2, A_3) be a partition of $N_k \setminus A_0$. Put m_j be a minimal element of $A_j, j \in \{1,2,3\}$. Then we consider the function

$$u_{A_1A_2A_3}(x) = \begin{cases} e, x = a_i, i \in N_k \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\ a_{m_j}, x = a_i, i \in A_j, j = 1,2,3. \end{cases}$$

Define $\gamma_1 : \langle e, a_{m_1}, a_{m_2}, a_{m3} \rangle \to \langle e, a_{m_1}, a_{m_2}, a_{m3} \rangle$ by the formula

$$\gamma_1(x) = \begin{cases} e, x = e \\ a_{m_1}, x \in (a_{m_3}a_{m_1}, a_{m_2}a_{m_3}) \\ a_{m_2}, x \in (a_{m_1}a_{m3}, a_{m3}a_{m_2}) \\ a_{m_3}, x \in (a_{m_1}a_{m_2}, a_{m_2}a_{m_1}) \\ \gamma_1(a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}...a_{i_{n-2}}\gamma_1(a_{i_{n-1}}a_{i_n})), x = a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}...a_{i_{n-2}}a_{i_{n-1}}a_{i_n}, l(x) > 2 \end{cases}$$

Define $\gamma_2 : \langle e, a_{m_1}, a_{m_2}, a_{m3} \rangle \to \langle e, a_{m_1}, a_{m_2}, a_{m3} \rangle$ by the formula

$$\gamma_2(x) = \begin{cases} e, x = e \\ a_{m_1}, x \in (a_{m_3}a_{m_2}, a_{m_2}a_{m_1}) \\ a_{m_2}, x \in (a_{m_1}a_{m_3}, a_{m_3}a_{m_1}) \\ a_{m_3}, x \in (a_{m_1}a_{m_2}, a_{m_2}a_{m_3}) \\ \gamma_2(a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}...a_{i_{n-2}}\gamma_2(a_{i_{n-1}}a_{i_n})), x = a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}...a_{i_{n-2}}a_{i_{n-1}}a_{i_n}, l(x) > 2 \end{cases}$$

Define $\gamma_3 : \langle e, a_{m_1}, a_{m_2}, a_{m3} \rangle \to \langle e, a_{m_1}, a_{m_2}, a_{m3} \rangle$ by the formula

$$\gamma_3(x)=\begin{cases} e, x=e \\ a_{m_1}, x\in(a_{m_3}a_{m_1}, a_{m_2}a_{m_1}) \\ a_{m_2}, x\in(a_{m_1}a_{m_3}, a_m\ a_{m_2}) \\ a_{m_3}, x\in(a_{m_1}a_{m_2}, a_{m_2}a_{m_3}) \\ \gamma_3(a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}...a_{i_{n-2}}\gamma_3(a_{i_{n-1}}a_{i_n})), x=a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}...a_{i_{n-2}}a_{i_{n-1}}a_{i_n}, l(x)>2 \end{cases}$$

Define $\gamma_4:\langle e,a_{m_1},a_{m_2},a_{m3}\rangle\to\langle e,a_{m_1},a_{m_2},a_{m3}\rangle$ by the formula

$$\gamma_4(x)=\begin{cases} e, x=e \\ a_{m_1}, x\in(a_{m_2}a_{m_3}, a_{m_3}a_{m_2}) \\ a_{m_2}, x\in(a_{m_1}a_{m_2}, a_{m_3}a_{m_1}) \\ a_{m_3}, x\in(a_{m_1}a_{m_3}, a_{m_2}a_{m_1}) \\ \gamma_4(a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}...a_{i_{n-2}}\gamma_4(a_{i_{n-1}}a_{i_n})), x=a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}...a_{i_{n-2}}a_{i_{n-1}}a_{i_n}, l(x)>2 \end{cases}$$

Define $\gamma_5:\langle e,a_{m_1},a_{m_2},a_{m3}\rangle\to\langle e,a_{m_1},a_{m_2},a_{m3}\rangle$ by the formula

$$\gamma_5(x)=\begin{cases} e, x=e \\ a_{m_1}, x\in(a_{m_2}a_{m_1}, a_{m_3}a_{m_1}) \\ a_{m_2}, x\in(a_{m_1}a_{m_2}, a_{m_3}a_{m_2}) \\ a_{m_3}, x\in(a_{m_1}a_{m_3}, a_{m_2}a_{m_3}) \\ \gamma_5(a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}...a_{i_{n-2}}\gamma_5(a_{i_{n-1}}a_{i_n})), x=a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}...a_{i_{n-2}}a_{i_{n-1}}a_{i_n}, l(x)>2 \end{cases}$$

Define $\gamma_1:\langle e,a_{m_1},a_{m_2},a_{m3}\rangle\to\langle e,a_{m_1},a_{m_2},a_{m3}\rangle$ by the formula

$$\gamma_6(x)=\begin{cases} e, x=e \\ a_{m_1}, x\in(a_{m_2}a_{m_3}, a_{m_3}a_{m_1}) \\ a_{m_2}, x\in(a_{m_1}a_{m_2}, a_{m_3}a_{m_2}) \\ a_{m_3}, x\in(a_{m_1}a_{m_3}, a_{m_2}a_{m_1}) \\ \gamma_6(a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}...a_{i_{n-2}}\gamma_6(a_{i_{n-1}}a_{i_n})), x=a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}...a_{i_{n-2}}a_{i_{n-1}}a_{i_n}, l(x)>2 \end{cases}$$

Define $\gamma_7:\langle e,a_{m_1},a_{m_2},a_{m3}\rangle\to\langle e,a_{m_1},a_{m_2},a_{m3}\rangle$ by the formula

$$\gamma_7(x)=\begin{cases} e, x=e \\ a_{m_1}, x\in(a_{m_2}a_{m_1}, a_{m_3}a_{m_2}) \\ a_{m_2}, x\in(a_{m_1}a_{m_2}, a_{m_3}a_{m_1}) \\ a_{m_3}, x\in(a_{m_1}a_{m_3}, a_{m_2}a_{m_3}) \\ \gamma_7(a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}...a_{i_{n-2}}\gamma_7(a_{i_{n-1}}a_{i_n})), x=a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}...a_{i_{n-2}}a_{i_{n-1}}a_{i_n}, l(x)>2 \end{cases}$$

Define $\gamma_8 : \langle e, a_{m_1}, a_{m_2}, a_{m3} \rangle \to \langle e, a_{m_1}, a_{m_2}, a_{m3} \rangle$ by the formula

$$\gamma_8(x) = \begin{cases} e, x = e \\ a_{m_1}, x \in (a_{m_3}a_{m_1}, a_{m_2}a_{m_3}) \\ a_{m_2}, x \in (a_{m_1}a_{m3}, a_{m3}a_{m_2}) \\ a_{m_3}, x \in (a_{m_1}a_{m_2}, a_{m_2}a_{m_1}) \\ \gamma_8(a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}...a_{i_{n-2}}\gamma_8(a_{i_{n-1}}a_{i_n})), x = a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}...a_{i_{n-2}}a_{i_{n-1}}a_{i_n}, l(x) > 2 \end{cases}$$

Where $l(x)$ is the length of x and $i_s \in \{m_1, m_2, m_3\}$ for $s \in \{1,2,3,...,n\}$. For any $j \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ denote $\Xi^j_{A_1A_2A_3}(G_k) = \{x \in G_k \mid \gamma_j(u_{A_1A_2A_3}(x)) = e\}$. It will be subgroup of the group G_k.

Theorem. For the group G_k the following equality holds

$$\{K \mid K \angle G_k, [G_k : K] = 4\} = \bigcup_{j=1}^{7} \Xi^j_{A_1A_2A_3}(G_k)$$

where A_1, A_2 and A_3 is a partition of $N_k \setminus A_0$.

Now, we study the invariance property for above defined subgroups of the group G_k. For any element x of G_k, denote by $\overline{x}$ on element which satisfies the following condition: $x^{-1} \cdot \overline{x} \in \{a_i \mid i \in N_k\}$. The set of all direct successors of x is defined by $S(x) = \{y \in G_k \mid \overline{y} = x\}$.

Proposition. For $A_l = \{m_i\}$, $j \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ and $x, y \in G_k$ $\gamma_j(u_{A_1A_2A_3}(x)) = \gamma_j(u_{A_1A_2A_3}(y))$ and $\gamma_j(u_{A_1A_2A_3}(\overline{x})) = \gamma_j(u_{A_1A_2A_3}(\overline{y}))$ then $\langle \gamma_j(u_{A_1A_2A_3}(xa_i)) \mid xa_i \in S(x) \rangle = \langle \gamma_j(u_{A_1A_2A_3}(ya_i)) \mid ya_i \in S(y) \rangle$, where $\langle ... \rangle$ stands for ordered $k-$tuples.

Generally speaking Proposition does not hold for all cases. Now we will give one example, which this proposition does not hold.

Example. Let $K := \Xi_{\{1,4\}\{2\}\{3\}}(G_3)$ and we choose $x = a_1a_2a_4$ and $y = a_2a_4a_1$. Then we have $\gamma_1(u_{\{1,4\}\{2\}\{3\}}(x)) = \gamma_1(u_{\{1,4\}\{2\}\{3\}}(y)) = a_2$ and $\gamma_1(u_{\{1,4\}\{2\}\{3\}}(\overline{x})) = \gamma_1(u_{\{1,4\}\{2\}\{3\}}(\overline{y})) = a_3$ On the other handside,

$$\langle \gamma_1(u_{\{1,4\}\{2\}\{3\}}(xa_i)) \mid xa_i \in S(x) \rangle = \langle e, e, a_1 \rangle$$

$$\langle \gamma_1(u_{\{1,4\}\{2\}\{3\}}(ya_i)) \mid ya_i \in S(x) \rangle = \langle e, a_1, a_3 \rangle.$$

Namely, the invarience property does not hold: $\langle e, e, a_1 \rangle \neq \langle e, a_1, a_3 \rangle$

References

1. D.S.Malik, J.N.Mordeson, M.K.Sen: Fundamentals of Abstract Algebra, McGraw-Hill Com. (1997)

2. F.H.Haydarov: New normal subgroups for the group representation of the Cayley tree, Lobachevskii Journal of Mathematics 39(2), (2018), pp.213-217

3. U.A.Rozikov, F.H.Haydarov: Normal subgroups of finite index for the group representation of the Cayley tree, TWMS Jour.Pure.Appl.Math. 5,(2014),pp.234-240

4. U.A.Rozikov, F.H.Haydarov: Invariance property on group representations of the Cayley tree and its applications (preprint).

5. U.A.Rozikov: Gibbs measures on a Cayley tree. World Sci. Pub, Singapore (2013).

IKKI PARAMETRLI KUBIK STOXASTIK OPERATORNING QO'ZG'ALMAS NUQTALARI VA TIPI

Khamrayev A.Yu., Nurmatova Sh. Z.

Bizga

$$S^{n-1}=\left\{x\in R^n:\mathrm{x}_i\geq 0,\sum_{i=1}^{n}x_i=1,i=\overline{1,n}\right\}$$

(n-1) o'lchovli simpleks berilgan bo'lsin. Quyidagicha akslantirishni $W:S^{n-1}\to S^{n-1}$

$$W:x_l'=\sum_{i,j,k=1}^{n}P_{ijk,l}x_ix_jx_k \tag{1}$$

qaraymiz.
Bu yerda

$$\sum_{l=1}^{n}P_{ijk,l}=1,\ P_{ijk,l}=P_{jik,l}=P_{kij,l}=P_{ikj,l}=P_{jki,l}=P_{kji,l}\geq 0 \tag{2}$$

(1), (2) ga kubik stoxastik operator deb ataladi.

Biz quyidagi to'plamni ,ya'ni

$$S^2=\{(x;y;z)\in R^3:x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0,x+y+z=1\}$$

ni o'zini o'ziga akslantiruvchi $W:S^2\to S^2$

$$W:\begin{cases}x'=x(x^2+3xy+3xz)\\ y'=y(y^2+3xy+3yz+axz)\\ z'=z(z^2+3xz+3yz+bxy)\end{cases} \tag{3}$$

$$a\geq 0,b\geq 0,a+b=6,a\neq 3,b\neq 3$$

Operatorni qaraymiz. Bu (3) operatorni ikki parametrga bog'liq kubik stoxastik operator deb ataymiz va shu operatorning trayektoriya holatini simpleksning chegarasida o'rganamiz.

Ta'rif: $W(\lambda)=\lambda, \lambda=(x,y,z)$ tenglamaning yechimiga operatorning qo'zg'almas nuqtasi deyiladi.

Ushbu $Fix(W)=\{\lambda\in S^2 : W(\lambda)=\lambda\}$ to'plam bilan (3) operatorning qo'zg'almas nuqtalar to'plamini belgilaymiz.

Lemma1: (3) operatorning qo'zg'almas nuqtalari $Fix(W)=\{M_1,M_2,M_3,N_1,N_2,N_3,C\}, a\in(2;4)$ dan iboratdir, bu yerda

$$M_1=(0;0;1), M_2=(0;1;0), M_3=(1;0;0), N_1=(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}), N_2=(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0), N_3=(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}), C=(\frac{1}{2};\frac{4-a}{4};\frac{a-2}{4})$$

Lemma2: $a\in[0;2]\cup[4;6]$ da qo'zg'almas nuqtalar $Fix(W)=\{M_1,M_2,M_3,N_1,N_2,N_3\}$ dan iboratdir va:

1) $a\in[0;2]$ bo'lsa, N_3 nuqta tortuvchi, N_2 egar tipli;

2) $a\in[4;6]$ bo'lsa, N_2 nuqta tortuvchi, N_3 egar tipli bo'ladi.

Lemma3: C nuqta $a\in(2;4)$ da itaruvchi, N_2 va N_3 nuqtalar esa egar nuqtalar bo'ladi.

Quyidagicha belgilashlarni kiritamiz:

$$A_1=\left\{\lambda\in S^2, x=0, y<\frac{1}{2}, z>\frac{1}{2}\right\},\ A_2=\left\{\lambda\in S^2, x<\frac{1}{2}, y=0, z>\frac{1}{2}\right\},$$

$$A_3=\left\{\lambda\in S^2, x=0, y>\frac{1}{2}, z<\frac{1}{2}\right\},\ A_4=\left\{\lambda\in S^2, x<\frac{1}{2}, y>\frac{1}{2}, z=0\right\},$$

$$A_5=\left\{\lambda\in S^2, x>\frac{1}{2}, y<\frac{1}{2}, z=0\right\},\ A_6=\left\{\lambda\in S^2, x>\frac{1}{2}, y=0, z<\frac{1}{2}\right\},\ \partial S^2=S^2\setminus\{\text{int}\,S^2\}.$$

Teorema: $\forall\lambda\in\partial S^2$ uchun

$$\lim_{n\to\infty}W^n(\lambda)=\begin{cases}M_1, \lambda\in A_1\cup A_2\\ M_2, \lambda\in A_3\cup A_4\\ M_3, \lambda\in A_5\cup A_6\end{cases}$$

o'rinli bo'ladi.

Adabiyotlar

1. *Davronov R. R., Jamilov (Zhamilov) U. U., Ladra M.* Conditional cubic stochastic operator // J. Difference Equ. Appl.-2015.-V. 21, № 12.-P. 1163-1170. DOI: 10.1080/10236198.2015.1062481.

2. *Ganikhodjaev N. N., Ganikhodjaev R. N., Jamilov U. U.* Quadratic stochastic operators and zero-sum game dynamics // Ergod.Th.and Dynam.Sys.-2015, vol. 35, no. , pp. 1443-1473. DOI: 10.1017/etds.2013.109.

3. *Хамраев А. Ю., Турсунова А. Х.* Полное описание поведения траекторий одного кубического оператора // Проблемы вычислительной и прикладной математики.-2020.-Т. 2, № 26.-С. 32-38.
4. *Rozikov U. A., Khamraev A. Yu.* On cubic operators defined on finite-dimensional simplices // Ukrainian Math. J.-2004.-V. 56, № 10.-P. 1699−1711. DOI: 10.1007/s11253-005-0145-3.

DESCRIPTIONS OF ELEMENTS OF THE ORTHOGONAL GROUP OF THE TWO-DIMENSIONAL BILINEAR-METRIC SPACE WITH THE FORM $x_1y_1 + 5x_2y_2$ OVER THE FIELD OF RATIONAL NUMBERS

Khadjiev D., Beshimov G., Solieva M.
National University of Uzbekistan

Let Q be the field of rational numbers, Q^2 be the 2-dimensional vector space over Q. For $x = (x_1, x_2) \in Q^2$ and $y = (y_1, y_2) \in Q^2$ put ц$(x, y) = x_1y_1 + 5x_2y_2$. Consider the two-dimensional bilinear-metric space Q^2 with the bilinear form ц(x, y).

Definition 1 . *A mapping* $F: Q^2 \to Q^2$ *is called* ц*-orthogonal if* ц$(Fx, Fy) =$ ц$(x, y), \forall x, y \in Q^2$.

Denote the set of all ц-orthogonal transformations of Q^2 by $O($ц$, Q^2)$.

Proposition 1 *Every* ц*-orthogonal transformation of* Q^2 *is linear.*

Proposition 1 implies that every ц-orthogonal transformation of Q^2 has a matrix form.

Proposition 2 . *Let* $H \in O($ц$, Q)$. *Then* $det(H) = 1$ *or* $det(H) = -1$.

$O($ц$, Q^2)$ is a group with respect to the multiplication operation of matrices. For a description of an evident form of elements of $O($ц$, Q^2)$, we introduce an algebraic structure in Q^2 using the bilinear form ц(x, y).

Consider an element $(a_1, a_2) \in Q^2$ in the the following form $a = a_1 + \sqrt{-5}a_2$. The set of all elements $a = a_1 + \sqrt{-5}a_2$, where $(a_1, a_2) \in Q^2$, denote by $Q^2(\sqrt{-5})$. We define the addition and the multiplication operations of elements $a = a_1 + \sqrt{-5}a_2$, $b = b_1 + \sqrt{-5}b_2$ of the set $Q^2(\sqrt{-5})$ as follows: $a + b = (a_1 + b_1) + \sqrt{-5}(a_2 + b_2)$, $a \cdot b = (a_1 \cdot b_1 - 5a_2 \cdot b_2) + \sqrt{-5}(a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$.

Proposition 3 .$Q^2(\sqrt{-5})$ *with the these the addition and the multiplication operations is a field.*

Below we will consider the bilinear-metric space $\{Q^2,$ ц$(x, y)\}$ in the form $\{Q^2(\sqrt{-5}),$ ц$(x, y)\}$.

Let $a \in Q^2(\sqrt{-5})$. Consider in $Q^2(\sqrt{-5})$ the multiplication operator by an element $a \in Q^2(\sqrt{-5})$: $F: Q^2(\sqrt{-5}) \to Q^2(\sqrt{-5})$, where $F(x) = a \cdot x, \forall x \in Q^2(\sqrt{-5})$. Denote this operator as follows:F_a. Denote by Щ(x) the quadratic form $x_1^2 + 5x_2^2$.

Theorem 1 . *Let* $a \in Q^2(\sqrt{-5})$. *Then* F_a *is* ц*-orthogonal if and only if* Щ$(a) = 1$.

Denote the set $\{F_a, \forall a \in Q^2(\sqrt{-5}) | \text{Щ}(a) = 1\}$ by $SO(Q^2(\sqrt{-5}))$.

For an arbitrary element $x = x_1 + \sqrt{-5}x_2 \in Q^2(\sqrt{-5})$, we set $W(x) = \overline{x} = x_1 - \sqrt{-5}x_2$.

Proposition 4 . *The operator* $W: Q^2(\sqrt{-5}) \to Q^2(\sqrt{-5})$ *is* ц*-orthogonal.*

Proposition 5 . *Let* $a \in Q^2(\sqrt{-5})$. *Then the multiplication* $W \cdot F_a$ *is* ц*-orthogonal if and only if* Щ$(a) = 1$.

Denote the set $\{W \cdot F_a, \forall a \in Q^2(\sqrt{-5}) | \text{Щ}(a) = 1\}$ by $WSO(Q^2(\sqrt{-5}))$.

Theorem 2 . *The equality* $O(\text{ц}, Q^2) = SO(Q^2(\sqrt{-5})) \cup WSO(Q^2(\sqrt{-5}))$ *holds.*

Let $a = a_1 + \sqrt{-5}a_2) \in Q^2(\sqrt{-5})$. Denote by Ш$_a$ the matrix of the form $\begin{pmatrix} a_1 & -5a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$.

Proposition 6 . *Let* $a = a_1 + \sqrt{-5}a_2 \in Q^2(\sqrt{-5})$ *be such that* Щ$(a) = 1$. *Then* $F_a = \text{Ш}_a$.

Proposition 6 means that Ш$_a$ is he matrix form of the operator F_a in the basis $e_1 = (1.0), e_2 = (1,1)$ in Q^2.

Theorem 2 and Proposition 6 imply that a completely description of all ц-orthogonal transformations of Q^2 reduced to a description of all pairs (x, y) of rational numbers x, y such that $x^2 + 5y^2 = 1$.

The answer to this problem is given in the following theorem

Theorem 3 . (1). *There is not exists an element* (x, y) *such that* $x = 0$ *and* $x^2 + 5y^2 = 1$.

(2). There exists only two pairs $(x, y) \in Q^2$ such that $y = 0$ and $x^2 + 5y^2 = 1$. They are (1,0) and $(-1,0)$.

(3). Assume that $(x, y) \in Q^2$ such that $y \neq 0$ and $x^2 + 5y^2 = 1$. Then there exists $r \in Q$, such that $r \neq 0$ and the following equalities hold

$$x = \frac{5 - r^2}{5 + r^2}, y = \frac{2r}{5 + r^2}.$$

Conversely, assume that $r \in Q$, $r \neq 0$, and $(x, y) \in Q^2$ such that the above equalities hold. Then $y \neq 0$ and the equality $x^2 + 5y^2 = 1$ holds.

ONE-DIMENSIONAL EXTENSION OF ONE FOUR-DIMENSIONAL FILIFORM LEIBNIZ ALGEBRA

Kenjayeva M
National University of Uzbekistan,
maftuna0830@gmail.com

Central extensions play an important role in quantum mechanics: one of the earlier encounters is by means of Wigner's theorem which states that a symmetry of a quantum mechanical system determines a unitary transformation of a Hilbert space. In the present paper we consider a central extension of Leibniz algebras, which is similar to the notion of a central extension of other class of algebras. It should be noted that there are many work devoted to the central extensions of algebras, for example Lie algebras, Jordan algebras, Leibniz algebras, Novikov algebras and others [1, 3, 4].

Leibniz algebras were introduced in 1993 by Jean-Louis Loday, which satisfated Leibniz identity:

$$[x,[y,z]]=[[x,y],z]-[[x,z],y]$$

Let A be a finite-dimensional Leibniz algebra. For this algebra we define sequence:

$$A^1 = A,\ A^{k+1} = [A^k, A],\ k \geq 1.$$

A Leibniz algebra L is called nilpotent if there exists $s \in N$ such that $L^s = \{0\}$.

Let $(A,\cdot)$ Leibniz algebra over C and V a vector space over C. The C- linear space $Z^2(A,V)$ is defined as the set of all bilinear maps $\theta: A\times A\to V$ such that $\theta(x,yz)=\theta(xy,z)-\theta(xz,y)$.

These elements will be called cocycles. For linear map f from A to V, if we define $\partial f: A\times A\to V$ by $\partial f(x,y)= f(xy)$, then $\partial f \in Z^2(A,V)$.

We define $B^2(A,V)=\{\theta=\partial f : f\in Hom(A,V)\}$. We define the second cohomology space $H^2(A,V)$ as the quotient space $Z^2(A,V)/B^2(A,V)$.

Let A be a Leibniz algebra of dimension m over C and V be a C-vector space of dimension k. For $\theta\in Z^2(A,V)$, define on the linear space $A_\theta = A\oplus V$ the bilinear product "$[-,-]_{A_\theta}$" by $[x+x',y+y']_{A_\theta} = xy+\theta(x,y)$ for all $x,y\in A, x',y'\in V$. The algebra A_θ is called a k-dimensional central extension of A by V.

In this work, we consider one-dimensional central extension of 4-dimensional filiform Leibniz algebra

R: $[e_1,e_1]=e_3$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_3,e_1]=e_4$.

Note that the classification of four dimensional nilpotent Leibniz algebras is obtained in [2].

In the following table, we give the description of second cohomology space and automorphism of the algebra R:

A	Automorphism	$Z^2(A)$	$B^2(A)$	$H^2(A)$

R	ц = $\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ y & x+y & 0 & 0 \\ z & z & x(x+y) & 0 \\ t & k & xz & x^2(x+y) \end{pmatrix}$	$\langle \Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{21}, \Delta_{22}, \Delta_{31}, \Delta_{41} \rangle$	$\langle \Delta_{11} + \Delta_{21}, \Delta_{31} \rangle$	$\langle \Delta_{12}, \Delta_{21}, \Delta_{22}, \Delta_{41} \rangle$

Theorem. Any one-dimensional non-split central extension of the algebra R is isomorphic to the following algebras:

L_1: $[e_1, e_1] = e_3$, $[e_2, e_1] = e_3$, $[e_3, e_1] = e_4$, $[e_4, e_1] = e_5$.

L_2: $[e_1, e_1] = e_3$, $[e_1, e_2] = 6e_5$, $[e_2, e_1] = e_3$, $[e_2, e_2] = e_5$, $[e_3, e_1] = e_4$, $[e_4, e_1] = e_5$.

References

1. Adashev J.Q., Camacho L.M., Omirov B.A. *Central extensions of null-filiform and naturally graded filiform non-Lie Leibniz algebras*. Journal of Algebra, 479 (2017). 461-486.

2. Albeverio S., Omirov B.A, Rakhimov I.S. *Classification of 4-dimensional nilpotent complex Leibniz algebras*. Extracta Math., 21(3) (2006) 197-210

3. Karimjonov I., Kaygorodov I., Khudoyberdiyev A**.** *The algebraic and geometric classification of nilpotent Novikov algebras.* Journal of Geometry and Physics, 143(2019), p.11-21.

4. Skjelbred T., Sund T. *On the classification of nilpotent Lie algebras*, Technical report Mathematisk Institutt, Universitetet i Oslo, (1977)

ℓ_p FAZOSI BIRLIK SFERASINING ANIQLOVCHI TO'PLAMI

Mavlonov I.M

O`zbekiston Milliy Universiteti

mavlonovismoilmurodulla97@gmail.com

$(X, +, \cdot)$ – chiziqli fazo bo`lsin. Quyidagi uchta aksiomani qanoatlantiruvchi $\|\cdot\| : X \times X \to \mathbb{R}$ akslantirish norma deyiladi:

1) $\|x\| \geq 0$ va $\|x\| = 0$ faqat va faqat $x = \theta$, bu yerda θ – nol vektor;

2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \|x\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$ va $\forall x \in X$;

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$.

$(X, \|\cdot\|)$ – normalangan fazo qat'iy normalangan deyiladi, agar $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ tenglikdan $y = \lambda x$ tengligi kelib chiqsa, bu yerda $x, y \in X$ va $\lambda \in \mathbb{R}$.

$(X,\|\cdot\|)$ normallangan fazo va A, B to'plamlar X to'plamning qism to'plamlari bo'lsin. Agar barcha $x\in A$ uchun $\|b_1-x\|=\|b_2-x\|$ munosabatdan $b_1=b_2$ tengligi kelib chiqsa, A to'plam B to'plam uchun aniqlovchi to'plam(determining set) deyiladi. Ushbu tushuncha birinchi bo`lib, 1953-yilda L.M.Blumental tomonidan metrik fazolar uchun kiritilgan([1]). Shundan so`ng, boshqa mualliflar tomonidan aniqlovchi to`plamlar orqali chekli o`lchamli normalangan fazolarning Yevklid fazosi bo`lishlilik mezoni keltirilgan ([2]). 3-adabiyotda aniqlovchi to`plamlar yordamida chekli o`lchamli normalangan fazolarning qat'iy normalangan bo`lishlilik mezoni keltririlgan ([3]).

$(X,\|\cdot\|)$ normallangan fazodagi birlik sharni va birlik sferani mos ravishda $B(X)$ va $S(X)$ orqali belgilaymiz, ya'ni $B(X)=\{x\in X\,|\,\|x\|\le 1\}$ va $S(X)=\{x\in X\,|\,\|x\|=1\}$. Agar $e\in B(X)$ elementi uchun $e=\frac{1}{2}(x+y),\ x,y\in B(X)$ tengligidan $e=x=y$ munosabati kelib chiqsa, u holda e nuqta $B(X)$ birlik sharning ekstremal nuqtasi deyiladi. $B(X)$ birlik sharning barcha ekstremal nuqtalari to`plamini $extr(B(X))$ kabi belgilaymiz. Ravshanki, $extr(B(X))\subset S(X)$. Bundan tashqari, agar $(X,\|\cdot\|)-$qat'iy normalangan fazo bo`lsa, u holda $extr(B(X))=S(X)$ tengligi o`rinli bo`ladi. ℓ_∞ bu barcha chegaralangan ketma-ketliklar to`plami bo`lsin, ya'ni $\ell_\infty=\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}\,|\sup_{n\ge1}|x_n|<\infty\}$. Ushbu ℓ_∞ to`plamning $\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ elementlari uchun $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}+\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\overset{def}{=}\{x_n+y_n\}_{n=1}^{\infty}$ kabi binar amal va $\lambda\cdot\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\{\lambda x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$ kabi songa ko`paytirish amali aniqlansa, ℓ_∞ chiziqli fazo bo`ladi. $\ell_\infty$ chiziqli fazosi quyidagicha aniqlangan $\|\cdot\|_\infty$ normaga nisbatan Banax fazosi bo`ladi:
$\|\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\|_\infty=\sup_{n\ge1}|x_n|,\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in\ell_\infty$. $p\ge1$ soni uchun ℓ_p orqali ℓ_∞ fazosining quyidagicha aniqlangan qism-fazosini belgilaymiz:

$\ell_p=\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in\ell_\infty\,|\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty\}$. ℓ_p fazosi $\|\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\|_p=(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ kabi aniqlangan normaga nisbatan Banax fazosi bo`ladi. Ma'lumki, $(\ell_p,\|\cdot\|_p)$ normalangan fazosi $p>1$ va $p\ne\infty$ bo`lganda qat'iy normallangandir. $(\ell_p,\|\cdot\|_p)$ normalangan fazosida $e^{(n)}$ orqali quyidagicha aniqlangan elementlarni belgilaymiz:
$e^{(n)}=\{0,\ldots,0,1,0,\ldots\}$, bu yerda 1 soni $n-$chi o`rinda turibdi. Ravshanki, har qanday $n\in\mathbb{N}$ uchun $e^{(n)}\in S(\ell_p)$, bu yerda $1\le p\le\infty$.

1-teorema. Agar $1\le p\le\infty$ *bo`lsa, u holda ixtiyoriy n natural soni uchun* $e^{(n)}\in extr(B(\ell_p))$ *munosabati o`rinli bo`ladi.*

1-teorema yordamida ℓ_p fazosi birlik sharining ekstremal nuqtalari to`plami birlik sfera uchun aniqlovchi to`plam bo`lishi isbot qilinadi.

2-teorema. $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ *normalangan fazosi berilgan bo`lsin* $(1 \le p \le \infty)$. *U holda* $extr(B(\ell_p))$ *to`plami* $S(\ell_p)$ *birlik sferasi uchun aniqlovchi to`plam bo`ladi.*

Adabiyotlar

1. Blumenthal L.M., *Theory and Applications of Distance Geometry*, Clarendon Press, Oxford, 1953.
2. Kalisch G.K., Straus E.G., *On the determination of points in a Banach space by their distances from the points of a given set*, An. Acad. BrasilCi. V.29. P. 501-519. 1957.
3. Geher G.P.,*Is it possible to determine a point lying in a simplex if we know the distances from the vertices*, J. Math. Anal.Appl. V. 439.No. 2. P. 651-663. 2016.

DISCRET LAPLASIAN OPERATORINING GREEN FUNKSIYASI UCHUN ASIMPTOTIKA

Madatova F.A., Mo'minov Z.E.
O'zbekiston Milliy Universiteti

Panjaradagi Shredinger operatorlari va ularning qattiq jismlar fizikasidagi tadbiqlari ahamiyatlidir. Panjaradagi maydonlar nazariyasida bir zarracha va ko'p zarrachali Shredinger operatorlarining panjaradagi anologlari bo'lgan diskret Shredinger operatorlari qaralgan. Shuning uchun bunday operatorlarning spektrlarini tushinish matematik fizikada markaziy ahamiyatga ega mavzudir.

$\mathbb{Z}$ - bir o'lchovli panjara, $\mathbb{T} = (\mathbb{R} \diagup 2\pi\mathbb{Z}) = (-\pi, \pi]$ - bir o'lchovli tor va $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ bo'lsin.

$H_{\lambda\mu}$ operatorni quyidagicha aniqlaymiz:

$$H_{\lambda\mu} = H_0 - V$$

H_0 operator $L^2(\mathbb{T})$ fazosidagi $\varepsilon(\bullet)$ uzluksiz funksiyaga ko'paytirish operatori:

$$(H_0 f)(p) = \varepsilon(p) f(p), \qquad f \in L^2(\mathbb{T}), \quad p \in \mathbb{T},$$

bunda

$$\varepsilon(p) = (1 - \cos p) + \beta(1 - \cos 2p), \qquad \beta \ge 0, \quad p \in \mathbb{T},$$

V esa uch o'lchovli integral operator:

$$(Vf)(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (\mu + \lambda \cos(p - q)) f(q) dq, \qquad f \in L^2(\mathbb{T}).$$

Ma'lumki H_0 funksiyaga ko'paytirish operatori, V chegaralangan o'z-o'ziga qo'shma operator bo'lib, rangi uchga teng. Shuning uchun Weyl teoremasiga [1]

ko'ra muhim spektr uchun $\sigma_{ess}\left(H_{\lambda\mu}\right)=\sigma_{ess}\left(H_0\right)$ tenglik o'rinli va $H_{\lambda\mu}$ operatorning muhim spektri $\sigma_{ess}\left(H_{\lambda\mu}\right)$ haqiqiy o'qdagi quyidagi kesmadan iborat:

$$\sigma_{ess}\left(H_{\lambda\mu}\right)=\left[\varepsilon_{\min},\,\varepsilon_{\max}\right],$$

bu yerda

$$\varepsilon_{\min}=0,\quad \varepsilon_{\max}=\begin{cases}2, & 0\le\beta\le\dfrac{1}{4}\\ \dfrac{(1+4\beta)^2}{8\beta}, & \beta>\dfrac{1}{4}\end{cases}.$$

H_0 operatorning Green funksiyasi quyidagi integral yordamida aniqlanadi:

$$r_0\left(x-y,z\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\frac{e^{i(x-y,q)}}{\varepsilon\left(p\right)-z}dq,\quad z\in\left[\varepsilon_{\min},\,\varepsilon_{\max}\right],\ \ x,y\in\mathbb{Z},$$

i mavhum birlik.

Teorema. Har bir $x\in\mathbb{Z}$ uchun

$$r_0\left(x,z\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\frac{e^{i(x,p)}}{\varepsilon\left(p\right)-z}dp,\qquad z\in\left(-\infty;0\right),$$

funksiya $\left(-\infty;0\right)$ intervalda z ning funksiyasi sifatida musbat va monoton o'suvchi.

a) $\beta>0$ bo'lganda Geen funksiyasi uchun quyidagi asimptotika o'rinli:

$$r_0\left(x,z\right)=O\left(\frac{1}{\left|z\right|^{n_0+1}}\right),\qquad z\to-\infty$$

bu yerda

$$n_0=\left[\frac{\left|x\right|+1}{2}\right].$$

b) . $\beta=0$ bo'lganda Geen funksiyasi uchun quyidagi asimptotika o'rinli:

$$r_0\left(x,z\right)=O\left(\frac{1}{\left|z\right|^{n_0+1}}\right),\qquad z\to-\infty$$

bu yerda

$$n_0=\left|x\right|.$$

c) Bundan tashqari quyidagi tenglik o'rinli:

$$\lim_{z\to e_{\min}-0}r\left(x,z\right)=+\infty,$$

Adabiyotlar

1. Rid. M., Saymon B. Metodiy sovremennoy matematicheskoy fiziki. T.I. Funksionalniy analiz. M.: Mir.1977

2. Rid. M., Saymon B. Metodiy sovremennoy matematicheskoy fiziki. T.4. Analiz operatorov. M.: Mir. 1982.

3. J. I. Abdullayev, R. N. G'anixo'jayev, M. H.Shermatov, O. I.Egamberdiyev. Funksional analiz va integral tenglamalar, Toshkent. 2013, Yangi asr avlodi nashriyoti.
4. Sarimsoqov T.A. Funksional analiz kursi, Toshkent: O'qituvchi, 1986.

MAXSUS KO'RINISHDAGI YIG'INDI UCHUN LIMIT TEOREMA

Nazarov Z.A., Ismoilova M.O
O'zbekiston Milliy Universiteti

Faraz qilaylik, $\{\xi_n,\ n\geq 1\}$ biror tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lsin. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanining ko'p sohalaridagi muhim masalalarini yechish bu miqdorlar yig'indisining $S_n=\xi_1+...+\xi_n,\ n\to\infty$ dagi asimptotik holatini aniqlashga keladi. S_n yig'indining asimptotik holati ehtimollar nazariyasida keng o'rganilgan va bunda katta sonlar qonuni, kuchaytirilgan katta sonlar qonuni va markaziy limit teoremalar muhim o'rin tutadi. Shu bilan birga ko'pgina masalalarda $\sum_{k=1}^{n} f_{nk}(S_k)$ ko'rinishdagi tasodifiy miqdorlarning asimptotik holatini o'rganish zaruriyati paydo bo'ladi.

(Ω, A, P) ixtiyoriy ehtimollar fazosi va $\{\xi_n, n\geq 1\}$ unda aniqlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lsin.

Ta'rif . Agar ixtiyoriy $x\in R$ uchun ushbu

$$P\left(\frac{\xi_1+...+\xi_n-M(\xi_1+...+\xi_n)}{\sqrt{D(\xi_1+...+\xi_n)}}\leq x\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\Phi(\mathrm{x})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda $\{\xi_n, n\geq 1\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi markaziy limit teoremani qanoatlantiradi deyiladi.

Teorema 1 (Lindeberg). Agar $\{\xi_n, n\geq 1\}$ bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun Lindeberg sharti bajarilsa, u holda ixtiyoriy $x\in R$ uchun

$$P\left(\frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n-(\mathrm{a}_1+\mathrm{a}_2+...+\mathrm{a}_n)}{B_n}\leq x\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\Phi(\mathrm{x}).$$

Faraz qilaylik, $\{\xi_n, n\geq 1\}$ bog'liqsiz va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, $M\xi_i=0$ va $D\xi_i=\sigma^2>0$ bo'lsin. Quyidagicha belgilashlarni kiritamiz:

$$S_0=0,\quad S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i,\quad B_n^2=DS_n,\quad F(x)=P(\xi_1<x),\quad n\in N.$$

Ma'lumki, $MS_n=0,\ B_n^2=\sigma^2 n.$ Quyidagi maxsus ko'rinishdagi yig'indining matematik kutilmasi va dispersiyanini hisoblaymiz hamda dispersiyaning asimptotik munosabatlarini o'rganamiz:

$$J_n^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} m_n^{\,k} S_k^{(n)}, \quad m_n = 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \ \alpha \in R \tag{1}$$

Avval $J_n^{(n)}$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini hisoblaymiz.

$$MJ_n^{(n)} = M\left(\sum_{k=1}^{n} m_n^{\,k} S_k^{(n)}\right) = \sum_{k=1}^{n} m_n^{\,k} MS_k^{(n)} = 0.$$

$J_n^{(n)}$ tasodifiy miqdorning ko'rinishini quyidagicha yozish mumkin:

$$J_n^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} m_n^{\,k} S_k^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} m_n^{\,k} \sum_{i=1}^{k} \xi_i^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_n^{\,n+1} - m_n^{\,i}}{m_n - 1} \xi_i^{(n)} \tag{2}$$

Endi $J_n^{(n)}$ tasodifiy miqdorning dispersiyasini hisoblaymiz. $\xi_i^{(n)}$ tasodifiy miqdorlarning bog'liqsizligi va (2) munosabatga ko'ra quyidagiga egamiz:

$$DJ_n^{(n)} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{m_n^{\,n+1} - m_n^{\,i}}{m_n - 1}\right)^2 D\xi_i^{(n)} = \frac{\sigma_n^{\,2}}{(m_n - 1)^2} \sum_{i=1}^{n}\left[m_n^{\,2n+2} - 2m_n^{\,n+i+1} + m_n^{\,2i}\right] =$$

$$= \frac{\sigma_n^{\,2}}{(m_n - 1)^2}\left[n \cdot m_n^{\,2n+2} - 2\frac{m_n^{\,n+2}(m_n^{\,n} - 1)}{m_n - 1} + \frac{m_n^{\,2}(m_n^{\,2n} - 1)}{m_n^{\,2} - 1}\right]$$

Analiz kursidan ma'lumki, $m_n^{\,n} \to e^{\alpha}$ munosabat o'rinli. Demak $n \to \infty$ da quyidagi asimptotik munosabat o'rinli:

$$B_n^2 = DJ_n^{(n)} \sim \frac{n^3 \sigma_n^{\,2}}{2\alpha^3}\left[e^{2\alpha}(2\alpha - 3) + 4e^{\alpha} - 1\right], \ \alpha \neq 0. \tag{3}$$

(3) munosabat (1) yig'indi dispersiyasining asimptotikasidir.

Endi $J_n^{(n)}$ yig'indining katta sonlar qonuniga bo'ysunishini tekshiramiz:

(3) munosabatga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n^3 \sigma_n^{\,2}}{2\alpha^3}\left[e^{2\alpha}(2\alpha - 3) + 4e^{\alpha} - 1\right] \neq 0, \ \alpha \neq 0.$$

Teorema 2. Faraz qilaylik har bir $n \in N$ da $\left\{\xi_i^{(n)}, i \geq 1\right\}$ bog'liqsiz va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, $M\xi_i^{(n)} = 0$ va $D\xi_i^{(n)} = \sigma_n^{\,2}$ bo'lsin. U holda

$$P\left(\frac{\alpha\sqrt{2\alpha} \cdot J_n^{(n)}}{\sigma_n n\sqrt{n}} < x\right) \Rightarrow N(0,1), \quad n \to \infty$$

munosabat o'rinli.

Adabiyotlar

1. Боровков А.А.: ,,Теория вероятностей" (Москва-1986).

2. Ширяев А. Н. "Вероятность" – М; Наука, 1980.

3. Колмогоров А.Н. "Основные понятия теории вероятностей" –М. Л., 1936.

4.Nazarov Z.A. Tasodifiy miqdorlar yig'indisining asimptotik holatlari, Respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi "Fundamental matematika muammolari va ularning tatbiqlari", 25-may 2019-yil Navoiy.

GIBBS MEASURES FOR AN ISING MODEL WITH CONTINUOUS SPIN VALUES

Nazirov M. A., Abdullayev N. SH., Ergashev B. Z.
National University of Uzbekistan
madalixon@inbox.ru, na4667069@mail.com, ergashevbehruz97@mail.com

An increasing attention to models with [0,1] spin values on a Cayley tree has been giving since the past ten years. There are some works of Gibbs measure of models with nearest-neighbor interactions with the set of spin values $[0,1]$. In this thesis we consider Ising model with nearest-neighbor interactions and with the set $[0,1]$ of spin values on a Cayley tree is considered and solve an open problem in [2] under a certain condition.

The Ising model with nearest-neighbor interactions defined by the Hamiltonian:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y). \tag{1.1}$$

W_l stands for a 'sphere' and V_l for a 'ball' on the tree, of radius $l = 1,2,...,$ centered at a fixed vertex x^0 (a root):

$$W_l = \{x \in V : d(x,x^0) = l\},\ V_l = \{x \in V : d(x,x^0) \le l\};$$

Here the distance $d(x,y),\ x,y \in V$, is the length of (i.e. the number of edges in) the shortest path connecting x with y.

Let $h : x \in V \to h_x = (h_{t,x}, t \in [0,1]) \in \mathbb{R}^{[0,1]}$ be mapping of $x \in V / \{x^0\}$ with $|h_{t,x}| < C$ where C is a constant which does not depend on t. Given $n = 1,2,...,$ consider the probability distribution $\mu^{(n)}$ on $\Omega_{V_n} := [0,1]^{V_n}$ defined by

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\left(-\beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\sigma(x),x}\right), \tag{1.2}$$

where $\sigma_n : x \in V_n \to \sigma(x)$ and Z_n is the corresponding partition function:

$$Z_n = \int_{\Omega_{V_n}} \exp\left(-\beta H(\tilde{\sigma}) + \sum_{x \in W_n} h_{\tilde{\sigma}(x),x}\right) \lambda_{V_n}(d\tilde{\sigma}_n). \tag{1.3}$$

The probability distributions $\mu^{(n)}$ are compatible if for any $n \geq 1$ and $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$:

$$\int_{\Omega_{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee w_n)\lambda_{W_n(d(w_n))} = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}). \quad (1.4)$$

Here $\sigma_{n-1} \vee w_n \in \Omega_{V_n}$ is the concatenation of σ_{n-1} and w_n. In this case there exists a unique measure μ on Ω_V such that, for any n and

$$\mu\left(\left\{\sigma\Big|_{V_n} = \sigma_n\right\}\right) = \mu^{(n)}(\sigma_n).$$

From [3] we get the probability distributions $\mu^{(n)}(\sigma_n)$. $n = 1,2,...,$ in (1.2) are compatible iff for any $x \in V / \{x^0\}$ the following equation holds:

$$(A_k f)(t) := \prod_{y \in S(x)} \frac{\int_0^1 \exp(\theta t u) f(u,y)du}{\int_0^1 f(u,y)du} = f(t,x). \quad (1.5)$$

Here $f(t,x) = \exp(h_{t,x} - h_{0,x})$, $t \in [0,1]$ and $\theta = J\beta, \beta -$ inverse temperature.

From the analysis of solutions to (1.5) is not easy, we consider solution in the class of translation-invariant functions $f(t,x)$, i.e., $f(t,x) = f(t)$, for any $x \in V$. For the case $k = 1$ operator A_k has exactly one positive fixed point (see [3]). That's why we consider the case $k \geq 2$.

Denote

$$P_k = \left\{ f \in C[0,1] : 1 \leq f(t) \leq e^{\theta k} \right\}, k \geq 2.$$

From P_k is a closed and convex subset of $C[0,1]$. It's easy to check that if $f \in C[0,1]$ is a positive solution of the equation $A_k f = f$, then $f \in P_k$. By virtue of article [1], The set $A_k(P_k)$ is relatively compact in $C[0,1]$. Thus, from Schauder's fixed point theorem one gets the following:

The operator A_k has at least one positive fixed point in P_k. Also, every positive fixed point of A_k belongs to P_k.

Now we give a sufficient condition of uniqueness of fixed points of A_k i.e., in the language of Gibbs measure, the result is following:

Theorem. For the Ising model with spin values in [0,1] on the Cayley tree of order two the following statements are true:

(1) If the temperature T satisfies the condition $T \geq \frac{1}{2J} ln \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, then there is a unique translation invariant splitting Gibbs measure for the ferromagnetic Ising model.

(2) There is a unique translation invariant splitting Gibbs measure for the antiferromagnetic Ising model.

References

1. Eshkabilov Yu.Kh., Haydarov F.H., Rozikov U.A. : Uniqueness of Gibbs measure for models with uncountable set of spin values on a Cayley tree. Math. Phys. Anal. Geom. 16(1) (2013), 1-17.
2. Eshkabilov Yu.Kh., Nodirov, Sh.D., Haydarov F.H.: Positive fixed points of quadratic operators and Gibbs Measures. Positivity. V. 20, No. 4, 929-943.
3. Rozikov, U.A. and Eshkabilov, Yu.Kh. : On models with uncountable set of spin values on a Cayley tree: Integral equations. Math. Phys. Anal. Geom. 13 (2010), 275-286.

MATRISALI O‘YINNI CHIZIQLI DASTURLASH YORDAMIDA YECHISHNING DASTURIY TA’MINOTINI ISHLAB CHIQISH

Radjabov T.A., Egamberdiyev T.X
Samarqand Davlat Universiteti

To‘lovlar matrisasi $H=(a_{ij})$, $i\in M=\{1,2,...,m\}$, $j\in N=\{1,2,...,n\}$, bo‘lgan $m\times n-$ o‘lchamli o‘yin berilgan bo‘lsin. O‘yinning bahosini γ_H orqali, I va II o‘yinchi sof strategiyalarini A_i, B_j, aralash strategiyalarini esa $p=(p_1,...,p_m)$, $q=(q_1,...,q_n)$ orqali belgilaymiz.

1) $\gamma_H=\gamma_{H_{i'}}$ $(\gamma_H=\gamma_{H^{j'}})$;

2) I (II) o‘yinchining $G_{H_{i'}}$ $(G_{H^{j'}})$ o‘yindagi q^* (p^*) optimal aralash strategiyasi G_H o‘yinda ham optimal bo‘ladi;

3) agar $p^*_{(i')}=(p^*_i,...,p^*_{i'-1},p^*_{i'+1},...,p^*_m)$ I o‘yinchining $(q^*_{(j')}=(q^*_i,...,q^*_{j'-1},q^*_{j'+1},...,q^*_n)$ II o‘yinchining) $G_{H_{i'}}$ $(G_{H^{j'}})$ o‘yindagi optimal strategiyasi bo‘lsa, $p^*=(p^*_i,...,p^*_{i'-1},0,p^*_{i'+1},...,p^*_m)$ $(q^*=(q^*_i,...,q^*_{j'-1},0,q^*_{j'+1},...,q^*_n))$ I o‘yinchining (II o‘yinchining) G_H o‘yindagi optimal strategiyasi bo‘ladi.

Bu teoremadan foydalangan holda matritsali o‘yin o‘lchamini kichraytirish quyidagicha bajariladi.

Agar to‘lovlar matrisasining biror i- satri (j-ustuni) shu matrisa qolgan satrlari (ustunlari) qavariq kombinasiyasidan katta (kichik) bo‘lmasa, o‘yinni yechish uchun shu satrni (ustunni) o‘chirish mumkin. Bunda I (II) o‘yinchining p^* (q^*) optimal strategiyasida $p^*_i=0$ $(q^*_j=0)$ deb olinadi.

2x2 - o‘yinni yechish

Endi yuqorida keltirilgan mulohazalardan foydalanib 2x2-o‘yinni yechish bilan shug‘ullanamiz.

Faraz qilaylik, 2x2 o‘yin $H=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ to‘lovlar matrisasi bilan berilgan va u egar nuqtaga ega bo‘lmasin. o‘yinchilarning optimal strategiyalari $p^*=(p_1, p_2)$, $q^*=(q_1, q_2)$ va o‘yin bahosi γ ni topish talab qilinadi.

Quyidagi tasdiq o‘rinli: agar 2x2-o‘yinda egar nuqta mavjud bo‘lmasa, o‘yinchilarning ikkala strategiyalari ham aktiv bo‘ladi, ya’ni, $p_i>0,\ i=1,2;$ $q_j>0,\ j=1,2.$

Shuning uchun, 1.3-teorema natijasiga ko‘ra, agar I o‘yinchi $p^*=(p_1, p_2)$ optimal aralash strategiyani qo‘llasa va II o‘yinchi $j=1$ yoki $j=2$ strategiyalaridan foydalansa, I o‘yinchining yutug‘i o‘yin bahosiga teng bo‘ladi, ya’ni, $a_{1j}p_1+a_{2j}p_2=\gamma,\ j=1,2$ bajariladi. $p_1+p_2=1$ ekanligini hisobga olsak,

$$a_{11}p_1+a_{21}p_2=\gamma,$$
$$a_{12}p_1+a_{22}p_2=\gamma,$$
$$p_1+p_2=1,$$

sistemaga ega bo‘lamiz. Bu sistema yagona yechimga ega deb faraz qilamiz, ya’ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & -1 \\ a_{12} & a_{22} & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}\neq 0 \qquad (1.4)$$

bo‘lsin. Ko‘rsatish mumkinki, agar egar nuqta mavjud bo‘lmasa, (1.4) shart bajariladi. U vaqtda optimal $p^*=(p_1, p_2)$ strategiyaning komponentalari

$$p_1=\frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}},\quad p_2=\frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \qquad (1.5)$$

formula bo‘yicha topiladi.

Xuddi shunga o‘xshash, 1.3-teorema natijasi asosida II o‘yinchi uchun

$$a_{11}q_1+q_{12}q_2=\gamma,$$
$$q_{21}q_1+a_{22}q_2=\gamma,$$
$$q_1+q_2=1,$$

sistemani hosil qilamiz va (1.4) shart bajarilganda uni yechib $q^*=(q_1,q_2)$ optimal strategiya komponentalarini topamiz:

$$q_1=\frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}},\quad q_2=\frac{a_{11}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \qquad (1.6)$$

Qaralayotgan 2x2- o‘yin bahosi esa

$$\gamma=\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \qquad (1.7)$$

formula bo‘yicha topiladi.

1-misol. To‘lovlar matrisasi 1.1-jadvalda keltirilgan o‘yinning yechimi topilsin.

1.1-jadval

II / I	B_1	B_2
A_1	5	-1
A_2	2	4

bu yerda $\alpha = 2$, $\beta = 4$, ya'ni o'yin egar nuqtaga ega emas. O'yin yechimini aralash strategiyalarda topamiz. $a_{11} = 5, a_{12} = -1, \quad a_{21} = 2, a_{21} = 4$ bo'lgani uchun (1.5), (1.6), (1.7) formulalarga ko'ra

$$p_1 = \frac{4-2}{5+4+1-2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \quad p_2 = \frac{5+1}{5+4+1-2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4},$$

$$q_1 = \frac{4+1}{5+4+1-2} = \frac{5}{8}, \qquad q_2 = \frac{5-2}{5+4+1-2} = \frac{3}{8},$$

$$\gamma = \frac{5.4-2.(-1)}{5+4+1-2} = \frac{20+2}{8} = \frac{22}{8} = \frac{11}{4}.$$

matrisali o'yinni chiziqli dasturlash usuli bilan yechish algoritmini keltiramiz.

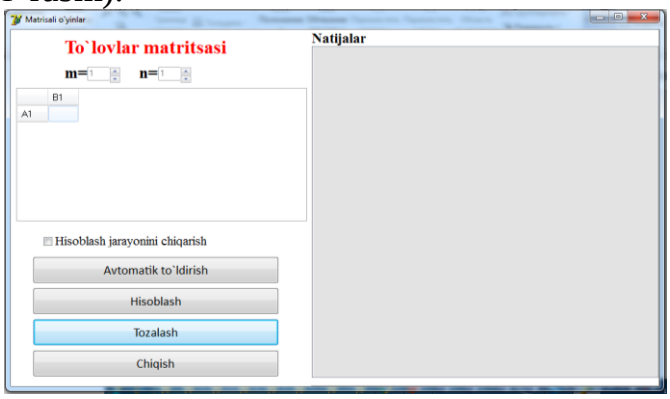
1. To'lovlar matritsasining egar nuqtasini tekshiramiz. Agar o'yin egar nuqtaga ega bo'lsa, u holda o'yinning yechimini sof strategiyalarda yozamiz, aks holda, matritsani tahlil qilishni davom ettiramiz.

2. Agar ekvivalent yoki befoyda satrlar va ustunlar mavjud bo'lsa, bu satrlar va ustunlarni o'chiring. Bunda o'yinchilarning optimal strategiyalarida o'z o'rnida tegishli tarkibiy qismlar nolga teng bo'ladi.

3. Biz matritsali o'yinni ma'lum usullardan biri – chiziqli dasturlash usullari bilan yechamiz (agar kamida bitta o'yinchi faqat ikkita sof strategiyaga ega bo'lsa).

Har qanday matritsali o'yinni simmetrik ikkilangan chiziqli dasturlash masalasi juftligiga keltirish mumkin va shuning uchun o'yinchilarning optimal strategiyasi va o'yinning bahosini topish uchun ikki yoqlama simpleks usulini qo'llash mumkin.

Matrisali o'yinlar.exe" dasturini ishga tushiramiz. Natijada quyidagi dastur oynasi hosil bo'ladi (1-rasm).



1-rasm. Dasturning bosh oynasi.

Bu dastur oynasida “To‘lovlar matritsasi” “Hisoblash jarayonini chiqarish”, va “Natijalar” maydonlari hamda “Avtomatik to‘ldirish”, “Hisoblash”, “Tozalash” va “Chiqish” tugmalari joylashgan.

Adabiyotlar

1. Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении: Учебное пособие. - М.: Дело, 2004.
2. В. Гофман, А. Хоманенко. Delphi 7. – СПб.: БХВ–Петербург, 2004 г.
3. Дарахвелидае П. Г., Марков Е. П. Д20 Программирование в Delphi 7. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 784 с : ил.
4. Краснов М. В. OpenGL. Графика в проектах Delphi. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002. – 352 с.

MATRITSA ARGUMENTLI BETA VA GAMMA FUNKSIYALAR ORASIDAGI BOG’LANISH.

[1]Rajabov Sh. Sh., [2]Shixova I.O
[1]Toshkent davlat texnika universiteti
[2]Xorazm viloyati XTXQTMOHM

Matematik va kompleks analizda beta va gamma funksiyalar orasidagi bog’lanish $B(z,w)=\Gamma(z)\Gamma(w)\Gamma^{-1}(z+w)$ o’rinli edi. Matritsaviy analizda matritsalarning kommutativlik xossasiga ega emasligidan shuni aytishimiz mumkinki, matritsa argumentli beta va gamma funksiyalar orasida darhol munosabat o’rnatib bo’lmaydi. Shuning uchun avval diagonal matritsalar uchun bog’lanishni keltiramiz, keyin esa bundan kengroq bo’lgan matritsaviy sinf uchun bog’lanishni kiritirib o’tamiz.

Bizga $Z,W\in\mathbb{C}[m\times m]$ elementlari mos ravishda $\mathrm{Re}(z)>0,\mathrm{Re}(w)>0$ olingan matritsalar berilgan bo’lsin.

1-lemma. Agar $M,N\in\mathbb{C}[m\times m]$ dan olingan diagonal matritsalar bo’lsa, u holda

$$B(M,N)=\Gamma(M)\Gamma(N)\Gamma^{-1}(M+N) \qquad (1)$$

munosabat o’rinli bo’ladi. Bu yerda, $\Gamma^{-1}(M+N)$ funksiya $\Gamma(M+N)$ funksiyaga teskari funksiya.

Isbot. Isbotlash metodi kompleks analizdagi kabi amalga oshiriladi. Bizda matritsalarning kommutativligi bor, isbotlashda bevosita shundan foydalanib ketamiz:

$$\Gamma(M)\Gamma(N)=\left(\int_0^\infty e^{-t}t^{M-I}dt\right)\left(\int_0^\infty e^{-\tau}\tau^{N-I}d\tau\right)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t}\,t^{M-I}e^{-\tau}\tau^{N-I}dtd\tau=$$

$$=\begin{bmatrix} u=\dfrac{t}{t+\tau} & uv=t \\ v=t+\tau & v(1-u)=\tau \end{bmatrix}=\int_0^\infty\int_0^1 e^{-uv}(uv)^{M-I}\,e^{-v(1-u)}\left(v\left(1-u\right)\right)^{N-I}v\,du\,dv=$$

$$=\left(\int_0^\infty e^{-v}\cdot v^{M+N-I}dv\right)\left(\int_0^1 u^{M-I}\left(1-u\right)^{N-I}du\right)=\left(\int_0^1 u^{M-I}\left(1-u\right)^{N-I}du\right)\left(\int_0^\infty e^{-v}\cdot v^{M+N-I}dv\right)=$$

$$=B(M,N)\Gamma(M+N).$$

Demak, biz quyidagi tenglikka ega bo'ldik:

$$\Gamma(M)\Gamma(N)=B(M,N)\Gamma(M+N)$$

Bundan kelib chiqadiki,

$$\mathrm{B}(M,N)=\Gamma(M)\Gamma(N)\Gamma^{-1}(M+N)\triangleright$$

1-teorema. Z va W matritsalar uchun quyidagi shartlar o'rinli bo'lsin:

1) $ZW=WZ$

2) $S^{-1}Z\,S=M \quad va \quad S^{-1}W\,S=N$ (2)

bu yerda, M, N diogonal matritsalar, S-biror xosmas matritsa.
U holda,

$$B(Z,W)=\Gamma(Z)\Gamma(W)\Gamma^{-1}(Z+W) \tag{3}$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Isbot. Avval (2)-tenglikdan Z va W matritsalarni topib olamiz:

$$Z=S\,M\,S^{-1} \text{ va } W=S\,N\,S^{-1} \tag{4}$$

Ohirgi tengliklardan foydalanib Z+W ni topamiz:

$$Z+W=S\,M\,S^{-1}+S\,N\,S^{-1}=S\,(M+N)\,S^{-1}$$

Endi (4)-tengliklardan foydalanib va $\Gamma(Z)$ va $\Gamma(W)$ larni aniqlab olamiz:

$$\Gamma(Z)=S\Gamma(M)S^{-1} \text{ va } \Gamma(W)=S\Gamma(N)S^{-1}\ .$$

Aniqlanishiga ko'ra,

$$\Gamma(Z+W)=S\left[\int_0^\infty e^{-t}\,t^{M+N-I}dt\right]S^{-1}=S\,\Gamma(M+N)\,S^{-1}$$

$$\Gamma^{-1}(M+N)=S^{-1}\,\Gamma^{-1}(Z+W)\,S \tag{5}$$

Yuqoridagi aniqlanganlardan foydalanib $B(Z,W)$ ni topamiz:

$$B(Z,W)=S\,B(M,N)\,S^{-1}=S\Big[\,\Gamma(M)\Gamma(N)\Gamma^{-1}(M+N)\Big]S^{-1}=$$

$$= S\Gamma(M)\Gamma(N)\left[S^{-1}\Gamma^{-1}(Z+W)S\right]S^{-1} = \left(S\Gamma(M)S^{-1}\right)\left(S\Gamma(N)S^{-1}\right)\Gamma^{-1}(Z+W) =$$
$$= \Gamma(Z)\Gamma(W)\Gamma^{-1}(Z+W).\triangleright$$

Adabiyotlar

1. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука. 1978. 280 с.
2. Г.Худойберганов, Т.Т.Туйчиев . Матрица аргументли голоморф функциялар. Тошкент. 2008. 128 с.
3. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.,1982. 478 с.

OPERATOR ALGEBRALARINING PROEKTORLARI HAQIDA.

Rahimov A.A. Xurramov A.X.
M.Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti,
rakhimov@ktu.edu.tr, xurramovaziz7@gmail.com

Algebrani proektorsiz algebra deb ataymiz, agar unda 1 (agar mavjud bo'lsa) va 0 dan boshqa proektorlar mavjud bo'lmasa. Bir vaqtlar proektorsiz oddiy C^*-algebralar mavjudmi yoki yo'qmi degan savol ochiq edi. Shu xossaga ega oddiy cheksiz o'lchovli C^*-algebralari mavjudmi degan muammoni ilk bor 1958-yilda Irving Kaplanskiy tomonidan o'rtaga tashlangan edi. Bunday ilk misol esa 22-yil o'tib, 1981-yilda Bryus Blekadar tomonidan nashr etilgan (qarang: [1], [2], [3]). Unda proektorsiz, oddiy, separabel, yadrli, birlik elementi bo'lmagan C^*-algebra qurilgan va birlik elementli C^*-algebraning proektorsiz algebra bo'lishining yetarli shart berilgan.

$A-$kompleks Banax $*-$algebra bo'lsin. Agar ixtiyoriy $a\in A$ uchun $\left\|aa^*\right\| = \left\|a\right\|^2$ shart bajarilsa, A ga C^*-algebra deyiladi. $H-$kompleks Hilbert fazosi va $B(H)$ algebra esa H da aniqlangan barcha chiziqli chegaralangan operatorlar algebrasi bo'lsin. $M\subset B(H)-,*-$qism-algebra bo'lsin.

$$M' = \left\{a\in B(H): ba = ab, \forall b\in M\right\}$$

to'plam M ning komutanti deyiladi. Agar $M = M''$ bo'lsa, u holda M ga fon Neyman algebrasi deyiladi. Bikomutant teoremasiga ko'ra har qanday fon Neyman algebrasi W^*-algebrasi bo'ladi, ya'ni $1\in$ M bo'lib bu algebra kuchsiz topologiyaga ko'ra yopiq bo'ladi. Buning teskarisi ham to'g'ri. Shuning uchun W^*-algebralari fon Neyman algebralar R i deb ham ataladi.

Endi birlik elementli $R\subset B(H)$ haqiqiy $*-$ algebra kuchsiz topologiyaga ko'ra yopiq va $R\cap \imath R = \{0\}$ bo'lsa, bu algebraga haqiqiy W^*-algebra deyiladi.

R ni o'z ichiga olgan eng tor (kompleks) W^*-algebra uning kompleksifikasiyasi deyiladi, va tushunarliki bu algebra $M = R + \imath R$ ga tengdir.

Agar A haqiqiy Banah $*-$algebra uchun $\|aa^*\| = \|a\|^2$ shart bajarilib, har qanday $a \in A$ uchun $1 + aa^*$ element teskarilanuvchi bo'lsa, A ga haqiqiy C^*-algebra deyiladi. Ma'lumki, A haqiqiy C^*-algebra bo'lishi uchun $A^c = A + \imath A$ ning kompleks C^*-algebra bo'lishi zarur va yetarlidir (qarang [5], [6], [7]).

Ushbu maqolaning asosiy natijasi quyidagi teorema.

Teorema. Nol bo'lmagan proektorlari bo'lmagan separabl, sodda, yadrli haqiqiy C^*-algebra A mavjuddir. Bundan tashqari, uning kompleksifikasiyasi $A + \imath A$ ham nol bo'lmagan proektorlari bo'lmagan separabl, sodda, yadrli (kompleks) C^*-algebra bo'ladi.

Tasdiq. C^*-algebralaridan farqli o'laroq, haqiqiy va kompleks W^*- algebralari har doim trivial bo'lmagan proektorlarga egadir. Bundan tashqari, haqiqiy va kompleks W^*-algebralarning barcha proektorlari to'plami yetarlicha boydir.

Darhaqiqat $M \subset B(H)$ ixtiyoriy (kompleks yoki haqiqiy) W^*-algebra bo'lsin. Biz ixtiyoriy nol bo'lmagan $\xi \in H$ vektorini olamiz va $e_\xi : M \to \overline{M'\xi}$, kabi proyeksiyalash operatorini qaraymiz. U holda $e_\xi \in M$, ya'ni bu operator M ning proektoridir, Chunki $\forall x \in M'$ va $\forall \eta \in H$ uchun quyidagi tengliklar o'rinlidir:

$$\left(e_\xi x(\eta), \xi\right) = \left(x(\eta), e_\xi(\xi)\right) = \left(x(\eta), e_\xi(1\xi)\right) = \left(x(\eta), \xi\right) = \left(\eta, x^*(\xi)\right)$$
$$= \left(\eta, e_\xi x^*(\xi)\right) = \left(e_\xi(\eta), x^*(\xi)\right) = \left(xe_\xi(\eta), \xi\right)$$

shuning uchun $e_\xi x = xe_\xi$. Bu yerdan $e_\xi \in M''$ bo'lib $e_\xi \in M$ chunki $M'' = M$.

Adabiyotlar

1. B. E. Blackadar. *A simple C*-algebra with no nontrivial projections*. Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 78, **4**, (1980), 504–508.
2. B. E. Blackadar. *A simple unital projectionless C*-algebra*. Journal of Operator Theory. Vol 5, **1**, (1981). 63–71.
3. Kenneth R. Davidson. *IV.8 Blackadar's Simple Unital Projectionless C*-algebra", C*-algebras by Example*. Fields Institute Monographs, **6**, American Mathematical Society, 124–129.
4. Llolsten Kaonga. *Projectionless C*-algebras*. Proceedings of the American Mathe- matical Society, Vol. 130, **1**, (2001), 33–38.
5. Sh. A. Ayupov, A. A. Rakhimov, Sh. M. Usmanov. *Jordan, Real and Lie Structures in Operator Algebras*. Kluw.Acad.Pub.,MAIA. Vol 418, (1997), 235p.
6. A.A.Rakhimov, M.E.Nurillaev. *On property of injectivity for real W*-algebras and JW- algebras*. Positivity, **22**, (2018), 1345-1354.

7. Sh. A. Ayupov, A. A. Rakhimov. *Real W*-algebras, Actions of groups and Index theory for real factors*. VDM Publishing House Ltd. Beau-Bassin, Mauritius. (2010), 138p.

IKKINCHI TARTIBLI KELI DARAXTIDA ANIQLANGAN SOS MODELI UCHUN KUCHSIZ DAVRIY GIBBS O'LCHOVLARI

[1]Rakhmatullaev M.M., [2]Karshiboev O.Sh.
[1]O'zR FA V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti
Namangan viloyat hududiy bo'linmasi,
[2]Toshkent viloyati Chirchiq davlat pedagogika instituti,
[1]mrahmatullaev@rambler.ru, [2]okarshiboevsher@mail.ru.

Faraz qilaylik $\Gamma^k = (V, L, i)$, Keli daraxti berilgan bo'lsin, bu yerda $V -$ Γ^k ni uchlari to'plami $L -$ uning qirralar to'plami va $i -$ insidentlik funksiyasi, har bir $l \in L$ qirraga uning oxirgi nuqtalari $x, y \in V$ ni mos qo'yadi.

Agar $i(l) = \{x, y\}$ bo'lsa, u holda x, y yaqin qo'shnilar deyiladi va $l = \langle x, y \rangle$ ko'rinishda yozamiz.

Keli daraxtida $d(x, y), (x, y \in V)$ masofa deb x va y uchlarni tutashtiruvchi eng qisqa yo'ldagi qirralar soniga aytiladi:

$$d(x, y) = \min(d : \exists x = x_0, x_1, ..., x_{d-1}, x_d = y)$$

bu yerda $\langle x_0, x_1 \rangle$, $\langle x_1, x_2 \rangle, ..., \langle x_{d-1}, x_d \rangle$ yaqin qo'shnilardir.

Ma'lumki, Γ^k Keli daraxtini, barpo etuvchilari $a_1, a_2, a_3, ..., a_{k+1}$ bo'lgan ikkinchi tartibli $k+1$ ta siklik gruppalarni erkin ko'paytmasidan iborat bo'lgan G_k gruppa orqali tasvirlash mumkin ([1], [2] ishga qarang).

Fiksirlangan $x^0 \in V$ uchun quyidagicha belgilashlar kiritamiz.

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, V_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) \le n\},$$
$$L_n = \{\langle x, y \rangle \in L \mid x, y \in V_n\},$$

bu yerda $d(x, y) - x, y \in V$ uchlar orasidagi masofa.

Spin qiymatlari $\Phi = \{0,1,2,...m\}$ bo'lgan SOS modelini qaraymiz. $\sigma -$ konfiguratsiya V uchlar to'plami elementlarini $\Phi = \{0,1,2,...m\}$ to'plam elementiga mos qo'yuvchi akslantirishdir. U quyidagi funksiya ko'rinishida aniqlanadi $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$. Barcha konfiguratsiyalar to'plami $\Omega = \Phi^V$.

SOS modeli Hamiltoniani quyidagicha aniqlanadi:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y \rangle \in L} |\sigma(x) - \sigma(y)|, \qquad (1)$$

bunda $J \in R^2$.

$h : x \mapsto h_x = (h_{0,x}, h_{1,x}, ..., h_{m,x}) \in R^{m+1}$, $x \in V \setminus \{x^0\}$ ning vektor funksiyasi bo'lsin. Ω_{V_n} dagi $\mu^{(n)}$ ehtimollik taqsimotini qaraylik:

$$\mu^n(\sigma_n) = Z_n^{-1}\exp(-\beta H(\sigma_n) + \sum_{x\in W_n} h_{\sigma(x),x}), \qquad (2)$$

bu yerda $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$ va $Z_n = \sum_{\tilde{\sigma}_n\in\Omega_{V_n}} \exp(-\beta H(\tilde{\sigma}_n) + \sum_{x\in W_n} h_{\tilde{\sigma}(x),x})$.

$\mu^{(n)}$ ehtimollik taqsimoti muvofiq deyiladi, agar barcha $\sigma_{n-1}\in\Omega_{Vn-1}$, $n\geq 1$ lar uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'lsa

$$\sum_{\omega_n\in\Omega_{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1}\cup\omega_n) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}), \qquad (3)$$

bu yerda $\sigma_{n-1}\cup\omega_n \in \Omega_{V_n}$.

U holda, Ω da yagona μ o'lchov mavjud bo'ladiki, barcha $\sigma_n\in\Omega_{V_n}$ lar uchun $\mu(\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n)$ tenglik o'rinli bo'ladi. H Gamiltonian va $x\mapsto h_x, x\neq x_0$ funksiyaga mos keladigan bunday o'lchovlar *limit Gibbs* o'lchovlari deyiladi. Quyidagi tasdiq $\mu^{(n)}(\sigma_n)$ taqsimot qanday shart bajarilganda h_x ga nisbatan muvofiq bo'lishini ifodalaydi.

Teorema 1.(qarang [3]) (2) formula bilan berilgan $\mu^{(n)}(\sigma_n), n=1,2,...$ ehtimollik o'lchovi muvofiq bo'lishi uchun barcha $x\in V\setminus\{x^0\}$ larda quyidagi tenglik:

$$h_x^* = \sum_{y\in S(x)} F(h_y^*, m, \theta), \qquad (4)$$

o'rinli bo'lishi zarur va yetarli, bu yerda $\theta = e^{J\beta}$, $\beta = \frac{1}{T}$, $T>0-$temperatura, $h_x^* = (h_{0,x}-h_{m,x}, h_{1,x}-h_{m,x},..., h_{m-1,x}-h_{m,x})$ va $F(\bullet, m, \theta): R^m\to R^m$ vektor funksiya, ya'ni $F(h,m,\theta) = (F_0((h,m,\theta),..., F_{m-1}(h,m,\theta))),\quad h=(h_0,h_1,...,h_{m-1})$ va

$$F_s(h,m,\theta) = \ln\frac{\sum_{j=0}^{m-1}\theta^{|s-j|}e^{h_j} + \theta^{m-s}}{\sum_{j=0}^{m-1}\theta^{m-j}e^{h_j}+1}, \quad s=0,...,m-1. \qquad (5)$$

$G_k/G_k^* = \{H_1, H_2,..., H_r\}-$faktor-gruppa bo'lsin, bu yerda G_k^*-indeksi $r\geq 1$ bo'lgan normal bo'luvchi.

Ta'rif 1. Agar barcha $x\in G_k$, $y\in G^*_k$ lar uchun $h_{xy} = h_x$ o'rinli bo'lsa, u holda $h=\{h_x, x\in G_k\}$ vektorlar to'plami G_k^*- davriy deyiladi.

$x\in G_k$ uchun $\{y\in G_k :< x,y>\}\setminus S(x)$ to'plamning yagona elementini $x_\downarrow$ kabi belgilaylik.

Ta'rif 2. Agar barcha $x\in H_i$, $x_\downarrow\in H_j$, $\forall x\in G_k$ lar uchun $h_x = h_{ij}$ o'rinli bo'lsa, u holda $h=\{h_x, x\in G_k\}$ vektorlar to'plami G_k^*-kuchsiz davriy deyiladi.

Ta'rif 3. Agar barcha h vektorlar to'plami G_k^*-davriy (kuchsiz davriy) bo'lsa, u holda bu h vektorlar to'plamiga mos μ o'lchov G_k^*-davriy (kuchsiz davriy) deyiladi.

Ravshanki, kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlari normal bo'luvchining tanlanishiga bog'liq. $A\subset\{1,2,...,k+1\}$ va $H_A = \{x\in G_k : \sum_{i\in A} w_x(a_i) - \text{juft}\}$ bo'lsin, bu

yerda $w_x(a_i) - x \in G_k$ so'zdagi a_i lar soni. Ma'lumki, H_A ikki indeksli normal bo'luvchi bo'ladi ([1] ga qarang). $G_k / H_A = \{H_A, G_k \setminus H_A\}$ faktor-gruppa bo'lsin. $H_0 = H_A$, $H_1 = G_k \setminus H_A$ belgilashni kiritsak, u holda H_A-kuchsiz davriy h vektorlar to'plami quyidagicha bo'ladi

$$h_x = \begin{cases} h_1, & x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_0, \\ h_2, & x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_1, \\ h_3, & x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_0, \\ h_4, & x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_1. \end{cases} \tag{6}$$

Faraz qilaylik, $k = 2$, $|A| = 1$ va $m = 2$ bo'lsin. U holda (3) ga ko'ra (6) ko'rinishdagi H_A-kuchsiz davriy h vektorlar to'plami uchun quyidagiga ega bo'lamiz

$$\begin{cases} h_1 = F(h_1, \theta, m) + F(h_2, \theta, m), \\ h_2 = 2F(h_4, \theta, m), \\ h_3 = 2F(h_1, \theta, m), \\ h_4 = F(h_4, \theta, m) + F(h_3, \theta, m), \end{cases} \tag{7}$$

bu yerda $h_i = (h_{i_0}, h_{i_1})$, $i = \overline{1,4}$.

Quyidagi belgilashlarni kiritaylik $z_{i0} = exp(h_{i_0})$ va $z_{i1} = exp(h_{i_1})$, $i = \overline{1,4}$. (7) tenglamalar sistemasidan quyidagi tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} z_{10} = \left(\dfrac{z_{10} + \theta z_{11} + \theta^2}{\theta^2 z_{10} + \theta z_{11} + 1}\right)\left(\dfrac{z_{20} + \theta z_{21} + \theta^2}{\theta^2 z_{20} + \theta z_{21} + 1}\right), \\ z_{11} = \left(\dfrac{\theta z_{10} + z_{11} + \theta}{\theta^2 z_{10} + \theta z_{11} + 1}\right)\left(\dfrac{\theta z_{20} + z_{21} + \theta}{\theta^2 z_{20} + \theta z_{21} + 1}\right), \\ z_{20} = \left(\dfrac{z_{40} + \theta z_{41} + \theta^2}{\theta^2 z_{40} + \theta z_{41} + 1}\right)^2, \\ z_{21} = \left(\dfrac{\theta z_{40} + z_{41} + \theta}{\theta^2 z_{40} + \theta z_{41} + 1}\right)^2, \\ z_{30} = \left(\dfrac{z_{10} + \theta z_{11} + \theta^2}{\theta^2 z_{10} + \theta z_{11} + 1}\right)^2, \\ z_{31} = \left(\dfrac{\theta z_{10} + z_{11} + \theta}{\theta^2 z_{10} + \theta z_{11} + 1}\right)^2, \\ z_{40} = \left(\dfrac{z_{40} + \theta z_{41} + \theta^2}{\theta^2 z_{40} + \theta z_{41} + 1}\right)\left(\dfrac{z_{30} + \theta z_{31} + \theta^2}{\theta^2 z_{30} + \theta z_{31} + 1}\right), \\ z_{41} = \left(\dfrac{\theta z_{40} + z_{41} + \theta}{\theta^2 z_{40} + \theta z_{41} + 1}\right)\left(\dfrac{\theta z_{30} + z_{31} + \theta}{\theta^2 z_{30} + \theta z_{31} + 1}\right). \end{cases} \tag{8}$$

Ko'rsatish osonki, (8) ifodaning o'ng tomoni kabi aniqlangan $W : R^8 \to R^8$ operator quyidagi invariant to'plamga ega bo'ladi:

$$I = \{z \in R^8 : z_{10} = z_{20} = z_{30} = z_{40} = 1\}.$$

Quyidagi teorema isbotlandi:

Teorema 2. $m=2$, $|A|=1$ va $k=2$ bo'lsin. U holda SOS modeli uchun, I invariant to'plamga tegishli barcha vektorlarga mos H_A-kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlari translatsion-invariant Gibbs o'lchovlari bo'ladi.

Adabiyotlar

1. U.A. Rozikov, Gibbs Measures on Cayley Trees World Scientific, Singapore, 2013.
2. U.A.Rozikov, M.M.Rahmatullaev, Weakly periodic ground states and Gibbs measures for the Ising model with competing interactions on the Cayley tree. Theor. and Math. Phys. 2009, V. 160, No 3, p.1292-1300.
3. U.A.Rozikov, Y.M.Suhov, Gibbs measures for SOS model on a Cayley tree. Inf.Dim.An.,Quant.Prob. and Related Topics. 2006, V9, N3, 471-488.

c_0 FAZODA QIYMAT QABUL QILUVCHI MANFIY ASSOTSIRLANGAN TASODIFIY MIQDORLAR UCHUN KUCHAYTIRILGAN KATTA SONLAR QONUNI

Rizaqulov Sh.E.
O'zMU

Biz bu tezisda c_0 fazoda qiymat qabul qiluvchi manfiy assorsirlangan tasodifiy miqdorlar uchun kuchaytirilgan katta sonlar qonunini keltiramiz.
Eslatib o'tamizki c_0 fazo $x^{(n)} \to 0$ shartni qanoatlantiruvchi $x=(x^{(1)},x^{(2)},\dots)$ ketma-ketliklar fazosi bo'lib, bu fazoda norma quyidagicha aniqlangan: $\|x\|=\sup_{i\geq 1}\left|x^{(i)}\right|$.

$\{e_i, i\geq 1\}$ ketma-ketlik c_0 dagi standart bazis bo'lsin, ya'ni
$e_i=(0,\dots,1,0\dots)$ (bu yerda $i-$ o'rinda 1 turibdi) ko'rinishda bo'ladi.
$\{X_n, n\geq 1\}$ ketma-ketlik c_0 fazodagi tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lsin.
U holda bu miqdorlarni standart bazis yordamida quyidagicha

$$X_n=\sum_{i=1}^{\infty} X_n{}^{(i)} e_i$$

yozish mumkin.

Faraz qilamiz $\{X_n, n\geq 1\}$-har bir koordinatasi bo'yicha manfiy assotsirlangan bo'lsin, ya'ni $i=1,2,\dots$ uchun

$$\operatorname{cov}(f(X_1{}^{(i)},\dots,X_n{}^{(i)}), g(X_1{}^{(i)},\dots,X_n{}^{(i)}))\leq 0$$

Bunda $f,g:R^n\to R$ -har bir koordinatasi bo'yicha kamaymaydigan funksiyalar. Biz umumiyatga ziyon yetkazmasdan $EX_n=0$ deb hisoblaymiz.

Endi esa asosiy natijani keltiramiz.

Teorema. Yuqoridagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\{X_n\}$ ketma-ketlik uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2}\sup_{k\geq 1}E\left|X_i^{(k)}\right|^2<\infty$$

shart bajarilsin, u holda 1 ehtimollik bilan $\frac{S_n}{n}\underset{n\to\infty}{\to}0$ munosabat bajariladi. Bu yerda

$$S_n=X_1+X_2+...+X_n.$$

Keltirilgan teorema [1] dagi teorema 3.1 ni umumlashtiradi.

Adabiyotlar

1. P. E. Olveira. Asymptotics for Associated Random Variables 2012. Springer.
2.A Cantrell and A.Rosalsky, Some strong laws of large numbers for Banach space valued summand irrespective of their joint distributions Stochastic Anal. Appl . 21 2003.
3. Sh.Rizaqulov. ,,c_0 fazoda qiymat qabul qiluvchi assotsirlangan tasodifiy miqdorlar uchun kuchaytirilgan katta sonlar qonuni'', Материалы Республиканской научной конференции "Современные проблемы теории вероятностейи математической статистики", 30-апреля-1 мая 2019 годаТашкент.

ON LIMIT POINTS OF TRAJECTORIES OF A QUADRATIC STOCHASTIC OPERATOR

Rozikov U.A., Abdurakhimova Sh.B.
Institute of mathematics,
Namangan State University,
rozikov@mathinst.uz, shakhnoza.karimova95@mail.ru

Let S^{m-1} be the simplex: $S^{m-1}=\left\{x=(x_1,...,x_m)\in R^m;\ x_i\geq 0,\ \sum_{i=1}^{m}x_i=1\right\}$.

In this work we consider an evolution operator

$$V_{a,b,c}: z(x,y)\in S^1\to z'=(x',y')\in S^1$$

defined by

$$V\equiv V_{a,b,c}:\begin{cases}x'=x^2+2p(x)xy\\ y'=2\big(1-p(x)\big)xy+y^2\end{cases}\qquad(1)$$

Where

$$p(x)=\begin{cases} a,\ x\le\frac{1}{3} \\ b,\ \frac{1}{3}<x<\frac{2}{3} \\ c, x\ge\frac{2}{3} \end{cases} \qquad \text{with } a,b,c\in[0,1].$$

The main problem for a given dynamical system generated by an operator V is to describe the limit points of $x^{(n)}=V\left(x^{(n-1)}\right), n\ge 1$ for arbitrary given $x^{(0)}$ (see [1]-[3]).

Here we consider the case $a\neq\frac{1}{2}, b\neq\frac{1}{2}, c\neq\frac{1}{2}$. In this case, using $x+y=1$ the operator can be reduced to the following mapping $f_{a,b,c}\colon [0,1]\to[0,1]$:

$$f_{a,b,c}(x)=\begin{cases}(1-2a)x^2+2ax,\ x\in\left[0,\frac{1}{3}\right], \\ (1-2b)x^2+2bx,\ x\in\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right), \\ (1-2c)x^2+2cx,\ x\in,\left[\frac{2}{3},1\right]\end{cases} \qquad (2)$$

Theorem. The dynamical system generated by function (2) has the following properties:

1. The set of fixed points is $Fix\left(f_{a,b,c}\right)=\{0,1\}$;
2. If $0\le a<\frac{1}{2}, 0\le b<\frac{1}{2}, 0\le c<\frac{1}{2}$ then $\lim\limits_{n\to\infty}x^{(n)}=0,\ \forall x^{(0)}\in[0,1]$;
3. If $0\le a<\frac{1}{2}, 0\le b<\frac{1}{2}, \frac{1}{2}<c\le 1$ then $\lim\limits_{n\to\infty}x^{(n)}=\begin{cases}0, if\ x^{(0)}\in[0,\frac{2}{3}) \\ 1, if\ \ x^{(0)}\in\left[\frac{2}{3},1\right]\end{cases}$;
4. If $0\le a<\frac{1}{2}, \frac{1}{2}<b\le 1, 0\le c<\frac{1}{2},$ then $\lim\limits_{n\to\infty}x^{(n)}=0,\ \forall x^{(0)}\in\left[0,\frac{1}{3}\right]$;
5. If $0\le a<\frac{1}{2}, \frac{1}{2}<b\le 1, 0\le c<\frac{1}{2},$ then for sets

$A_1=\left[0,\frac{1}{3}\right],\ A_2=\left(\frac{1}{3},\frac{4}{9}(1+c)\right)\cup\left(\frac{4}{9}(1+b),1\right),\ A_3=[\frac{4}{9}(1+c),\frac{4}{9}(1+b)]$

the followings hold:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}x^{(n)}=0$ for any $x^{(0)}\in A_1$;
2) $\forall x^{(0)}\in A_2$ there exists $n_0(x_0)\in N$, such that $f^n(x_0)\in A_3$ for any $n>n_0$;
3) $f(A_3)\subset A_3$;

6. If $0\le a<\frac{1}{2}, \frac{1}{2}<b\le 1, \frac{1}{2}<c\le 1$ then $\lim\limits_{n\to\infty}x^{(n)}=\begin{cases}0, if\ x^{(0)}\in[0,\frac{1}{3}] \\ 1, if\ \ x^{(0)}\in(\frac{2}{3},1]\end{cases}$;
7. If $\frac{1}{2}<a\le 1, 0\le b<\frac{1}{2}, 0\le c<\frac{1}{2}$ then for sets

$$B_1=\left[0,\frac{1}{9}(1+4b)\right)\cup\left(\frac{1}{9}(1+4a),1\right], \qquad B_2=[\frac{1}{9}(1+4b),\frac{1}{9}(1+4a)]$$

the followings hold:

1) $\forall x^{(0)}\in B_1$ there exists $n_0(x_0)\in N$, such that $f^n(x_0)\in B_2$ for any $n>n_0$;
2) $f(B_2)\subset B_2$;

8. If $\frac{1}{2} < a \leq 1, 0 \leq b < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < c \leq 1$ then for sets $C_1 = \left[0, \frac{1}{9}(1+4b)\right) \cup \left(\frac{1}{9}(1+4a), \frac{2}{3}\right)$, $C_2 = \left[\frac{1}{9}(1+4b), \frac{1}{9}(1+4a)\right]$, $C_3 = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ the followings hold:

1) 1) $\forall x^{(0)} \in C_1$ there exists $n_0(x_0) \in N$, such that $f^n(x_0) \in C_2$ for any $n > n_0$;
2) $f(C_2) \subset C_2$;
3) For $\forall x^{(0)} \in C_3$ $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = 1$;

9. If $\frac{1}{2} < a \leq 1$, $\frac{1}{2} < b \leq 1$, $\frac{1}{2} < c \leq 1$ then $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = 1$, $\forall x^{(0)} \in [0,1]$.

References

1.Devaney R.L. *An introduction to chaotic dynamical system* (Westview Press 2003).

2.Rozikov U.A., Usmonov J.B. *Dynamics of a population with two equal dominated species*. Qualit. Theory Dyn. Syst. 2020. V.19., No.2, Paper No.62, 19pp.

3. Rozikov U.A. *Population dynamics: algebraic and probabilistic approach*. World Sci. Publ. Singapore. 2020. 460 pp.

p-ADIC DYNAMICAL SYSTEMS OF $(1,2)$-RATIONAL FUNCTIONS WITH TWO FIXED POINTS

[1]Rozikov U.A., [2]Aliev E.T.

[1]Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky

[2]Namangan Institute of Engineering Technology

We study p-adic dynamical systems generated by a rational function. It is known that analytic functions play a fundamental role in complex analysis and rational functions play an analogous role in p–adic analysis. It is therefore natural to study dynamics generated by rational functions in p–adic analysis.

Let $\mathbb{C}_p$ be the field of complex p-adic numbers. For any $a \in \mathbb{C}_p$ and $r > 0$ denote

$$U_r(a) = \{x \in \mathbb{C}_p : |x-a|_p < r\}, \quad V_r(a) = \{x \in \mathbb{C}_p : |x-a|_p \leq r\},$$
$$S_r(a) = \{x \in \mathbb{C}_p : |x-a|_p = r\}.$$

Let $f : U \to U$ be a function. For $x \in U$ we denote $f^n(x) = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n}(x)$ and the trajectory of $x^{(0)}$ under f is defined as $x^{(0)}, x^{(1)} = f(x^{(0)}), x^{(2)} = f^2(x^{(0)})$.

If $f(x_0)=x_0$, then x_0 is called a fixed point. Let x_0 be a fixed point of a function $f(x)$. The point x_0 is attractive if $0<|f'(x_0)|_p<1$, indifferent if $|f'(x_0)|_p=1$ and repelling if $|f'(x_0)|_p>1$. If x_0 is an attractor then its basin of attraction is

$$A(x_0)=\{x\in\mathbb{C}_p:\ f^n(x)\to x_0,\ n\to\infty\}.$$

The ball $U_r(x_0)$ is said to be a Siegel disk if each sphere $S_\rho(x_0)$, $\rho<r$ is an invariant sphere for $f(x)$, i.e. if $x\in S_\rho(x_0)$ then for all iterated points we have $x^{(n)}\in S_\rho(x_0)$, for all $n\in N$. The union of all Siegel disks with the center at x_0 is said to be *a* maximum Siegel disk and is denoted by $SI(x_0)$. If x_0 is an indifferent point, then it is the center of a Siegel disk.

Let $f:A\to A$ and $g:B\to B$ be two maps. f and g are said to be topologically conjugate if there exists a homeomorphism $h:A\to B$ such that, $h\circ f=g\circ h$. The homeomorphism h is called a topological conjugacy. Mappings which are topologically conjugate are completely equivalent in terms of their dynamics. For example, if f is topologically conjugate to g via h, and x_0 is a fixed point for f, then $h(x_0)$ is fixed for g. Indeed, $h(x_0)=hf(x_0)=gh(x_0)$.

A function $f(x)$ is called a (n,m)-rational function if it can be written in the form $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{T_m(x)}$, where $P_n(x)$ and $T_m(x)$ are polynomial functions with degree n and m respectively, $T_m(x)$ is a non zero polynomial.

In this work we consider the dynamical system associated with the $(1,2)$-rational function $f:\mathbb{C}_p\to\mathbb{C}_p$ defined by

$$f(x)=\frac{ax+b}{x^2+cx+d},\quad a\neq 0,\quad a,b,c,d\in\mathbb{C}_p, \tag{1}$$

where $x\neq\hat{x}_{1,2}=\dfrac{-c\pm\sqrt{c^2-4d}}{2}$.

The equation $f(x)=x$ for fixed points of function (1) is equivalent to the equation

$$x^3+cx^2+(d-a)x-b=0. \tag{2}$$

Since $\mathbb{C}_p$ is algebraic closed the equation (2) may have three solutions. In this paper we consider the case the equation (2) has two solutions, one of which have multipilicity two.

Thus we have the following proposition.

Proposition. Any $(1,2)$-rational function having two distinct fixed points is topologically conjugate to one of the following forms

$$f(x)=\frac{ax^2+bx}{x^2+cx+b},\quad ab\neq 0,\quad a\neq c,\quad a,b,c\in\mathbb{C}_p \tag{3}$$

and

$$f(x)=\frac{ax}{x^2+cx+a},\quad a\neq 0,\quad a,c\in\mathbb{C}_p. \tag{4}$$

In the paper [1] was considered p-adic dynamical systems of the functions by the form (3). Thus we study the dynamical system $(f,\mathbb{C}_p)$ with f given by (4).

Note that, function (4) has two fixed points $x_1=-c$ and $x_2=0$. So we have

$$f'(x_1)=\frac{a-c^2}{c},\quad f'(x_2)=1.$$

Thus, the point x_2 is an indifferent point for (4).

For any $x\in\mathbb{C}_p$, $x\neq\hat{x}_{1,2}$, by simple calculations we get

$$\left|f(x)\right|_p=\left|x\right|_p\cdot\frac{\left|a\right|_p}{\left|x-\hat{x}_1\right|_p\left|x-\hat{x}_2\right|_p}. \tag{5}$$

Denote

$\wp=\{x\in\mathbb{C}_p:\exists n\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ f^n(x)\in\{\hat{x}_1,\hat{x}_2\}\}$, $\alpha=|\hat{x}_1|_p$ and $\beta=|\hat{x}_2|_p$.

Since $\hat{x}_1+\hat{x}_2=-c$ and $\hat{x}_1\hat{x}_2=a$, we have $|c|_p\leq\max\{\alpha,\beta\}$ and $|a|_p=\alpha\beta$.

Remark. It is easy to see that $\hat{x}_1$ and $\hat{x}_2$ are symmetric in (5), i.e., if we replace them then RHS of (5) does not change. Therefore we consider the dynamical system $(f,\mathbb{C}\setminus\wp)$ for cases $\alpha=\beta$ and $\alpha<\beta$.

By using (5) we define the following functions.

1. For $\alpha=\beta$ define the function $\varphi_\alpha:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ by

$$\varphi_\alpha(r)=\begin{cases} r, & \text{if } r<\alpha\\ \alpha^*, & \text{if } r=\alpha,\\ \dfrac{\alpha^2}{r}, & \text{if } r>\alpha\end{cases}$$

where α^* some positive number with $\alpha^*\geq\alpha$.

2. For $\alpha<\beta$ define the function $\varphi_{\alpha,\beta}:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ by

$$\varphi_{\alpha,\beta}(r)=\begin{cases} r, & \text{if } r<\alpha\\ \hat{\alpha}, & \text{if } r=\alpha\\ \alpha, & \text{if } \alpha<r<\beta,\\ \hat{\beta}, & \text{if } r=\beta\\ \dfrac{\alpha\beta}{r}, & \text{if } r>\beta\end{cases}$$

where $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ some positive numbers with $\hat{\alpha} \geq \alpha$ and $\hat{\beta} \geq \alpha$.

Using formula (5) we easily get the following:

Lemma. If $x \in S_r(0)$, $x \neq \hat{x}_{1,2}$ then the following formula holds for function (4)

$$\left| f^n(x) \right|_p = \begin{cases} \varphi_\alpha^n, & \text{if } \alpha = \beta \\ \varphi_{\alpha,\beta}^n & \text{if } \alpha < \beta. \end{cases}$$

Thus the p-adic dynamical system $f^n(x)$, $n \geq 1$, $x \in \mathbb{C}_p \setminus \wp$ is related to the real dynamical systems generated by functions φ_α and $\varphi_{\alpha,\beta}$.

Case: $\alpha = \beta$.

For $\alpha = \beta$ denote the following

$$\alpha^*(x) = \left| f(x) \right|_p, \text{ if } x \in S_\alpha(0).$$

Theorem 1. If $\alpha = \beta$, then the p-adic dynamical system generated by the function (4) has the following properties:

1. 1.1) $SI(x_2) = U_\alpha(0)$.

   1.2) $\wp \subset S_\alpha(0)$.

2. If $r > \alpha$ and $x \in S_r(0)$, then for any $n \geq 1$, $f^n(x) \in S_{\frac{\alpha^2}{r}}(0)$.

3. If $\alpha^*(x) > \alpha$ and $x \in S_\alpha(0)$, then for any $n \geq 2$, $f^n(x) \in S_{\frac{\alpha^2}{\alpha^*(x)}}(0)$.

4. If $|c|_p < \alpha$, then $\left| f'(x_1) \right| = 1$ and $SI(x_1) = SI(x_2)$.

5. Let $|c|_p = \alpha$. hen $x_1 \in S_\alpha(0)$ and

   5.1) if $\left| a - c^2 \right| < \alpha^2$, then x_1 is an attractive fixed point for f and its basin of attraction is

$$A(x_1) = U_\alpha(x_1) \subset S_\alpha(0).$$

   5.2) if $\left| a - c^2 \right| = \alpha^2$, then x_1 is an indifferent fixed point for f and

$$SI(x_1) = U_\alpha(x_1) \subset S_\alpha(0).$$

Case: $\alpha < \beta$.

For $\alpha < \beta$ we denote the following

$$\hat{\alpha}(x) = \left| f(x) \right|_p \text{ if } x \in S_\alpha(0) \setminus \{\hat{x}_1, \hat{x}_2\}; \quad \hat{\beta}(x) = \left| f(x) \right|_p \text{ if } x \in S_\beta(0) \setminus \{\hat{x}_1, \hat{x}_2\}.$$

Theorem 2. If $\alpha < \beta$ and $x \in S_r(0) \setminus \wp$, then the p-adic dynamical system generated by function (4) has the following properties:

1. $SI(x_2) = U_\alpha(0)$.
2. If $\alpha < r < \beta$, then $f(x) \in S_\alpha(0)$.
3. Let $r > \beta$, then for any $n \geq 1$, $f^n(x) \in S_{\frac{\alpha\beta}{r}}(0)$.
4. Let $x \in S_\alpha(0) \setminus \wp$.

4.1) If $\hat{\alpha}(x)=\alpha$, then $f(x)\in S_{\alpha}(0)$.

4.2) If $\alpha<\hat{\alpha}(x)<\beta$, then $f^{2}(x)\in S_{\alpha}(0)$.

4.3) If $\hat{\alpha}(x)=\beta$, then $f(x)\in S_{\beta}(0)$.

4.4) If $\hat{\alpha}(x)>\beta$, then for any $n\geq 2$, $f^{n}(x)\in S_{\frac{\alpha\beta}{\hat{\alpha}(x)}}(0)$.

5. Let $x\in S_{\beta}(0)\setminus\wp$.

5.1) If $\hat{\beta}(x)=\alpha$, then $f(x)\in S_{\alpha}(0)$.

5.2) If $\alpha<\hat{\beta}(x)<\beta$, then $f^{2}(x)\in S_{\alpha}(0)$.

5.3) If $\hat{\beta}(x)=\beta$, then $f(x)\in S_{\beta}(0)$.

5.4) If $\hat{\beta}(x)>\beta$, then for any $n\geq 2$, $f^{n}(x)\in S_{\frac{\alpha\beta}{\hat{\beta}(x)}}(0)$.

6. 6.1) $x_{1}\in S_{\beta}(0)$.

6.2) The fixed point x_{1} is repeller and the inequality $|f(x)-x_{1}|_{p}>|x-x_{1}|_{p}$ holds for $x\in U_{\beta}(x_{1})$, $x\neq x_{1}$.

References

1. U.A. Rozikov, I.A. Sattarov. Dynamical Systems of the p-adic $(2,2)$-rational functions with two fixed points. **Results in Mathematics.** 75(100), 2020, pp. 1-37.

2. S. Albeverio, U.A. Rozikov, I.A. Sattarov. p-adik $(2,1)$-rational dynamical systems. **J. Math. Anal. Appl.** 398(2), 2013, pp. 553-566.

3. N. Koblitz. p-adic numbers, p-adic analysis and zeta-function. Springer, Berlin, 1977.

QO‘ZG‘ALISHI BIR O‘LCHAMLI DIKRET LAPLASIANNING XOS QIYMATI

[1]Qurbonov O. I., [2]Axralov H. Z., [3]Rajabov T.

[1,2]Toshkent davlat texnika universiteti

[3]Samarqand davlat universiteti

Kvant mexanikasi, matematik fizika, matematik analiz va ularga bog‘liq sohalardagi Shredinger operatorlarining spektral xossalari, shu jumladan panjaradagi Shredinger operatorlari va ularning qattiq jismlar fizikasidagi tadbiqlari ahamiyatli hisoblanadi.

Bir zarrachali diskret Shredinger operatorining kvazi impuls tasviri, $L^{2}(T^{d})$ $T^{d}\equiv(-\pi;\pi]^{d}$ $(d\geq 1)$ $d-$ o‘lchamli torda kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalarning Hilbert fazosida quyidagicha tasir etadi:

$$H=H_{0}-V$$

bunda H_0 operator, $\psi(e(\cdot))$ uzluksiz funksiyaga ko‘paytirish operatori:

$$(H_0 f)(p) = \psi(e(p)) \cdot f(p)$$

bu yerda

$$e(p) = \sum_{i=1}^{d} (1 - \cos p_i), \quad p = (p_1, p_2, ..., p_d) \in \mathrm{T}^d$$

$\psi \in C(0; +\infty)$: uzluksiz monoton o‘suvchi funksiya, $\breve{}$ esa rangi birga teng integral operator:

$$(Vf)(p) = \frac{\lambda}{(2\pi)^d} \int_{T^d} f(q)dq, \quad f \in L^2(T^d), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$\psi(\cdot)$ ko‘paytirish funksiyasi haqiqiy qiymatli va chegaralangan, $\breve{}$ integral operatorning yadrosi o‘zgarmas bo‘lganligi sababli, H operator L^2 da o‘z-o‘ziga qo‘shma va chegaralangan operator bo‘ladi.

Tasdiq. H operator o‘z-o‘ziga qo‘shma operator, $\breve{}$ kompakt operator bo‘lganligi uchun Weylning muhim spekrning turg‘unligi haqidagi teoremasiga [1] ko‘ra quyidagi munosabat o‘rinlidir:

$$\sigma_{ess}(H_o + V) = \sigma(H_0)$$

1-Lemma: H operatorning muhim spektri H_0 operatorning spektriga tengdir.

$$\sigma_{ess}(H) = \sigma(H_0) = [\psi_{\min}; \psi_{\max}]$$

Har qanday $\lambda \in R$ uchun H operatorning Fredgolm determinantini $z \in C \setminus [\psi_{\min}; \psi_{\max}]$ ning funksiyasi sifatida quyidagicha aniqlaymiz:

$$\Delta(\lambda, z) = 1 - \frac{\lambda}{(2\pi)^d} \int_{T^d} \frac{dq}{\psi(e(q)) - z}$$

2-Lemma: $z \in C \setminus [\psi_{\min}; \psi_{\max}]$ soni H operatorning xos qiymati bo‘lishi uchun

$$\Delta(\lambda, z) = 0$$

bo‘lishi zaruz va yetarli.

Teorema: (Asosiy) H operatorning muhim spektri ichida xos qiymatlari mavjud emas, hamda muhim spektridan tashqarida ko‘pi bilan 1ta bir karrali xos qiymati mavjud.

Adabiyotlar

1. Rid M., Saymon B. “Metody sovremennoy matematicheskoy fiziki T.1. Funksionlaniy analiz. M.: Mir. 1977.
2. Rid M., Saymon B. “Metody sovremennoy matematicheskoy fiziki T.4. Analiz operatorov. M.: Mir. 1982.
3. J.I.Abdullayev, R.N.G‘anixo‘jayev, M.H.Shermatov, O.I.Egamberdiyev. “Funksional analiz va integral tenglamalar” Toshkent “Yangi asr avlodi” 2013.

EXTENSIONS OF PRO-NILPOTENT LIE ALGEBRA TO RESIDUALLY SOLVABLE LIE ALGEBRAS WITH LESS THAN MAXIMAL DIMENSION

Solijanova G.O., Fayzullayeva Sh.A.
National University of Uzbekistan

In finite-dimensional Lie algebras, the nilradical and its derivations are used to construct solvable Lie algebras [4], [5]. But in infinite-dimensional Lie algebras, there is no definitive method for constructing solvable Lie algebras. In this work, extensions of some pro-nilpotent Lie algebra to pro-solvable Lie algebras with less than maximal dimension are studied.

For a Lie algebra L we define the lower central and the derived series as follow

$$L^1 = L, \qquad L^{k+1} = [L^k, L], \qquad\qquad L^{[1]} = L, \qquad L^{[k+1]} = \left[L^{[k]}, L\right].$$

respectively.

Definition 1. [3] A Lie algebra L is said to be residually nilpotent (respectively, residually solvable) if $\bigcap_{i=1}^{\infty} L^i = 0$ (respectively, $\bigcap_{i=1}^{\infty} L^{[i]} = 0$).

Definition 2. [2] A Lie algebra L is said to be pro-nilpotent (respectively, pro-solvable) if $\bigcap_{i=1}^{\infty} L^i = 0$ and $L/L^i < \infty$ (respectively, $\bigcap_{i=1}^{\infty} L^{[i]} = 0$ and $L/L^{[i]} < \infty$) for any $i \geq 1$.

Definition 3. A linear map $d: L \to L$ is called residually nilpotent, if

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} Im\, d^i = 0$$

holds.

Below we introduce the analogue of notion of nil-independency which play a crucial role in the description of finite-dimensional solvable Lie algebras.

Definition 4. Derivations $d_1, d_2, \dots, d_n$ of Lie algebra L over a field F are said to be residually nil-independent, if a map $f = б_1 d_1 + б_2 d_2 + \cdots + б_n d_n$ is not residually nilpotent for any scalars $б_1, б_2, \dots, б_n \in F$. In other words, $\bigcap_{i=1}^{\infty} Im\, f^i = 0$ implies $б_1 = б_2 = \cdots = б_n = 0$.

Let consider the following pro-nilpotent Lie algebra [3]

$$m_0: [e_i, e_1] = e_{i+1},\ i \geq 2.$$

Lemma 5. [1] The space of derivations of the algebra m_0 consists of the following derivations:

$$Der(m_0): \begin{cases} d(e_1) = \sum_{i=1}^{t} б_i e_i, \\ d(e_i) = (б_1 + в_2)e_i + \sum_{k=3}^{t} в_k e_{k+i-2}, \quad k \geq 2. \end{cases}$$

Let $M = m_0 \oplus Q$, where Q is the complementary space to a residually solvable Lie algebra M.

Proposition 6. [1] The dimension of Q is not greater than 2.

Let consider $dimQ = 1$.

By using derivation properties and multiplication table of the algebra m_0 we can prove the following theorem.

Theorem 7. Let M be a residually solvable Lie algebra with maximal pro-nilpotent ideal m_0 and Q be a complementary space to pro-nilpotent ideal m_0 and $dimQ = 1$. Then it admits a basis $\{x, e_1, e_2, \dots,\}$ such that the multiplication table of M in this basis has the following forms:

$$M(\text{в})_1: \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad i \geq 2, \\ [e_1, x] = e_1 + \text{б}_2 e_2, \\ [e_i, x] = (i - 2 + \text{в}_2)e_i + \sum_{k=3}^{t} \text{в}_k e_{k+i-2}, \ \ i \geq 2, \end{cases}$$

where $(\text{в}_2, \text{в}_3, \dots \text{в}_t) \in \mathbf{C}^{t-1}$,

$$M(\text{в})_2: \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad i \geq 2, \\ [e_1, x] = e_1, \\ [e_i, x] = (i - 2)e_i + \sum_{k=3}^{t} \text{в}_k e_{k+i-2}, \ \ i \geq 2, \end{cases}$$

where $(\text{в}_3, \text{в}_4, \dots \text{в}_t) \in \mathbf{C}^{t-2}$,

$$M(\text{в})_3: \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad i \geq 2, \\ [e_i, x] = e_i + \sum_{k=3}^{t} \text{в}_k e_{k+i-2}, \quad \geq 2, \end{cases}$$

where $(\text{в}_3, \text{в}_4, \dots \text{в}_t) \in \mathbf{C}^{t-2}$ and $\{x\}$ is a basis of Q and $\{e_1, e_2, \dots\}$ is a basis of m_0.

References

1. K.K. Abdurasulov, G.O. Solijanova, The description of pro-solvable Lie algebras with maximal pro-nilpotent ideals m_0 and m_2, Computational models and technologies, Uzbekiston-Malaysia international online conference. August 24-25, 2020, 115-116.
2. K. Khakimdjanova, Yu. Khakimdjanov, Sur une classe d'algebres de Lie de dimension infinie, Commun Algebra, 29(1), 2001, 177-191.
3. D. V. Millionshchikov, Naturally graded Lie algebras of slow growth. Mat. Sb. 210 (2019), no. 6, 111-160. (in Russian)
4. G.M. Mubarakzjanov, On solvable Lie algebras, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 1963 (1963) 114-123. (in Russian)
5. G.M. Mubarakzjanov, The Classification of real structure of Lie algebra of order five, Izv. VUZ. Math., 3 (1963), 99- 106.

BA’ZI ALMASHTIRISHLARNING ALGEBRAIK IFODALARI VA ULARNING MASALALAR ECHISHGA TADBIQI.

Sulaymonov Z., Qarshiboyev N.
JDPI
dilshod_quralov@mail.ru

Ko’pincha almashtirishlar deganda darhol ko’z oldimizda geometrik tushinchalar paydo bo’ladi. Ammo algebraik almashtirishlar tushinchasi algebra fanida ham ko’p qo’llaniladi. Shundan kelib chiqib, o’q simmetriyasining algebraik ifodalarini keltirib chiqaramiz. Masalan berilgan nuqtaga to’g’ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo’lgan nuqtani topishda geometriya fanida tekislikdagi aksiomalar sistemasidan foydalaniladi. Agar shu masalaga algebraik nuqtaiy nazardan yondashsak, bu tushincha ancha saddalashadi.

To’g’ri chiziq $Px+Qy+R=0$ tenglamasi bilan va A nuqta (p,q) koordinatalar bilan berilgan bo`lsin. $B(p_1,q_1)$ nuqta berilgan to`g`ri chiziqqa nisbatan berilgan $A(p,q)$ tuqtaga simmitrik nuqta bo`lsin. B nuqta koordinatalarini topamiz.

$M(x,y)$ nuqta o`q simmetriyasining ihtiyoriy nuqtasi bo`lsin. U holda $M(x,-\frac{Px+R}{Q})$ koordinatalarga ega bo`ladi. A va B nuqtalar uchun

$$|AM|^2=|BM|^2$$

Munosabat doim o’rinlidir. Bu munosabatning algebraik ifodalardagi ko`rinishi:

$$(x-p)^2+\left(\frac{-Px-R}{Q}-q\right)^2=(x-p_1)^2+\left(\frac{-Px-R}{Q}-q_1\right)^2$$

dan iborat. Oxirgi munoabat o`q simmetriyasiga tegishli ihtiyoriy nuqta koordinatalari uchun o`rinlidir. Shuning uchun bu formulani o`q smmetriyasining almashinuvchi nuqtalarning koordinatalaridagi ifodasi deb qabul qilsak bo`ladi [1].

Endi quyidagi soddalshtirish ishlarini bajaraylik.

$$-2px+p^2+\frac{2q(Px+R)}{Q}+q^2=-2p_1x+p_1^2+\frac{2q_1(Px+R)}{Q}+q_1^2,$$

$$2\left(-p+\frac{Pq}{Q}+p_1-\frac{q_1P}{q}\right)x=-p^2-q^2-\frac{2qR}{Q}+p_1^2+q_1^2+\frac{2q_1R}{Q}.$$

Yuqorida takidlaganimizdek bu munosabatlar ihtiyoriy x uchun bajariladi, ya'ni ular ayniyatdir. Shunga ko`ra, oxirgi tengliklardagi barcha koeffitsientlar nolga teng bo`lishligi zarurdir, ya'ni:

$$\begin{cases}-p+\frac{Pq}{Q}+p_1-\frac{Pq_1}{Q}=0\\ -p^2-q^2-\frac{2Rq}{Q}+p_1^2+q_1^2+\frac{2Rq_1}{Q}=0.\end{cases}$$

$B(p_1,q_1)$ nuqta koordinatalarini noma'lum sifatida qarab,

$$\begin{cases} p_1 - \dfrac{P}{Q}q_1 = p - \dfrac{P}{Q}q \\ p_1^2 + q_1^2 + \dfrac{2R}{Q}q_1 = p^2 + q^2 + \dfrac{2R}{Q}q. \end{cases}$$

Tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu erda $p_1 = p,\ q_1 = q$ echimlar trivial echimlar xisoblanadi. Biroq, $A \neq B,\ p_1 \neq p\ \ q_1 \neq q$ dir. Shuning uchun sistemaning ikkinchi tenglamasini

$$p_1^2 - p^2 + q_1^2 - q^2 + \frac{2R}{Q}(q_1 - q) = 0$$

ko`rinishga keltiramiz. Shuningdek birinchi tenglama $p_1 - p = \dfrac{P}{Q}(q_1 - q)$ ni shunday almashtiraylikki, u $(p_1 + p)\dfrac{P}{Q}(q_1 - q) + (q_1 + q)(q_1 - q) + \dfrac{2R}{Q}(q_1 - q) = 0$ ko`rinishga kelsin. Bu erda $q_1 - q$ ga bo`lib, $(p_1 + p)\dfrac{P}{Q} + q_1 + q + \dfrac{2R}{Q} = 0$ ni hosil qilamiz. Ularni birlashtirib

$$\begin{cases} p_1 - \dfrac{P}{Q}q_1 = p - \dfrac{P}{Q}q. \\ \dfrac{P}{Q}p_1 + q_1 = -\dfrac{2R}{Q} - \dfrac{P}{Q}p - q. \end{cases}$$

ga ega bo`lamiz. Bu sistema echimlari:

$$\begin{cases} p_1 = p - \dfrac{2P}{p^2 + Q^2}\left(P \cdot p + Q \cdot q + R\right) \\ q_1 = q - \dfrac{2Q}{p^2 + Q^2}\left(P \cdot p + Q \cdot q + R\right). \end{cases} \quad (1)$$

Oxirgi sistema o`q simmetriyasining formulalari deb ataladi. Bu formulalarning ajoyibligi shundan iboratki, agar biz uni $p$ va $q$ larga nisbatan echsak, sistema ko`rinishi umuman o`zgarmaydi, faqat $p$ ва $p_1$, $q$ va $q_1$ lar o`rinlarini almashtiradi, xolos.

Faraz qilaylik: $P = 2,\ Q = -1,\ R = 1,\ p = 3,\ q = 1,\ p_1 = m,\ q_1 = n$ bo`lsin.

U holda

$$m = 3 - \frac{4}{5}(6 + 1 + 1) \ \Rightarrow\ m = -\frac{17}{5}$$

$$n = -1 + \frac{2}{5}(6 + 1 + 1) \ \Rightarrow\ n = -\frac{11}{5}.$$

O`q simmetriyasining algebraik ifodasidan foydalanib quyidagi masalalarni echamiz.

1-masala: O`q simmetriyasining algebraik ifodasidan foydalanib, $A(p,q)$ nuqtaning to`g`ri chiziqdagi proektsiyasi $M_0(p_0, q_0)$ ning koordinatalarini toping.

Echish: (1) dan foydalanamiz. Dastlab $A(p,q)$ nuqtaga simmetrik bo`lgan $B(p_1, q_1)$ni, so`ngra $[AB]$ kesmani teng ikkiga bo`luvchi nuqtani topamiz.

$$\begin{cases} p_0 = \dfrac{p_1 + p}{2} = p - \dfrac{2P}{p^2 + Q^2}\left(P \cdot p + Q \cdot q + R\right) \\ q_0 = \dfrac{q_1 + q}{2} = q - \dfrac{2Q}{p^2 + Q^2}\left(P \cdot p + Q \cdot q + R\right). \end{cases} \tag{2}$$

(2) formulalar yana ajoyib munosabatlarni hosil qilish mumkin. $A(p,q)$ va $B(p_1,q_1)$ nuqtalar orasidagi masofa

$$|AB|^2 = (p_1 - p)^2 + (q_1 - q)^2 = \frac{4\left(P^2 + Q^2\right)}{p^2 + Q^2} \cdot (P \cdot p + Q \cdot q + R)^2$$

bu yerda

$$|AM_0|^2 = \frac{1}{2}|AB|^2 = \frac{(P \cdot p + Q \cdot q + R)^2}{p^2 + Q^2}$$

Bundan

$$d = \frac{|P \cdot p + Q \cdot q + R|}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \tag{3}$$

(3) formula $A(p,q)$ nuqtadan $Px + Qy + R = 0$ to`g`ri chiziqqacha bo`lgan masofani hisoblash formulasidir [2].

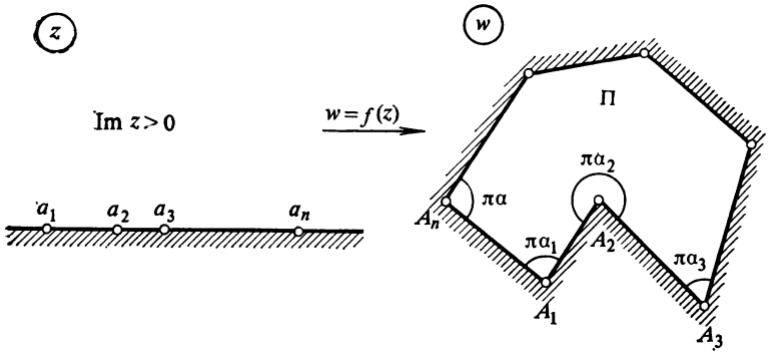
Adabiyotlar

1. Shafarevich I.R. Algebraicheskaya preobrazovaniya. Moskva. 1992.
2. Benks I.M. Algebraicheskaya preobrazovaniya. Moskva. Azbuka. 2018.

SHVARTS-KRISTOFFEL FORMULASI ORQALI CHEGARASI UCHBURCHAK BO'LGAN SOHANING ANALITIK SIG'IMI.

To'lqinboyev I.M.
O'zMU
001islombek@gmail.com

Ushbu tezisda biz yuqori yarim tekislikni ma'lum bir cheklangan yoki chegaralanmagan ko'pburchakli sohaga konform akslantiradigan akslantirishni aniq formulasini (chegara cheklangan sonli chiziq segmentlarini o'z ichiga oladi) va bu formula yordamida analitik sig'im ta'rifi yordamida chegarasi uchburchak bo'lgan sohaning analitik sig'im topish formulasini taqdim etamiz. Bunday akslantirish ko'pincha issiqlik o'tkazuvchanligi, suyuqlik mexanikasi va elektrostatik kabi fizikaviy muammolarda qo'llaniladi.



Shvarts-Kristoffel teoremasi. Tasavvur qilamiz $w=f(z)$ akslantirish $\mathrm{Im}\, z>0$ yuqori yarim tekislikni chegaralangan $\Pi(0<\alpha_k\le 2,\ a_k\neq\infty\ \ k=1,2,...,n)$ ko'pburchakka akslantirsin(yuqoridagi chizmaga qaralsin). U holda $w$akslantirish quyidagicha aniqlanadigan Shvarts-Kristoffel akslantirish formulasi shaklida bo'ladi:

$$f(z)=c\int_{z_0}^{z}(\xi-a_1)^{\alpha_1-1}(\xi-a_2)^{\alpha_2-1}...(\xi-a_n)^{\alpha_n-1}d\xi+c_1 \qquad (1)$$

bu yerda $c$va $c_1$lar haqiqiy va integral $\mathrm{Im}\, z>0$ yuqori yarim tekislikda yotgan chiziq bo'ylab olingan.

Yuqori yarim tekislikni uchburchakka akslantirish formulasi. $\mathrm{Im}\, z>0$ yuqori yarim tekislikni chegaralangan, uchlari $A_1=0, A_2=1$ va $\mathrm{Im}\, A_3>0$ bo'lgan Π uchburchakka konform akslantiradigan $w=f(z)$ funksiyaning formulasi quyidagicha aniqlanadi.

$$f(z)=\frac{1}{B(\alpha_1,\alpha_2)}\int_0^z \xi^{\alpha_1-1}(1-\xi)^{\alpha_2-1}d\xi \qquad (2)$$

Bu yerda $0<\alpha_k<1\ \ (k=1,2,3),\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1.$

Tasdiq. . markazi yuqori yarim tekislikda olingan biror c nuqtada bo'lgan va to'ligicha yuqori yarim tekislikda yotgan doiraning chegarasi bo'lsin u holda $f(z)$ va $q(z)$ni quyidagicha aniqlaymiz:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\gamma^{\alpha_1}(1-\gamma^{\alpha_2})}{\dfrac{1}{B(\alpha_1,\alpha_2)}\displaystyle\int_0^\gamma \xi^{\alpha_1-1}(1-\xi)^{\alpha_2-1}d\xi-z}d\gamma$$

$$q(z)=e^{i\varphi}\frac{f(z)+c}{f(z)+\overline{c}}$$

U holda Π uchburchakning analitik sig'imi quyidagi formula bilan topiladi.

$$\gamma(\Pi)=\lim_{z\to\infty} z(q(z)-q(\infty))\cdot$$

Adabiyotlar

1. Yu.V.Sidorov, M.V.Fedoryuk, M.I.Shabunin. Lectures On The Theory Of Functions Of A Complex Variable.

IKKI O‘LCHOVLI SIMPLEKSDA ANIQLANGAN KVAZI NOVOLTERRA KUBIK STOXASTIK OPERATORINING DINAMIKASI

Xamroyev A. Yu., Safarov A.A.
Qarshi davlat universiteti

$$S^{n-1}=\left\{x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_i\geq 0, i=\overline{1,n}, \sum_{i=1}^{n}x_i=1\right\}$$

to‘plam $(n-1)$ o‘lchovli *simpleks* deb ataladi.

Quyidagi $W: S^{n-1}\to S^{n-1}$ akslantirish,

$$(Wx_l)=x_l^{'}=\sum_{i,j,k=1}^{n}P_{ijk,l}x_ix_jx_k, l=\{1,2,...,n,\} \tag{1}$$

bu yerda:

$$P_{ijk,l}=P_{jik,l}=P_{kji,l}=P_{kij,l}=P_{jki,l}=P_{ikj,l}\geq 0,\ \sum_{l=1}^{n}P_{ijk,l}=1 \tag{2}$$

(1), (2) ni *kubik stoxastik operator* deb ataymiz.

Agar $P_{ijk,l}=0,\ \forall l\in\{i,j,k\}$ (3) shart o‘rinli bo‘lsa, (1), (2) operator *novolterra kubik stoxastik operatori* deb ataladi.

Agar novolterra operatorining faqat $P_{iii,i}$ va $P_{ijk,l}$, $i\neq j\neq k$ koeffitsiyentlari uchun (3) o‘rinli bo‘lmasa, W operator kvazi novolterra kubik stoxastik operator deb ataladi.

Kvazi novolterra kubik stoxastik operatorni $n=3$ (ya’ni ikki o‘lchovli simpleks) da o‘rganamiz. Yuqoridagi ta’riflarga ko‘ra

$$W:\begin{cases}x'=\alpha_1x^3+\beta_1y^3+\gamma_1z^3+3y^2z+3yz^2+2xyz,\\ y'=\alpha_2x^3+\beta_2y^3+\gamma_2z^3+3x^2z+3xz^2+2xyz,\\ z'=\alpha_3x^3+\beta_3y^3+\gamma_3z^3+3x^2y+3xy^2+2xyz,\end{cases} \tag{4}$$

Bu yerda $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\geq 0,\ i=1,2,3,\ \sum_{i=1}^{3}\alpha_i=\sum_{i=1}^{3}\beta_i=\sum_{i=1}^{3}\gamma_i=1$.

(4) operatorni umumiy holda o‘rganish ancha murakkab. Shu sababli operator koeffitsiyentlariga ma’lum bir shart kiritib, o‘rganishni boshlaymiz.

$\alpha_1=\gamma_1=\alpha_2=\beta_2=\beta_3=\gamma_3=0,\quad \alpha_3=\beta_1=\gamma_2=1$ bo‘lgan holda o‘rganamiz. Ushbu holda operator quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$W:\begin{cases} x' = y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + 2xyz \\ y' = z^3 + 3x^2z + 3xz^2 + 2xyz \\ z' = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 2xyz \end{cases} \tag{5}$$

(5) operatorning qo‘zg‘almas nuqtalarini $W(\lambda) = \lambda,\ \lambda = (x, y, z)$ tenglamani yechish orqali aniqlaymiz. Ya’ni

$$\begin{cases} y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + 2xyz = x \\ z^3 + 3x^2z + 3xz^2 + 2xyz = y \\ x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 2xyz = z \end{cases} \tag{6}$$

$Fix(W)$ orqali W operatorning barcha qo‘zg‘almas nuqtalari to‘plamini belgilaymiz. $Fix(W) = \{\lambda \in S^2 : W(\lambda) = \lambda\}$.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz: $\operatorname{int} S^2 = \{(x, y, z) \in S^2 : xyz > 0\}$, $\partial S^2 = S^2 \setminus \operatorname{int} S^2$ va $C = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Teorema. (5) operator uchun quyidagilar o‘rinli:

a) $Fix(W) \cap \partial S^2 = \varnothing$

b) $Fix(W) \cap \operatorname{int} S^2 = \{C\}$.

Isbot. a) $(x, y, z) \in \partial S^2$ bo‘lsin. Faraz qilaylik, $x = 0$ ($y = 0, z = 0$ hollar ham xuddi shunday tekshiriladi) bo‘lsin. U holda (6) sistemaga ko‘ra, tenglamalar sistemasining yechimi $x = y = z = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Lekin ta’rifga ko‘ra $(0,0,0) \notin S^2$. Bundan ko‘rinadiki,

$Fix(W) \cap \partial S^2 = \varnothing$

b) $(x, y, z) \in \operatorname{int} S^2$ bo‘lsin. (6) sistemaning birinchi va ikkinchi tenglamalarini ayiramiz:

$$y^3 - z^3 + 3y^2z - 3x^2z + 3yz^2 - 3xz^2 = x - y$$

yoki

$$(y - z)(y^2 + yz + z^2) = (x - y)(1 + 3z(x + y) + 3z^2) \tag{7}$$

Xuddi shunday (2.2.1) sistemaning birinchi va uchinchi tenglamalarini ham ayiramiz:

$$y^3 - x^3 + 3y^2z - 3x^2y + 3yz^2 - 3xy^2 = x - z,$$

$$(y - x)(y^2 + xy + x^2) = (x - z)(1 + 3y^2 + 3y(x + z)) \tag{8}$$

Ikkinchi va uchinchi tenglamalarning ham ayirmasini sodda holga keltiramiz:

$$(z - x)(z^2 + zx + x^2) = (y - z)(1 + 3x(y + z) + 3x^2) \tag{9}$$

$\forall (x, y, z) \in \operatorname{int} S^2$ uchun,

$$y^2 + yz + z^2 > 0,\ y^2 + xy + x^2 > 0,\ z^2 + zx + x^2 > 0,$$

$$1 + 3z(x + y) + 3z^2 > 0,\ 1 + 3y^2 + 3y(x + z) > 0,\ 1 + 3x(y + z) + 3x^2 > 0.$$

Faraz qilaylik $z \geq x (z \leq x)$ bo‘lsin. (7), (8) va (9) tenglamalardan $x \geq y (x \leq y)$ va $y \geq z (y \leq z)$ ekanligi kelib chiqadi. Bundan esa $z \geq x \geq y \geq z$ $(z \leq x \leq y \leq z)$ (10) munosabatga kelamiz. Shunday qilib, (6) tenglamalar sistemasi yagona $x = y = z = \frac{1}{3}$ yechimga ega.

Demak, $C = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ nuqta (5) operatorning yagona qo‘zg‘almas nuqtasi bo‘ladi.

Teorema isbotlandi.

Qo‘zg‘almas nuqtaning turini aniqlash uchun (5) operatorda $z = 1 - x - y$ almashtirishni kiritib, quyidagi ko‘rinishga kelamiz:

$$W: \begin{cases} x' = y^3 + 3y^2(1-x-y) + 3y(1-x-y)^2 + 2xy(1-x-y) \\ y' = (1-x-y)^3 + 3x(1-x-y)^2 + 3x^2(1-x-y) + 2xy(1-x-y) \end{cases}$$

bu yerda $(x, y) \in \{(x, y): x, y \geq 0,\ 0 \leq x + y \leq 1\}$, x, y - S^2 simpleksning koordinatalari.

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = y^2 + 2xy - 4y$$

$$\frac{\partial x'}{\partial y} = 3y^2 - 6y + 2xy + x^2 - 4x + 3$$

$$\frac{\partial y'}{\partial x} = -3(1-x-y)^2 + 3 + y^2 - 6x - 4y + 2xy$$

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = -3(1-x-y)^2 + 2xy - 4x + x^2$$

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)_C = -1$$

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)_C = \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_C = -\frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)_C = -\frac{4}{3}$$

(5) operatorning yakobianiga ko‘ra [1]

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$|\lambda_{1,2}| = \left|\frac{-7 \pm \sqrt{3}i}{6}\right| > 1$$

Demak, (5) operatorning qo‘zg‘almas nuqtasi o‘zidan *itaruvchi nuqta*.

Adabiyotlar

1. R.L. Devaney, An introduction to chaotic dynamical systems, stud. Nonlinearity, Westview Press, Boulder, CO 2003.
2. A. Yu. Khamraev, On cubic operators of volterra type (Russian), Uzbek. Math. Zh. 2004 (2) (2004) 79-84
3. U. A. Rozikov, A. Yu. Khamraev, On construction and a class of non-Volterra cubic stochastic operators, Nonlinear Dyn. Syst. Theory 14)1) (2014) 92-100
4. A. Yu. Khamraev, On the dynamic of a qusistrictly non-Volterra quadratic stochastic operator, Ukrainan Math. J. 71(8) (2019) 116-1122.
5. U.U. Jamilov, A. Reinfelds, On constrained Volterra cubic stochastic operators, J. Difference Equ. Appl. (2020)

BERILGAN YADRO UCHUN FRIDRIXS MODELI

Xushvaqtov N.X.
O‘zbekiston Milliy universiteti
nuriddinh@gmail.com

Bizga $\Omega \subset \mathbb{R}^{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ – bo‘sh bo‘lmagan kompakt to‘plam va bu to‘plamda $u(x)$ haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiya berilgan bo‘lsin. $L_2(\Omega^2)$ fazoda $k(x,s)$ yadroli K kompakt integral operator bo‘lsin. $L_2(\Omega)$ fazoda H formula bilan aniqlangan operator qaraymiz:

$$H = U - K, \tag{1}$$

bu yerda

$$(Uf)(x) = u(x) f(x),\ f \in L_2(\Omega).$$

Kvant mexanikasi va statistik fizikaning bir qator masalalari H operatorning spektrini o‘rganishga olib kelinadi. Kompakt qo‘zg‘alish haqidagi Viell teoremasiga ko‘ra

$$\sigma(U) = \sigma_{ess}(U) = [u_{\min}, u_{\max}],\ u_{\min} = \inf_{x\in\Omega} u(x),\ u_{\max} = \sup_{x\in\Omega} u(x).$$

Birinchi bo‘lib H operator muhim spektr qo‘zg‘alish nazariyasi [1] da o‘rganilgan. Ixtiyoriy (1) ko‘rinishdagi operator Fridrixs modeli deb ataladi. $u(x)=x\in[0,1]$ bo‘lganda va $K:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$ kompakt integral operator yadrosi, $\mu>\frac{1}{2}$ ko‘rsatkichli Gyoldr yadrosi bo‘lsa, u holda H operator muhim spektrining tashqarisida chekli xos qiymatga ega bo‘lishi [2], [3] da ko‘satilgan.

Bir o‘lchamli Fridrixs modeli [3], [4] ishlarda o‘rganilgan. Agar $u(x)$ funksiya kritik nuqtaga ega bo‘lsa, ya’ni $x\in[a,b]$ huchun $u'(x)=0$ hamda chekli va har biri aynimaydigan bo‘lsa, u holda H operator diskret spektri chekli bo‘lishi [5] da isbotlangan.

(1) modelning muhim spektrdan tashqarida yotuvchi xos qiymatlari soni cheksizligi haqidagi savol kam o‘rganilgan bo‘lib, matematik nuqtai nazardan Yefimov effekti paydo bo‘lishini kutish mumkin. Muhim spektrdan tashqarida yotuchi bir o‘lchamli (1) modelning xos qiymatlari soni cheksizligi haqidagi savol [3], [6] da o‘rganilgan.

Bizga $\Omega=[a,b]^\nu$, $\nu\in\mathbb{N}$ to‘plam va bu to‘plamda $u(x)=u(x_1,x_2,\ldots,x_\nu)$ uzluksiz haqiqiy qiymatli funksiya berilgan bo‘lsin.

Quyidagicha berilgan $U:L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)$ operatorni qaraymiz:

$$(Uf)(x)=u(x)f(x),\quad f\in L_2(\Omega).$$

U operator chiziqli chegaralangan va o‘z-o‘ziga qo‘shma operator bo‘ladi.

Fredgolm tipidagi $K:L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)$ integral operatorni quyidagicha aniqlaylik:

$$(Kf)(x)=\int_\Omega k(x,s)f(s)ds,\ f\in L_2(\Omega),\ x,s\in\Omega,$$

bu yerda $k(x,s)$ yadro simmetrik ya’ni $k(x,s)=\overline{k(s,x)}$ va kvadrati bilan integrallanuvchi funksiya. K Fredgolm tipidagi integral operatori kompakt va o‘z-o‘ziga qo‘shma ($K=K^*$) operator bo‘ladi.

(1) ko‘rinishdagi operator Fridrixs modeli deb ataladi. H operator esa chiziqli chegaralangan va $H=H^*$ bo‘ladi.

Teorema.(Viell [7]) Agar A operator o‘z-o‘ziga qo‘shma va Q kompakt operator bo‘lsa, u holda $\sigma_{ess}(A\pm Q)=\sigma_{ess}(A)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Viell teoremasiga ko‘ra $\sigma_{ess}(H)=\sigma(U)=[u_{\min},u_{\max}]$ bo‘ladi.

Fredgolm tipidagi $K:L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)$ integral operatorini qaraylik:

$$Kf(x)=\lambda f(x),\ f(x)\neq 0,\Rightarrow(K-\lambda E)f(x)=0,$$

bu yerda E – birlik operator, λ son K operatorning xos qiymati deyiladi.

Ta’rif. Quyidagi ifoda

$$\Delta(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{n!}d_n,$$

bu yerda

$$d_n = \int_a^b \ldots \int_a^b F_n \begin{pmatrix} s_1, s_2 \ldots, s_n \\ s_1, s_2 \ldots, s_n \end{pmatrix} ds_1 ds_2 \ldots ds_n,$$

$$F_n \begin{pmatrix} x_1, x_2 \ldots, x_n \\ s_1, s_2 \ldots, s_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} k(x_1, s_1) & k(x_1, s_2) & \ldots & k(x_1, s_n) \\ k(x_2, s_1) & k(x_2, s_2) & \ldots & k(x_2, s_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k(x_n, s_1) & k(x_n, s_2) & \ldots & k(x_n, s_n) \end{vmatrix}, \qquad (2)$$

$K - \lambda E$ operatorning Fredgolm determinanti deb ataladi.

Aytaylik $\Omega = [0,1]$. Fredgolm tipidagi K integral operatorining yadrosi quyidagicha berilgan bo‘lsin (ya’ni *dimIm K=3*):

$$k(x,s) = \alpha_1 \phi_1(x)\overline{\phi_1(s_1)} + \alpha_2 \phi_2(x)\overline{\phi_2(s_1)} + \alpha_3 \phi_3(x)\overline{\phi_3(s_1)}$$

bu yerda $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$ va $\phi_i \in L_2[0,1]$, $(\phi_i, \phi_j) = 0$ $i \neq j$, $i, j = 1,2,3$, $\| \phi_i \| = 1$, $i = 1,2,3$.

Lemma. Quyidagi funksiya

$$D(\lambda) = 1 - (\alpha_1 \Phi_1(\lambda) + \alpha_2 \Phi_2(\lambda) + \alpha_3 \Phi_3(\lambda)) + \alpha_1 \alpha_2 \left(\Phi_1(\lambda)\Phi_2(\lambda) - \Gamma_{12}^2(\lambda) \right) +$$
$$+ \alpha_1 \alpha_3 \left(\Phi_1(\lambda)\Phi_3(\lambda) - \Gamma_{13}^2(\lambda) \right) + \alpha_2 \alpha_3 \left(\Phi_2(\lambda)\Phi_3(\lambda) - \Gamma_{23}^2(\lambda) \right), \ \lambda \in (-\infty, 0),$$

bu yerda

$$\Phi_1(\lambda) = \int_0^1 \frac{\phi_1^2(s)}{u(s) - \lambda} ds, \Phi_2(\lambda) = \int_0^1 \frac{\phi_2^2(s)}{u(s) - \lambda} ds, \Phi_3(\lambda) = \int_0^1 \frac{\phi_3^2(s)}{u(s) - \lambda} ds$$

$$\Gamma_{12}(\lambda) = \int_0^1 \frac{\phi_1(s)\phi_2(s)}{u(s) - \lambda} ds, \Gamma_{13}(\lambda) = \int_0^1 \frac{\phi_1(s)\phi_3(s)}{u(s) - \lambda} ds, \Gamma_{23}(\lambda) = \int_0^1 \frac{\phi_2(s)\phi_3(s)}{u(s) - \lambda} ds$$

$K_\lambda - E$ operatorning $k(x,s)$ yadro uchun Fredgolm determinanti bo‘ladi.

Qulaylik uchun belgilash kiritamiz

$$\lim_{\lambda \to 0-0} \Phi_1(\lambda) = M_1 \qquad \lim_{\lambda \to 0-0} \Phi_2(\lambda) = M_2 \qquad \lim_{\lambda \to 0-0} \Phi_3(\lambda) = M_3$$
$$\lim_{\lambda \to 0-0} \Gamma_{12}(\lambda) = M_{12} \qquad \lim_{\lambda \to 0-0} \Gamma_{13}(\lambda) = M_{13} \qquad \lim_{\lambda \to 0-0} \Gamma_{23}(\lambda) = M_{23}.$$

Tasdiq. Faraz qilaylik $M_{12} < \infty$, $M_{13} < \infty$, $M_{23} < \infty$, $M_1 = \infty$, $M_2 = \infty$ va $M_3 = \infty$ bo‘lsin. Agar $\alpha_1 M_1 < 1$, $\alpha_2 M_2 < 1$ va $\alpha_3 M_3 < 1$ tengsizlik bajarilsa, u holda H operator manfiy xos qiymatga ega bo‘ladi.

Adabiyotlar

1. Friedrichs K. O. Uber die Spectralzerlegung eines Integral Operators -Math. Ann. 1938. V. 115, №1.p.249-272.

2. Ладыженская О.А., Фаддеев Л.Д. К теории возмущений непрерывного спектра //Докл.АН СССР. 1962. Т.145, №2. С. 301-304.

3. Эшкобилов Ю.Х. О бесконечности числа отрицательных собственных значений модели Фридрихса Наносистемы: физика, химия, математика,2012, 3(6),С. 16-24
4. Минлос Р.А., Синай Я.Г. Исследование спектров стохаетических операторов,возникающих в решет частых моделях газа //ТМФ. 1970. Т.2. №2. С. 230-243.
5. Лакаев С.Н. О дискретном спектре обобщенной модели Фридрихса Докл. АН УзССР. 1979. №4. С.9-10.
6. Эшкобилов Ю.Х. О бесконечности дискретного спектра операторов в модели Фридрихса Мат.труды. 2011. Т.14. №1. С. 195-211.
7. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Том 4: Анализ операторов. –М.: “Мир”, 1982 г.

TANLANMA SPEYSINGLAR ORQALI TUZILGAN BIR STATISTIKALAR SINFI UCHUN MARKAZIY LIMIT TEOREMAGA DOIR BA’ZI MASALALAR HAQIDA.

Zokirjonov M.O.
O’zbekiston Milliy Universiteti

Bizga $X_1, X_2, ..., X_{n-1}$ o’zgarish sohasi [0.1] oraliq bo’lgan, o’zaro bog’liqsiz umumiy absolyut uzluksiz taqsimotga ega bo’lgan tasodifiy miqdorlar ketma ketligi (ya’ni $n-1$ hajmli tanlanma) berilgan bo’lib $X_{1,n} \le X_{2,n} \le ... \le X_{n-1,n}$ mos variatsion qator bo’lsin. $N = n/k$ deb belgilaylik, bu yerda $k \ge 1$ butun va umumiylikkaga ziyon keltirmagan holda N ni butun deb qaraymiz. O’zaro kesishmaydigan *k*-speysinglar deb $W_{s,k} = X_{sk,n} - X_{(s-1)k,n}$, $s = 1, 2, ..., N$ ayirmalarga aytiladi, bu yerda $X_{0,n} = 0$, $X_{n,n} = 1$ deb hisoblanadi. Bundan buyon tanlanma hajmi n o’sish bilan $k = k(n)$ham o’sib borishi mumkin bo’lib, ammo $k(n) = o(n)$ shart bajarilishi talab etiladi.

Bizni quyidagi statistikalar sinfi qiziqtiradi:

$$\mathcal{R}_N(W) = \sum_{s=1}^{N} f_s(nW_{s,k}) \tag{1}$$

bu yerda f_m, $m = 1, ..., N$ manfiy bo’lmagan sonlar yarim o’qida aniqlangan haqiqiy funksiyalar. Maxsus hol $f_1 = ... = f_N = f$ bo’lganda , ya’ni

$$\mathcal{S}_N(W) = \sum_{s=1}^{N} f(nW_{s,k}) \tag{2}$$

simmetrik statistikalar sinifini tashkil etadi.

Ushbu statistikalarning amaliyotda uchraydigan muhum xususiy hollari quyidagilardir.

1. Chiziqli statistika

$$L_N = \sum_{s=1}^{N} a_{m,n} W_{s,k}$$

bu yerda $a_{1,n}, a_{2,n}, ..., a_{N,n}$ haqiqiy sonlar;

2. Grinvud (Greenwood) statistikasi

$$G_N^2 = \sum_{s=1}^{N} \left(nW_{s,k} - k \right)^2$$

3. Moran (Moran) statistikasi

$$M_N = -\sum_{s=1}^{N} \log(nW_{s,k})$$

4. Entropiya sifat (Entropy-type) statistika

$$H_N = -\sum_{s=1}^{N} nW_{s,k} \log(nW_{s,k})$$

5. Kimbal (Kimball) statistikasi

$$K_{\gamma,N} = \sum_{s=1}^{N} (nW_{s,k})^{\gamma} \ , \ \gamma(\gamma - 1) \neq 0 \ , \ \gamma > -k/2$$

6. Rao (Rao) statistikasi

$$R_N = \sum_{s=1}^{N} \left| nW_{s,k} - k \right|$$

Quyida (1) va (2) statistikalar qo'llaniladigan ikki masalalarni keltiramiz.

1. *Muvofiqlik statistik alomat.* Matematik statistikani asosiy masalalaridan biri kuzatilayotgan tasodifiy miqdorning noma'lum taqsimot funksiyasi haqida biror mulohazalarga asoslanib qilinadigan tahminni tekshirish qoidasini, statistik alomatni tuzishdan iborat. Har qanday statistik mulohaza va qoidalar esa oldindan berilgan tanlanmaga, ya'ni kuzatuvlar natijalariga, asoslangan. Ularni $X_1, X_2, ..., X_{n-1}$ bilan belgilaymiz. Xususan, statistik masala tanlanma berilgan (ya'ni to'la-to'kis ma'lum bo'lgan) taqsimot funksiya F_0 ga ega bo'lgan tasodifiy miqdordan olingan tahminni tekshirish alomatini tuzishdir. Bu tahminni asosiy tahmin nol tahmin deb ataladi va odatda H_0 bilan belgilanadi. Shunday qilib bizni holda H_0: $F(x) = F_0(x)$, $0 \le x \le 1$. Tanlanma speysinglarga asoslangan muvofiqlik alomatiga ko'ra agar $\{\mathbb{R}_N(W) > c\}$ hodisasi ro'y bersa H_0 tahmin rad etiladi. Bu yerda c aniqlanishi kerak bo'lgan kattalik.

2. *Noma'lum parametrga statistik baho tuzish.*

Endi $X_1, X_2, ..., X_{n-1}$ tanlanma F_θ, absalyut uzluksiz taqsimotdan olingan bo'lib, bunda u noma'lum parametr θ ga bog'liq, $\theta \in \Theta \subset R^d$, Θ ochiq to'plam. Masala ushbu parametrga mantiqan asoslangan statistic baho tuzishdan iborat. Speysinglarni kiritaylik

$$W_{s,k}(\theta) = F_\theta(X_{sk,n}) - F_\theta(X_{(s-1)k,n}) \ , \ s = 1, 2, ..., N$$

bu yerda $F_\theta(X_{0,n}) \overset{def}{=} 0$ va $F_\theta(X_{n,n}) \overset{def}{=} 1$. Shuni aytish lozimki agar parametrni asli kattaligi θ_0 bo'lsa, u holda $F_{\theta_0}(X_s)$ (0,1) oraliqda tekis taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdor bo'ladi va $W_{s,k}(\theta_0)$ speysinglarga tekis speysinglar deyiladi. Endi (2) statistika $\mathbb{S}_N(W,\theta)$ ni olamiz va noma'lum parameter θ ga baho $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1,...,X_{n-1})$ deb $\mathbb{S}_N(W,\theta)$ ni minimallashtirvchi θ ni olamiz: $\hat{\theta}_n \equiv \arg\min_\theta S_N(W,\theta)$. Ushbu bahoni ma'lum shartlar asosida asosli va asimptotik effektiv statistik baholigini Ghosh and Jammalamadaka (2001), k=1 hol uchun, M. Egstrom, S. Mirakhmedov and S. R. Jammalamadaka (2000, k ixtiyoriy) maqolalarida ko'rsatishgan.

Xususan, Moran satatistikasini qo'llash quyidagi maksimum-speysinglar bahosiga olib keladi. Bunda tanlanma speysinglarning geometrik o'rta qiymatini maksimallashtiruvchi parametrga quyidagi maksimum-speysinglar bahosi deyiladi:

$$\hat{\theta}_n = \arg\max_\theta \ln\left(nW_{1,1}(\theta)\cdot....\cdot nW_{n,1}(\theta)\right)^{1/n} = \arg\max_\theta \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}\log\left(nW_{s,n}(\theta)\right)$$

Noma'lum parametrni bu usulda baholash mantiqan quyidagi ikki faktga asoslangan: agar parametrni asli kattaligi θ_0 bo'lsa, u holda $F_{\theta_0}(X_s)$ (0,1) oraliqda tekis taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdor bo'ladi va $EW_{s,1}(\theta_0) = n^{-1}$

(i) $\max_{\substack{a_1+...+a_n=1,\\ a_i>0}} (a_1\cdot....\cdot a_n) = n^{-n}$, ya'ni maksimum $a_1 = ... = a_n = n^{-1}$ bo'lganda erishiladi;

(ii) Funksiya va uning logarifmining (u aniqlangan holda) ekstremum nuqtalari ustma-ust tushadi.

3. *Doirani tasodifiy qoplash.*

Radiusi birga teng bo'lgan aylanada tekis taqsimotga ega bolgan $X_1, X_2, ..., X_{n-1}$ tasodifiy nuqtalar berilgan bo'lib ular soat yo'nalishi bo'yicha X_{i+1} nuqta X_i nuqtadan keyin joylashgan bo'lsin, xamda $X_0 = 0$ va $X_n = 2\pi$ deb olaylik. Yana bir qadamli speysinglar sifatida bu nuqtalar orasidagi soat yo'nalishiga teskari yo'nalishdagi masofalarni olamiz, ya'ni $D_i = X_i - X_{i-1}$, $X_0 = 0$. Uchlari $X_j, j = 1,2,...,n$ nuqtalarda bo'lgan qavariq ko'pburchakning yuzasini Δ_n orqali belgilaylik, u xolda

$$\Delta_n = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}\sin D_m \cdot$$

Endi xar bir X_j nuqtalar aylana bo'ylab soat yo'nalishi boyicha joylashtirilgan yoylarning so'ngi nuqtasi bo'lib, bu yoylar uzunliklari bir xil a_n ga teng bo'lsin. Tushinarliki aylana yuqorida aytilgan xech bir yoylar bilan qoplanmagan turli segmentlarga bo'linadi. Bu segmentlarni bo'shliqlar deb ataymiz. Ko'rilgan masalani xarakterlovchi quyidagi tasodifiy miqdorlar o'rganiladi:

$\mathbb{V}_n(a_n) = \sum_{j=1}^{n}(D_j - a_n)I(D_j > a_n)$ - aylananing bo'sh qismi (yoki vakansiya),

$\mathbb{L}_n(a_n) = \sum_{j=1}^{n} I(D_j > a_n)$ - aylanadagi bo'shliqlar soni ,

$\mathbb{L}_n(a_n, b_n) = \sum_{j=1}^{n} I(D_j \geq a_n + b_n)$ - uzunliklari b_n dan kichik bo'lmagan bo'shliqdar soni. Bu yerda $I\{A\}$ A to'plamning indikatori .

1. Yechilish kerak bo'lgan masala mohiyati

Birinchi masalada c kattalikni aniqlash uchun ikkinchi masalada esa statistik bahoni asimptotik effektivlik xossasini aniqlash uchun va nihoyat uchinchi masaladagi tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyalarini aniqlab bo'lmasligi uchun ko'rilayotgan statistikalarga limit teoremalar o'rnatish va ularda xosil bo'ladigan xatoliklarni aniqlash masalasi dolzarb masaladir. Bizning maqsad shu masalani markaziy limit teorema nuqtani nazaridan yechishdan iborat.

Adabiyotlar

1. Ghosh K, Jammalamadaka S Rao (2001) A general estimation method using spacings. J Stat Plan Inference 93:71–82
2. Ranneby B(1984) Themaximum spacingmethod. An estimationmethod related to themaximum likelihood method. Scand J Stat 11:93–112
3. Cheng RCH, Amin NAK (1983) Estimating parameters in continuous univariate distributions with a shifted origin. J R Stat Soc B 45:394–403
4. Mirakhmedov S. and Kalandarov U. (1998). The non-uniform bounds of the remainder term in CLT for the sum of functions of uniform spacings. Turkish J. Math.,22:53-60
5. M. Ekström, S. Mirakhmedov, S. Rao Jammalamadaka (2020). A class of asymptotically efficient estimators based on sample spacings. TEST (2020) 29:617

2-ШЎЪБА. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ВА ДИНАМИК СИСТЕМАЛАР

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

[1,2]Абдуллаев О. Х
[1]Институт Математики им. В.И.Романовского,
[2]Ташкентский Финансовый институт
obidjon.mth@gmail.com

Данная работа посвящена исследованию нелокальной задаче для параболо-гиперболического уравнения с дробной производной Капуто и с нелинейной нагруженной часть

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - {}_C D_{oy}^{\alpha} u + f_1(x, y; u(x;0)); \ при \ x > 0; \ y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + f_2(x, y; u(x+y;0)); \ при \ x > 0; \ y < 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + f_3(x, y; u_y(0; x+y)); \ при \ x < 0; \ y > 0 \end{cases} \quad (1)$$

с оператором Капуто:

$${}_C D_{0y}^{\alpha} f(y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y (y-z)^{-\alpha} f'(z) dz; \quad 0 < \alpha < 1;$$

где $f_i(\cdot), (i = 1,2,3)-$ заданные функции.

Рассмотрим уравнение (1) в конечной области $\Omega \subset R^2$; ограниченная сегментами B_2A_2; A_2A_1 на прямых $x = l$; $y = h$ при $x > 0$; $y > 0$; и A_1C_2; C_2B_1 на характеристиках $x-y=l$; $x+y=0$ уравнения (1) при $x > 0$; $y < 0$; а также сегментами B_1C_1; C_1B_2 на характеристиках $y-x=h$; $x+y = 0$ уравнения (1) при $x < 0$; $y > 0$. Параболическую часть смешанной области Ω обозначим через Ω_1, а гиперболические части через Ω_2 при $x > 0$ и Ω_3 при $x < 0$.

Задача NL. Требуется найти решение u(x; y) уравнения (1) из класса функций: $W = \{u : u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega_3 \cup A_2C_2) \cap C^2(\Omega_2 \cup \Omega_1); u_{xx}, {}_C D_{0y}^{\alpha} u \in C(\Omega_1)\}$

удовлетворяющие краевым условиям:

$$u(l;t) = \varphi(y), \quad 0 \le y \le h; \quad (2)$$

$$u(x;-x) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l; \quad (3)$$

$$\frac{d}{dy}\,u\left(-\frac{y}{2};\frac{y}{2}\right)=a_1(y)u_x(0;y)+a_2(y)u_y(0;y)+a_3(y)u(0;y)+a_4(y),\ \ 0\le y<h;\quad (4)$$

и интегральное условие склеивания:

$$\lim_{y\to+0} y^{1-\alpha}u_y(x;y)=\lambda_1(x)u_y(x;-0)+\lambda_2(x)u_x(x;-0)+\lambda_3(x)\int_0^x r_1(t)u(t;0)dt+$$

$$+\lambda_4(x)u(x;0)+\lambda_5(x),\ 0<x<l \qquad (5)$$

$$u_x(-0;y)=\mu_1(y)u_x(+0;y)+\mu_2(y)u_y(0;y)+\mu_3(y)\int_0^y r_2(t)u(0;t)dt+$$

$$+\mu_4(y)u(0;y)+\mu_5(y);\ \ 0<y<h \qquad (6)$$

где $a_i(y),\lambda_i(x),\lambda_5(x),\ \mu_j(y),\mu_5(y)\ (i=1,2,3,4),\varphi(y),\psi(x),r_1(x),r_2(y)$ -заданные достаточно гладкие функции, причем, $\sum_{k=1}^{4}\lambda_k^2(x)\neq 0,\sum_{k=1}^{3}a_k^2(x)\neq 0$ и $\sum_{k=1}^{4}\mu_k^2(x)\neq 0$.

Аналогичная задача с локальными краевыми и разрывными условиями склеивания для уравнения (1) но без нагруженной части было исследовано Б.Кадыркуловым [1].

Решение задачи Коши для уравнения (1) с начальными данными $u(x,0)=\tau_1(x),\quad 0\le x\le l;\ \ u_y(x,-0)=\nu_1^-(x),\quad 0<x<l$ и $u(0,y)=\tau_2(y),\quad 0\le y\le h;$ $u_x(-0,y)=\nu_2^-(y),\ \ 0<y<h$ в областях Ω_2 и Ω_3, предполагая

$$f_2(x,y;u(x+y))=f_{21}(x-y)\,f_{22}(x+y,u(x+y)),$$

$$f_3(x,y;u_y(x+y,0))=f_{31}(x-y)\,f_{32}(x+y,u_y(0,x+y))$$

пишем, соответственно в виде:

$$u_1(x,y)=\frac{\tau_1(x+y)+\tau_1(x-y)}{2}-\frac{1}{2}\int_{x+y}^{x-y}\nu_1^-(t)dt-\frac{1}{4}\int_{x+y}^{x-y}f_{21}(\eta)d\eta\int_{x+y}^{\eta}f_{22}(\xi,\tau_1(\xi))d\xi \qquad (7)$$

и

$$u_2(x,y)=\frac{\tau_2(x+y)+\tau_2(y-x)}{2}-\frac{1}{2}\int_{x+y}^{y-x}\nu_2^-(t)dt-\frac{1}{4}\int_{x+y}^{y-x}f_{31}(\eta)d\eta\int_{x+y}^{\eta}f_{32}(\xi;\tau_2'(\xi))d\xi \qquad (8)$$

Воспользуюсь краевым условиями (3) и (4), соответственно из (7) и (8) находим основные функциональные соотношения из гиперболических областей:

$$\nu_1^-(x)=\tau_1'(x)-\psi'\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}f_{21}(x)\int_0^x f_{22}(\xi,\tau_1(\xi))d\xi,\ \ 0<x<l \qquad (9)$$

и

$$\left(2a_1(y)+1\right)\nu_2^-(y)=(1-2a_2(y))\tau_2'(y)-2a_3(y)\tau_2(y)-\frac{1}{2}f_{31}(y)\int_0^y f_{32}(\xi;\tau_2'(\xi))d\xi-2a_4(y).\ (10)$$

Далее, учитывая обозначения $\lim_{y\to+0}y^{1-\alpha}u_y(x,y)=\nu_1^+(x)$, и $u_x(+0,y)=\nu_2^+(y)$ из интегральных условий склеивания (см (5) и (6)), имеем

$$\nu_1^+(x)=\lambda_1(x)\nu_1^-(x)+\lambda_2(x)\tau_1'(x)+\lambda_3(x)\int_0^x r_1(t)\tau_1(t)dt+\lambda_4(x)\tau_1(x)+\lambda_5(x),\quad 0<x<l \quad (11)$$

$$\nu_2^-(y)=\mu_1(y)\nu_2^+(y)+\mu_2(y)\tau_2'(y)+\mu_3(y)\int_0^y r_2(t)\tau_2(t)dt+\mu_4(y)\tau_2(y)+\mu_5(y),\ 0<y<h. \quad (12)$$

Из параболического уравнения (см уравнение (1)) при $y\to+0$, с учетом равенство $\lim\limits_{y\to0}D_{0y}^{\alpha-1}f(y)=\Gamma(\alpha)\lim\limits_{y\to0}y^{1-\alpha}f(y)$ и (11), получим

$$\tau_1''(x)-\Gamma(\alpha)\lambda_1(x)\nu_1^-(x)-\Gamma(\alpha)\lambda_2(x)\tau_1'(x)-\Gamma(\alpha)\lambda_4(x)\tau_1(x)-\Gamma(\alpha)\lambda_3(x)\int_0^x r_1(t)\tau_1(t)dt-$$

$$+f_1(x,0;\tau_1(x))-\Gamma(\alpha)\lambda_5(x)=0 \quad (13)$$

Воспользовавшись решением первой краевой задаче для параболического уравнения в области Ω_1, находим второе функциональное соотношение между $\tau_2(y)$ и $\nu_2(y)$ на отрезке B_1B_2, которое имеет вид:

$$\nu_2^+(y)=-\int_0^y K(y-t)\tau_2'(t)dt+\Phi(y) \quad (14)$$

где $K(y-t)$, $\Phi(y)$- известные функции которые зависят от $\tau_1(x)$ и функции Грина первой краевой задачи.

В силу (9)-(14) поставленная задача эквивалентным образом сведется к нелинейным интегральным уравнениям Фредгольма и Вольтерра, относительно соответственно функций $\tau_1(x)$ и $\tau_2'(y)$.

При определенных условиях на заданных функций, применяя метод интегралов энергии доказывается единственность решение задачи, а существование решение нелинейных интегральных уравнений доказывается методом последовательных приближений.

Литература

1. Bakhtiyor J. Kadirkulov. *Boundary problems for mixed parabolic-hyperbolic equations with two lines of changing type and fractional derivative*.\\ Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2014 (2014), No. 57, pp. 1{7}.

УСЛОВИЕ ПОЗИТИВНОСТИ ВОЗМУЩЕНИЕ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Аликулов Т.Н., Хусанов Э.А.
Национальный Университет Узбекистана
tolibaka@mail.ru

Свойства дробных степеней дифференциальных операторов играют важную роль при решении разных математических задачах. В этой тематике

занимались целый ряд авторов (см. например [1-5]). Следует особо подчеркнуть, что среди указанных выше работ в работе В.А. Ильина [1] достаточно полно изучены представления дробных степеней оператора Лапласа в виде представления интегральных операторов в гильбертовом пространстве. В работе Ш.А. Алимова [2] с помощью понятия дробных степеней эллиптических дифференциальных операторов установлен изоморфизм между пространством суммируемых функций и некоторыми более сложными функциональными пространствами. В работе В.А. Костина и М.Н. Небольсина [3] с помощью понятия дробных степеней эллиптических дифференциальных операторов доказано теоремы о корректной разрешимости краевых задач для уравнения второго порядка. Кроме того в работе А.Р. Халмухамедова [4] с помощью свойство дробных степеней сингулярного оператора Шредингера доказано теоремы о сходимости спектральных разложений. Отметим, что в работе В.А. Ильина [5], В.П. Гулушко и С.Г. Крейна [6] с помощью свойства дробных степеней дифференциальных операторов изучены теорема о вложения.

Определение. Оператор A называется позитивным, если при всех $l \geq 0$ существуют операторы $(A+tI)^{-1}$, где I – тождественный оператор, и для их нормы выполняется оценка

$$\left\|(A+tI)^{-1}\right\| \leq \frac{C}{1+t} \quad (t \geq 0), \tag{1}$$

где C-некоторая константа.

В настоящей работе рассматривается эллиптического оператора $L(x, D)$ возмущение полигармонического оператора с сингулярным коэффициентом:

$$L = \left(-\Delta\right)^{l} + q(x), \tag{2}$$

с областью определения $W_p^{2l}\left(R^n\right), 1 < p < \frac{n}{1+\tau}$, $l \geq 2$, где функция $q(x)$ является комплекснозначной функцией действительных переменных, допускающей особенность вида

$$\left| D^{\alpha} q(x) \right| \leq \frac{const}{\left|x\right|^{1+\tau+|\alpha|}} \tag{3}$$

Здесь α - мультииндекс, $0 \leq |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leq n,\ 0 \leq \tau < 1.$

В работе получены следующий основной результат.

Теоремы 1. *Пусть* $1 < p < \frac{n}{2+\tau}$. *Тогда существует постоянные* $C > 0$ *такие, что выполняется соотношения*

$$\left\|\left(L+tI\right)^{-1}\right\|_{L_p(R^n)} \leq \frac{C}{1+t} \quad (t \geq 0). \tag{4}$$

Прежде чем доказывать сформулированные результаты установим справедливость нескольких лемм. В дальнейшим обозначим через $L_0 = (-\Delta)^l$, $\nabla u = (\partial_1 u,\ \partial_2 u,\ \partial_3 u, \dots, \partial_n u)$, где $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i},\ i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Лемма 1. *Пусть* $1 < p < +\infty$. *Тогда для любой функции* $f(x) \in L_p(R^n)$ *имеет место следующая оценка*

$$\left\| (t + L_0) f(x) \right\|_{L_p(R^n)} \le \frac{C}{1+t} \left\| f(x) \right\|_{L_p(R^n)} \tag{5}$$

Лемма 2. *Пусть* $f \in W_p^{2l}(R^n),\ l \ge 2$, *функция* $q(\mathrm{x})$ *удовлетворяет условие* (3). *Тогда место неравенство*

$$\left\| q(x)\, f \right\|_{L_p(R^n)} \le C \left\| \left(t + \nabla^{2l}\right) f \right\|_{L_p(R^n)},\quad C > 0. \tag{6}$$

Литература

1. Ильин В.А. Ядра дробного порядка// Мат. сб., 1957. –№4 (41). –С.459–480.
2. Алимов Ш. А. Дробные степени эллиптических операторов и изоморфизм классов дифференцируемых функций // Дифференциальные уравнения. – Минск, 1972. – № 9(8) . –С. 1609–1626.
3. Костин В.А., Небольсина М.Н. О корректной разрешимости краевых задач для уравнения второго порядка//ДАН , 2009. -№428(1). – С. 20-22.
4. Халмухамедов А.Р. Об отрицательных степенях сингулярного оператора Шредингера и сходимость спектральных разложений // Мат. заметки. – 1996. – №59(3). –С. 428–436 .
5. Ильин В.А., ДАН, 109, №4, 690 (1956).
6. Глушко В.П. и Крейн С.Г. //ДАН, 1958, -№122(6).- С. 963-966.
7. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустылник П.Е., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. – М.: Наука, 1966. – 500 с.

О РАЗРЕШИМОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Апаков Ю.П., Хамитов А. А
Наманганский инженерно-строительный институт

1. Постановка задачи

В области $D = \{(x, y, z):\ 0 < x < p,\ 0 < y < q,\ 0 < z < r\}$, рассмотрим уравнения

$$L[u] \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \tag{1}$$

где $p>0,\ q>0,\ r>0$ – постоянные вещественные числа, и для него исследуем следующую задачу.

Задача A_3**.** Найти решение уравнения (1) в области D из класса $C^{3,2,2}_{x,y,z}(D)\cap C^{2,1,1}_{x,y,z}(\overline{D})$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{cases}\alpha u(x,0,z)+\beta u_y(x,0,z)=0,\\ \gamma u(x,q,z)+\delta u_y(x,q,z)=0,\\ u(x,y,0)=u(x,y,r)=0,\end{cases} \tag{2}$$

$$u(0,y,z)=\psi_1(y,z),\quad u(p,y,z)=\psi_2(y,z),\quad u_x(p,y,z)=\psi_3(y,z) \tag{3}$$

Здесь α, β, γ и δ- заданные постоянные, причем $\alpha^2+\beta^2\neq 0$, $\gamma^2+\delta^2\neq 0$, а $\psi_i(y,z),\ i=\overline{1,3}$ - заданные достаточно гладкие функции.

Отметим, что для уравнения (1) в плоскости, т.е. при $z=0$ в работах[1,2], а в пространстве для уравнения второго порядка в работах [3,4] исследованы некоторые корректные краевые задачи.

2. Единственность решения

Теорема-1. Если $\alpha\beta\le 0,\ \gamma\delta\ge 0,\ (\alpha\neq 0,\gamma\neq 0)$, то задача A_3 имеет решение и оно единственно**.**

Доказательство. Пусть задача A_3 имеет два решения $u_1(x,y,z)$ и $u_2(x,y,z)$. Тогда $u(x,y,z)=u_1(x,y,z)-u_2(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению (1) и однородным краевым условием. Докажем, что $u(x,y,z)\equiv 0$ в $\overline{D}$.

Для этого уравнения (1) умножим на u, тогда получим

$$uL[u]\equiv u\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=0,\ \text{или}$$

$$uL[u]\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}(uu_y)+u_y^2-\frac{\partial}{\partial z}(uu_z)+u_z^2=0. \tag{4}$$

Интегрируя тождество (4) по области D, имеем

$$\int_0^p\int_0^q\int_0^r\frac{\partial}{\partial x}\left[u(x,y,z)u_{xx}(x,y,z)-\frac{1}{2}u_x^2(x,y,z)\right]dxdydz-$$

$$-\int_0^p\int_0^q\int_0^r\frac{\partial}{\partial y}\left[u(x,y,z)u_y(x,y,z)\right]dxdydz+\int_0^p\int_0^q\int_0^r u_y^2(x,y,z)\,dxdydz-$$

$$-\int_0^p\int_0^q\int_0^r\frac{\partial}{\partial z}\left[u(x,y,z)u_z(x,y,z)\right]dxdydz+\int_0^p\int_0^q\int_0^r u_z^2(x,y,z)dxdydz=0.$$

Учитывая однородные краевые условия, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^q\int_0^r u_x^2(0,y,z)dydz-\int_0^p\int_0^r u(x,q,z)u_y(x,q,z)\,dxdz+\int_0^p\int_0^r u(x,0,z)u_y(x,0,z)\,dxdz+$$

$$+\iiint_D u_y^2(x,y,z)\,dxdydz+\iiint_D u_z^2(x,y,z)\,dxdydz=0.$$

Требуя $\alpha \neq 0,\ \gamma \neq 0$, из условия (2) имеем

$$\frac{1}{2}\int_0^q\int_0^r u_x^2(0,y,z)dydz - \frac{\beta}{\alpha}\int_0^p\int_0^r u_y^2(x,0,z)dxdz + \frac{\delta}{\gamma}\int_0^p\int_0^r u_y^2(x,q,z)dxdz +$$
$$+\iiint_D u_y^2(x,y,z)\,dxdydz + \iiint_D u_z^2(x,y,z)\,dxdydz = 0.$$

Учитывая условия $\alpha\beta \leq 0,\ \gamma\delta \geq 0,\ (\alpha \neq 0, \gamma \neq 0)$, получим $u_y(x,y,z) = 0$ и $u_z(x,y,z) = 0$, т.е. $u(x,y,z) = f(x)$. Поставляя в уравнение (1) имеем $f'''(x) = 0$. Отсюда $f(x) = C_1x^2 + C_2x + C_3$. Из условии (3) получим $f(0) = f(p) = f'(p) = 0$, тогда $f(x) = 0$. Следовательно, $u(x,y,z) \equiv 0$ $(x,y,z) \in \overline{D}$. В силу последнего, получим $u_1(x,y,z) = u_2(x,y,z)$.

В случаях $\beta \neq 0,\ \delta \neq 0;\ \alpha \neq 0, \delta \neq 0;\ \gamma \neq 0, \beta \neq 0$ аналогично получаем равенство $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

3. Существование решения

Теорема-2. Если функции $\psi_i(y,z) \in C_{y,z}^{3,3}(0 \leq y \leq q, 0 \leq z \leq r),\ i = 1,2,$ $\psi_3(y,z) \in C_{y,z}^{2,2}(0 \leq y \leq q, 0 \leq z \leq r)$ и выполняются следующая условия согласования

$$\begin{cases} \alpha\psi_i(0,z) + \beta\psi_i'(0,z) = 0, \\ \gamma\psi_i(q,z) + \delta\psi_i'(0,z) = 0, \quad (i = 1,2,3), \\ \psi_i''(0,z) = \psi_i''(q,z) = 0, \end{cases}$$

$$\psi_i(y,0) = \psi_i(y,r) = \psi_i''(y,0) = \psi_i''(y,r) = 0,\ i = 1,2,\ \psi_3(y,0) = \psi_3(y,r) = 0,$$

то решение задачи A_3 существует.

С целью доказательства существования решения задачи A_3 с начала рассмотрим следующую вспомогательную задачу: найти нетривиальное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиями (2) и представимое в виде

$$u(x,y,z) = \mathrm{X}(x) \cdot V(y,z). \tag{5}$$

Поставляя (5) в уравнение (1) и разделяя переменные, относительно функции $\mathrm{X}(x)$ получим уравнение:

$$\mathrm{X}''' + \lambda \mathrm{X} = 0 \tag{6}$$

а для функции $V(y,z)$ - следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} V_{yy} + V_{zz} + \lambda V = 0, \\ \alpha V(0,z) + \beta V_y(0,z) = 0, \\ \gamma V(q,z) + \delta V_y(q,z) = 0, \\ V(y,0) = V(y,r) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

где λ - параметр разделения.

Найдем собственные значения и собственные функции задачи (7).

Положим

$$V(y,z)=Y(y)\cdot Z(z). \tag{8}$$

Подставляя (8) в уравнение (7), разделяя переменные, имеем задачи

$$\begin{cases} Y''+\nu Y=0, \\ \alpha Y(0)+\beta Y'(0)=0, \\ \gamma Y(q)+\delta Y'(q)=0, \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} Z''+\mu Z=0, \\ Z(0)=Z(r)=0, \end{cases} \tag{10}$$

где ν и μ- постоянные, связанные соотношением $\nu+\mu=\lambda$.

Поступая так, как в работе [2], для нахождения собственных значений ν в задаче (9), получим трансцендентное уравнение

$$ctg\sqrt{\nu}q=\frac{\alpha\gamma+\delta\beta\nu}{\sqrt{\nu}(\gamma\beta-\alpha\delta)} \tag{11}$$

оттуда следует, что $\sqrt{\nu_n}=\frac{\pi n}{q}+\varepsilon_n$, где $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$, или $\nu_n=\mathrm{O}\left(n^2\right),\ n\to\infty$.

Соответствующие собственные функции имеют вид

$$Y_n(y)=\left(\alpha\sin\sqrt{\nu_n}y-\beta\sqrt{\nu_n}\cos\sqrt{\nu_n}y\right)A_n,$$

где A_n -произвольные постоянные, а для задачи (10) получим

$$Z_m(z)=A_m\sin\sqrt{\mu_m}z,$$

где A_m -произвольные постоянные, а $\mu_m=\left(\frac{m\pi}{r}\right)^2$.

Учитывая (8), определим

$$V_{n,m}(y,z)=A_{n,m}Y(y)\sin\left(\frac{m\pi}{r}z\right),$$

где $A_{n,m}$ -некоторые постоянные множители. Выбираем их так, чтобы норма функции $V_{n,m}(y,z)$ была равна единице. Ортогональность $\{V_{n,m}\}$ очевидна.

$$\int_0^q\int_0^r V_{n,m}^2(y,z)\,dydz=A_{n,m}^2\int_0^q\left(\alpha\sin\sqrt{\nu_n}y-\beta\sqrt{\nu_n}\cos\sqrt{\nu_n}y\right)^2dy\int_0^r\sin^2\left(\frac{m\pi}{r}z\right)dz=1,$$

$$\left\|V_{n,m}\right\|^2=A_{n,m}^2\int_0^q\left(\alpha\sin\sqrt{\nu_n}y-\beta\sqrt{\nu_n}\cos\sqrt{\nu_n}y\right)^2dy\int_0^r\sin^2\left(\frac{m\pi}{r}z\right)dz=$$

$$=A_{n,m}^2\left[\frac{1}{2}\left(\alpha^2q+\beta^2q\nu_n-\alpha\beta\right)+\left(\frac{\beta^2\sqrt{\nu_n}}{4}-\frac{\alpha^2}{4\sqrt{\nu_n}}\right)\sin2\sqrt{\nu_n}q+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha\beta}{2}\cos2\sqrt{\nu_n}q\right]\frac{r}{2}.$$

Тогда

$$V_{n,m}(y,z)=\frac{1}{\left\|V_{n,m}\right\|^2}Y_n(y)\sin\frac{m\pi}{r}z, \tag{12}$$

Решение уравнения (6) имеет вид:

$$X_{n,m}(x)=C_{1n,m}e^{-k_{n,m}x}+e^{\frac{1}{2}k_{n,m}x}\left(C_{2n,m}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}k_{n,m}x+C_{3n,m}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}k_{n,m}x\right), \tag{13}$$

где

$$k_{n,m}=\sqrt[3]{\lambda_{n,m}}=\sqrt[3]{\nu_n+\mu_m},\ k_{n,m}=\mathrm{O}\left(n^{\frac{2}{3}},\mathrm{m}^{\frac{2}{3}}\right).$$

Принимая это во внимание, решение задачи имеет вид

$$u(x,y,z)=\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left[C_{1n,m}e^{-k_{n,m}x}+e^{\frac{1}{2}k_{n,m}x}\left(C_{2n,m}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}k_{n,m}x+C_{3n,m}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}k_{n,m}x\right)\right]\times$$

$$\times Y_n(y)\sin\left(\frac{m\pi}{r}z\right). \tag{14}$$

Доказан, что ряд (14) и его производные u_{xxx}, u_{yy} и u_{zz} сходятся абсолютно и равномерно в области D.

Литература

1.Апаков Ю.П. Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками методом разделения переменных // Узбекский математический журнал. - Ташкент, 2007. - № 1. - С.14-23.

2. Апаков Ю.П. К теории уравнений третьего порядка с кратными характеристиками. – Т.: «Fan va texnologiya», 2019, 156 стр.

3. Апаков Ю.П. О некоторых нелокальных задачах для параболо-гиперполического уравнения в трехмерном пространстве. «Прямые и обратные краевые задачи математической физики» .- Тошкент, Фан, 1987,-С. 80-95.

4. Апаков Ю.П. Краевые задачи для параболо-гиперболического уравнений в конечной призматической области трехмерного пространства. Тез. докл. Всесоюзной школы молодых ученых. «Функциональные методы в прикладной математике и математической физике» 2-часть, -Ташкент, ТошДУ.1988. -С. 5.

5. Тихонов А.И., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1972. 736 стр.

6. Апаков Ю.П., Хамитов А.А. О решения одной краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве // Тезисы международной научной конференции «Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики», 12-13 март 2020. ФерГУ. – С. 39-43.

7. Апаков Ю.П., Хамитов А.А. О решения одной краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве // Научный вестник Наманганского государственного университета. – Наманган, 2020. - № 4. – С. 21-31.

ОБ ОДНОМ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

[1]Апаков Ю.П ., [2]Иброхимов Х.К.
[1]Наманганский инженерно-строительный институт,
[2]Наманганский государственный университет

А.В.Бицадзе в работе [1] для эллиптико- гиперболического уравнения в трехмерном пространстве методом интегрального преобразования Фурье впервые исследовал задачу Трикоми. После этого появились ряд работ, где рассматривались краевые задачи для уравнений эллиптико - гиперболического типа в бесконечной цилиндрической области. Краевые задачи для смешанных уравнений параболо-гиперболического типа в трехмерном пространстве рассматривались в работах [2-3].

В бесконечной призма образной области Ω, трехмерного евклидового пространстве переменных (x,y,z), ограниченной поверхностью $S=\sum_{i=1}^{5}S_i$, где

$$S_1: x=0,\ \ 0\le y\le h,\ \ -\infty<z<+\infty,\quad S_2: x=1,\ \ 0\le y\le h,\ \ -\infty<z<+\infty,$$

$$S_3: x+y=0,\ \ 0\le x\le \frac{1}{2},\ \ -\infty<z<+\infty,\quad S_4: x-y=1,\ \ \frac{1}{2}\le x\le 1,\ \ -\infty<z<+\infty,$$

$$S_5: y=h,\ \ 0\le x\le 1,\ \ -\infty<z<+\infty.$$

Пусть

$$\Omega_1=\Omega\cap(y>0),\ \ \Omega_2=\Omega\cap(y<0),\ \ \overline{\mathrm{I}}=\overline{\Omega}_1\cap\overline{\Omega}_2,\ \ D=\Omega\cap(z=0),$$

$$D_k=\Omega_k\cap(z=0),\ \ k=1,2,\ J=\mathrm{I}\cap(z=0),\ \ \sigma_n=S_n\cap(z=0),\ \ n=\overline{1,5},$$

рассмотрим уравнения

$$0=\begin{cases}U_y-U_{xx}-U_{zz}+\nu_1^2U, & npu\quad y>0,\\ U_{yy}-U_{xx}-U_{zz}+\nu_2^2U, & npu\quad y<0,\end{cases}\quad \nu_i^2=const. \tag{1}$$

Задача T_2. Найти регулярное решение $U(x,y,z)$ уравнения (1) в области Ω_k, $k=1,2$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $U(x,y,z)\in C\left(\overline{\Omega}\right)\cap C^1(\Omega)\cap\left(C^{2,1,2}_{x,y,z}(\Omega_1)\cup C^2(\Omega_2)\right)$

2) граничные условия

$$U(x,y,z)\big|_{S_1}=\Phi_1(y,z),\ \ -\infty<z<+\infty,$$

$$U(x,y,z)\big|_{S_2}=\Phi_2(y,z),\ \ -\infty<z<+\infty,$$

$$U(x,y,z)\big|_{S_4}=\Psi(x,z),\ \ -\infty<z<+\infty,$$

$$\lim_{z\to\pm\infty}U(x,y,z)=\lim_{z\to\pm\infty}U_z(x,y,z)=0.$$

Отметим, что при $\nu_i^2 = 0, (i = 1,2)$ и краевые условия в гиперболической части области задана на S_3 аналогичной задачи исследована в работе [2]

Следуя идеи А.В.Бицадзе [1], решение поставленной задачи будем искать в классе интегралов Фурье, т.е. в виде

$$U(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,y,\lambda) e^{-i\lambda z} d\lambda . \tag{2}$$

Тогда получим следующую плоскую задачу, для уравнения:

$$0 = \begin{cases} u_y - u_{xx} + (\lambda^2 + \nu_1^2)u, & при \quad y > 0, \\ u_{yy} - u_{xx} + (\lambda^2 + \nu_2^2)u, & при \quad y < 0, \end{cases} \tag{3}$$

Задача $T_{2\lambda}$**.** Найти регулярное решение уравнения (3) в областях D_k, $k = 1,2$, обладающее следующими свойствами:

1) $u(x,y,\lambda) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D) \cap \left(C_{x,y}^{2,1}(D_1) \cup C^2(D_2)\right)$.

2) удовлетворяет граничним условиям

$$u(x,y,\lambda)\big|_{\sigma_1} = \varphi_1(y,\lambda), \quad -\infty < \lambda < +\infty,$$

$$u(x,y,\lambda)\big|_{\sigma_2} = \varphi_2(y,\lambda), \quad -\infty < \lambda < +\infty,$$

$$u(x,y,\lambda)\big|_{\sigma_4} = \psi(x,\lambda), \quad -\infty < \lambda < +\infty,$$

где

$$\varphi_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_k(y,z) e^{i\lambda z} dz , \quad k = 1,2 , \quad \psi(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x,z) e^{i\lambda z} dz.$$

Единственность решений задачи $T_{2\lambda}$ доказывается, используя принцип максимума для параболических [5] и гиперболических уравнений [6] получением априорных оценок искомых решений. Существование решения задачи $T_{2\lambda}$ эквивалентным образом сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, разрешимость которого следует из единственности решения задачи $T_{2\lambda}$.

Литература

1. Бицадзе А.В. Об одном трехмерном аналоге задачи Трикоми // Сибир. мат. журн. 1962.Т.3. С.642-644.
2. Джураев Т.Д., Сопуев А. Об одной пространственной задаче дляуравнения смешанного параболо - гиперболического типа // Дифф. уравн. Минск. 1981. Т.17. № 1. С. 50-57.
3. Джураев Т.Д., Сопуев А., Апаков Ю.П. Краевые задачи для параболо-гиперболического уравнения с характеристической линией изменения тип // В кн. Уравнения смешанного типа и задачи со свободной границей. Институт математика АН УзССР. Ташкент: Фан. 987.С.56-65.
4. Джураев Т.Д., Апаков Ю.П. Задача Геллерстеда для параболо-гиперболического уравнения в трехмерном пространстве // Дифференциальные уравнения. 1990. 26-том, №3. С. 438-448.

5. Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа //Успехи матем. наук, Москва. 1962, т. 17. Вып.3. С. 21-73.
6. Agmon S., Nirenberg L., Protter M.H. A maximum principal for a class ofhyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type // Communes Pure and Appl. Math.1953. Vol.4. P. 455-470.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ПЯТИУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Апаков Ю.П., Мамажонов С.М.
им. В.И.Романовского АН РУз.
yusupjonapakov@gmail.com, sanjarbekmamajonov@gmail.com

В 70-80-годов двадцатого века начали изучать различные задачи для уравнений третьего и высокого порядков параболо-гиперболического типа. Такие задачи исследованы, в основном, Т.Д.Джураевым и его учениками (например, см. [1,2]).

В настоящее время развивается в широком плане изучение краевых задач для уравнений третьего и высокого порядков параболо-гиперболического типа (например, см. [3,4]).

В настоящем сообщении ставится и исследуется одна краевая задача для уравнения четвертого порядка параболо-гиперболического типа вида

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)(Lu)=0 \tag{1}$$

в пятиугольной области G плоскости xOy, где $G=G_1\cup G_2\cup G_3\cup J_1\cup J_2$; $Lu=\begin{cases}u_{xx}-u_y, & (x,y)\in G_1,\\ u_{xx}-u_{yy}, & (x,y)\in G_i,\ i=2,3;\end{cases}$ G_1- прямоугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(1;0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$; G_2 – треугольник с вершинами в точках B, $C(0,-1)$, $D(-1,0)$; G_3- прямоугольник с вершинами в точках A, D, $D_0(-1,1)$, A_0; J_1- открытый отрезок с вершинами в точках B, D; J_2- открытый отрезок с вершинами в точках A, A_0, а $a,b\in R$, $\gamma=\frac{b}{a}$, причем $1<\gamma<+\infty$.

Для уравнения (1) ставится следующая задача:

Задача-1. Найти функцию $u(x,y)$, которая 1) непрерывна в $\overline{G}$ и в области $G \setminus J_1 \setminus J_2$ имеет непрерывные производные, участвующие в уравнение (1), причем u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} – непрерывны в G вплоть до части границы области G, указанные в краевых условиях; 2) удовлетворяет уравнению (1) в области $G \setminus J_1 \setminus J_2$; 3) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u(1,y) = \varphi_1(y), \quad 0 \le y \le 1; \tag{2}$$

$$u(-1,y) = \varphi_2(y), \quad 0 \le y \le 1; \tag{3}$$

$$u_x(-1,y) = \varphi_3(y), \quad 0 \le y \le 1; \tag{4}$$

$$u\big|_{BC} = \psi_1(x), \quad 0 \le x \le 1; \tag{5}$$

$$u\big|_{DF} = \psi_2(x), \quad -1 \le x \le -1/2; \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BC} = \psi_3(x), \quad 0 \le x \le 1; \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{DC} = \psi_4(x), \quad -1 \le x \le 0; \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{BC} = \psi_5(x), \quad 0 \le x \le 1; \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{DC} = \psi_6(x), \quad -1 \le x \le 0; \tag{10}$$

4) удовлетворяет следующим условия склеивания на линиях изменения типа:

$$u(x,+0) = u(x,-0) = T(x), \quad -1 \le x \le 1; \tag{11}$$

$$u_y(x,+0) = u_y(x,-0) = N(x), \quad -1 \le x \le 1; \tag{12}$$

$$u_{yy}(x,+0) = u_{yy}(x,-0) = M(x), \quad -1 < x < 1; \tag{13}$$

$$u_{yyy}(x,+0) = u_{yyy}(x,-0) = \Theta(x), \quad -1 < x < 1; \tag{14}$$

$$u(+0,y) = u(-0,y) = \tau_3(y), \quad 0 \le y \le 1; \tag{15}$$

$$u_x(+0,y) = u_x(-0,y) = \nu_3(y), \quad 0 \le y \le 1; \tag{16}$$

$$u_{xx}(+0,y) = u_{xx}(-0,y) = \mu_3(y), \quad 0 < y < 1, \tag{17}$$

где

$$T(x)=\begin{cases}\tau_1(x), \ \textit{если} \ \ 0\le x\le 1,\\ \tau_2(x), \ \textit{если} \ \ -1\le x\le 0;\end{cases}$$

$$N(x)=\begin{cases}\nu_1(x), \ \textit{если} \ \ 0\le x\le 1,\\ \nu_2(x), \ \textit{если} \ \ -1\le x\le 0;\end{cases}$$

$$M(x)=\begin{cases}\mu_1(x), \ \textit{если} \ \ 0< x< 1,\\ \mu_2(x), \ \textit{если} \ \ -1< x< 0;\end{cases}$$

$$\Theta(x)=\begin{cases}\theta_1(x), \ \textit{если} \ \ 0< x< 1,\\ \theta_2(x), \ \textit{если} \ \ -1< x< 0;\end{cases}$$

$\varphi_i\ \left(i=\overline{1,3}\right)$, $\psi_j\ \left(j=\overline{1,6}\right)$ – заданные достаточно гладкие функции, $\tau_i, \nu_i, \mu_i\ (i=\overline{1,3})$, $\theta_j\ (j=1,2)$ – неизвестные пока достаточно гладкие функции, $n-$ внутренняя нормаль к прямой $x+y=-1$ или $x-y=1$, а $F(-1/2,-1/2)$.

Теорема. Если $\varphi_1,\varphi_2\in C^4[0,1]$, $\varphi_3\in C^3[0,1]$, $\psi_1\in C^4[0,1]$, $\psi_2\in C^4[-1,-1/2]$, $\psi_3\in C^3[0,1]$, $\psi_4\in C^3[-1,0]$, $\psi_5\in C^2[0,1]$, $\psi_6\in C^2[-1,0]$, причем выполняется условие согласования $\varphi_1(0)=\psi_1(1)$, $\varphi_2(0)=\psi_2(-1)$, $\psi_4'(0)=-\psi_3'(0)$, то задача-1 имеет единственное решение.

Здесь мы даем идею доказательства этой теоремы.

Доказательство. Теорему докажем методом непосредственна построения решения. Для этого уравнение (1) перепишем в виде

$$u_{1xx}-u_{1y}=\omega_{11}(bx-ay)+\omega_{12}(x),\ (x,y)\in G_1, \tag{18}$$

$$u_{ixx}-u_{iyy}=\omega_{i1}(bx-ay)+\omega_{i2}(x),\ (x,y)\in G_i\ \ (i=2,3), \tag{19}$$

где введено обозначение $u(x,y)=u_i(x,y),\ (x,y)\in G_i\ \left(i=\overline{1,3}\right)$, причем $\omega_{i1}(bx-ay),\ \omega_{i2}(x)\ \left(i=\overline{1,3}\right)$ и – неизвестные пока достаточно гладкие функции, подлежащие определению.

Исследование будем провести сначала в области G_2. Записывая решение уравнения (19) $(i=2)$, удовлетворяющее условиям (11), (12) и подставляя это решение в условия (7), (8), (9) и (10), после некоторых выкладок и преобразований, находим функцию $\omega_{21}(bx-ay)+\omega_{22}(x)$.

Теперь подставляя записанное решение уравнения (19) $(i=2)$ в (5), имеем первое соотношение между неизвестными функциями $T(x)$ и $N(x)$.

а) При $-1\le x\le 0$ это соотношение имеет вид

$$\tau_2'(x)+\nu_2(x)=\alpha_1(x),\ -1\le x\le 0. \tag{20}$$

Далее, подставляя записанное решение уравнения (19) $(i=2)$ в (6), получим соотношение

$$\tau_2'(x)-\nu_2(x)=\delta_1(x),\ -1\le x\le 0, \tag{21}$$

где $\alpha_1(x),\ \delta_1(x)-$ известные функции.

Из (20) и (21) находим функции $\tau_2(x),\ \nu_2(x)$.

б) При $0\le x\le 1$ полученное соотношение между $T(x)$ и $N(x)$ имеет вид

$$\tau_1'(x)+\nu_1(x)=\alpha_1(x),\ 0\le x\le 1. \tag{22}$$

Теперь переходя в уравнении (19) $(i=2)$ к пределу при $y\to 0$, в силу (11) и (13) получим соотношение между функциями $\tau_1(x)$ и $\mu_1(x)$:

$$\tau_1''(x)-\mu_1(x)=\omega_{21}(bx)+\omega_{22}(0). \tag{23}$$

Дифференцируя уравнение (19) $(i=2)$ по y и переходя в полученном уравнении к пределу при $y\to 0$, в силу (12) и (14) при $0\le x\le 1$, получим соотношение между неизвестными функциями $\nu_1(x)$ и $\theta_1(x)$:

$$\nu_1''(x)-\theta_1(x)=-a\omega_{21}'(bx). \tag{24}$$

Далее, уравнение (18) можно переписать в виде

$$au_{1xxxy}-au_{1xyy}+bu_{1xxyy}-bu_{1yyy}=0.$$

Переходя в последнем уравнении к пределу при $y\to 0$, получим еще одно соотношение между неизвестными функциями $\nu_1(x),\ \mu_1(x)$ и $\theta_1(x)$:

$$a\nu_1'''(x)-a\mu_1'(x)+b\mu_1''(x)-b\theta_1(x)=0. \tag{25}$$

Исключая из (22), (23), (24) и (25) функции $\nu_1(x),\ \mu_1(x)$ и $\theta_1(x)$, затем интегрируя полученное уравнение трижды от 0 до x, приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению относительно $\tau_1(x)$.

Решая это уравнение при известных условиях, находим функцию $\tau_1(x)$ Тогда будут известными и функции $\nu_1(x),\ \mu_1(x),\ u_2(x,y)$.

Переходя в уравнениях (19) $(i=2)$ и (19) $(i=3)$ к пределу при $y\to 0$ с учетом условий (11), (13), получим

$$\omega_{31}(bx)+\omega_{32}(x)=\omega_{21}(bx)+\omega_{22}(x). \tag{26}$$

Теперь дифференцируя уравнения (19) $(i=2)$ и (19) $(i=3)$ по y и переходя в полученных уравнениях к пределу при $y\to 0$, с учетом (12) и (13), после некоторых вычислений и преобразований находим функцию $\omega_{31}(bx-ay)+\omega_{32}(x)$.

Теперь переходим к рассмотрению задачи в области G_3. Методом продолжения после длинных вычислений и преобразований получим соотношение между неизвестными функциями $\tau_3(y)$ и $\nu_3(y)$:

$$\nu_3(y)=\tau_3'(y)+\beta_1(y),\ 0\le y\le 1, \tag{27}$$

где $\beta_1(y)$ – известная функция.

Теперь переходим в область G_1. Переходя в уравнении (18) к пределу при $y \to 0$ в силу условий (11) и (12) при $0 \le x \le 1$, находим

$$\overline{\overline{\omega}}_{11}(bx) + \omega_{12}(x) = \tau_1''(x) - \nu_1(x), \tag{28}$$

где введено обозначение

$$\omega_{11}(b_2 x - a_2 y) = \begin{cases} \overline{\overline{\omega}}_{11}(bx - ay), \ 0 \le bx - ay \le b, \\ \overline{\omega}_{11}(bx - ay), \ -a \le bx - ay \le 0, \end{cases}$$

причем $\overline{\overline{\omega}}_{11}(0) = \overline{\omega}_{11}(0)$.

Дифференцируя уравнение (18) по y и переходя в полученном уравнении к пределу при $y \to 0$, в силу (12) и (13) при $0 \le x \le 1$, затем интегрируя полученное уравнение от 0 до x, после некоторых преобразований, находим функцию $\overline{\overline{\omega}}_{11}(bx)$. Подставляя $\overline{\overline{\omega}}_{11}(bx)$ в (28), определим и функцию $\omega_{12}(x)$. Тогда будет определена и функция $\overline{\overline{\omega}}_{11}(bx - ay) + \omega_{12}(x)$.

Теперь переходя в уравнениях (18) и (19) $(i = 3)$ к пределу при $x \to 0$ в силу условий (15) и (17), приходим к двум соотношениям:

$$\mu_3(y) - \tau_3'(y) = \overline{\omega}_{11}(-ay) + \omega_{12}(0), \ \mu_3(y) - \tau_3''(y) = \omega_{31}(-ay) + \omega_{32}(0).$$

Исключая из этих последних двух соотношений функцию $\mu_3(y)$, после некоторых выкладок, находим $\overline{\omega}_{11}(bx - ay)$. Тогда окончательно находим функцию $\overline{\omega}_{11}(bx - ay) + \omega_{12}(x)$, где в этой функции участвует неизвестная функция $\tau_3(y)$.

Далее, записывая решение уравнения (18), удовлетворяющего условиям (2), (11) при $0 \le x \le 1$ и (15) и дифференцируя это решение по x и полагая $x \to 0$, с учетом равенства (27) и значения функций $\overline{\overline{\omega}}_{11}(bx - ay) + \omega_{12}(x)$ и $\overline{\omega}_{11}(bx - ay) + \omega_{12}(x)$, после некоторых вычислений, получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\tau_3'(y)$.

Решая это уравнение, находим функцию $\tau_3'(y)$, тем самым и функции $\tau_3(y)$, $\nu_3(y)$, $\overline{\omega}_{11}(bx - ay) + \omega_{12}(x)$, $T_2(x)$. Тогда будут известными и функции $u_3(x, y)$ и $u_1(x, y)$. Итак, мы нашли решение поставленной задачи 1 единственным образом.

Литература

1. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1979, 240 с.

2. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент, Фан, 1986, 220 с.
3. Джураев Т.Д., Мамажанов М. Краевые задачи для одного класса уравнений четвертого порядка смешанного типа. Дифференциальные уравнения, 1986, т.22, №1, с.25-31.
4. Тахиров Ж.О. Краевые задачи для смешанного параболо-гиперболического уравнения с известной и неизвестной линиями раздела. Автореферат кандидатской диссертации. Ташкент, 1988.

ГРАФ В ВИДЕ ТРЕУГОЛЬНИКА С ПРИКРЕПЛЕННЫМИ ИСХОДЯЩИСЯ РЕБРАМИ НА КАЖДОЙ ВЕРШИНЕ

Ахмедов М.И.
Технический институт ЁДЖУ
maqsad.ahmedov@mail.ru

В настоящей работе рассматривается линеаризованное уравнение КдВ на звездном графе с тремя ограниченными связями, связанными в одной точке, называемой вершиной. Облигации обозначаются через $B_j,\ j=\overline{1,6}$

Координата x_1 на B_1 определяется от $-\infty$ до 0, и координата x_2 и x_3 и x_4 на B_2 и B_3 и B_4определяется с 0 до L, координата x_5 и x_6на B_5 и B_6определяется от 0 до $+\infty$. На каждой связи рассмотрим линейную уравнение:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^3}{\partial x_j^3}\right)u_j(x_j,t)=f_j(x,t),\quad t>0, x_j\in B_j,\ j=\overline{1,6}. \tag{1}$$

Формулировка задачи.

$$\begin{cases} u_1(0,t)=u_2(0,t)=u_3(0,t),\ u_{1x}(0,t)=\dfrac{1}{b_2}u_{2x}(0,t)=\dfrac{1}{b_3}u_{3x}(0,t), \\ u_{1xx}(0,t)=u_{2xx}(0,t)+u_{3xx}(0,t), \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} u_2(L_2,t)=u_4(0,t)=u_5(0,t),\ u_{2x}(L_2,t)=\dfrac{1}{b_4}u_{4x}(0,t)=\dfrac{1}{b_5}u_{5x}(0,t), \\ u_{2xx}(L_2,t)=u_{4xx}(0,t)+u_{5xx}(0,t), \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} u_3(L_3,t)=u_4(L_4,t)=u_6(0,t),\ u_{3x}(L_3,t)=\dfrac{1}{b_4}u_{4x}(L_4,t)+\dfrac{1}{b_6}u_{6x}(0,t), \\ u_{3xx}(L_3,t)=u_{4xx}(L_4,t)+u_{6xx}(0,t), \end{cases} \tag{4}$$

для $0<t<T,\ \ T=const.$

Кроме того, мы предполагаем, что функции $f_j(x,t),\ j=\overline{1,6}$ являются достаточно гладкими и ограничеными. Начальные условия задаются:

$$u_j(x,0)=0, x\in\overline{B_j},\ \ j=\overline{1,6}. \tag{5}$$

Следует отметить, что приведенные выше условия вершин не являются единственно возможными. Основная мотивация для нашего выбора обусловлена тем, что они гарантируют уникальность решения и если растворы распадаются (на нуль) на бесконечности, сохраняют норму (энергию).

С помощью следующей леммы мы можем доказать единственность решения условий (1)-(5).

Лемма 1. Пусть $b_2^2+b_3^2\le 1,\ b_4^2+b_5^2\le 1,\ b_4^2+b_6^2\le 1$. Тогда проблема (1)-(5) имеет не более одного решения.

Лемма 2. a) Пусть $\omega\in[a;b]$. потом $u(x,t)$ удовлетворяет $u_t-u_{xxx}=0$ для $t>0$ и:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)}u(x,t)=\begin{cases}\pi\omega(x_0), & if\ \ x_0\in(a,b);\\ 0, & if\ \ x_0\notin(a,b).\end{cases}$$

b) Пусть $f\in L^2\big((a,b)\times(0,T)\big)$. тогда функция $v(x,t)$ удовлетворяет $u_t-u_{xxx}=\pi f(x,t)$ в $(a,b)\times\big(0,T\big]$, $T>0$ и начальное условие $u(x,0)=u_0(x),\ x\in(a,b)$.

c) Если $\varphi_k\in H^1(0,T),$ тогда получаем следующие равенства

$$\lim_{x\to a+0}\omega^{(1)}(x,t)=\frac{2\pi}{3}\varphi(y),\ \ \lim_{x\to a-0}\omega^{(1)}(x,t)=-\frac{\pi}{3}\varphi(y),\ \ \lim_{x\to a+0}\omega^{(2)}(x,t)=0$$

Theorem 1. Пусть $\det A\neq 0,\ \varphi_k\in C^1[0,T]$. Тогда задачи (1)-(5) имеет единственное решение с класса $u_{0,j}(x)\in C^3[0,T]$ ($C^1([0,\ T],\ C^3(\Gamma))$).

Используя теорию потенциалов, мы сводим задачу к системам линейных алгебраических уравнений. Покажем, что эти системы однозначно разрешимы в условиях теоремы единственности, и получим явные формулы решения, доказывающие существование решений в классе функций Шварца и в классах Соболя.

Литература

1. S.Abdinazarov. The general boundary value problem for the third order equation with multiple characteristics (in Russian). Differential Equations,1881, 3(1). Pp.3-12.

2. Z.A.Sobirov, H.Uecker, M.Akhmedov. Exact solutions of the Cauchy problem for the linearized KdV equation on metric star graphs. Uz. Math. J. 2015. 3.

3. Z.A.Sobirov, M.I.Akhmedov, H.Uecker. Cauchy problem for the linearized KdV equation on general metric star graphs. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, 2015, 6(1). Pp. 198-204.

4. Z.A.Sobirov, M.I.Akhmedov, O.V.Karpova, B.Jabbarova. Linearized KdV

equation on a metric graph. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, 2015, 6(6). Pp. 757-761.

ЁПИҚ ТРАЕКТОРИЯГА ЭГА КВАДРАТИК ДИНАМИК СИСТЕМАЛАР

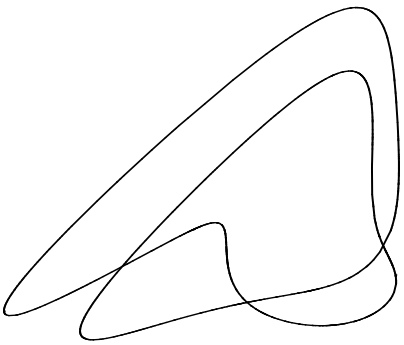
[1]Ахмедов О.С., [2]Абдуваҳобов Т.А.
[1]ЎзР ФА Математика институти, [2]ЎзМУ

Маълумки, табиатда рўй берувчи жараёнларни математик нуқтаи назардан моделлаштириш ҳамда модел асосида жараёнларда келажакда рўй бериши мумкин бўлган ҳолатларни тадқиқ қилиш дользарб масалалардан ҳисобланади. Жараёнларда иштирок этувчи ўзгарувчилар – динамик, яъни вақт бўйича ўзгаргани учун уларнинг математик моделлари кўп ҳолларда чизиқсиз динамик системалар орқали ифодаланади.

Динамик системалар сифат назариясида эса ўрганилаётган системада ёпиқ траектория мавжуд ёки йўқлиги назарий аниқлаш мухим бўлиб, бу берилган система ифодаланган жараёнда даврий ўзгаришлар кузатилиши ёки кузатилмаслиги тўғрисида амалий хулосалар чиқаришга ёрдам беради.

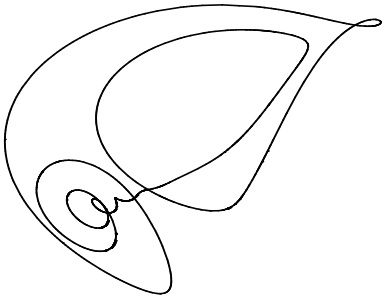
Қуйида “мураккаб” кўринишдаги ёпиқ траекторияга эга квадратик динамик системалар ва улар даврларини келтириб ўтамиз.

$$\begin{cases} x' = -1 + z + xy \\ y' = 1 - y + z - x^2 \\ z' = -x - xy \end{cases}$$

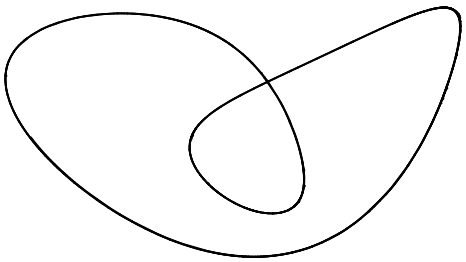
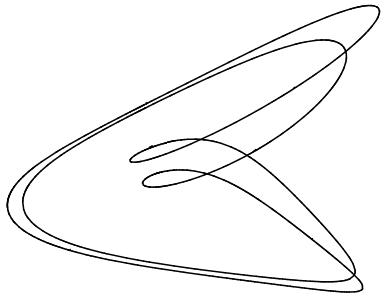
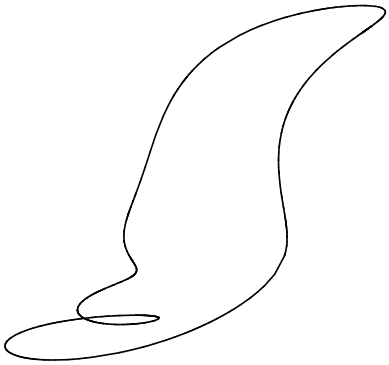
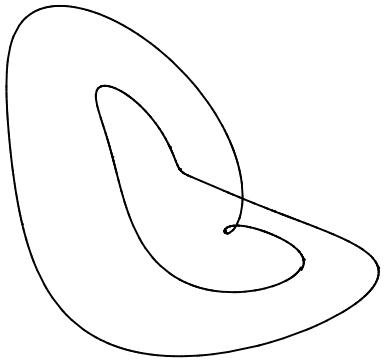
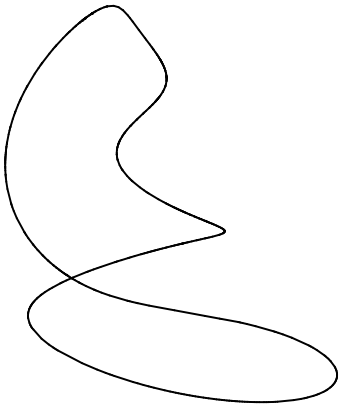


$T \approx 12.12$

$$\begin{cases} x' = -1 + x + yz \\ y' = -x + z + x^2 \\ z' = -x - xy \end{cases}$$



$T \approx 25$

$\begin{cases} x' = -1 + z + xy \\ y' = z - x^2 - yz \\ z' = -x - xz \end{cases}$		$T \approx 10.65$
$\begin{cases} x' = -1 + y + yz \\ y' = -y + z^2 - xy \\ z' = -x - xz \end{cases}$		$T \approx 20.6$
$\begin{cases} x' = -1 + x + yz \\ y' = -x + x^2 - xz \\ z' = y - xz \end{cases}$		$T \approx 11.5$
$\begin{cases} x' = 1 - z + xz \\ y' = x + x^2 - xy \\ z' = -y - xy \end{cases}$		$T \approx 25$
$\begin{cases} x' = 1 - x - y^2 \\ y' = z + x^2 \\ z' = -x - y - y^2 \end{cases}$		$T \approx 12.4$

Хулоса ўрнида шуни айтиш мумкинки, юқоридаги кўринишдаги ёпиқ траекторияга эга динамик системаларни аниқлаш мухим масала бўлиши билан бир қаторда, уларни бифуркацион хоссаларини ўрганиш динамик системалар назариясида янги турдаги бифуркацияларни аниқлашга имконини беради.

Адабиётлар

1. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. – М.: Наука, 1966. - 568 с.
2. Lawrence Perko. Differential Equations and Dynamical Systems, 3rd Edition,Springer, New York, 2006, p. 571.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПОРЯДКА ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В ВОЛНОВОМ УРАВНЕНИИ

[1]Ашуров Р. Р., [2]Файзиев Ю. Э.
[1]Институт математики Академии Наук РУз,
[2]Национальный Университет Узбекистана.
ashurovr@gmail.com, fayziev.yusuf@mail.ru

В последные несколько лет интенсивно исследуется сравнительно новый тип обратных задач - обратная задача по определению порядка дробной производной в различных дифференциальных уравнениях (см. обзорную работу [1] и [2]-[13]).

Интерес к такой обратной задаче обусловлена тем, что при рассмотрении уравнения дробного порядка в качестве модельного уравнения для анализа различных процессов, порядок дробной производной часто неизвестен и его трудно измерить напрямую. Нахождение этого неизвестного параметра интересен не только теоретически, но и необходим для решения начально-краевых задач и изучения свойств решений.

Данная работа посвящена изучению именно таких обратных задач для дробного волнового уравнения с произвольным положительным самосопряженным оператором, имеющий дискретный спектр. Дробная производная по времени взята в смысле Герасимова-Капуто.

Пусть A - произвольный положительный самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $||\cdot||$. Предположим, что A имеет полную в H систему ортонормированных собственных функций $\{v_k\}$ и счетное множество неотрицательных собственных значений λ_k. Удобно предположить, что собственные значения не убывают с увеличением их числа, т.е. $\lambda_k \leq \lambda_{k+1}$.

Используя определения сильного интеграла и сильной производной, можно определить аналог дробных интегралов и производных для вектор-функций (или просто функций) $h: R_+ \to H$, при этом хорошо известные формулы и свойства сохраняются (см., например, [14]). Итак, дробная производная в смысле Герасимова-Капуто порядка $\beta, k-1<\beta \le k, k \in N$, от функции h, заданной на $[0,\infty)$, определяется по формуле (см. например, [15], стр. 14, [16])

$$D_t^{\beta} h(t) = \frac{1}{\Gamma(k-\beta)} \int_0^t \frac{h^{(k)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\beta+1-k}}, \quad t>0,$$

при условии, что правая часть равенства существует. Здесь $\Gamma(t)$ - гамма функция Эйлера. Если поменять местами интеграл и производную, то получим определение дробной производной в смысле Римана-Лиувилля порядка β (см. [15])

$$\partial_t^{\beta} h(t) = \frac{1}{\Gamma(k-\beta)} \frac{d^k}{dt^k} \int_0^t \frac{h(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\beta+1-k}}, \quad t>0.$$

При $\beta = k$ дробные производные совпадают с обычным классическим производным: $\partial_t^k h(t) = D_t^k h(t) = \frac{d^k}{dt^k} h(t)$.

Пусть $\beta \in (1,2)$ - заданное число и обозначим через $C((a,b);H)$ множество непрерывных функций $u(t)$ от $t \in (a,b)$ со значением в H. Рассмотрим задачу Коши:

$$D_t^{\beta} u(t) + Au(t) = f, \quad 0<t \le T, \tag{1}$$

$$u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi, \tag{2}$$

где f, φ и ψ заданные вектора из H.

Определение 1. Функцию $u(t)$ со свойствами

1. $u(t), u'(t) \in C([0,T];H)$,
2. $D_t^{\beta} u(t), Au(t) \in C((0,T];H)$

и удовлетворяющую условиям (1) - (2) будем называть *решением задачи Коши* (1), (2).

Обозначим через $E_{\rho,\mu}(t)$ функцию Миттаг-Леффлера

$$E_{\rho,\mu}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\rho k + \mu)},$$

а через h_k - коэффициенты Фурье элемента $h \in H$ по системы собственных функций $\{v_k\}$: $h_k = (h, v_k)$.

Пусть τ- произвольное действительное число. Введем степень оператора A^τ, действующий в H по правилу

$$A^\tau g = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\tau g_k v_k .$$

Очевидно, область определения данного оператора имеет вид

$$D(A^\tau) = \left\{ g \in H : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\tau} \mid g_k \mid^2 < \infty \right\}.$$

Теорема 1. Пусть $f, \psi \in H$ и $\varphi \in D\left(A^{1/\beta}\right)$. Тогда решение задачи Коши единственно и имеет вид:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\varphi_k E_{\beta,1}\left(-\lambda_k t^\beta\right) + \psi_k t E_{\beta,2}\left(-\lambda_k t^\beta\right) + f_k t^\beta E_{\beta,\beta+1}\left(-\lambda_k t^\beta\right) \right] v_k \qquad (3)$$

где ряд сходится в H при $t \geq 0$.

Для определения β необходимо задавать дополнительное условие. В настоящей работе в качестве дополнительного возьмем условие ввиде:

$$U(\beta, t_o) = (u(t_o), v_{k_o}) = d_o, \quad t_o \geq T_o, \qquad (4)$$

где d_o - заданное число, T_o - положительное число, которое определено ниже и $k_o \geq 1$ - произвольное целое такое, что $f_{k_o}^2 + \varphi_{k_o}^2 + \psi_{k_o}^2 \neq 0$ (очевидно, такие числа существуют, так как f, φ и ψ не являются одновременно нулями).

При решение обратной задачи будем считать, что $1 < \beta_1 \leq \beta \leq \beta_2 < 2$ где β_1 и β_2 - произвольные заданные числа из соответсвующих интервалов.

Для того, чтобы уравнение (4) относительно β имело решение, очевидно, что число d_o не может задаваться произвольным образом. Необходимое условие разрешимости уравнения (4) является выполнение следующего включения

$$d_o \in \left[\min_{\beta \in [\beta_1, \beta_2]} U(\beta, t_o), \max_{\beta \in [\beta_1, \beta_2]} U(\beta, t_o) \right] \qquad (5)$$

т.е. число d_o должно находиться в области значений функции $U(\beta, t_o)$. Другими словами, если условие (5) не выполнено, то ни при каких $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$ не существует решение $u(t)$ задачи Коши, которое

удовлетворяет условие (4). Всюду далее будем считать, что условие (5) имеет место.

Задачу (1) - (2) вместе с дополнительным условием (4) будем называть *обратной задачей.*

Определение 2. Если $u(t)$ является решением задачи (1) - (2), удовлетворяющее условие (4), то пару $\{u(x,t),\beta\}$, $\beta \in [\beta_1,\beta_2]$, будем называть решением обратной задачи.

Лемма 1. Пусть $\| \psi \| + \| \varphi - A^{-1} f \| \neq 0$. Тогда найдется число $T_o = T_o(k_o,\beta_1,\beta_2)$ такое, что при $t_o \geq T_o$ функция $U(\beta,t_o)$ является строго монотонной по $\beta \in [\beta_1,\beta_2]$.

Из этой леммы очевидным образом вытекает следующий основной результат данной работы.

Теорема 2. Пусть

$$\| \psi \| + \| \varphi - A^{-1} f \| \neq 0 \tag{6}$$

и $t_o \geq T_o$. Тогда реше

ние обратной задачи существует и оно единственно.

Если условие (6) теоремы не выполняется, т.е. $\psi = 0$ и $\varphi = A^{-1} f$, то $\psi_k = 0$ и $\varphi_k = \dfrac{f_k}{\lambda_k}$ для всех k. Единственное решение задачи Коши в этом случае имеет вид (см. (5))

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k} v_k$$

т.е. не зависит от β. Следовательно, $U(\beta,t_o)$ не зависит от β (при этом условия (6) и (7) совпадают). Таким образом, в этом случае рассматриваемая обратная задача не имеет смысла.

Указанная выше проблема для дробного волнового уравнения решена в работе [13] при дополнительном условии $\lambda_1 \neq 0$. В этой работе дробная производная взята в смысле Римана-Лиувилля и легко видеть, что предложенный метод не проходит для случая производных в смысле Герасимова-Капуто.

В Теореме 2 решена (без каких либо дополнительных ограничений на спектр оператора *A*) проблема, сформулированная в обзорной статье [1], для дробного волнового уравнения с производным в смысле Герасимова-Капуто.

Литература

1. Z. Li, Y. Liu, M. Yamamoto. Inverse problems of determining parameters of the fractional partial differential equations, Handbook of fractional calculus with applications, 2 De Gruyter, (2019), 431–442.

2. J. Cheng, J. Nakagawa, M. Yamamoto, T. Yamazaki Uniqueness in an inverse problem for a one-dimensional fractional diffusion equation Inverse Prob. 4 (2009), 1–25.

3. Z. Li, M. Yamamoto. Uniqueness for inverse problems of determining orders of multi-term time-fractional derivatives of diffusion equation, Appl. Anal. 94 (2015), 570–579.

4. M. Yamamoto. Uniqueness in determining the order of time and spatial fractional derivatives, arXiv:2006, 15046v1 [math.AP] 26 Jun 2020.

5. Z. Li, Y. Luchko, M. Yamamoto. Analyticity of solutions to a distributed order time-fractional diffusion equation and its application to an inverse problem, Comput. Math. Appl. 73 (2017), 1041–1052.

6. J. Janno. Determination of the order of fractional derivative and a kernel in an inverse problem for a generalized time-fractional diffusion equation, Electronic J. Differential Equations 216 (2016), 1–28.

7. R. Ashurov, S. Umarov. Determination of the order of fractional derivative for subdiffusion equations, Fractional Calculus and Applied Analysis 23, 6 (2020), 1–17, https://doi.org/10.1515/fca-2020-0081.

8. Sh. Alimov, R. Ashurov. Inverse problem of determining an order of the Caputo time-fractional derivative for a subdiffusion equation, J. Inverse Ill-Posed Probl. 28, 5 (2020) 651–658, https://doi.org/10.1515/jiip-2020-0072.

9. R. Ashurov, Yu. Fayziev. Determination of fractional order and source term in a fractional subdiffusion equation, arXiv:submit/3264960[math. AP] 8 Jul 2020.

10. R. Ashurov, Yu. Fayziev. Uniqueness and Existence for Inverse Problem of Determining an Order of Time-Fractional Derivative of Subdiffusion Equation, Lobachevskii Journal of Mathematics 42, 3 (2021) 508–516.

11. R. Ashurov, R. Zunnunov. Initial-boundary value and inverse problems for subdiffusion equation in R^N, Fractional differential calculus 10, 2 (2020) 291–306.

12. Р. Ашуров, Р. Зуннунов. Обратная задача по определению порядка дробной производной в уравнениях смешанного типа, arXiv:2103.05287v1 [math.AP] 9 mart 2021.

13. R. R. Ashurov. Inverse problems of determining an order of time-fractional derivative in a wave equation, https://www.researchgate.net 2021, DIO: 10.13140/RG.2.2.18481.30560.

14. C. Lizama. Abstract linear fractional evolution equations, Handbook of fractional calculus with applications 2 De Gruyter (2019), 465–479.

15. А. Псху. Уравнения в частных производных дробного порядка, Наука, Москва, 2005.

16. О. Новоженова. Биография и научные труды Алексея Никифоровича Герасимова. О линейных операторов, упруго-вязкости, элефтерозе и дробных производных Перо Москва 2018 235.

АНАЛОГ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ.ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

Ашуров Р.Р., Зуннунов Р.Т.
Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз

Известно, что для моделирования динамики сложных случайных процессов, возникающих при аномальной диффузии в различных областях современной науки и техники, необходимо использовать дифференциальные уравнения дробного порядка (см.,например, в физике [1-2], в экономике [3], в гидрологии [4], в биологии [5]). Это инициировало активное исследование специалистов в области дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений дробного порядка. Имеются работы, посвященные теории уравнений смешанного типа с участием производных дробного порядка. Обычно обратными задачами в теории уравнений с частными производными (целого и дробного порядка) называют такие задачи, в которых вместе с решением дифференциального уравнения требуется определить также тот или иной коэффициент(ы) самого уравнения, либо правую часть, либо и коэффициент(ы), и правую часть. Интерес к исследованию таких обратных задач обусловлен важностью их приложений в различных разделах механики, ейсмологии, медицинской томографии и геофизики. В последние годы интенсивно исследуется сравнительно новый тип обратных задач, который возникает только при рассмотрении уравнений дробного порядка. А именно, обратные задачи по определению порядка дробной производной в различных дифференциальных уравнениях. Интерес к такой обратной задаче объясняется тем, что при рассмотрении уравнения дробного порядка в качестве модельного уравнения для анализа различных процессов, порядок дробной производной часто неизвестен и его трудно измерить напрямую. Нахождение этого неизвестного параметра интересен не только теоретически, но и необходим для решения начально-краевых задач и изучения свойств решений. Данная работа посвящена изучению именно таких обратных задач для уравнений смешанного типа.

Прямая задача. Дробные производные в смысле Римана-Лиувилля порядка $\alpha, k-1<\alpha\le k, k\in N$, от функции h, определенной на $[0,+\infty)$ определяется по формуле $\partial_t^{\alpha} h(t)=\frac{1}{\Gamma(k-\alpha)}\frac{d^k}{dt^k}\int_0^t \frac{h(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-k}}, t>0$ [6], при условии,

что правая часть равенства существует. Здесь $\Gamma(t)$ -гамма функция Эйлера.

Если $\alpha = k$, то дробная производная совпадает с обычным классическим производным $\partial_t^{\alpha} h(t) = \dfrac{d^k}{dt^k} h(t)$.Пусть $0 < \alpha < 1$. Дробный интеграл в смысле Римана-Лиувилля порядка $\alpha - 1 < 0$ от функции h имеет вид [6]

$$\partial_t^{\alpha-1} h(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{h(\xi)\,d\xi}{(t-\xi)^{\alpha}}, t > 0$$

Отметим следующее свойство этих интегралов [6]:

$$\lim_{t \to +0} \partial_t^{\alpha-1} h(t) = \Gamma(\alpha) \lim_{t \to +0} t^{1-\alpha} h(t) \tag{1}$$

Рассмотрим уравнение, имеющее смешанный тип,

$$f(x,t) = \begin{cases} \partial_t^{\alpha} u - u_{xx}, t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx}, t < 0, \end{cases} \tag{2}$$

в области $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$, где $\Omega^+ = \{(x,t) : 0 < x < 1, t > 0\}$ и Ω^-- область, находящаяся в нижней полуплоскости $(t < 0)$ и ограниченная характеристиками $AC : x + t = 0$ и $BC : x - t = 1$ уравнения (2),а также отрезком AB прямой $t = 0$.

Сформулируем аналог задачи Трикоми для уравнения (1) в области Ω.

Задача Т. *Найти решение* $u(x,t)$ *уравнения (2) в области* Ω, *удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, t \geq 0. \tag{3}$$

$$u(x/2, -x/2) = \psi(x), 0 \leq x \leq 1. \tag{4}$$

На линии $t = 0$ *выполняются условия склеивания*

$$\lim_{t \to +0} t^{1-\alpha} u(x,t) = \lim_{t \to -0} u(x,t), \tag{5}$$

$$\lim_{t \to +0} t^{1-\alpha} \left(t^{1-\alpha} u(x,t) \right)_t = \lim_{t \to -0} u(x,t) \tag{6}$$

Определение 1. *Решением задачи* ***T*** *будем называть функцию* $u(x,t)$, *удовлетворяющую условиям задачи и имеющую следующую гладкость*

1. $t^{1-\alpha} u(x,t) \in C\left(\overline{\Omega^+}\right), \partial_t^{\alpha} u(x,t) \in C\left(\Omega^+\right),$
2. $t^{1-\alpha} \left(t^{1-\alpha} u(x,t) \right)_t \in C\left(\Omega^+ \cup \{(x,t) : 0 < x < 1, t = 0\}\right),$
3. $u_{xx}(x,t) \in C\left(\Omega^+ \cup \Omega^-\right),\ u_{tt}(x,t) \in C\left(\Omega^-\right),\ u(x,t) \in C\left(\overline{\Omega^-}\right).$

Задача **T** называется *прямой задачей*.

Основная цель этой работы заключается в решении *обратной задачи* по определению порядка дробной производной α в уравнении (2). Для этого сначала доказывается существование и единственность решения прямой задачи **T.** Отметим, что прямая задача **T** для однородного уравнения (2) (т.е. при $f(x,t)\equiv 0$) впервые поставлена и изучена в работе К.У. Хубиева [7] . Однако уравнение, рассматриваемое в настоящей работе неоднородное и вид решения полученного в работе [7] не является удобным для решения обратной задачи. Поэтому, мы получили приемлимый для наших дальнейших исследований вид решения прямой задачи **T**.

Теорема 1. *Пусть* $\psi(x)\in C^a[0,1]\cap C^2(0,1), a>1/2$, *а функции* $f(x,t)\in C(\Omega)$, $f_\eta(x,\eta), f(x,\eta)\in C_t^a[0,1]$ *при каждом* t *и* $f(0,t)=f(1,t)=f_t(0,t)=f_t(1,t)=0$ *тогда, решение задачи* **T** *существует и единственно*.

Доказательство. Введем обозначение

$$\tau(x)=\lim_{t\to+0} t^{1-\alpha}u(x,t), 0\le x\le 1. \tag{7}$$

В силу граничных условий (3), имеем

$$\tau(0)=\tau(1)=0. \tag{8}$$

Введем следующий формальный ряд

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\Gamma(\alpha)t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-k^2t^\alpha\right)\tau_k+\int_0^t\eta^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-k^2\eta^\alpha\right)f_k(t-\eta)d\eta\right]\sin(k\pi x) \tag{9}$$

где τ_k и $f_k(t)$- коэффициенты Фурье функций $\tau(x)$ и $f(x,t)$ по системе $\{\sin(k\pi x)\}$ соответственно, $E_{\rho,\mu}(t)$- функция Миттаг-Леффлера [8].

Пусть $\tau(x)$ со свойствами (8) является заданной функцией. Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть функция* $f(x,t)\in C(\Omega^+)$ *и* $f(x,\eta)\in C_t^a[0,1], a>1/2$, *при каждом* t, *и пусть* $f(0,t)=f(1,t)=0$. *Пусть далее* $\tau\in C^a[0,1]$ *и имеют место равенства* (8). *Тогда функция* (9) *является единственным решением уравнения* (2) , *удовлетворяющее условиям* (6), (7) *и такое, что* $t^{1-\alpha}u(x,t)\in C(\overline{\Omega^+}), \partial_t^\alpha u(x,t), u_{xx}(x,t)\in C(\Omega^+)$.

Единственность решения сформулированной в лемме задачи доказана в работе [7]. Учитывая равенство (1), нетрудно проверить, что функция (9) формально является решением уравнения (2) и удовлетворяет условиям (6) и (7). Функция Миттаг-Лефлера отрицательного аргумента имеет оценку [9]:

$$\left|E_{\rho,\mu}(-t)\right| \le C(1+t)^{-1}. \qquad (10)$$

Пользуясь оценкой (10) и теоремой (3.1) работы А. Зигмунда [10] можно обосновать почленное дифференцирование ряда (9). Отсюда следует справед-ливость всех утверждений леммы.

Введем обозначение $\nu(x) = \lim\limits_{t\to+0} t^{1-\alpha}\left(t^{1-\alpha}u(x,t)\right)_t, 0 \le x \le 1.$

Из граничных условий (3) следует $\nu(0) = \nu(1) = 0$ и далее будем предполагать, что $\nu(x) \in C^a[0,1], a > 1/2$. Тогда первое функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ из области Ω^+ имеет вид

$$\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\tau''(x) \qquad 11)$$

Предположим, $f(x,t)$ удовлетворяет условиям теоремы и $\tau(x) \in C^2(0,1)$, $\nu(x) \in C^1(0,1)$, тогда пользуясь представлением решения задачи Коши в области Ω^- получаем второе функциональное соотношение

$$\tau'(x) - \nu(x) = 2\psi'(x) - F'(x), \text{ где } F(x) = \int\limits_{-\frac{x}{2}}^{0}\int\limits_{-\eta}^{x+\eta} f(\xi,\eta)d\xi d\eta \quad (12)$$

Исключая $\nu(x)$ из соотношений (11) и (12) и применяя метод вариации постоянных, с помощью условия (8) получим

$$\tau(x) = c_1 + c_2 e^{\gamma x} + g(x) - e^{\gamma x}\int\limits_0^x g'(\xi)e^{-\gamma\xi}d\xi, \quad g(x) = 2\psi(x) - F(x),$$

$$\nu(x) = c_2\gamma e^{\gamma x} - g'(x) - \gamma e^{\gamma x}\int\limits_0^x g'(\xi)e^{-\gamma\xi}d\xi, \quad \gamma = \gamma(\alpha) = \Gamma(1+\alpha),$$

$$c_1 = -c_2,\ c_2 = \frac{1}{e^{\gamma}-1}\left(\gamma e^{\gamma}\int\limits_0^1 g'(\xi)e^{-\gamma\xi}d\xi - g(1)\right).$$

Заметим, что $\gamma(\alpha) > 1/2$ для всех $\alpha \in (0,1)$ и поэтому $e^{\gamma} - 1 > 0$.

Очевидно, что если $f(x,t)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, то функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ удовлетворяют условиям $\tau(x) \in C^2(0,1)$, $\nu(x) \in C^1(0,1)$ (также $\tau(x)$ удовлетворяют условиям леммы, а $\nu(x)$ условию $\nu(x) \in C^a[0,1], a > 1/2$). Проводя аналогичные рассуждения как в [7] можно показать , что $t^{1-\alpha}\left(t^{1-\alpha}u(x,t)\right)_t \in C\left(\Omega^+ \cup \{(x,t): 0 < x < 1, t = 0\}\right)$. Этим заканчивается доказательство теоремы 1.

Обратная задача. Теперь предположим, что порядок дробной производной α в уравнении (2) является неизвестным и рассмотрим обратную задачу по определению этого параметра. Будем считать, что $f(x,t)=f(x)$ в противном случае доказательства становятся технически значительно сложными. При этом естественно предполагать, что $f(x)$ и $\tau(x)$ не являются одновременно тождественными нулями, так как в противном случае, в силу леммы 1, решение прямой задачи $u(x,t)\equiv 0$ в области Ω^+ при любых α, что не позволяет определить этот параметр.

Определение правильного порядка дробной производной играет важную роль в моделирование различных процессов. Для нахождения неизвестного порядка производной естественно надо наложить дополнительное условие на решение $u(x,t)$. В настоящей работе для определения неизвестного параметра α зададим дополнительное условие на решения в виде:

$$\int_0^1 u(x,t_0)\sin(k_0\pi x)dx = d_0 \tag{13}$$

где d_0 - произвольное заданное число, t_0 - положительное число, которое определено в лемме 2, приведенной ниже и k_0 - произвольное целое такое, что $f_{k_0}^2+\tau_{k_0}^2\neq 0$ (очевидно, такие числа существуют, так как $f(x)$ и $\tau(x)$ не являются одновременно тождественными нулями).

Начально-краевую задачу **T** вместе с дополнительным условием (13) назовем *обратной задачей* по определению параметра α. Если $u(x,t)$ решение задачи **T** и параметр α удовлетворяет условию (13), то пару $\{u(x,t),\alpha\}$ назовем *решением обратной задачи*.

Так как $f(x,t)=f(x)$, то в силу формулы (см. [9],формула (4.4.4))

$$E(\alpha)\equiv\int_0^1 u(x,t_0)\sin(k_0\pi x)dx = 2\Gamma(\alpha)t_0^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-k_0^2t_0^\alpha\right)\tau_{k_0}+t_0^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}\left(-k_0^2t_0^\alpha\right)f_{k_0}$$

Всюду далее будем предполагать, что $\alpha\in[\alpha_0,1]$, $0<\alpha_0<1$. Тогда функция $E(\alpha)$ является непрерывно дифференцируемой на сегменте $\alpha\in[\alpha_0,1]$. Перепишем дополнительное условие (13) в виде следующего функционального уравнения относительно α

$$E(\alpha)=d_0 \tag{14}$$

Для того, чтобы это уравнение имело решение, очевидно, что число d_0 не может задаваться произвольным образом. Необходимое условие разрешимости уравнения (14) является выполнение следующего включения

$$d_0 \in \left[\min_{[\alpha_0,1]} E(\alpha), \max_{[\alpha_0,1]} E(\alpha) \right] \tag{15}$$

т.е. число d_0 должно находиться в области значений функции $E(\alpha)$. Другими словами, если условие (15) не выполнено, то ни при каких $\alpha \in [\alpha_0,1]$ не существует решение $u(x,t)$ прямой задачи, которое удовлетворяет условию (13). Всюду далее будем предполагать, что это условие выполнено.

Лемма 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Найдется число $T_0 = T_0(k_0,\alpha_0)$, что при $t_0 \geq T_0$ функция $E(\alpha)$ является строго монотонной по $\alpha \in [\alpha_0,1]$.

Из этой леммы очевидным образом вытекает следующий основной результат относительно задачи **Т**.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $t_0 \geq T_0$. Тогда решение обратной задачи существует и оно единственно.

Используя методику работы [11], теорема 2 доказывается аналогично.

Литература

1.Ahmad B., Alsaedi A., Kirane M. Blowing-up solutions of distributed fractional differential systems. Chaos, Solitons and Fractals. 2021. V. 145. № 1. P.1-4.

2.Hilfer R. Applications of Fractional Calculus in Physics. World Scientific, 2000.

3. Machado T., Lopes A. Relative fractional dynamics of stock markets. Nonlinear dynamics.2016. V. 86. №3. P.1613-1619.

4. Benson D., Meerschaert M., Revielle J. Fractional calculus in hydrology modeling: A numerical perspective. Advances in water resources.2013. V. 51. P. 479-497.

5. Magin R. Fractional Calculus in bioengineering. Critical reviews in biomedical engineering.2004.V.32.№ 1. P.1-104.

6.Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М., 2005.

7. Хубиев К.У. Задача со смещением для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с оператором дробной производной диффузии, Вестник Удмурского Университета. Математика, Механика, Компьютерные науки. 2018. Т. 28. № 1. С. 82-90

8.Dzherbashian M.M. Integral Transforms and Representation of Functions in the Complex Domain. Nauka, M. 1966.

9.Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogozin S.V.} Mittag-Leffler functions, related topics and applications. Springer. 2014.

10. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т. 1, М., 1965.

11. Ashurov R.R, Zunnunov R.T. Initial-boundary value and inverse problems for subdiffusion equation in $\mathbb{R}^n$. Frac. differential calculus.2020.V.10. №2. P. 291-306.

О РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ ПО ВРЕМЕНИ И ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ В КЛАССАХ СОБОЛЕВА

Бабаев М.М.
Национальный Университет Узбекистана
babayevm@mail.ru

1. Постановка задачи. Как известно, что в физике твердого тела изучаются так называемые фрактальные среды, в частности, явления диффузия в них. В одной из моделей, диффузия в сильно пористой среде описывается уравнением типа уравнения теплопроводности, но с дробной производной по временной координате с запаздывающим аргументом. Многие задачи о колебаниях балок и пластин, которые имеют большое значение в строительной механике, приводят к дифференциальным уравнениям [1, с. 141-143], [2, с. 278-280], [3, гл.3].

Отметим также, что к уравнению колебаний балки приходят во многих задачах при расчёте устойчивости вращающихся валов и изучении вибрации кораблей [4-7].

В данной работе рассматривается дифференциальное уравнение с дробной производной вида

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t)+Bu(x,t)+Cu(x,t-\tau)=F(x,t),\ \ (x,t)\in Q=\Pi\times(0,T),\ \ \alpha>0 \qquad (1)$$

с начальными функциями

$$\begin{cases} D_{0t}^{\alpha-k}u(x,t)\big|_{t=+0}=\varphi_k(x), \quad x=(x_1,...,x_j,...,x_N)\in\Pi, \quad k=1,2,...,l-1, \\ D_{0t}^{\alpha-l}u(x,t)=\varphi_l(x,t), \quad (x,t)=(x_1,...,x_j,...,x_N,t)\in\Pi\times(-\tau,0), \ \ l=-[-\alpha]. \end{cases} \qquad (2)$$

Здесь при $\alpha<0$ дробная интеграл D^{α} имеет вид

$$D_{at}^{\alpha}u(x,t)=\frac{sign(t-a)}{\Gamma(-\alpha)}\int_a^t\frac{u(x,\tau)d\tau}{|t-\tau|^{\alpha+1}},$$

при $\alpha=0$, то $D_{at}^{\alpha}u(x,t)=u(x,t)$, а при $l-1<\alpha\le l,\ \ l\in\mathbb{N}$, дробная производная имеет вид

$$D_{at}^{\alpha}u(x,t)=sign^l(t-a)\frac{d^l}{dt^l}D_{at}^{\alpha-l}u(x,t)=\frac{sign^{l+1}(t-a)}{\Gamma(l-\alpha)}\frac{d^l}{dt^l}\int_a^t\frac{u(x,\tau)\cdot d\tau}{|t-\tau|^{\alpha-l+1}}.$$

Оператор

$$Au(x,t) = -\Delta u(x,t) = -\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j^2},\ (x,t) \in Q$$

определяется в гильбертовом пространстве $H = W_2^{s_1, s_2, \ldots, s_N}(\Pi)$ с областью определением

$$\overset{0}{W}{}_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi) = \left\{ u(x,t):\quad \alpha_j \cdot \frac{\partial^{2k_j} u(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_N,t)}{\partial x_j^{2k_j}}\bigg|_{x_j=0} + \right.$$

$$+\beta_j \cdot \frac{\partial^{2k_j} u(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_N,t)}{\partial x_j^{2k_j}}\bigg|_{x_j=\pi} = 0,\ 1 \le j \le p,\ 0 \le k_j < \frac{2s_j - N}{4},\quad s_j > 2 + \frac{N}{2},$$

$$\beta_j \cdot \frac{\partial^{2k_j+1} u(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_N,t)}{\partial x_j^{2k_j+1}}\bigg|_{x_j=0} + \alpha_j \cdot \frac{\partial^{2k_j+1} u(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_N,t)}{\partial x_j^{2k_j+1}}\bigg|_{x_j=\pi} = 0,$$

$$1 \le j \le p,\ 0 \le k_j < \frac{2s_j - N - 2}{4},\ s_j > 2 + \frac{N}{2},$$

$$\frac{\partial^{2k_j} u(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_N,t)}{\partial x_j^{2k_j}}\bigg|_{x_j=0} = \frac{\partial^{2k_j} u(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_N,t)}{\partial x_j^{2k_j}}\bigg|_{x_j=\pi},$$

$$p+1 \le j \le q,\ 0 \le k_j < \frac{2s_j - N}{4},\quad s_j > 2 + \frac{N}{2},$$

$$\frac{\partial^{2k_j+1} u(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_N,t)}{\partial x_j^{2k_j+1}}\bigg|_{x_j=0} = \frac{\partial^{2k_j+1} u(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_N,t)}{\partial x_j^{2k_j+1}}\bigg|_{x_j=\pi},$$

$$p+1 \le j \le q,\ k_j < \frac{2s_j - N - 2}{4},\ s_j > 2 + \frac{N}{2},$$

$$\frac{\partial^{2k_j} u(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_N,t)}{\partial x_j^{2k_j}}\bigg|_{x_j=0} = 0,\quad \frac{\partial^{2k_j} u(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_N,t)}{\partial x_j^{2k_j}}\bigg|_{x_j=\pi} = 0,$$

$$q+1 \le j \le N,\ 0 \le k_j < \frac{2s_j - N}{4},\ s_j > 2 + \frac{N}{2},$$

$$\left. 1 \le p \le q \le N,\ u(x,t) \in W_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi) \right\} \qquad (3)$$

где $\tau,\ T > 0-$ постоянные, $l \in \mathbb{N}$, $(x,t) = (x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_N,t) \in \Pi \times (0,T)$, $\Pi = (0,\pi) \times \ldots \times (0,\pi)$, $\alpha_i = const,\ \beta_i = const$, $\alpha_j \ne 0,\ \beta_j \ne 0,\ |\alpha_j| \ne |\beta_j|$ при $1 \le j \le p$.

Для произвольной кусочно-равномерно непрерывной на $(-\infty, +\infty)$ вещественной функции $f(\lambda)$ определим псевдодифференциальный оператор $B = f(A)$ со следующими равенствами (см. [8, с. 381])

$$Bu(x,t)=\sum_{n_1,\dots,n_q=-\infty}^{\infty}\ \dots\ \sum_{n_{q+1},\dots,n_N=1}^{\infty} f(\lambda_{n_1,\dots,n_N})T_{n_1,\dots,n_N}(t)v_{n_1,\dots,n_N}(x),\quad (x,t)\in Q,$$

где $T_{n_1,\dots,n_N}(t)=(u(x,t),\, v_{n_1,\dots,n_N}(x))_{W_2^{s_1,\,s_2,\,\dots,\,s_N}(\Pi)}$ – коэффициент Фурье функции $u(x,t)$, с областью определения $D(B)$, состоящей из тех $u(x,t)\in \overset{0}{W}{}_2^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\Pi)$, для которых

$$\sum_{n_1,\dots,n_q=-\infty}^{\infty}\ \dots\ \sum_{n_{q+1},\dots,n_N=1}^{\infty}\left|f(\lambda_{n_1,\dots,n_N})\right|^2\left|T_{n_1,\dots,n_N}(t)\right|^2<+\infty.$$

Аналогично, для произвольной кусочно-равномерно непрерывной на $(-\infty,+\infty)$ вещественной функции $f(\lambda)$ определим псевдодифференциальный оператор $C=g(A)$ со следующими равенствами (см. [8, с. 381])

$$Cu(x,t-\tau)=\sum_{n_1,\dots,n_q=-\infty}^{\infty}\ \dots\ \sum_{n_{q+1},\dots,n_N=1}^{\infty} g(\lambda_{n_1,\dots,n_N})T_{n_1,\dots,n_N}(t-\tau)v_{n_1,\dots,n_N}(x),\quad (x,\ t-\tau)\in Q,$$

где $T_{n_1,\dots,n_N}(t-\tau)=(u(x,t-\tau),\, v_{n_1,\dots,n_N}(x))_{W_2^{s_1,\,s_2,\,\dots,\,s_N}(\Pi)}$ – коэффициент Фурье функции $u(x,t-\tau)$, с областью определения $D(C)$, состоящей из тех $u(x,t-\tau)\in \overset{0}{W}{}_2^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\Pi)$, для которых

$$\sum_{n_1,\dots,n_q=-\infty}^{\infty}\ \dots\ \sum_{n_{q+1},\dots,n_N=1}^{\infty}\left|g(\lambda_{n_1,\dots,n_N})\right|^2\left|T_{n_1,\dots,n_N}(t-\tau)\right|^2<+\infty.$$

Далее, достаточно гладкие функции $F(x,t)$, $\varphi_k(x)$ $k=1,2,\dots l-1$, $\varphi_l(x,t)$ при каждом t разлагаемые функции по собственным функциям $\left\{v_{m_1,\dots,m_N}(x_1,\dots,x_N)\right\}_{(m_1,\dots,m_p)\in\mathbb{Z}^p\times(m_{p+1},\dots,m_q)\in\mathbb{Z}^{q-p}\times(m_{q+1,\dots,m_N})\in\mathbb{N}^{N-q}}$ систему собственных функций спектральной задачи:

$$\Delta v(x)+\mu v(x)=0, \tag{4}$$

$$\begin{cases}
\alpha_j\cdot v(x_1,\dots,x_j,\dots,x_N)\big|_{x_j=0}+\beta_j\cdot v(x_1,\dots,x_j,\dots,x_N)\big|_{x_j=\pi}=0,\ 1\le j\le p,\\
\beta_j\cdot\dfrac{\partial^{2k_j+1}v(x_1,\dots,x_j,\dots,x_N)}{\partial x_j^{2k_j+1}}\bigg|_{x_j=0}+\alpha_j\cdot\dfrac{\partial^{2k_j+1}v(x_1,\dots,x_j,\dots,x_N)}{\partial x_j^{2k_j+1}}\bigg|_{x_j=\pi}=0,\ 1\le j\le p,\\
v(x_1,\dots,x_j,\dots,x_N)\big|_{x_j=0}=v(x_1,\dots,x_j,\dots,x_N)\big|_{x_j=\pi},\quad p+1\le j\le q,\\
\dfrac{\partial v(x_1,\dots,x_j,\dots,x_N)}{\partial x_j}\bigg|_{x_j=0}=\dfrac{\partial v(x_1,\dots,x_j,\dots,x_N)}{\partial x_j}\bigg|_{x_j=\pi},\ p+1\le j\le q,\\
v(x_1,\dots,x_j,\dots,x_N)\big|_{x_j=0}=0,\ \ v(x_1,\dots,x_j,\dots,x_N)\big|_{x_j=\pi}=0,\quad q+1\le j\le N,\\
1\le p\le q\le N
\end{cases} \tag{5}$$

Здесь $\lambda_{m_1,\dots,m_N}=\sum_{j=1}^{p}\left(2m_j+\varphi_j\right)^2+\sum_{j=p+1}^{q}\left(2m_j\right)^2+\sum_{j=q+1}^{N}\left(m_j\right)^2$, а числа $\varphi_j=\frac{1}{\pi}\arccos\frac{-2\alpha_j\beta_j}{{\alpha_j}^2+{\beta_j}^2}$. Соответствующая система собственных функций имеет вид

$$\left\{v_{m_1,\dots,m_N}(x_1,\dots,x_N)\right\}_{(m_1,\dots,m_p)\in\mathbb{Z}^p\times(m_{p+1},\dots,m_q)\in\mathbb{Z}^{q-p}\times(m_{q+1},\dots,m_N)\in\mathbb{N}^{N-q}}=$$

$$=\left\{\prod_{j=1}^{p}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{sign({\beta_j}^2-{\alpha_j}^2)\cdot\alpha_j\sin\lambda_{m_j}x_j+\beta_j\cos\lambda_{m_j}x_j}{\sqrt{{\alpha_j}^2+{\beta_j}^2}\cdot\sqrt{1+\left|\lambda_{m_j}\right|^{2s_j}}}\right\}_{(m_1,\dots,m_p)\in\mathbb{Z}^p}\times$$

$$\times\left\{\prod_{j=p+1}^{q}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left|2m_j\right|^{2s_j}}}exp(i2m_jx_j)\right\}_{(m_{p+1},\dots,m_q)\in\mathbb{Z}^{q-p}}\times$$

$$\times\left\{\prod_{j=q+1}^{N}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left|m_j\right|^{2s_j}}}\sin(m_jx_j)\right\}_{(m_{q+1},\dots,m_N)\in\mathbb{N}^{N-q}}.$$

Отметим, что аналогичные начально-граничные задачи были исследованы в работе [9] и [10].

Введем пространство $W_2^s(0,l)$ с нормой $\|f\|^2_{W_2^s(0,l)}=\|f\|^2_{L_2(0,l)}+\left\|D^sf\right\|^2_{L_2(0,l)}$, где s произвольное натуральное число, при этом $W_2^0(0,l)=L_2(0,l)$.

Скалярное произведение в пространстве $W_2^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\Pi)$, вводится так:

$$(f(x),g(x))_{W_2^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\Pi)}=(f(x),g(x))_{L_2(\Pi)}+\sum_{j_1=1}^{N}(D^{s_{j_1}}_{x_{j_1}}f(x),D^{s_{j_1}}_{x_{j_1}}g(x))_{L_2(\Pi)}+$$

$$+\sum_{1\le j_1<j_2\le N}(D^{s_{j_1}}_{x_{j_1}}D^{s_{j_2}}_{x_{j_2}}f(x),D^{s_{j_1}}_{x_{j_1}}D^{s_{j_2}}_{x_{j_2}}g(x))_{L_2(\Pi)}+\dots+$$

$$+\sum_{1\le j_1<j_2<\dots<j_N\le N}(D^{s_{j_1}}_{x_{j_1}}D^{s_{j_2}}_{x_{j_2}}\dots D^{s_{j_N}}_{x_{j_N}}f(x),D^{s_{j_1}}_{x_{j_1}}D^{s_{j_2}}_{x_{j_2}}\dots D^{s_{j_N}}_{x_{j_N}}g(x))_{L_2(\Pi)}.$$

Соответственно норма в пространстве $W_2^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\Pi)$, вводится так:

$$\|f\|^2_{W_2^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\Pi)}=\|f\|^2_{L_2(\Pi)}+\sum_{j_1=1}^{N}\left\|D^{s_{j_1}}_{x_{j_1}}f(x)\right\|_{L_2(\Pi)}+$$

$$\sum_{1\le j_1<j_2\le N}^{N}\left\|D^{s_{j_1}}_{x_{j_1}}D^{s_{j_2}}_{x_{j_2}}f(x)\right\|_{L_2(\Pi)}+\dots+\sum_{1\le j_1<j_2<\dots<j_N\le N}^{N}\left\|D^{s_{j_1}}_{x_{j_1}}D^{s_{j_2}}_{x_{j_2}}\dots D^{s_{j_N}}_{x_{j_N}}f(x)\right\|_{L_2(\Pi)}.$$

2. Полнота системы собственных функций в подпространствах Соболева. Обозначим через $\overset{0}{W}{}_2^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\Pi)$ множество всех функций $f(x)\in W_2^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\Pi)$, удовлетворяющих граничным условиям (5).

Справедливо следующая

Теорема 1. *Пусть* $\alpha_j \neq 0,\ \beta_j \neq 0,\ |\alpha_j| \neq |\beta_j|$ *действительные числа при каждом* $1 \le j \le p$ *и*

$$\rho = \max_{1\le j\le p} \sqrt{\theta_j{}^2 + 2\left(\frac{\theta_j}{\sqrt{2}} + (\varphi_j+1)^{s_j} - 1\right)^2} \cdot \sigma(s_j) < 1,$$

где $\sigma(0) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sigma(s_j) = 1,$ *при* $s_j > 0$, $\theta_j = \sqrt{2}\cdot \max_{x\in[0,\pi]} \left| e^{i\varphi_j x} - 1 \right|,\ \lambda_{m_j} = 2m_j + \varphi_j,$

$\varphi_j = \frac{1}{\pi}\arccos\frac{-2\alpha_j\beta_j}{\alpha_j{}^2 + \beta_j{}^2},\ m_j \in \mathbb{Z}.$ *Тогда система собственных функций*

$$\left\{ v_{m_1\ldots m_N}(x_1,\ldots,x_N) \right\}_{(m_1,\ldots,m_p)\in\mathbb{Z}^p\times(m_{p+1},\ldots,m_q)\in\mathbb{Z}^{q-p}\times(m_{q+1},\ldots,m_N)\in\mathbb{N}^{N-q}} =$$

$$= \left\{ \prod_{j=1}^{p} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{sign(\beta_j{}^2 - \alpha_j{}^2)\cdot \alpha_j \sin\lambda_{m_j} x_j + \beta_j \cos\lambda_{m_j} x_j}{\sqrt{\alpha_j{}^2 + \beta_j{}^2}\cdot\sqrt{1 + |\lambda_{m_j}|^{2s_j}}} \right\}_{(m_1,\ldots,m_p)\in\mathbb{Z}^p} \times$$

$$\times \left\{ \prod_{j=p+1}^{q} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+|2m_j|^{2s_j}}} exp(i2m_j x_j) \right\}_{(m_{p+1},\ldots,m_q)\in\mathbb{Z}^{q-p}} \times$$

$$\times \left\{ \prod_{j=q+1}^{N} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+|m_j|^{2s_j}}} \sin(m_j x_j) \right\}_{(m_{q+1},\ldots,m_N)\in\mathbb{N}^{N-q}},$$

спектральной задачи (4)-(5) образует полной ортонормированный системой в классах Соболева $\overset{0}{W}{}_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi)$.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha_j \neq 0,\ \beta_j \neq 0,\ |\alpha_j| \neq |\beta_j|$ *действительные числа при каждом* $1 \le j \le p$ *и*

$$\rho = \max_{1\le j\le p} \sqrt{\theta_j{}^2 + 2\left(\frac{\theta_j}{\sqrt{2}} + (\varphi_j+1)^{s_j} - 1\right)^2} \cdot \sigma(s_j) < 1,$$

где $\sigma(0) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sigma(s_j) = 1,$ *при* $s_j > 0$, $\theta_j = \sqrt{2}\cdot \max_{x\in[0,\pi]} \left| e^{i\varphi_j x} - 1 \right|,\ \lambda_{m_j} = 2m_j + \varphi_j,$

$\varphi_j = \frac{1}{\pi}\arccos\frac{-2\alpha_j\beta_j}{\alpha_j{}^2 + \beta_j{}^2},\ m_j \in \mathbb{Z}.\ s_j > k + \frac{N}{2},\ k \ge 0,\ k \in \mathbb{Z}.$ *Тогда ряд Фурье функции* $f(x) \in \overset{0}{W}{}_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi) \cap C^k(\Pi)$ *по ортонормированных собственных функций*

$$\left\{ v_{m_1\ldots m_N}(x_1,\ldots,x_N) \right\}_{(m_1,\ldots,m_p)\in\mathbb{Z}^p\times(m_{p+1},\ldots,m_q)\in\mathbb{Z}^{q-p}\times(m_{q+1},\ldots,m_N)\in\mathbb{N}^{N-q}} =$$

$$= \left\{ \prod_{j=1}^{p} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{sign(\beta_j{}^2 - \alpha_j{}^2) \cdot \alpha_j \sin \lambda_{m_j} x_j + \beta_j \cos \lambda_{m_j} x_j}{\sqrt{\alpha_j{}^2 + \beta_j{}^2} \cdot \sqrt{1 + \left|\lambda_{m_j}\right|^{2s_j}}} \right\}_{(m_1,\ldots,m_p)\in\mathbb{Z}^p} \times$$

$$\times \left\{ \prod_{j=p+1}^{q} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left|2m_j\right|^{2s_j}}} exp(i2m_j x_j) \right\}_{(m_{p+1},\ldots,m_q)\in\mathbb{Z}^{q-p}} \times$$

$$\times \left\{ \prod_{j=q+1}^{N} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left|m_j\right|^{2s_j}}} \sin(m_j x_j) \right\}_{(m_{q+1},\ldots,m_N)\in\mathbb{N}^{N-q}},$$

спектральной задачи (4)-(5) сходится по норме пространства $C^k(\prod)$ *к функции* $f(x)$.

Доказательство теоремы 1 и 2 можно найти в работе [9].
Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть начальные функций* $\varphi_k(x)$ $k = 1,2,\ldots l-1$, $\varphi_l(x,t)$, *и правую часть* $F(x,t)$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{n_1,\ldots,n_q=-\infty}^{\infty} \sum_{n_{q+1},\ldots,n_N=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{-[-\alpha]} \left(\varphi_j\right)_{n_1,\ldots,n_N} \cdot t^{\alpha-j} \cdot E_{\alpha,\alpha-j+1}(f(\lambda_{n_1,\ldots,n_N}) \cdot t^{\alpha}) + \right.$$

$$\left. + \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left[f(\lambda_{n_1,\ldots,n_N}) \cdot (t-\xi)^{\alpha} \right] \left[F_{n_1,\ldots,n_N}(\xi) - g(\lambda_{n_1,\ldots,n_N}) \left(D_{0t}^{l-\alpha} \varphi_l \right)_{n_1,\ldots,n_N} \right] d\xi \right|^2 \times$$

$$\times \left(1 + \left| f(\lambda_{n_1,\ldots,n_N}) \right|^2 \right) < \infty, \text{ при каждом } 0 \le t \le \tau,$$

$$\sum_{n_1,\ldots,n_q=-\infty}^{\infty} \sum_{n_{q+1},\ldots,n_N=1}^{\infty} \left| \int_{\tau}^{t} (t-\xi)^{\alpha-1} \left| F_{n_1,\ldots,n_N}(\xi) - g(\lambda_{n_1,\ldots,n_N}) \cdot {}_1T_{n_1\ldots n_N}(\xi-\tau) \right| d\xi \right|^2 \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{N} \left(1 + \left| f(\lambda_{n_1,\ldots,n_N}) \right|^2 \right) < \infty, \text{ при каждом } \tau \le t \le 2\tau,$$

$$\sum_{n_1,\ldots,n_q=-\infty}^{\infty} \sum_{n_{q+1},\ldots,n_N=1}^{\infty} \left| \int_{n\tau}^{t} (t-\xi)^{\alpha-1} \left| F_{n_1,\ldots,n_N}(\xi) - g(\lambda_{n_1,\ldots,n_N}) \cdot {}_nT_{n_1\ldots n_N}(\xi-\tau) \right| d\xi \right|^2 \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{N} \left(1 + \left| f(\lambda_{n_1,\ldots,n_N}) \right|^2 \right) < \infty, \text{ при каждом } n\tau \le t \le (n+1)\tau. \quad n = 0,1,\ldots,\left[\frac{T}{\tau}\right].$$

Тогда регулярные решение задачи (1)–(3) из класса $\overset{0}{W}{}_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N;\theta}(Q)$ *с показателем* $s_1 = s_2 = \ldots = s_N = 2 + \frac{N}{2}$, $\theta = -[-\alpha]$ *существует и единственно.*

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. 3-е изд. М.: Наука, 1977. 736 с.
2. Рэлей Л. Теория звука. 2-е изд. Т.1. М.: 1955. 504 с.
3. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
4. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.
5. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.
6. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 200 с.
7. Igor Podlubny. Fractional Differential Equations. Mathematics in science and engineering. Volume 198. 1999. P.340.
8. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520.
9. Kasimov Sh.G., Ataev Sh.K. On solvability of the mixed problem for a partial equation of a fractional order with Laplace operators and nonlocal boundary conditions in the Sobolev classes “Uzbek Mathematical Journal”. Tashkent. "FAN". 2018 № 1. P. 73 - 89.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НАГРУЖЕННЫМИ СЛАГАЕМЫМИ

[1]Балтаева У. И., [2]Ваисова Н.З., [3]Сейтмурадова Г.И.

[1,2]Хорезмская Академия Маъмуна, Узбекистан

[3]Ургенчский государственный университет

umida_baltayeva@mail.ru

nafosat_vaisova@mail.ru

Пусть

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \{(x,y): 0 < x < +\infty,\ 0 < y < +\infty\},\\
D_2 &= \{(x,y): -\infty < x < 0,\ 0 < y < +\infty\},\\
J &= \{(x,y): x = 0,\ 0 < y < +\infty\},
\end{aligned}
$$

а $D = D_1 \cup J \cup D_2$. Рассмотрим уравнение

$$
0 = \begin{cases} u_{xx} - u_y + \lambda_1 u(0,y) & \text{в } D_1, \\ u_{xx} - u_{yy} + cu - \lambda_2 u(0,y) & \text{в } D_2, \end{cases} \tag{1}
$$

где $c = const \geq 0,\ \lambda_1, \lambda_2 - const$ действительные числа, в области области D будем изучать задачу Коши. Отметим, что линия $x = 0$ является

нехарактеристической линией изменения типа уравнения (1). По поводу рассматриваемой задачи Коши для уравнения (1) также имеет место замечание [Т.Д. Жураев, стр 18]

Задача Коши. Определить функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) она непрерывна в $\bar{D}_i (i=1,2)$;

2) частный производные u_x и u_y непрерывны в $D_i \cup J (i=1,2)$;

3) является регулярным решением уравнения (1) в областях $D_i (i=1,2)$;

4) на J выполняются условия склеивания

$$\begin{cases} \tau_1(y) = \mu(y)\tau_2(y) + \gamma(y) \\ \nu_1(y) = \beta(y)\nu_2(y) + \delta(y)\tau_2(y) + \xi(y) \end{cases} \tag{2}$$

где $\mu, \beta, \gamma, \delta, \xi$ - заданные функции, $\mu(y), \gamma(y) \in C^2, \beta(y), \delta(y), \xi(y) \in C^1$, причем $\forall y \in \bar{J}$, $\mu(y)\beta(y) \neq 0$, а

$$\tau_1(y) = u(+0, y), \quad \tau_2(y) = u(-0, y),$$
$$\nu_1(y) = u_x(+0, y), \quad \nu_2(y) = u_x(-0, y);$$

5) принимает заданные значения

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad 0 \le x < +\infty, \tag{3}$$

$$u(x,0) = \varphi_2(x), \quad -\infty < x \le 0, \tag{4}$$

$$u_y(x,0) = \psi(x), \quad -\infty < x < 0, \tag{5}$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \psi$ -заданные функции; $\varphi_1, \varphi_2 \in C^2, \psi \in C^1$.

Теорема 1. Если $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in C^2, \psi(x) \in C^1$**,** и

$$\begin{cases} \varphi_1(0) = \beta(0)\varphi_2(0) + \gamma(0) \\ \varphi_1'(0) = \beta(0)\varphi_2'(0) + \delta(0)\varphi_2(0) + \xi(0) \end{cases}$$

то в области D существует единственное решение задачи Коши.

Однозначная разрешимость поставленной задачи доказивается с помошью теории интегральних уравнений[2].

Литература

1.Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажонов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Т.: ФАН. 1986. - 220 с.

2.Islomov B, Baltaeva UI. Boundary value problems for a third-order loaded parabolic-hyperbolic equation with variable coefficients. *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2015, No.221 (2015):1-10.

УПРАВЛЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ РАБОЧЕГО ОРГАНА МАНИПУЛЯТОРА

[1]Буранов Ж.И., [2]Хусанов Д.Х., [3]Бердияров А.Ш.

[1,2]Академический лицей имени И.Каримова ТГТУ

[3]Джизакский политехнический институт

1. Постановка задачи.

Рассмотрим модель рабочего органа манипулятора в виде симметричного тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой – точкой O, положение которого в инерциальной системе координат будем определять углами Эйлера — углами нутации, собственного вращения и прецессии ϑ, ϕ, ψ. Предполагается, что центр тяжести тела находится на одной из его главных осей инерции — оси симметрии Oz. Обозначим через $A = B$, C — главные моменты инерции, m — масса, ζ — координата центра тяжести тела, g — постоянная силы тяжести.

Функция Лагранжа в задаче имеет вид

$$L = \frac{1}{2}\left[A\left(\dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2\right) + C\left(\dot{\psi}\cos\vartheta + \varphi^2\right)^2 \right] - mg\zeta\cos\vartheta.$$

Эта функция не зависит явно от углов φ и ψ, которые, следовательно, являются циклическими координатами [2, 3].

Введем циклические импульсы [4, 5]

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \dot{\psi}\left(A\sin^2\vartheta + C\cos^2\vartheta\right) + C\dot{\phi}\cos\vartheta,\ \ p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = C\left(\dot{\psi}\cos\vartheta + \dot{\varphi}\right) \qquad (1)$$

Находим соответствующую функцию Рауса

$$R = L - p_1\dot{\psi} - p_2\dot{\varphi} = \frac{1}{2}A\dot{\vartheta}^2 - \frac{\left(p_1 - p_2\cos\vartheta\right)^2}{A\sin^2\vartheta} - mg\zeta\cos\vartheta.$$

Составим уравнения управляемого движения в переменных Рауса [2, 5]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial R}{\partial \vartheta} = Q_1 + U_1,\ \ \frac{dp_1}{dt} = Q_2 + U_2,\ \ \frac{dp_2}{dt} = Q_3 + U_3 \qquad (2)$$

где Q_1, Q_2, Q_3 — внешние активные моменты, U_1, U_2, U_3 — управляющие моменты.

Первое уравнение системы (2) записывается в виде

$$\ddot{\vartheta} = \frac{mg\zeta}{A}\sin\vartheta + F\left(p_1, p_2, \vartheta\right) + Q_1 + U_1,$$
$$F = \frac{\left(-p_1 + p_2\cos\vartheta\right)\left(p_2 - p_1\cos\vartheta\right)}{A^2\sin^3\vartheta}. \qquad (3)$$

Пусть $\left(\vartheta^{(0)}(t), \dot{\varphi}^{(0)}(t), \dot{\psi}^{(0)}(t)\right)$ — заданное программное движение твердого тела, которому согласно (1) в переменных Рауса соответствует движение $\left(\vartheta^{(0)}(t), p_1^{(0)}(t), p_2^{(0)}(t)\right)$, обеспечиваемое управляющими моментами $U_1^{(0)}(t), U_2^{(0)}(t), U_3^{(0)}(t)$ согласно уравнениям (2) при $Q_1 = Q_1^{(0)}(t), Q_1 = Q_2^{(0)}(t), Q_1 = Q_3^{(0)}(t)$.

Рассматривается задача о стабилизации движения $\left(\vartheta^{(0)}(t), p_1^{(0)}(t), p_2^{(0)}(t)\right)$ по переменным $\left(\dot{\vartheta}, \vartheta\right)$ посредством построения стабилизирующих моментов

$$U_1^{(1)} = U_1 - U_1^{(0)}(t),\ U_2^{(1)} = U_2 - U_2^{(0)}(t),\ U_3^{(1)} = U_3 - U_3^{(0)}(t).$$

2. Решение задачи.

Введем возмущения

$$x=\vartheta-\vartheta^{(0)}(t),\ y_1=p_1-p_1^{(0)}(t),\ y_2=p_2-p_2^{(0)}(t).$$

Положим, что возмущающий момент Q_1 имеет представление:

$$Q_1=Q_1^{(0)}(t)+f_1(t,x,\dot{x},y_1,y_2)+g_1(t,x,y_1,y_2)$$

где $g_1(t,0,y_1,y_2)\equiv 0$.

Стабилизирующий момент выберем в виде:

$$U_1^{(1)}=f_2(t,x,\dot{x})\dot{x}+g_2(t,x)\equiv 0$$

где $g_2(t,0)\equiv 0$.

Уравнения возмущенного движения будут иметь вид

$$\frac{dy_1}{dt}=Q^{(1)}+U^{(1)},\ \frac{dy_2}{dt}=Q^{(2)}+U^{(2)},\qquad (4)$$

$$\ddot{x}+f(t,x,\dot{x},y_1,y_2)+g(t,x,y_1,y_2)=0$$

где $f=f_1+f_2,\ g=g_1+g_2+g_3$, функция g_3 задана следующим образом:

$$g_3=\frac{mg\zeta}{A}\left(\sin\left(\vartheta^{(0)}(t)+x\right)-\sin\left(\vartheta^{(0)}(t)\right)\right)+F\left(p_1^{(0)}+y_1,p_2^{(0)}+y_2,\vartheta^{(0)}(t)+x\right)-F\left(p_1^{(0)}(t),p_2^{(0)}(t),\vartheta^{(0)}(t)\right).$$

Результаты работ [6,7] позволяют найти условия асимптотической устойчивости системы (4) по переменным x и $\dot{x}$, и, соответственно, решение поставленной задачи.

3. Результаты численного моделирования

Проведем численное моделирование программного движения рабочего органа манипулятора вида

$$\vartheta=\vartheta^{(0)}(t)=0{,}5\sin t,\ p_1=p_2=p_1^{(0)}=p_2^{(0)}=1$$

при значениях $A=1\,кг\cdot м^2,\ mg\zeta=0{,}25кг\cdot\frac{м^2}{c^2},\ p_1^0=p_2^0=1кг\cdot\frac{м^2}{c^2}$.

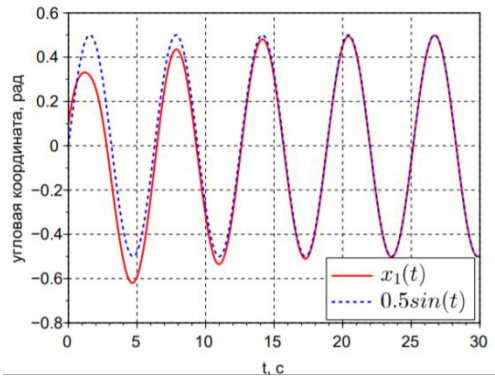


Рисунок 1. Угловая координата.

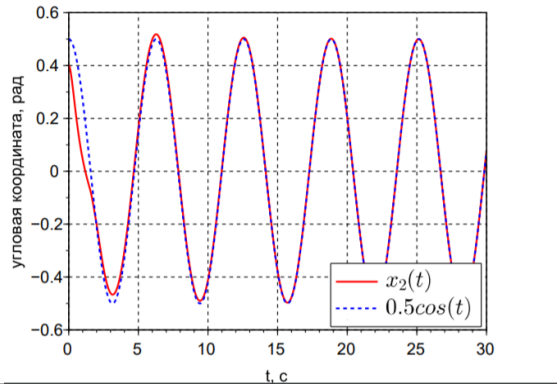


Рисунок 2. Угловая скорость.

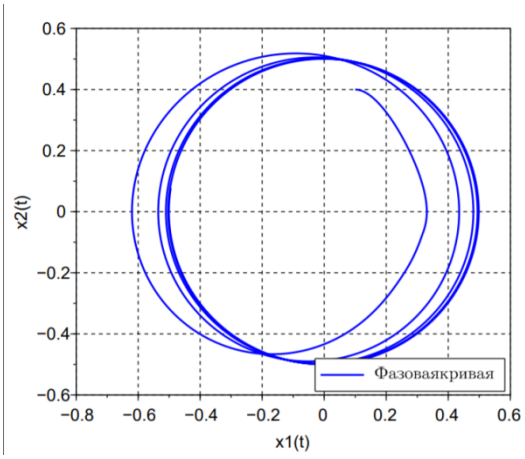


Рисунок 3. Фазовый портрет.

На рис. 1-3 показан процесс стабилизации заданного программного движения рабочего органа манипулятора по углу нутации ϑ и угловой скорости $\dot{\vartheta}$ при начальных возмущениях

$$\vartheta(0) = 0{,}1\,рад,\ \dot{\vartheta}(0) = 0{,}4\,\frac{рад}{с}.$$

Заключение. В работе решена задача об управлении рабочим органом манипулятора. Рабочий орган представлен симметричным твердым телом с неподвижной точкой. Решение задачи достигнуто на основе известных и новых теоретических результатов по применению метода сравнения в задачах управления движением механических систем.

Литература

1. Юревич Е.И. Основы робототехники: учеб. пособие. — 4-е изд., перераб. и доп. — СПб.: БХВ-Петербург, 2018. — 304 с.
2. Routh E.J. A Treatise on the Stability of a Given State of Motion. — London: MacMillan and Co., 1877.
3. Румянцев В.В. Об устойчивости стационарных движений // ПММ. — 1966. Т. 30. — С. 922-923.
4. Karapetyan A.V., Rumyantsev V.V. Stability of Conservative and Dissipative System // Appl. Mech. Soviet Rviews, 1: Stability and Anal. Mech. — New York: Hemisphere, 1990. — P. 3-144.
5. Карапетян А.В. Устойчивость стационарных движений. — М.: УРСС, 1998.
6. Перегудова, О. А. Метод сравнения в задачах устойчивости и управления движениями механических систем Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2009.— 253 с.
7. KhusanovDj. X., Berdiyorov F. Sh., Buranov J. I. Comparative method in stability problems in terms of variable solutions of ordinary differential equations // Бюллетень Института математики Узбекистана. — 2020. № 4. — С. 147-155.

ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ В РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМАХ

[1]Буранов Ж.И., [2]Хусаинов Д.Я., [3]Хусанов Д.Х., [4]Шатырко А.В.
[1,3]Академический лицей имени И.Каримова ТГТУ
[2]Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко
[4]Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко

Как известно, при решении задач оптимизации динамических систем используют два подхода. Первый из них состоит в нахождении фиксированного управления (программного управления), при котором система, описываемая дифференциальными уравнениями, достигает заданного значения и минимизирует интегральный критерий качества за конечный промежуток времени. Этот метод был предложен Л.С. Понтрягиным и был перенесением общих методов оптимизации на динамические системы [1,2]. Второй метод представлял собой, по существу, не оптимальное управление, а оптимальную стабилизацию. Он состоял в нахождении функции управления в виде обратной связи, при которой нулевое решение было асимптотически устойчивым и интегральный критерий качества достигал минимального значения за бесконечный промежуток времени. Он базировался на втором методе Ляпунова и был предложен Н.Н.Красовским [3,7]. Дальнейшее развитие этого направления проводилось в работе [4,5,6,7,8]. В настоящей работе рассмотрены основные положения метода оптимальных функций Ляпунова, сформулированные в [3] применительно к системам, описываемым разностными уравнениями.

1. Задача оптимальной стабилизации для разностных систем. Рассмотрим задачу оптимальной стабилизации разностных систем. Они аналогичны положениям оптимальной стабилизации для дифференциальных систем, сформулированным в [3]. Приведем задачу оптимальной стабилизации нулевого положения равновесия $x(k) \equiv 0$ системы

$$x(k+1) = f(k, x(k), u(k)),\ x(k) \in R^n,\ u(k) \in R^m,\ k = 0,1,2,\ldots, \quad (1)$$

т.е. о построении управления, обеспечивающего наилучшее качество переходного процесса. Его можно выразить в виде условия минимизации суммы некоторого критерия качества (2) вдоль решений системы (1)

$$I[x(k), u(x(k))] = \sum_{k=0}^{\infty} \omega(k, x(k), u(k)). \quad (2)$$

Здесь $\omega(k, x, u)$ неотрицательная функция. В частности, для линейных систем функция “качества динамики системы” может иметь вид квадратичной формы

$$\omega(k, x(k), u(k)) = x(k)^T C x(k) + u(k)^T D u(k) \quad 3)$$

с положительно определенными матрицами C и D.

Теорема (об оптимальной стабилизации разностных систем). Пусть для системы разностных уравнений возмущенного движения (1) можно найти допускающую бесконечно малый высший предел положительно определенную функцию $V_0(x,k)$ и функцию $u_0(x,k)$, удовлетворяющих условиям

1) функция $\omega(x,k)=\omega(x,u_0(x,k),x)$ является положительно определенной;
2) справедливо тождество $B_\Delta[V_0(x,k),k,x,u_0(x,k)]\equiv 0$;
3) каковы бы ни были другие функции управления $u(x,k)$ справедливо неравенство $B_\Delta[V_0(x,k),k,x,u(x,k)]\geq 0$,

где

$$B_\Delta[V,k,x,u]=[V(k+1,x(k+1),k+1)-V(x(k),k)]+\omega(k,x,u(x,k)).$$

Тогда функция $u_0(x,k)$ решает задачу оптимальной стабилизации. При этом справедливо равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty}\omega(k,x(k),u_0(x(k),k))=\min_u\{\omega(k,x(k),u(x(k),k))\}=V_0(x(k_0),k_0). \qquad (4)$$

Доказательство. Пусть $u_0(x,k)$ функция управления, удовлетворяющая условиям теоремы, а $V_0(x,k)$ функция Ляпунова. Первая разность функции Ляпунова $V_0(x,k)$ в силу системы (1) имеет вид

$$\Delta V_0(x(k),k)=V_0(f(x(k),u(k+1),k+1))-V(x(k),k)=\omega(x(k),u(k),k) \quad (5)$$

и, как следует из условий теоремы, является отрицательно определенной функцией. Тогда, как следует из второй теоремы Ляпунова, нулевое решение системы будет асимптотически устойчивым. Таким образом, функция управления $u_0(x,k)$ решает задачу стабилизации.

Покажем, что она решает и задачу оптимальной стабилизации, т.е. при этом управлении интегральный критерий качества достигает минимального значения, или выполняется (4).

В силу асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия для произвольного решения $x(t)$ системы (1) будет выполняться

$$\lim_{k\to+\infty}V_0(x(k),k)=0.$$

Суммируя равенства (5) вдоль решения $x(k)$, получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\omega(k,x(k),u_0(x(k),k))=-\lim_{k\to+\infty}V_0(x(k),k)+V_0(x(k_0),k_0)=V_0(x(k_0),k_0).$$

Теорема доказана.

2. Оптимальная стабилизация линейных систем.

Рассмотрим применение метода оптимальной стабилизации к линейным стационарным разностным уравнениям.

2.1. Рассмотрим скалярное уравнение

$$x(k+1)=ax(k)+bu(x(k)),\ |a|<1,\ k=0,1,2,....$$

Пусть $|a|<1$. В дальнейшем покажем, что это ограничение можно обойти. Требуется найти управление $u(x)$, при котором нулевое положение равновесия уравнения асимптотически устойчиво и критерий качества

$$I[x(k),u(x(k))]=\sum_{k=0}^{\infty}\{cx^2(k)+du^2(x(k))\},\ c>0,\ d>0$$

достигает минимального значения. Решение задачи ищется методом функций Ляпунова. Функция берется в виде $V(x)=hx^2$. Ее первая разность имеет вид

$$\Delta V(x(t))=V(x(k+1))-V(x(k))=hx^2(k+1)-hx^2(k)=h[ax(k)+bu(x(k))]^2-hx^2(k)$$

.

Или

$$\Delta V(x(t))=h(a^2-1)x^2(k)+h[2abx(k)u(x(k))+b^2u^2(x(k))].$$

Приравнивая правые части, получаем

$$-h(1-a^2)x^2(k)+h[2abx(k)u(x(k))+b^2u^2(x(k))]=-cx^2(k)-du^2(x(k)).$$

Отсюда

$$-h(1-a^2)x^2(k)=-cx^2(k),\ h[2abx(k)u(x(k))+b^2u^2(x(k))]=-du^2(x(k)).$$

Из первого равенства получаем $h=c/(1-a^2)$. Сократив на $u(x(k))$, перепишем второе в виде в виде

$$h[2abx(k)+b^2u(x(k))]=-du(x(k)).$$

И окончательно

$$u(x(k))=\frac{d+2ab}{b^2c}(1-a^2)x(k).$$

Таким образом, при управлении $u_0(x(k))$ с функцией Ляпунова $V_0(x)=cx^2/(1-a^2)$, $|a|<1$ уравнение будет асимптотически устойчивым, а интегральный критерий будет достигать минимального значения, равного

$$I[x_0(k),u_0(x(k))]=cx_0^2/(1-a^2).$$

Пример 2.1. Рассмотрим уравнение

$$x(k+1)=\frac{1}{2}x(k)+2u(x(k)),\ I[x(k),u(x(k))]=\sum_{k=0}^{\infty}\{x(k)+u^2(k)\}.$$

В этом случае, $a=1/2$, $b=2$, $c=1$, $d=1$, $h=4/3$. И оптимальное управление имеет вид $u_0(x(k))=4x/3$, а критерий качества $I[x_0(t),u_0(x(t))]=11x_0^2/16$.

Рассмотрим линейную систему со скалярным управлением.

$$x(k+1)=Ax(k)+bu(x(k)),\ A\in R^{n\times n},\ b\in R^n\ x(k)\in R^n,\ u(k)\in R^1.\quad (6)$$

Требуется найти управление $u_0(x)$, при котором система (6) асимптотически устойчива и критерий качества на решениях системы

$$I[x(k),u(x(k))]=\sum_{k=0}^{\infty}\{x^T(k)Cx(k)+du^2(x(k))\}\qquad (7)$$

будет достигать минимального значения. Здесь $C \in R^{n\times n}$ симметричная, положительно определенная матрица, $d \in R^1 > 0$, H симметричная, положительно определенная матрица, являющаяся решением матричного уравнения Ляпунова

$$A^T HA - H = -C. \quad (8)$$

Имеет место следующий результат.

Теорема 2.1. Пусть матрица A линейной части системы асимптотически устойчивая (в смысле устойчивости разностных систем, т.е. $|\lambda_i(A)| < 1$, $i = 1,n$) и H решение матричного уравнения (8) с положительно определенной матрицей C, входящей в критерий качества (7). Тогда стабилизирующее управление $u_0(x)$, оптимизирующее интегральный критерий качества, имеет вид

$$u_0(x(k)) = -\frac{1}{d + b^T Hb}\left[b^T HA + \left(A^T Hb\right)^T + b^T Hbu(x(k))\right]x(k)... \quad (9)$$

Доказательство. Пусть матрица A линейной части системы асимптотически устойчивая (в смысле устойчивости разностных систем, т.е. $|\lambda_i(A)| < 1$, $i = 1,n$. Решение задачи оптимизации ищется методом функций Ляпунова. Функция берется в виде квадратичной формы $V(x) = x^T Hx$, где $H \in R^{n\times n}$ симметричная, положительно определенная матрица. Первая разность функции Ляпунова $V(x) = x^T Hx$ в силу системы (6) имеет вид

$$\Delta V(x(k)) = \left[Ax(k) + bu(x(k))\right]^T H\left[Ax(k) + bu(x(k))\right] - x^T(k)Hx(k).$$

Приравняв полученное значение выражению в сумме, получим

$$\left[Ax(k) + bu(x(k))\right]^T H\left[Ax(k) + bu(x(k))\right] - x^T(k)Hx(k) = -x^T(k)Cx(k) - du^2(x(k)).$$

Приравняв соответствующие члены, получаем две системы

$$x^T(k)\left[A^T HA - H\right]x^T(t) = -x^T(k)Cx(k),$$

$$u(x(k))b^T HAx(k) + x^T(k)A^T Hbu(x(k)) + b^T Hbu^2(x(k)) = -du^2(x(t)).$$

Из первой системы получаем, что H является решением матричного разностного уравнения Ляпунова

$$A^T HA - H = -C. \quad (10)$$

Известно, если матрица A асимптотически устойчива, то при произвольной положительно определенной матрице C разностное матричное уравнение Ляпунова (10) имеет единственное решение – положительно определенную матрицу H [6].

Рассмотрим второе выражение. Поскольку управление $u(x(k))$ скалярная величина, то сократив на нее получаем

$$\left[b^T HAx(k) + x^T(k)A^T Hb + b^T Hbu(x(k))\right]u(x(k)) = -du^2(x(k)).$$

Сократив на $u(x(k))$, получим

$$\left[b^T HAx(k) + \left(A^T Hb\right)^T x(k) + b^T Hbu(x(k))\right] = -du(x(k)).$$

Отсюда

$$\left[b^T HA + \left(A^T Hb\right)^T + b^T Hbu(x(k))\right]x(k) = -\left[d + b^T Hb\right]u(x(k)).$$

И, окончательно, оптимальное управление имеет вид

$$u_0(x(k)) = -\frac{1}{d + b^T Hb}\left[b^T HA + \left(A^T Hb\right)^T + b^T Hbu(x(k))\right]x(k).$$

Таким образом, при управлении (9) система (6) будет асимптотически устойчивой и критерий качества (7) достигает минимального значения, равного $I[x_0(t), u_0(x(t))] = x_0^T Hx_0$.

Замечание 2.1. Пусть матрица A линейной части системы не является асимптотически устойчивой (в смысле устойчивости разностных систем). Тогда управление ищем в виде

$$u(x(k)) = \frac{1}{b}\Delta Ax(k) + u_1(x(k)),$$

где матрица ΔA выбирается таким образом, чтобы преобразованная система

$$x(k+1) = Ax(k) + b\left[\frac{1}{b}\Delta Ax(k) + u_1(x(k))\right] = A_1 x(k) + bu_1(x(k)), \quad A_1 = A + \Delta A$$

была асимптотически устойчивой. Очевидно, что это сделать всегда возможно.

Поскольку матрица A_1 становится асимптотически устойчивой, то соответствующее матричное уравнение Ляпунова

$$A_1^T HA_1 - H = -C \tag{11}$$

имеет единственное решение. В дальнейшем процесс повторяется аналогично приведенному ранее, но уже для системы (11).

В дальнейшем рассмотрен общий случай.

Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М., Наука, 1983. – 392 с.
2. Алексев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление – М., Наука, 1979. – 432с.
3. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 530 с.
4. Онищенко С.М. Жесткая оптимальная стабилизация и наблюдение нелинейных систем в условиях неопределенности, Часть 1, - Киев, Альфа Реклама, 2017 – 352 с.
5. Demchenko H., Diblik J., Khusainov D.Ya. Optimal stabilization for differential systems with delays-Malkin’s approach.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1966. – 576 с.
7. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М., Государственное издательство физико-математической литературы. – 1959. – 211 с.
8. Хусанов Дж.Х., Буранов Ж.И. Дифференциальные неравенства в задаче об асимптотической устойчивости. Доклады АН РУз, №6 2020, с.26-28.

ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ БИР ЎЛЧОВЛИ СИММЕТРИК Т-ГИПЕРБОЛИК СИСТЕМАЛАРНИ ЧЕКЛИ ЭЛЕМЕНТЛАР УСУЛИ БИЛАН НОТЕКИС ТЎРДА ЕЧИШ.

Давлатов Ш.О.
Қарши мухандислик-иқтисодиёт институти

Аралаш масаланинг қўйилиши[1]:

$\Omega=(\ell_1,\ell_2)\subset\mathbb{R}$ бўлсин. $G=\{(t,x): t\in(0,T),\ x\in\Omega\}$ соҳада

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+B\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}+Cu(t,x)=F(t,x) \qquad (1)$$

симметрик t-гиперболик системани

$$\begin{aligned} R_1u(t,\ell_1)&=g_1(t),\\ R_2u(t,\ell_2)&=g_2(t) \end{aligned} \qquad (2)$$

чегаравий ва

$$u(0,x)=\psi(x),\ \ x\in\Omega \qquad (3)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи u вектор-функцияни топиш талаб қилинган бўлсин.

Бу ерда A,B - $M\times M$ ўлчамли симметрик ҳақиқий ўзгармас матрицалар; бундан ташқари A мусбат аниқланган матрица; C - $M\times M$ ўлчамли ҳақиқий ўзгармас матрица; R_1,R_2-мос тўғрибурчакли ўзгармас матрицалар бўлиб, уларнинг устунлар сони M га, сатрлари сони мос равишда $A^{-1}B$ матрицанинг мусбат ва манфий хос қийматлари сонига тенг; g_1,g_2- берилган вектор-функциялар бўлиб, уларнинг ўлчамлари мос равишда $A^{-1}B$ матрицанинг мусбат ва манфий хос қийматлари сонига тенг; $\psi(x)-$берилган ўлчами M га тенг бўлган вектор-функция; $u(t,x)=(u_1,u_2,...,u_M)^T$ -ноъмалум вектор-функция; $F(t,x)=(f_1,f_2,...,f_M)^T$ -берилган вектор-функция.

$[0,T]$ кесмани N_t бўлакка бўламиз.

$$t_n=\tau\cdot n,(n=0,\dots,N_t),\tau=\frac{T}{N_t}.$$

$[\ell_1,\ell_2]$ кесмани N_x та тенг бўлакка бўлиб ($x_i=\ell_1+hi,\ i=0,...,N_x,\ h=\frac{\ell_2-\ell_1}{N_x}$), аралаш масаланинг вақт бўйича ҳар бир t_n қатламдаги, $u_h(t_n,x)$ тақрибий ечимини $u_h^n=u_h(t_n,x)=\sum_{i=0}^{N_x}u_i^n\phi_i(x)$ кўринишда излаймиз. Бу ерда $\phi_i(x)$ базис функция x_i тугунда унинг қиймати 1 га тенг, қолган тугунларда эса унинг қиймати 0 га тенг, $u_i^n=u(t_n,x_i)=(u_{1i}^n,u_{2i}^n,...,u_{Mi}^n)^T$ вектор. (1) системада $\frac{\partial u}{\partial t}$ ни

$\frac{u(t+\tau,x)-u(t,x)}{\tau}$ муносабат билан алмаштирамиз, $u(t,x)$ ўрнига $u_h(t_n,x)$ қўямиз ва ҳосил бўлган системанинг ҳар бир тенгламасини $\phi_0(x)$ базис функцияга кўпайтириб $[x_0,x_1]$ кесмада, $\phi_{N_x}(x)$ базис функцияга кўпайтириб $[x_{N_x-1},x_{N_x}]$ кесмада ва $\phi_i(x)$ базис-функцияларга кўпайтириб $[x_{i-1},x_{i+1}]$, $i=1,...,N_x-1$ кесмаларда интеграллаймиз.

Базис функциялар сифатида[2]

$$\phi_i(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{h_i}, & x\in(x_{i-1},x_i);\\ \dfrac{x_{i+1}-x}{h_{i+1}}, & x\in(x_i,x_{i+1}); \qquad i=1,...,N_x\text{-}1\\ 0, & x\notin(x_{i-1},x_{i+1});\end{cases}$$

$$\phi_0(x)=\begin{cases}\dfrac{x_1-x}{h_1}, & x\in(x_0,x_1);\\ 0, & x\notin(x_0,x_1);\end{cases} \qquad \phi_{Nx}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{Nx-1}}{h_{Nx}}, & x\in(x_{Nx-1},x_{Nx});\\ 0, & x\notin(x_{Nx-1},x_{Nx})\end{cases}$$

функция олинса (1) система учун

$$h_1(\frac{1}{6}u_1^{n+1}+\frac{1}{3}u_0^{n+1})+\frac{1}{2}\tau B(u_1^{n+1}-u_0^{n+1})+\tau Ch_1(\frac{1}{6}u_1^{n+1}+\frac{1}{3}u_0^{n+1})=$$
$$=\frac{1}{2}\tau h_1F_0^{n+1}+h_1(\frac{1}{6}u_1^n+\frac{1}{3}u_0^n) \tag{4}$$

$$h_{N_x}(\frac{1}{6}u_{N_x-1}^{n+1}+\frac{1}{3}u_{N_x}^{n+1})+\frac{1}{2}\tau B(u_{N_x}^{n+1}-u_{N_x-1}^{n+1})+\tau Ch_{N_x}(\frac{1}{6}u_{N_x-1}^{n+1}+\frac{1}{3}u_{N_x}^{n+1})=$$
$$=\frac{1}{2}\tau h_{N_x}F_{N_x}^{n+1}+h_{N_x}(\frac{1}{6}u_{N_x-1}^n+\frac{1}{3}u_{N_x}^n) \tag{5}$$

$$L_iU_i^{n+1}+\tau B\xi u_i^{n+1}+\tau CL_iu_i^{n+1}=\tau\frac{h_i+h_{i+1}}{2}\cdot F_i^{n+1}+AL_iu_i^n \tag{6}$$
$$i=1,...N_x-1$$

айирмали схема ҳосил бўлади. Бу ерда $u_i^n=u(t_n,x_i)$, $F_i^n=F(t_n,x_i)$, $i=0,...N_x$ вектор-функцияларнинг аппроксимацияси ва қуйидаги операторлар киритилган:

$$\psi^{\pm1}u_i^n=u_{i\pm1}^n,\ L_i=\frac{h_i}{6}\psi^{-1}+\frac{1}{3}(h_i+h_{i+1})+\frac{h_{i+1}}{6}\psi^{+1},\ \xi=\frac{\psi^{+1}-\psi^{-1}}{2}$$

Чегаравий ва бошланғич шартларни қуйидагича аппроксимация қиламиз:

$$x=\ell_1 \text{ да } R_1u_0(t_{n+1})=g_1(t_{n+1}), \tag{7}$$

$x=\ell_2$ да $R_2 u_{N_x}(t_{n+1})=g_2(t_{n+1}),$ (8)

$u_i(0)=\psi(x_i) \quad i=\overline{0,N_x}$. (9)

Аралаш масаланинг $t_n,(n=1,2,...)$ қатламгача тақрибий ечими топилган деб, t_{n+1} қатламдаги тақрибий ечимини топиш учун $u_i^{n+1},\ (i=0,...,N_x)$ векторларнинг компоненталарига нисбатан (6)-(9) чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Чизиқли тенгламалар системаси ёпиқ бўлиши учун $x=\ell_1$ да $u(t,x)$ вектор-функциянинг чегаравий шарт қўйилмаган компоненталари учун (4) айирмали тенгламалар системасидан уларга мос келувчи тенгламаларни оламиз. $x=\ell_2$ да эса $u(t,x)$ вектор-функциянинг чегаравий шарт қўйилмаган компоненталари учун (5) айирмали тенгламалар системасидан уларга мос келувчи тенгламаларни оламиз. Шундай қилиб ёпиқ чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу чизиқли тенгламалар системаси бош элементлар усули билан ечилган.

Нотекис тўр қуйидагича ҳосил қилинади. $[\ell_1,\ell_2]$ кесмани N_x та тенг бўлакка бўлиб ($x_i=\ell_1+hi,\ i=0,...,N_x, h=\frac{\ell_2-\ell_1}{N_x}$) бошланғич тўр ҳосил қилинади.Тенг ўлчамли тўрда (1)-(3) масаланинг сонли ечими топилади. Масала ечими топилгандан сўнг, агар i ва $i+1\,(i=0,...,N_x-1)$ тугунлардаги $u_h(t_n,x)$ вектор-функциянинг камида битта компонентаси қийматларининг абсолют фарқи, берилган $\delta>0$ сондан катта бўлса, ушбу тугунлар ўртасига янги тугун қўйилади. Ҳосил бўлган нотекис тўрда (1)-(3) масала қайта ечилиб, сонли ечими топилади. (1)-(3) масалани қайта ечиш $\left|u_{ki+1}-u_{ki}\right|\le\delta$, $(i=0,...,N_x-1;k=1,...,M)$ тенгсизликлар бажарилмагунча такрорланади.

(1)–(3) аралаш масаланинг ЧЭУ билан олинган айирмали схема қуйидаги шартлар

$$(Bu,u)\big|_{x=\ell_2}-(Bu,u)\big|_{x=\ell_1}\ge 0, \tag{10}$$

$$C+C^T\ge 0 \tag{11}$$

бажарилганда турғун эканлиги исботланган[3].

Ушбу схемалар асосида, Delphi-7 дастурлаш тилида, схема турғунлигининг етарли шартлари бўлган (10) ва (11) шартларни текшириб шартлар бажарилмаган ҳолатда бажарилмаганлиги ҳақида маълумот берадиган ва (1)-(3) масалани сонли ечадиган ва графигини чизадиган дастур яратилган.

Яратилган дастурдан фойдаланиб қуйидаги масаланинг сонли ечими топилиб, аниқ ечими билан солиштирилган.

$\Omega=\{x:0<x<2\pi\}$ бўлсин. $G=\{(t,x):t\in(0,T),\ x\in\Omega\}$ соҳада тўлқин тенгламаси

$$w_{tt}+\beta w_t-w_{xx}=\varphi,\beta\ge 0$$

$t=0$ да w, w_t берилган

$\partial\Omega$ да $w=0.$

$u_1=w_x, u_2=w_t$ белгилашлар киритиб қуйидаги системани оламиз

$$u_t+\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}u_x+\begin{pmatrix}0&0\\0&\beta\end{pmatrix}u=\begin{pmatrix}0\\\varphi\end{pmatrix}.$$

Агар $\beta=1$ ва $\varphi=\sqrt{2}\sin x\cos\sqrt{2}t-\sin x\sin\sqrt{2}t$ бўлиб $t=0$ да

$$u_1=0, u_2=\sqrt{2}\sin x,$$

$x=0$ ва $x=2\pi$ да чегаравий шарт $u_2=0$ бўлса, $t>0$ учун бундай аралаш масаланинг аниқ ечими

$$u_1=\cos x\sin\sqrt{2}t, u_2=\sqrt{2}\sin x\cos\sqrt{2}t$$

бўлади.

Схема турғунлигининг етарли шартлари бўлган (10) ва (11) шартларни текширамиз. Бунда

$$B=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}.$$

1-шарт $(Bu,u)\big|_{x=\ell_2}-(Bu,u)\big|_{x=\ell_1}\ge 0,$

$$\left(\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\right)\Big|_{x=\ell_2}-\left(\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\right)\Big|_{x=\ell_1}=$$

$$=\left(\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_1\\0\end{pmatrix}\right)-\left(\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_1\\0\end{pmatrix}\right)=0.$$

2-шарт $C+C^T\ge 0,$

$$\left((C+C^T)\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\right)=$$

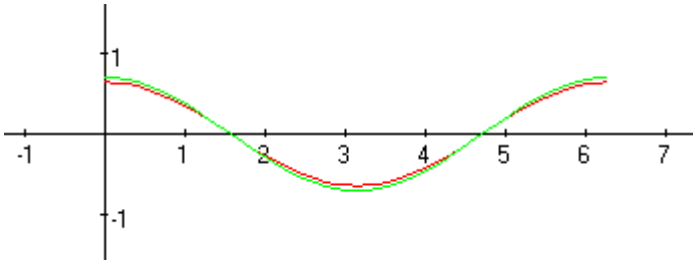
$$=\begin{pmatrix}0\\2u_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=2u_2^2\ge 0.$$

Турғунлик шартлари бажарилаяпти.

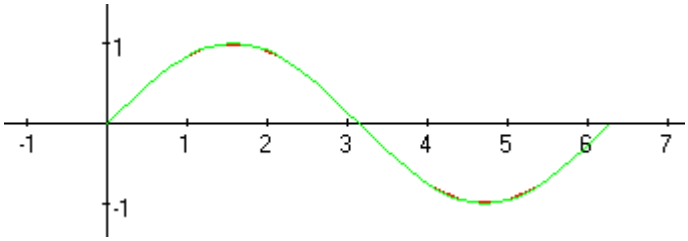
Пастдаги жадвалда $\|u\|_\Omega=\sqrt{\int_\Omega u\cdot u dx}$ нормада, нотекис тўрда, x бўйича бошланғич бўлаклар сони $N_x=3,$ ён тугунлардаги ечимлар фарқининг модули $\delta=0,2$ дан кичик ва вақт бўйича бўлаклар сони N_t ҳар хил бўлганда,тугунлар сонининг ўзгариши ва $T=15$ даги аниқ ечим билан чекли элементлар усули орқали олинган ечим фарқи $\|u-v\|_\Omega$ қандай бўлгани келтирилган. Бу ерда $v=(v_1,v_2)^T$ чекли элементлар усули орқали олинган ечим.

N_t	N_x	$\|u-v\|$
200	37	0.2064476
250	37	0.1642117
300	37	0.1356019
600	37	0.0629222
1200	37	0.0278499
2400	37	0.0160331

1 ва 2-расмларда тақрибий ечим графиги қизил рангда, аниқ ечим графиги эса яшил рангда тасвирланган.



1-расм. v_1 ва u_1 ечим графиклари $T=15$, $N_t=600$, $N_x=37$.



2-расм. v_2 ва u_2 ечим графиклари $T=15$, $N_t=600$, $N_x=37$.

Адабиётлар

1. С. К. Годунов Уравнения математической физики. М.:Наука,1979,372с.
2. L.J. Segerlind, Applied Finite Element Analysis, John Wiley and Sons, Inc., 1976, p. 308.
3. Р.Д. Алоев, Ш.О.Давлатов. Устойчивость схемы конечных элементов для одномерной симметрической гиперболической системы с переменными коэффициентами на равномерной сетке. Математический журнал Узбекистана,2014, вып.3,стр.28-35.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ТРЁХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТРИКОМИ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПРИЗМАТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Джамалов С.З., Ашуров Р.Р., Туракулов Х.Ш.
Институт Математики АН. Р.Уз,
siroj63@mail.ru, ashurovr@gmail.com,
hamidullo20181987@gmail.com

Как известно, в работе А.В.Бицадзе показано, что задача Дирихле для уравнения смешанного типа некорректна [1]. Естественно возникает вопрос: нельзя ли заменить условия задачи Дирихле другими условиями, охватывающими всю границу, которые обеспечивают корректность задачи? Впервые такие краевые задачи (нелокальные краевые задачи) для уравнения смешанного типа были предложены и изучены в работе Ф.И.Франкля при решении газодинамической задачи об обтекании профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения [2]. Близкие по постановке к изучаемым, задачи для уравнения смешанного типа первого рода исследована в ограниченных областях в работах [3]-[7].

В данной работе с использованием результатов работ [6],[7] изучаются однозначная разрешимость обобщенного решения одной нелокальной краевой задачи для трехмерного уравнения Трикоми в призматической неограниченной области. В области

$$Q=(-\alpha,\beta)\times(0,T)\times\mathbb{R}=Q_1\times\mathbb{R}=$$
$$=\{(x,t,z);x\in(-\alpha,\beta),0<t<T<+\infty,z\in\mathbb{R}.\},$$

где $0<\alpha<\beta<+\infty,$ рассмотрим уравнения Трикоми:

$$Lu=xu_{tt}-\Delta u+a(x,t)u_t+c(x,t)u=f(x,t,z), \tag{1}$$

где $-\alpha<x<\beta,\ \Delta u=u_{xx}+u_{zz}$-оператор Лапласа.

Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в Q.

Нелокальная краевая задача.

Найти решение $u(x,t,z)$ уравнения (1) из пространства $W_2^{2,3}(Q)$, удовлетворяющее следующим нелокальным краевым условиям

$$\gamma D_t^p u\big|_{t=0}=D_t^p u\big|_{t=T}, \tag{2}$$

$$D_x^p u\Big|_{x=-\alpha}=D_x^p u\big|_{x=\beta}, \tag{3}$$

при $p = 0,1$, где $D^{p}_{z}u = \frac{\partial^{p} u}{\partial z^{p}}$, $D^{0}_{z}u = u$, γ – некоторые постоянные числа, отличные от нуля, величины которых будет уточнена ниже.

Определение. Обобщённым решением задачи (1)-(3) будем называть функцию $u(x,t,z) \in W_2^{2,3}(Q)$, удовлетворяющее почти всюду уравнению (1) с условиями (2)-(3).

Теорема. Пусть выполнены следующее условия для коэффициентов уравнения (1); $2a(x,t) + \mu K(x) > \delta_1 > 0$, $\mu\, c(x,t) - c_t(x,t) > \delta_2 > 0$, для всех $(x,t) \in \overline{Q_1}$, где $\mu = \frac{2}{T}\ln|\gamma| > 0$ при $|\gamma| > 1$, $a(x,0) = a(x,T)$, $c(x,0) = c(x,T)$.

Тогда для любой функции $f \in W_2^{1,3}(Q)$, такой, что $\gamma \cdot f(x,0,z) = f(x,T,z)$, существует единственное обобщенное решение задачи (1)-(3) из пространства $W_2^{2,3}(Q)$, и для решения задачи (1)-(3) справедливы следующие оценки:

$$\|u\|^2_{W_2^{1,3}(Q)} \le c_1 \|f\|^2_{W_2^{0,3}(Q)}, \qquad \|u\|^2_{W_2^{2,3}(Q)} \le c_2 \|f\|^2_{W_2^{1,3}(Q)}$$

где $c_i -$ положительные, вообще говоря, разные постоянные числа, отличные от нуля.

Здесь через $W_2^{l,s}(Q)$, обозначено гильбертово пространство с нормой

$$\|u\|^2_{W_2^{l,s}(Q)} = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|\lambda|^2)^s \cdot \|\hat{u}\|^2_{W_2^{l}(Q_1)}\, d\lambda,$$

где $W_2^{l}(Q_1) -$ пространство Соболева, с нормой $\|\vartheta\|^2_{W_2^{l}(Q_1)} = \sum_{|\alpha| \le l} \int_{Q_1} \left|D^{\alpha}\vartheta\right|^2 dxdt$, $\alpha -$ это мультииндекс, $D^{\alpha} -$ есть обобщённая производная по переменным x и t, а через $\hat{u}(x,t,\lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t,y) e^{-i\lambda y} dy$ обозначено преобразование Фурье по переменным z, функции $u(x,t,z)$.

Литература

1.Бицадзе А.В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа // ДАН СССР,1953, Т.122, №2, с.167-170.

2.Франкль.Ф.И. Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения. // Прикладная математика и механика. 1956, т.20, №2, С.196-202.

3.Кальменов Т.Ш. О полупериодической задаче для многомерного уравнения смешанного типа// Дифференциальные уравнения. 1978.т.14, №3, с546-548.

4.Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области. // Док. РАН.2007. Т.413. №1, с.23-26.

5.Цыбиков.Б.Н. О корректности периодической задачи для многомерного уравнения смешанного типа. // В. кн.: Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск,1986, с.201-206
6. Джамалов.С.З. Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными коэффициентами для многомерного уравнения смешанного типа первого рода //Вестник Самарского государственного технического университета, Сер. физ.-мат. науки, 2017,т.21, №4, С.1-14.
7.Джамалов С.З., Ашуров Р.Р. О гладкости одной нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения Чаплыгина в пространстве. // Казахский математический журнал. -2018г, Т18, №2, С.59-70.

О ВНУТРЕННИХ ОЦЕНКАХ А.Ф. ФИЛИППОВА

Жайнакова У.Т., Темуров С.Й.
ДжГПИ

Мы рассмотрим вопрос о том, когда решения задачи Коши или какой-либо начально-краевой задачи для квазилинейных уравнений параболического типа неразрешимы в «целом».

При исследовании краевых задач с частными производными рассматривается вопросы о существовании решении о числе решений, об отсутствии решения, о разрушении решения, о бифуркации (ветвлении) решения, в случае неограниченных областей. Такое исследование может быть локальным и глобальным. Локальная теория относительно полно развита для общих нелинейных задач для уравнений второго порядка различных типов. Это теория основана на теореме о неявной функции из нелинейного функционального анализа и общей теории линейных задач соответствующего типа. В случае краевых задач для нелинейных параболических уравнений это локальная теория позволяет установить разрешимость задачи либо на достаточно малый временной промежуток, либо на фиксированном временном промежутке при условии достаточно малого отклонении от данных задачи и от данных известного решения близкой задачи (как правило нулевого решения).

Рассмотрим квазилинейное уравнение с одной пространственной переменной

$$u_t - a_{11}(x,t,u,u_x)u_{xx} + a(x,t,u,u_x) = 0 \qquad (1)$$

в области $Q_t = (-\ell,\ell)\times(O,T)$, хотя излагаемые методы без существенных изменений применимы и к областям вида $\{(x,t):\varphi_1(t) \le x \le \varphi_2(t)\}$ с $\varphi_i'(t) \ne \infty$, где $a_{11}(x,t,u,p)$, $a(x,t,u,p)$ - непрерывные функции. Какие возможны обобщения для предложений в отношении допущения разных особенностей у функций $a_{11}(x,t,u,p)$ и $a(x,t,u,p)$ а также решений $u(x,t)$.

Уравнения (1) при гладкой функции $a_{11}(x,t,u,p)$ могут быт приведены к виду уравнения с дивергентной главной частью,

$$u_t - \frac{d}{dx}a_1(x,t,u,u_x) + b(x,t,u,u_x) = 0, \tag{2}$$

где $a_{11}(x,t,u,p) = \int_0^p a_{11}(x,t,u,\tau)d\tau$,

$$b(x,t,u,p) = a(x,t,u,p) + \frac{\partial a_1(x,t,u,p)}{\partial u}p + \frac{\partial a_1(x,t,u,p)}{\partial x}.$$

В виду этого к уравнениям (1) применимы теоремы, доказанные в [3], [4]. Для $u(x,t)$ можно оценить $|u_x|^{(\alpha)}_{Q_T}$ по всей области Q_T без предварительной оценки $\max|u_t|$ и тем самым без предположений о дифференцируемости функции, образующих уравнение [1], [2], [4].

Об оценках А.Ф. Филиппова во внутренних точках [5].

Лемма. При выполнении предположений $(x,t) \in Q_T$, $|u| \le M$ и произвольных ρ функции $a_{11}(x,t,u,\rho)$ и $a(x,t,u,\rho)$ трижды непрерывно дифференцируемы по x,t,u,ρ и $a_{11}(x,t,u,\rho) \ge \nu, \nu = const > 0$, и функция $q(x,t,u,\rho) = \dfrac{a(x,t,u,\rho)}{a_{11}(x,t,u,\rho)}$ подчиняется неравенствам

$$|q(x,t,u,\rho)| + \left|\frac{\partial q(x,t,u,\rho)}{\partial t}\right| + \left|\frac{\partial q(x,t,u,\rho)}{\partial u}\right| + (1+|\rho|)\left|\frac{\partial q(x,t,u,\rho)}{\partial \rho}\right| \le \mu(1+|\rho|)^2, \tag{3}$$

$$\left|\frac{\partial q(x,t,u,\rho)}{\partial x}\right| \le [\varepsilon + P(\rho)](1+|\rho|)^3, \tag{4}$$

ε - положительное число, и $\nu(1+|\rho|)^{m-2} \le a_{11}(x,t,u,\rho) \le \mu(1+|\rho|)^{m-2}$, $\nu > 0$.

$\max\limits_{Q_T}|u_x|$ оценивается сверху постоянной зависящей лишь от $\nu, \mu, \varepsilon, P(\rho)$ и $\max\limits_{\Gamma_T}|u_x|$.

Доказательство. Введем вспомогательную функцию с помощью равенства

$$\omega(x,t) = \varphi(x,t,u,(x,t),u_x(x,t)), \tag{5}$$

где φ - есть дважды непрерывно дифференцируемая функциях своих аргументов в области $\{(x,t,u,\rho) : (x,t) \in \overline{Q_T}, |u| \le M, -\infty < \rho < \infty\}$, строго монотонно возрастающая по ρ, стремящая к $+\infty$ при $\rho \to \infty$ и к $-\infty$ при $\rho \to -\infty$.

Предположим, что $q(x,t,u,\rho)$ не зависят от x. Тогда $\varphi = \varphi(t,u,\rho)$. Из (5)

$$\omega_x = \varphi_u u_x + \varphi_\rho u_{xx} \tag{6}$$

$$\omega_t = \varphi_t + \varphi_u u_t + \varphi_\rho u_{xt} \tag{7}$$

Из (6) и уравнения (5) следует

$$u_t = \frac{a_{11}}{\varphi_\rho}(\omega_x - \varphi_u u_x - \varphi_\rho q) \tag{8}$$

а отсюда из (7)

$$\omega_t = \varphi_t + \frac{\varphi_u a_{11}}{\varphi_\rho}\left[\omega_x - (\varphi_u u_x + \varphi_\rho q\right] + \varphi_\rho \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{a_{11}}{\varphi_\rho}\omega_x - \frac{a_{11}}{\varphi_\rho}\left(\varphi_u u_x + \varphi_\rho q\right)\right] \quad (9)$$

Потребуем, чтобы при больших $|\rho|$ функция удовлетворялся уравнению

$$\varphi_u(t,u,\rho)\rho + \varphi_\rho(t,u,\rho)q(t,u,\rho) = 0\,. \quad (10)$$

Известно, что такому уравнению удовлетворяют первые интегралы обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d\rho}{du} = \frac{q(t,u,\rho)}{\rho} \quad (11)$$

где t параметр. При $\rho = 0$ правая часть уравнения (11) имеет особенность. Поэтому возьмем вместо (11) несколько иное уравнение:

$$\frac{d\rho}{du} = F(t,u,\rho)\,, \quad (12)$$

правая част которого $F(t,u,\rho)$ совпадает с $\frac{q(t,u,\rho)}{\rho}$ при $|\rho| \geq 1$ и является какой-нибуд трижды непрерывно дифференцируемой функцией своих аргументов во всей области $\{(t,u,\rho): t \in [0,T], |u| \leq M, -\infty < \rho < +\infty\}$. В качестве $\varphi(t,u,\rho)$ возьмем один из первых интегралов уравнения (12), удовлетворяющий при $t \in [0,T], |u| \leq M$ и произвольных ω неравенству

$$|\varphi(t,u,\rho(t,u,\omega))| \leq \Phi(|\omega|),\ \int_1^\infty \frac{d\tau}{\Phi(\tau)} = \infty\,, \quad (13)$$

где $\rho = \rho(t,u,\omega)$ есть решение уравнения

$$\omega = \varphi(t,u,\rho)\,. \quad (14)$$

Оценено $|u_{xx}(x,t)|$ решения.

Литература

1. Асроров Ф.А., Аззамов Т.Ж., Данілов В.Я. Експоненційна сиійкість інтеграольної множини // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки. Випуск № 3, ст. 61-65.

2. Асроров Ф.А., Аззамов Т.Ж., Данилов В.Я. Необходимые условия существования интегрального множества линейной системы с произвольной неоднородностью // Тезисы докладов Международная конференция «Восьмая Крымская Международная Математическая школа. МФЛ-2006. Метод функций Ляпунова и его применения». Крым. 2006 г. 10-17 сентября, ст. 16.

3. Аззамов Т.Ж. Об одном обобщении теоремы сравнения для квазилинейных параболических уравнений // Тези доповідей «Диференціальні рівняння та їх застосування» Міжнародна конференція, аписвячена 60-річчю кафедри інтегральних і диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка, 6-9 червня 2005 року, ст. 9. Київ.

4. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Образ результатов по разрешимости краевых задач для равномерно эллиптических и параболических квазилинейных уравнений второго порядка, имеющих неорганичные особенности. М., «Успехи математических наук», 1986, 41, №5.
5. Филиппов А.Ф. Условия существования решений квазилинейных параболических уравнений. ДАН СССР, 1961, т. 141.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С УСЛОВИЕМ БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СПЕКТРАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Жураева Ф.Б.
Каршинский государственный университет
faridajurayeva25@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$0 = Lu \equiv \begin{cases} u_{xx} - u_y - \lambda_1^2 u, & (x,y) \in D_1, \\ u_{xx} - u_{yy} - \lambda_2^2 u, & (x,y) \in D_2, \end{cases} \tag{1}$$

где $D_1 -$ область, ограниченная отрезками AB, BB_0, B_0A_0, A_0A, прямых $y=0$, $x=1$, $y=h$, $x=0$ соответственно; $D_2 -$ характеристический треугольник, ограниченный отрезком AB оси Ox и двумя характеристиками $AC: x+y=0$, $BC: x-y=1$ уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $B(1,0)$, пересекающимися в точке $C(0{,}5;-0{,}5)$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$.

Введем обозначения: $J \equiv AB = \{(x,y): 0<x<1,\ y=0\}$, $D_1 = D \bigcap \{x>0, y>0\}$,

$$D_2 = D \bigcap \{x>0, y<0\}, \quad D = D_1 \bigcup D_2 \bigcup J, \quad J_1 = \{(x,y):\ 0<x<c,\ \ y=0\},$$
$$J_2 = \{(x,y):\ c<x<1,\ \ y=0\},\ E(c,0) \in J,\ \ c \in J.$$

Через C_1 и C_2 обозначим, соответственно, точки пересечения характеристики AC и BC с характеристикой, исходящей из точки $E(c,0) \in J$,

$$\theta(x) = (x/2;\ -x/2),\ \theta^*(x) = ((x+c)/2;\ (c-x)/2), \tag{2}$$

$\theta(x)$ и $\theta^*(x)$ - точки пересечения характеристики AC и EC_2 с характеристикой, выходящей из точки $M(x,0)$, $(x,0) \in J_2$ соответственно.

Настоящая работа посвящена исследованию задачи с условиями Трикоми [1, с. 29] на характеристике AC_1, а также с условиями Бицадзе-Самарского[2] на характеристиках AC_1 и EC_2 одного семейства.

Задача A**.** Найти в области D функцию $u(x,y)$, обладающую свойствами: 1) $u(x,y)\in C(\bar{D})$; 2) $u(x,y)\in C^{2,1}_{x,y}\left(D_1\cup A_0B_0\right)\cap C^{2,2}_{x,y}\left(D_2\setminus\left\{EC_1\cup EC_2\right\}\right)$, удовлетворяет уравнению (1) в областях D_1 и $D_2\setminus\left\{EC_1\cup EC_2\right\}$;

3) $u_y\in C\left(D_1\cup J_1\cup J_2\right)\cap C\left(D_2\cup J_1\cup J_2\right)$ и на интервалах J_j $(j=1,2)$ выполняется условие склеивания

$$\lim_{y\to-0}u_y(x,y)=\lim_{y\to+0}u_y(x,y),\ (x,0)\in J_1\cup J_2, \tag{3}$$

5) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u|_{x=0}=\varphi_1(y),\quad u\Big|_{x=1}=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h, \tag{4}$$

$$u|_{AC_1}=\psi_1(x),\qquad 0\le x\le c/2, \tag{5}$$

$$u\left[\theta(x)\right]=\mu u\left[\theta^*(x)\right]+b(x),\quad (x,0)\in\bar{J}_2, \tag{6}$$

где $\psi_1(x),\ \varphi_1(y),\ \varphi_2(y),\ b(x)-$ заданные функции, причём

$$\varphi_1(0)=\psi_1(0)=0,\ \mu\in(-\infty;+\infty)\setminus\{1\},\ \psi_1\left(\frac{c}{2}\right)=b(c), \tag{7}$$

$$\varphi_1(y),\ \varphi_2(y)\in C\left[0,h\right]\cap C^1(0,h), \tag{8}$$

$$\psi_1(x)\in C^1\left[0,\frac{c}{2}\right]\cap C^3\left(0,\frac{c}{2}\right),\ b(x)\in C^1(\bar{J}_2)\cap C^3(J_2). \tag{9}$$

Насколько нам известно, что аналоги задачи Трикоми для уравнения (1) при $\lambda_j=0\,(j=1,2)$ изучены в работах [3]- [5]. Задача A для уравнения (1) ранее не были исследованы.

Теорема. Если выполнены условия (7) - (9), то в области D существует единственное регулярное решение задачи A.

Литература

1. Трикоми Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа М.-Л.: Гос. тех. издат 1947. 192 с.
2. Бицадзе А.В. К теории нелокальных краевых задач. // «ДОК. АН СССР». 1984. Т.227. № 1. С.17.
3. Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажонов. М. Краевые задачи для уравнений параболо- гиперболического типа. Т.: «Фан». 1986. 220 с.
4. Золина Л.А.О краевой задаче для модельного уравнения гиперболо-параболочиского типа. // «ЖВМ и МФ». 1966. Т. 6. № 6. С. 991-1001.
5. Бжихатлов Х.Г., Нахушев А.М. Об одной краевой задаче для уравнения

смешанного параболо-гиперболического типа.// «Доклады АН СССР». 1968. Т. 183. № 2. С. 261-264.

О РЕШЕНИЕ ТРЕТЬЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Жураев А. Х.
Наманганский инженерно-строительного институт

I. Постановка задачи

В области $D=\{(x,y):0<x,y<1\}$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{1}$$

Будим говорить, что $u(x,y)$ регулярное решение уравнения (1), если оно удовлетворяет уравнению (1) в области D и принадлежит классу $C_{x,y}^{5,2}(D)\cap C_{x,y}^{4,1}(\bar{D})$.

Задача A**.** Найти регулярное решение уравнения (1) в области D удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{cases}\alpha u(x,0)+\beta u_y(x,0)=0,\\ \gamma u(x,1)+\delta u_y(x,1)=0,\end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases}u(0,y)=\varphi_1(y),\ u_x(0,y)=\varphi_2(y),\\ u(1,y)=\varphi_3(y),\ u_x(1,y)=\varphi_4(y),\ u_{xx}(1,y)=\varphi_5(y).\end{cases} \tag{3}$$

Здесь $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ - постоянные числа, причем $\alpha^2+\beta^2\neq 0,\ \gamma^2+\delta^2\neq 0.$ Где $\varphi_i(y)\in C^4[0,1],\quad \alpha\varphi_i(0)+\beta\varphi_i'(0)=0,\ \alpha\varphi_i''(0)+\beta\varphi_i'''(0)=0,\quad \gamma\varphi_i(1)+\delta\varphi_i'(1)=0,$ $\gamma\varphi_i''(1)+\delta\varphi_i'''(1)=0,\ i=\overline{1,5}.$

Отметим, что в работе [1] исследована задача для уравнения третьего порядка. В работе [2,3] для уравнения пятого исследовано различные краевые задачи в полубесконечных областях. В работе [4,5] для уравнения пятого порядка исследовано первое и второе краевые задачи. В данной работе в квадратичной области исследуется третья краевая задача.

II. Единственность решения

Теорема.1 Если задача A имеет решение и $\alpha\beta\le 0,\ \delta\gamma\ge 0,$ то оно единственно.

Доказательство. Предположим обратное, пусть $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ являются решениями задачи A. Тогда $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ является решением однородной задачи A**.** В области D рассмотрим тождество

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xxxx}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(u_xu_{xxx}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u_{xx}^2\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(uu_y\right)-u_y^2=0$$

интегрируя это тождество по области D, имеем

$$\int_0^1 u(1,y)u_{xxxx}(1,y)dy - \int_0^1 u(0,y)u_{xxxx}(0,y)dy - \int_0^1 u_x(1,y)u_{xxx}(1,y)dy +$$
$$+\int_0^1 u_x(0,y)u_{xxx}(0,y)dy + \frac{1}{2}\int_0^1 u_{xx}^2(1,y)dy - \frac{1}{2}\int_0^1 u_{xx}^2(0,y)dy +$$
$$+\int_0^1 u(x,1)u_y(x,1)dx - \int_0^1 u(x,0)u_y(x,0)dx - \iint_D u_y^2(x,y)dxdy = 0.$$

Учитывая однородные краевые условия задачи A, требуя $\alpha \neq 0,\ \gamma \neq 0$ получим

$$\frac{1}{2}\int_0^1 u_{xx}^2(0,y)dy + \frac{\delta}{\gamma}\int_0^1 u_y^2(x,1)dx - \frac{\beta}{\alpha}\int_0^1 u_y^2(x,0)dx + \iint_D u_y^2(x,y)dxdy = 0,$$

отсюда по условия теоремы 1 $u_y(x,y) = 0$, тогда $u(x,y) = f(x)$. Учитывая условие $u(x,0) = 0$ получим, что $f(x) \equiv 0$ или $u(x,y) = 0$. В случаях $\beta \neq 0,\ \delta \neq 0;\ \alpha \neq 0, \delta \neq 0;\ \gamma \neq 0, \beta \neq 0$ аналогично получаем равенство $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}$. Теорема 1 доказана.

III. Существование решения

Решение задача будем искать методом Фурье

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \tag{4}$$

Поставляя (4) в (1), получим

$$X^{(5)} - \lambda^5 X = 0, \tag{5}$$
$$Y'' + \lambda^5 Y = 0, \tag{6}$$

из (6) и (2) будем иметь

$$\begin{cases} Y'' + \lambda^5 Y = 0, \\ \alpha Y(0) + \beta Y'(0) = 0, \\ \gamma Y(1) + \delta Y'(1) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Поступая так, как в работе [1], для нахождения собственных значений λ^5 получим трансцендентное уравнение

$$ctg\sqrt{\lambda^5} = \frac{\alpha\gamma + \delta\beta\lambda^5}{\sqrt{\lambda^5}(\gamma\beta - \alpha\delta)},$$

откуда следует, что $\sqrt{\lambda_n^5} = \pi n + \varepsilon_n$, где $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, или $\lambda_n^5 = O(n^2),\ n \to \infty$.

Соответствующие собственные функции имеют вид [1]

$$Y_n(y) = \left(\alpha \sin\sqrt{\lambda_n^5}y - \beta\sqrt{\lambda_n^5}\cos\sqrt{\lambda_n^5}y\right)A_n, \tag{8}$$

где A_n -произвольные постоянные. Решение задача A получена в виде

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(y), \tag{9}$$

где

$$X_n(x) = C_{1n}e^{\lambda_n x} + e^{\lambda_n \alpha_2 x}\left(C_{2n}\cos\lambda_n\beta_2 x + C_{3n}\sin\lambda_n\beta_2 x\right) +$$

$$+e^{-\lambda_n\alpha_1 x}\left(C_{4n}\cos\lambda_n\beta_1 x + C_5\,\mathrm{n}\sin\lambda_n\beta_1 x\right).$$

Доказан, что ряд (9) и его производные u_{xxxxx}, u_{yy} сходятся абсолютно и равномерно в области D.

Литература

1. Апаков Ю.П. Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками методом разделения переменных . Узбекский математический журнал. - Ташкент, 2007. - № 1. - С.14-23.
2. Апаков Ю. П., Жураев А. Х. Краевые задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками в бесконечной области. УзМЖ, 2009 г,№4, стр.21-28.
3. Жураев А. Х. Краевая задача для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками в неограниченной области. ДАН, 2009 г, № 6, стр.14-18.
4. Апаков Ю. П., Жураев А. Х. О разрешимости краевой задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками в конечной области. УзМЖ, 2011 г,№2, стр.40-47.
5. Апаков Ю.П., Жураев А.Х. Вторая краевая задача для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками. Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2012. Т. 14. №1. -С.22-27.

ЧЕКЛИ СТЕРЖЕНДА ИССИҚЛИК ОҚИМИНИ БОШҚАРИШ

Ибрагимов Б. Н
ЎзМУ

Қуйидаги кўринишдаги иссиқлик тарқалиш тенгламасини қараймиз:

$$\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial u_1(\mathrm{x},\mathrm{t})}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_1(\mathrm{x},\mathrm{t})}{\partial x^2},\ -l < x < 0,\ t > 0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{a_2^2}\frac{\partial u_2(\mathrm{x},\mathrm{t})}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_2(\mathrm{x},\mathrm{t})}{\partial x^2},\ 0 < x < l,\ t > 0. \tag{2}$$

Бу тенгламаларга қуйидаги чегаравий масалаларни қўямиз:

$$u_1(-l,t) = \mu(\mathrm{t}),\quad t > 0, \tag{3}$$

$$u_2(l,t) = 0,\quad t > 0, \tag{4}$$

$$u_1(0-0,t) = u_2(0+0,\mathrm{t}),\quad t > 0, \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0-0} = \left.\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0+0},\quad t > 0, \tag{6}$$

$$u_1(\mathrm{x},0)=0,\ -l<x<0,\quad u_2(\mathrm{x},0)=0,\ \ 0<x<l,\ t>0. \qquad (7)$$

Юқоридаги параболик типдаги тенгламалар, узунлиги l га тенг зичликлари, турли хил бўлган бир жинсли стерженлар бир бири билан уланган ҳолатдаги иссиқли тарқалиш жараёнини тавсифлайди. Стерженлар уланган нуқтага координата бошини жойлаштирамиз, координата ўқини эса стержень бўйлаб йўналтирамиз. Стерженнинг чап учидан иссиқлик узатиш бошқарилади, $\mu(t)$ -иссиқликни бошқариш функцияси. Стержень ташқи муҳит билан иссиқлик алмашмайди деб фараз қиламиз.

Стерженнинг ўртача температураси деб

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}u(x,t)dt=\theta(t),\quad t>0, \qquad (8)$$

катталикка айтамиз, бу ерда $u(x,t)=\begin{cases}u_1(x,t),\ -l<x<0,\\ u_2(x,t),\ 0<x<l.\end{cases}$

Бошқарув функцияси $|\mu(t)|\le \mathrm{M}$ чегаланган функция. Юқоридаги шартлардан $\theta(0)=0$ ва $\mu(0)=0$ бўлишлиги келиб чиқади.

Масала. Берилган $\theta(t)$ функция учун шундай $\mu(t)$ бошқарув функциясини топиш керакки, (3)-(7) шартларни қаноатлантирувчи берилган (1) ва (2) тенгламалар ягона ечимга эга бўлсин.

Ушбу масалани ечиш учун қуйидаги иккита алоҳида масалаларни ечамиз. Аввал $\mu(t)$ функция берилган деб ҳисоблаймиз.

Аввал биринчи $\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial u_1(\mathrm{x},\mathrm{t})}{\partial t}=\frac{\partial^2 u_1(\mathrm{x},\mathrm{t})}{\partial x^2}$ тенгламанинг қуйидаги берилган

$u_1(-l,t)=\mu(\mathrm{t}),\quad u_1(0,t)=g(\mathrm{t}),\quad u_1(\mathrm{x},0)=0,\ -l<x<0,\quad t>0.$

шартларни бажарувчи ечимини топамиз, бу ерда $g(\mathrm{t})$ функция $u_1(\mathrm{x},\mathrm{t})$ функция билан аниқланади. Кейин иккинчи $\frac{1}{a_2^2}\frac{\partial u_2(\mathrm{x},\mathrm{t})}{\partial t}=\frac{\partial^2 u_2(\mathrm{x},\mathrm{t})}{\partial x^2}$ тенгламани $u_2(l,t)=0,\ u_2(0,t)=g(t),$ ва $u_2(\mathrm{x},0)=0,\ 0<x<l,\ t>0$ шартлар билан ечимини топамиз. Сўнгра топилган ечимни (8) интегралга қўямиз, натижада берилган $\theta(t)$ га мос $\mu(t)$ функция топилади. Юқорида айтилган масалаларни ечишда ўзгарувчиларни ажратиш усули яъни Фурье усулини қўллаймиз.

Адабиётлар

1.Тихонов А.Н.,Самарский А.А. Уравнения математической физики,Наука, М., 1977.-736С.

2. Alimov Sh. On a control problem associated with the heat transfer process, Euraasian Mathematical Journal, No 2, vol.1, 2010, P.17-30.

3. Albeverio S., Alimov Sh. On a Time-Optimal Control Associated with the Heat Exshange Process, Appl Math optim. No 57, 2008, P.58-68.

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ИНТЕГРАЛА ОБОБЩЕННОГО ПЕРВОГО МЕТОДА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

Исканаджиев И.
Ташкентский химико-технологический институт
iskan1960@mail.ru

C^d (соответственно K^d) –семейство всех непустых замкнутых (компактных) подмножеств R^d, а совокупность всех непустых выпуклых замкнутых (выпуклых компактных) подмножеств R^d обозначим через coC^d (соответственно coK^d)

Рассматривается управляемая система

$$\dot{z} \in -F(t,v), \tag{1}$$

где $z \in R^d$, $t \in I = [0,\tau]$, $v \in Q$, $Q \in K^q$, $F : I \times Q \to coK^d$ - непрерывно.

Наряду с системой (1), дано множество $M, M \in coC^d$ называемое терминальным множеством.

Первыми эффективными методами решения задачи преследования были прямые методы Л.С. Понтрягина [1-2].

В [3-4] предложены модификации первого прямого метода Понтрягина, основанные на формуле $\int_0^\tau \alpha(t)Mdt = M$,

где $\alpha(\cdot) : I \to R^+$ – неотрицательная измеримая функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^\tau \alpha(t)dt = 1 \text{ и } \quad M \in coC^d .$$

Пусть $cl\Phi$ (соответственно $comp\Phi$) обозначает семейство всех измеримых замкнутозначных (соответственно компактнозначных) отображений $A(\cdot) : I \to C^d$ (соответственно $A(\cdot) : I \to K^d$), удовлетворяющих условию

$$\int_0^\tau A(t)dt \subset M . \tag{2}$$

Усиление первого прямого метода преследования, основанного формуле (2) предложены в [5-6].

По каждому $A(\cdot) \in cl\Phi$ построим интеграл

$$W[A(\cdot),\tau]=\int_0^{\tau}\bigcap_{v\in Q}[A(t)+F(t,v)]dt,\ W_{об}^{\tau}=\bigcup_{A(\cdot)\in cl\Phi}W[A(\cdot),\tau]\ .$$

Множество $W_{об}^{\tau}$ назовем интегралом обобщенного первого метода преследования.

Интеграл $W_{об}^{\tau}$ имеет следующее значение для дифференциальной игры (1):

Если $z_0\in W_{об}^{\tau}$, то в игре (1.1) из точки z_0 можно завершить преследование за время τ в классе стробоскопических стратегий [1-6].

В [7] доказана необходимость и достаточность интеграла $W_{об}^{\tau}$ для завершения преследования в игре (1) в классе стробоскопических стратегий преследователя в мо-мент времени τ[см.также 8]. Задача сужения семейство отображений участвующих в определении $W_{об}^{\tau}$ до класс кусочно-постоянных, непрерывных отображении изучена в [9].

В этом сообщение изучается задачи построения упрощенных формул для интеграла $W[A(\cdot),\tau]$, когда $A(\cdot)$ непрерывное и кусочно-постоянное компакт-нозначное отображение.

Пусть $\omega=\{0=\tau_0<\tau_1<...<\tau_{n-1}<\tau_n=\tau\}$ – произвольное разбиений отрезка I.

Положим $D^{\tau}(M,\omega)=\sum_{i=1}^{n}\bigcap_{v\in Q}[A_i+F_i(v)]$, где $A_i=\int_i A(t)dt,\quad F_i=\int_i F(t,v)dt$.

Теорема 1. Пусть $A(\cdot)\in comp\Phi$ и непрерывно на I. Тогда справедливо равенство $W[A(\cdot),\tau]=\bigcap_{\omega\in\Omega}D^{\tau}(M,\omega)$.

Пусть $H=\{x\in R^d\,||x|\le 1\}$ – единичный замкнутый шар в R^d. Метрика Хаусдорфа для $A,B\in K^d$ определяется следующим образом:

$$h(A,B)=\min\{r>0\,|\,A\subset B+rH,B\subset A+rH\}.$$

Следствие 1. Для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$, такое, что

$$h[W[A(\cdot),\tau],D^{\tau}(M,\omega)]<\varepsilon\ ,$$

где ω – произвольное разбиение отрезка I с диаметром $|\omega|<\delta$.

Пусть $\omega=\{0=\tau_0<\tau_1<...<\tau_{n-1}<\tau_n=\tau\}$ – произвольное разбиений отрезка I и $\delta_i=\tau_i-\tau_{i-1},|\omega|=\max_{1\le i\le n}\delta_i$. Положим $\bar{A}_i=\delta_i A(\xi_i)$, $\bar{F}_i(v)=\delta_i F(\xi_i,v)$, где ξ_i – произвольная точка отрезка $\Delta_i=[\tau_{i-1},\tau_i]$. Определим множества

$$\bar{D}^{\tau}(\hat{M},\omega)=\sum_{i=1}^{n}\bar{D}_i,\quad \bar{D}_i=\bigcap_{v\in Q}[\bar{A}_i+\bar{F}_i(v)+\delta_i\Gamma(\delta_i)H],$$

где $\Gamma(\delta_i)=\alpha(\delta_i)+\gamma(\delta_i)$ и $\alpha(\cdot),\gamma(\cdot)$–модули непрерывности отображений $A(t),F(t,v)$ соответственно.

Рассмотрим множество

$$\bar{W}[\hat{A}(\cdot),\tau]=\bigcap_{\omega\in\Omega}\bar{D}^{\tau}(\hat{M},\omega).$$

Теорема 2. Пусть $A(\cdot) \in comp\Phi$ и непрерывно на I. Тогда справедливо равенство $W[A(\cdot),\tau] = \bar{W}[\hat{A}(\cdot),\tau]$.

Пусть $\omega_n = \{0 < \delta < ... < (n-1)\delta < n\delta = \tau\}$ – последовательность равномерных разбиений отрезка I. Положим

$$\hat{D}^{\tau}(M,\delta) = \sum_{i=1}^{n} \bigcap_{v \in Q} [\hat{A}_i + F_i(v)] \text{ , где } \hat{A}_i = \int_i \hat{A}(t)dt,\ F_i = \int_i F(t,v)dt.$$

Теорема 3. Пусть $\hat{A}(\cdot) \in comp\Phi$ и кусочно-постоянное на I. Тогда справедливо равенство

$$W[\hat{A}(\cdot),\tau] = \bigcap_{\delta>0} \hat{D}^{\tau}(M,\delta).$$

Следствие. 2. Пусть $\hat{A}(\cdot) \in comp\Phi$ и кусочно-постоянное на I с одной точкой разрыва $t_1 \in I$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_0(\varepsilon) > 0$ при всех δ, которое $\delta < \delta_0$, и имеет место неравенство $h\left[W[\hat{A}(\cdot),\tau], \hat{D}^{\tau}(M,\delta)\right] < \varepsilon$.

Пусть

$$\tilde{D}_1^{\tau}(\tilde{M},\delta) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \bigcap_{v \in Q} [\delta A_i + \delta F(\xi_i, v) + \delta F(\xi_i, v) + \delta\Gamma(\delta)H] +$$

$$+ \bigcap_{v \in Q} [(t_1 - \tau_{k-1})A_1 + (\tau_k - t_1)A_1 + \delta F(\xi_k, v) + \delta\Gamma(\delta)H].$$

В силу соотношений (2.30) и (2.31) получим следующую теорему

Теорема 4. Справедливо равенство $W[\hat{A}(\cdot),\tau] = \bigcap_{\delta>0} \hat{D}_1^{\tau}(\hat{M},\delta)$.

Следствие 3. Пусть $\hat{A}(\cdot) \in comp\Phi$ и кусочно-постоянное отобра-,,жение на I с одной точкой разрыва $t_1 \in I$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_0(\varepsilon) > 0$ при всех δ, которое $\delta < \delta_0$, и имеет место неравенство

$$h\left[W[\hat{A}(\cdot),\tau], \hat{D}_1^{\tau}(M,\delta)\right] < \varepsilon.$$

Следствие 4. Пусть $\hat{A}(\cdot) \in comp\Phi$ и кусочно-постоянное отображе-ние на I с одной точкой разрыва $t_1 \in I$. Тогда ля любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число $N = N(\varepsilon)$ такое, что

$$h\left[W[A(\cdot),\tau], \tilde{D}_1^{\tau}(\tilde{M},\delta)\right] < \varepsilon$$

при всех $n > N(\varepsilon)$. Здесь $\delta = \frac{\tau}{n}$.

Литература

1. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры // ДАН. - 1967. – Т.175, №4. - С. 764-766.
2. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования //Матем. сб. – 1980. – Т.112. – № 3. – С. 307 – 330.

3. Сатимов Н. К задаче преследования в линейных дифференциальных играх // Дифференц. урав. – 1973. - Т.9. - № 11.- С.2000 - 2009.
4. Сатимов Н, Карабаев Э. Об одном методе решения задачи преследования // ДАН РУз. - 1986. - № 3. - С. 5-6.
5. Никольский М.С. Об одном прямом методе решения линейных дифференциальных игр преследования –убегания // Матем.замет. – 1983. - Т.33. - № 6. - С.885-891.
6. Азамов А., Саматов Б.Т. О модифицированном третьем методе в за-дачах преследования // Сб. «Неклассические задачи математической физики» – Ташкент.: Фан, 1985. – С. 174 – 184.
7. Исканаджиев И.М., Абдуганиев А. Об обобщение первого прямого преследование // Докл.АН РУз. - 2020. - №6.-С.16-20.
8. Яксубаев К.Д. Необходимость и достаточность третьего интеграла для завершения игры в одном классе позиционных стратегий // ДАН РУз. –1987. –– № 5. –– С.4 - 5.
9. Iskanadjiev I. M. Approximative properties of the integral of Pontryagin's generalized first direct method for differential inclusions // Uzbek Mathematical Journal. – 2020. – № 2. – pp. 65-75.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ДРОБНОГО ПОРЯДКА С НЕХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЛИНИЕЙ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

Исломов Б.И., Ахмадов И.А.
Национальный Университет Узбекистана
islomovbozor@yandex.com, ahmadov.ilhom@mail.ru

Учеными нашей страны в настоящее время особое внимание уделяется исследованию и поиску эффективных методов решения различных задач для уравнений в частных производных дробного порядка. Отметим работы М.С. Салахитдинова, Ш.А. Алимова, Р.Р. Ашурова, Дж.Аманов, Б.И.Исломова, Б.Ж.Кадиркулова, Э.Т. Каримова, О.Х. Абдуллаева, Н.К. Очиловой.

В работах [1-2] изучены прямой задачи с нелокальными условиями для смешанного уравнения с оператором дробного дифференцирования в смысле Капуто в смешанной области, состоящая характеристическим треугольника и прямоугольника. Прямые и обратные задачи для смешанных уравнений с дробного порядка в смысле Римана-Лиувилля и Капуто в прямоугольной области, исследованы в работах [3-5].

Настоящая работа посвящена постановке и изучению локальной краевой задаче для уравнения смешанного типа дробного порядка с нехарактеристической линией изменения типа.

Рассмотрим уравнение

$$Lu = f(x,y), \tag{1}$$

где

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} - D_{0y}^{\alpha} u, & (x;y) \in \Omega_1, \\ u_{xx} - (-x)^m u_{yy}, & (x;y) \in \Omega_2, \end{cases} \tag{2}$$

$$m > 0, \qquad 0 < \alpha \le 1, \tag{3}$$

здесь Ω_1 – область, ограниченная отрезками AB AB_0 B_0A A_0A прямых $y=0$, $x=1$, $y=1$, $x=0$ соответственно; Ω_2 – характеристический треугольник, ограниченный отрезком AA_0 оси y-ов и двумя характеристиками

$$AC: y - (1-2\beta)(-x)^{1/1-2\beta} = 0,\ A_0C: y + (1-2\beta)(-x)^{1/1-2\beta} = 1$$

уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $A_0(0,1)$, пересекающимися в точке $C(-0{,}5;\,0{,}5)$, $J = \{(x,y):\ x=0,\ 0<y<1\}$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup J$, где $f(x,y)$ – заданная функция, а $\beta = \dfrac{m}{2(m+2)}$, причем $f(x,y) \in C(\Omega) \cap L_2(\bar{\Omega})$ и

$$0 < \beta < \frac{1}{2}. \tag{4}$$

$D_{0y}^{\alpha}[\cdot]$ – оператор (в смысле Римана-Лиувилля) дифференцирования дробного порядка $\alpha \in (0,1]$ от функции $u(x,y)$ по второй переменной [6, стр. 341]:

$$D_{0y}^{\alpha} u(x,y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dy} \int_0^y \frac{u(x,t)\,dt}{(y-t)^{\alpha}}\ . \tag{5}$$

В области Ω для уравнения (1) исследуем следующую задачу.

Задача A. Найти функцию $u(x,y)$, со следующими свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\bar{D}),\quad y^{1-\alpha} u(x,y) \in C(\bar{D}_1)$;

2) $u(x,y) \in C_x^2(\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap C_y^2(\Omega_2),\quad D_{0y}^{\alpha} u(x,y) \in C(\Omega_1)$ и удовлетворяет уравнению (1) в областях $\Omega_j\ (j=1,2)$;

3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)\big|_{BB_0} = \varphi(y),\quad 0 \le y \le 1,$$

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x,y) = \Gamma(\alpha) \lim_{y\to 0} y^{1-\alpha} u(x,y) = \tau(x),\quad 0 \le x \le 1,$$

$$u(x,y)\big|_{AC} = \psi(y),\ 0 \le y \le \frac{1}{2};$$

4) $u_x \in C(\Omega_1 \cup J) \cap C(\Omega_2 \cup J)$ и на отрезке J выполняются условия склеивания $u_x(+0,y) = u_x(-0,y),\quad 0<y<1,$ где $\varphi(y),\ \psi(y),\ \tau(x)$ - заданные функции, причем $\tau(0) = \psi(0),\ \tau(1) = \varphi(0),$

$$\tau(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1),\quad y^{1-\alpha}\varphi(y)\in C[0,1]\cap C^1(0,1), \tag{6}$$

$$\psi(y)\in C^1\left[0;\frac{1}{2}\right]\cap C^3\left(0;\frac{1}{2}\right). \tag{7}$$

Доказана следующая теорема.

Теорема. Если выполнены условия (3), (4), (6) и (7), то в области Ω существует единственное регулярное решение задачи A.

Литература

1. Салахитдинов М.С., Каримов Э.Т. Об одной нелокальной задаче с условиями сопряжения интегрального вида для параболо-гиперболического с оператором Капуто. // «Доклады АН РУз». 2014. № 4. С.6-9.
2. E.T.Karimov, J.S.Akhatov. A boundary problem with integral gluing condition for a parabolic-hyperbolic equation involving the Caputo fractional derivative. // «Electronic Journal of Differential Equations». Vol. **2014** (2014). №. 14. P. 1-6.
3. Исломов Б. И., Убайдуллаев У. Ш. Краевая задача для уравнения параболо - гиперболического типа с оператором дробного порядка в смысле Капуто в прямоугольной области. // «Научный вестник. Математика». 2017. №5. С. 25-30.
4. B.I. Islomov, U. Sh. Ubaydullayev. On a Boundary-value Problem for a Parabolic-Hyperbolic Equation with Fractional Order Caputo Operator in Rectangular Domain // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2020, Vol. 41, No. 9, pp. 1801–1810.
5. Исломов Б.И., Убайдуллаев У.Ш. Обратная задача для уравнения смешанного типа с оператором дробного порядка в прямоугольной области // Известия высших учебных заведений. Математика, 2021. №3. С.29-46.
6. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника. 1987. 688 с.

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ОПЕРАТОРОМ КАПУТО

[1]Кадиркулов Б.Ж., [2]Донаев Н.Ю.

[1]Ташкентский государственный университет востоковедения

[2]Денауский институт предпринимательства и педагоги

1. Постановка задачи. Данная работа посвящена исследованию вопросов разрешимости одной обратной задачи с интегро-дифференциальным условием сопряжение для уравнения смешанного типа четвертого порядка с дробным оператором Капуто. Отметим, что обратные задачи возникают в самых разных областях человеческой деятельности таких, как физика (обратные задачи квантовой теории рассеяния), геофизика

(обратные задачи электроразведки, сейсмики, теории потенциала), биология, медицина, контроль качества промышленных изделий и т.п [1-3].

Пусть $\Omega = \{(x,t): 0 < x < 1, -a < t < b\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap (\mathrm{t} > 0)$, $\Omega_2 = \Omega \cap (\mathrm{t} < 0)$, где a,b – положительные действительные числа. В этой области для уравнения смешанного типа вида

$$f(x) = \begin{cases} {}_C D_{0t}^{\alpha} u + u_{xxxx}, \ t > 0, \\ u_{tt} + u_{xxxx}, \ t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

рассмотрим следующую нелокальную задачу.

Задача А. Требуется найти пару функций $u(x,t)$ и $f(x)$ такую, что:

1) функции $u(x,t)$ и $f(x)$ принадлежат классу

$$\begin{gathered} {}_C D_{0t}^{\alpha} u \in C(\overline{\Omega}_1), u_t \in C(\overline{\Omega}_2), u_{tt} \in C(\Omega_2), u_{xx} \in C(\overline{\Omega}), \\ u_{xxxx} \in C(\Omega_1 \cup \Omega_2), f(x) \in C[0,1], \end{gathered},$$

2) функции $u(x,t)$ и $f(x)$ удовлетворяют уравнению (1) в области $\Omega_1 \cup \Omega_2$;

3) функция $u(x,t)$ удовлетворяет условиям

$$u(0,t) = u(1,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t) = 0, -a \le t \le b, \tag{2}$$

$$u(x,-a) = \varphi(x), u_t(x,-a) = {}_C D_{0t}^{\alpha} u(x,b) + \psi(x), \ 0 \le x \le 1; \tag{3}$$

4) функция $u(x,t)$ удовлетворяет условиям склеивания

$$u(x,+0) = u(x,-0), \ {}_C D_{0t}^{\alpha} u(x,+0) = u_t(x,-0), \tag{4}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданные достаточно гладкие функции, ${}_C D_{0t}^{\alpha}$-оператор интегро-дифференцирования дробного порядка в смысле Капуто [1].

2. Единственность решение задачи А. Для решения задачи применим спектральный метод. Решения задачи А ищем в виде $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$. Подставляя это выражение в уравнение (1) и краевые условия (2), получим следующую спектральную задачу:

$$X^{IV}(x) - \lambda^4 X(x) = 0, \ X(0) = X(1) = X''(0) = X''(1) = 0.$$

Рассматриваемая задача самосопряженная, имеет полную в $L_2(0,1)$ систему собственных функций вида

$$X_n(x) = \sqrt{2} \sin \lambda_n x, \ \lambda_n = \pi n, \ n \in N, \tag{5}$$

которая образует базис в $L_2(0,1)$.

Теорема 1. Пусть имеет место неравенство

$$\Delta_{a,b}(n) = \frac{1}{\lambda_n^2} \sin \lambda_n^2 a - \cos \lambda_n^2 a + E_{\alpha}\left(-\lambda_n^4 b^{\alpha}\right) \ne 0, \ n = 1,2,\ldots., \tag{6}$$

Тогда, если решение задачи А существует, то оно единственно.

Здесь $E_{\alpha,\beta}(z)$-функция Миттаг-Леффлера, которая определяется по формуле [4]

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \ z, \alpha, \beta \in C, \ \mathrm{Re}(\alpha) > 0.$$

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ решение задачи А и пусть

$$u_n(t)=\sqrt{2}\int_0^1 u(x,t)\sin\pi nxdx, n=1,2,3\ldots. \tag{7}$$

Применяя оператор ${}_C D_{0t}^{\alpha}$ к обеим частям равенства (7) по t при $t\in(0;b)$ и дифференцируя равенства (7) по t два раза при $t\in(-a;0)$, а также учитывая уравнение (1), получим

$${}_C D_{0t}^{\alpha}u_n(t)=-\sqrt{2}\int_0^1 u_{xxxx}(x,t)\sin\pi nxdx+\sqrt{2}\int_0^1 f(x)\sin\pi nxdx, \tag{8}$$

$$u_n''(t)=-\sqrt{2}\int_0^1 u_{xxxx}(x,t)\sin\pi nxdx+\sqrt{2}\int_0^1 f(x)\sin\pi nxdx, \tag{9}$$

В интегралах из правых частей равенств (8) и (9) интегрируя по частям четыре раза, с учетом граничных условий (2), получим

$${}_C D_{0t}^{\alpha}u_n(t)+\lambda_n^4 u_n(t)=f_n, t>0,\ \frac{d^2}{dt^2}u_n(t)+\lambda_n^4 u_n(t)=f_n, t<0,$$

общие решения, которых имеют вид

$$u_n(t)=\begin{cases} A_n E_{\alpha}\left(-\lambda_n^4 t^{\alpha}\right)+\dfrac{f_n}{\lambda_n^4}, t>0, \\ B_n\sin\lambda_n^2 t+L_n\cos\lambda_n^2 t+\dfrac{f_n}{\lambda_n^4}, t<0, \end{cases} \tag{10}$$

где $A_n, B_n, L_n, n=1,2,\ldots$ - произвольные постоянные, $f_n=\sqrt{2}\int_0^1 f(x)\sin\pi nxdx$.

Из (7), учитывая условий (3) и (4) получим, что функция $u_n(t)$ должна удовлетворять следующим условиям

$$\lim_{t\to+0}u_n(t)=\lim_{t\to-0}u_n(t), \lim_{t\to+0}{}_C D_{0t}^{\alpha}u_n(t)=\lim_{t\to-0}\frac{du_n(t)}{dt},$$

$$u_n(-a)=\varphi_n, u_n'(-a)={}_C D_{0t}^{\alpha}u_n(b)+\psi_n.$$

Здесь φ_n,ψ_n,- коэффициенты разложения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ по системе (5), то есть $\varphi_n=\sqrt{2}\int_0^1\varphi(x)\sin\pi nxdx, \psi_n=\sqrt{2}\int_0^1\psi(x)\sin\pi nxdx$.

Удовлетворяя (10) этим условиям, получим, что постоянные A_n, B_n, L_n, f_n являются решениями следующей системы

$$\begin{cases} A_n=L_n, B_n=-\lambda_n^2 L_n, L_n\left(\cos\lambda_n^2 a+\lambda_n^2\sin\lambda_n^2 a\right)+\dfrac{f_n}{\lambda_n^4}=\varphi_n, \\ L_n\left(\lambda_n^2\sin\lambda_n^2 a-\lambda_n^4\cos\lambda_n^2 a\right)+L_n\lambda_n^4 E_{\alpha}\left(-\lambda_n^4 b^{\alpha}\right)=\psi_n, \end{cases}$$

Отсюда находим

$$L_n = \frac{\psi_n}{\lambda_n^4 \Delta_n(a,b)}, \quad f_n = \frac{\varphi_n \lambda_n^4 \Delta_n(a,b) - \psi_n \left(\cos \lambda_n^2 a + \lambda_n^2 \sin \lambda_n^2 a \right)}{\Delta_n(a,b)}, \tag{11}$$

при условии, что при всех $n \in N$ имеет место неравенство (6). Значить, решение $u_n(t)$, имеет вид

$$u_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\psi_n}{\lambda_n^4 \Delta_n(a,b)} \left[E_\alpha \left(-\lambda_n^4 t^\alpha \right) - \cos \lambda_n^2 a - \lambda_n^2 \sin \lambda_n^2 a \right] + \varphi_n, \; t > 0, \\ \dfrac{\psi_n}{\lambda_n^4 \Delta_n(a,b)} \left(\cos \lambda_n^2 t - \lambda_n^2 \sin \lambda_n^2 t - \cos \lambda_n^2 a - \lambda_n^2 \sin \lambda_n^2 a \right) + \varphi_n, \; t < 0, \end{cases} \tag{12}$$

а значения $f_n, n = 1, 2, \ldots$ определяются по формуле (11).

Пусть теперь $\varphi(x) \equiv 0$ и $\psi(x) \equiv 0$ в $[0,1]$, и пусть условие (6) выполняется для всех $n \in N$. Тогда из соотношений (11) и (12) получим, что $u_n(t) \equiv 0$ на $[-a,b]$ и $f_n \equiv 0$ для всех $n \in N$. Это вместе с (6) означает, что

$$\int_0^1 u(x,t) \sin \pi n x dx \equiv 0, \; \int_0^1 f(x) \sin \pi n x dx \equiv 0, \; n \in N.$$

Поскольку система $\{\sin(\pi n x)\}$ замкнуто в пространстве $L_2[0,1]$, то из последних соотношений следует $u(x,t) = 0$ и $f(x) = 0$ почти всюду на $[0,1]$ для любого $t \in [-a,b]$. Так как функции $u(x,t)$ и $f(x)$ непрерывны соответственно в $\overline{\Omega}$ и $[0,1]$, то мы имеем $u(x,t) = 0$ в $\overline{\Omega}$ и $f(x) = 0$ в $[0,1]$. Таким образом единственность решения задачи А доказана.

Аналогичным образом доказываются следующие утверждения:

Лемма 1. Пусть выполнено одно из следующих условий: 1) $a = p/\pi$, p-натуральное; 2) $a = p/(q\pi)$, $p, q \in N, (p,q) = 1$, q-нечетное, $p/q \notin N$. Тогда при больших n существует положительная постоянная B_0 такая, что справедлива оценка

$$\left| \Delta_n(a,b) \right| \geq B_0 > 0. \tag{13}$$

Лемма 2. Пусть выполнены условия (13). Тогда

1) при $t \in [0,b]$ имеет место $\left| u_n(t) \right| \leq \dfrac{B_3}{n^2} |\psi_n| + |\varphi_n|$, $\left| {}_C D_{0t}^\alpha u_n(t) \right| \leq B_4 |\psi_n|$,

2) при $t \in [-a,0]$ имеет место:

$$|u_n(t)| \leq B_5 \left(|\varphi_n| + \frac{1}{n^2} |\psi_n| \right), \left| \frac{du_n(t)}{dt} \right| \leq B_6 |\psi_n|, \left| \frac{d^2 u_n(t)}{dt^2} \right| \leq B_7 n^2 |\varphi_n|,$$

3) при $t \in [-a,b]$ имеет место: $|f_n| \leq B_8 \left(n^2 |\psi_n| + n^4 |\varphi_n| \right)$,

где $B_k, k = \overline{1,8}$ - положительные постоянные.

Теорема 2. Пусть

$$\varphi(x) \in C^4[0,1], \psi(x) \in C^2[0,1], \varphi^{(5)}(x), \psi^{(3)}(x) \in L_2(0,1),$$

$$\varphi^{(2n)}(0)=\varphi^{(2n)}(1)=\psi^{(2\ell)}(0)=\psi^{(2\ell)}(1)=0, n=\overline{0,2}, \ell=\overline{0,1}.$$

Тогда задача А в области Ω однозначно разрешима только тогда, когда выполняются условия (6) и (13) и решение определяются в виде суммы рядов

$$u(x,t)=\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\pi nx,\ \ f(x)=\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}f_n\sin\pi nx$$

где $u_n(t)$ и f_n определяются по формулам (11) и (12).

Литература

1. Kabanikhin S.I., Lorenzi A. Identification Problems of Wave Phenomena, VSP, The Netherlands, 1999.
2. Romanov V.G. Invtstigation Methods for Inverse Problems.- Utrecht: VSP, 2002.
3. Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations. - Springer Science. - 2006.
4. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B. V., Amsterdam, 2006.

ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ НА СИМВОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ПОРОЖДЁННЫЕ ОТОБРАЖЕНИЕМ ОКРУЖНОСТИ

Каримов Ж.Ж.
Туринский политехнический университет в городе Ташкенте
jkarimov0702@gmail.com

Одними из основных объектов символической динамики являются пространство последовательностей и гомеоморфизм отображения левого сдвига на этом пространстве. Жак Адамар впервые применил методы символической динамики при изучении геодезических на поверхности с отрицательной кривизной.

Подковообразное отображение, введенное Стивеном Смейлом, и концепция Марковского разбиения, введенная Яковом Синаем, послужили быстрому развитию символической динамики.

Изучение вероятностно-инвариантных мер относительно отображения левого сдвига σ является одной из важных задач символической динамики. Любой сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности T с иррациональным числом вращений ρ_T имеет единственную вероятностно-инвариантную меру $\mu := \mu_T$.

Хорошо известно, что инвариантная мера μ гладких диффеоморфизмов с типичным иррациональным числом вращений ρ

абсолютно непрерывна относительно меры Лебега λ на окружности (см. [1], [2]).

Естественным продолжением диффеоморфизмов окружности являются кусочно-гладкие гомеоморфизмы с точками излома. Свойства регулярности инвариантных мер кусочно-гладких гомеоморфизмов окружности сильно отличаются от случая диффеоморфизмов (см. [3], [4]).

Положим $\Delta^{(n)} = \Delta(a_1,...,a_n)$. На окружности есть две естественные вероятностные меры: мера Лебега λ и $T-$ инвариантная мера μ. Мера Лебега λ индуцирует вероятностную меру λ_+ на пространстве Θ_+, т.е. $\lambda_+(a_1,...,a_n) = |\Delta(a_1,...,a_n)|$. Кроме того, $T-$ инвариантная мера μ индуцирует вероятностную меру μ_+ на Θ_+: $\mu_+(a_1,...,a_n) = \mu(\Delta(a_1,...,a_n))$, (см. [5]).

Сдвиг $\sigma : \Omega \to \Omega$ определим по формуле $\sigma(\underline{a})_i = a_{i+1}$, $i \geq 1$.

Целью данной работы является построение $\sigma-$ инвариантных мер с использованием отображений окружности с изломами.

Сформулируем следующую теорему.

Теорема 2.2.2. *Пусть* $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$, $\varepsilon > 0$, - *гомеоморфизм окружности с одной точкой излома* x_b, $T'(x) \geq Const > 0$ *для любого* $x \in S^1 \setminus \{x_b\}$ *и числом вращений, равным золотому сечению, т.е.* $\rho = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = [1,1,...,1,...]$. *Введем обозначение через* μ, λ – $T-$*инвариантная мера и мера Лебега на окружности, соответственно. Пусть* μ_+ *и* λ_+ - *индуцированные меры на пространстве* Θ_+. *Тогда*

1) μ_+ *инвариантно относительно отображения левого сдвига* σ*;*

2) *существует* $\sigma-$ *инвариантная мера* ν, *абсолютно непрерывная относительно индуцированной меры Лебега* λ_+*;*

3) *индуцированная мера* μ_+ *сингулярна относительно* λ_+.

Литература

1. Синай Я.Г., Ханин К.М. Гладкость сопряжений диффеоморфизмов окружности с поворотами// Успех матем. наук. - 1989.Т.44, вып. 1. -С. 57-82.
2. Herman M.R. Sure la conjugation differentiable des diffeomorphismes du circle a des rotations// Publ. Math., Paris. -1979.-№ 49.-P. 225-234.
3. Джалилов А.А., Ханин К.М. Об инвариантной мере для гомеоморфизмов окружности с одним изломом// Функциональный анализ и его приложения. - 1998. Т.32, № 3.-С.153-161.
4. Dzhalilov A.A., Mayer D., Safarov U.A. Piecewise-smooth circle homeomorphisms with several break points. // Izv. RAN. Ser. Mat., 76:1 (2012), 101–120; Izv. Math., 76:1 (2012), P. 94–112.
5. Dzhalilov A.A., Karimov J.J. Invariant measures on the space of sequences associated by circle maps. // Uzbek Mathematical Journal. 2020. No 4. P. 22-31.

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ СИЛ В КОНФЛИКТНЫХ СИТУАЦИЯХ

Каримов Н.М.
Военно-технический институт Национальной гвардии Республики Узбекистан

Рассмотрим уравнения квадратичного закона Ланчестера на примере следующих дополнительных силовых ресурсов:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -ay(t) + u(t), & x(t_0) = x_0 \\ \dot{y}(t) = -bx(t) + \upsilon(t), & y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $x(t)$ и $y(t)$ - количество сил на момент времени t противоборствующих сторон, t - продолжительность боя, $a > 0$ и $b > 0$ - коэффициент потерь от боевых действий противников, $x(t_0) = x_0$ и $y(t_0) = y_0$ - начальные силы сторон, $u(t) > 0$ и $\upsilon(t) > 0$ - управление наступающими вспомогательными силами.

Далее рассмотрим военный конфликт между двумя противоборствующими сторонами. Пусть Y обозначает защищающуюся сторону, а X обозначает атакующую стороны, u и υ рассмотрим как стратегию управления дополнительными силами, приходящими к обеим сторонам.

Пусть целевая функция имеет следующий вид.

$$J(u,\upsilon) = x(T) - y(T) \quad (2)$$

где $x(T)$ и $y(T)$ - силы, оставшиеся с обеих сторон на фиксированное время T.

Предположение 1. Пусть, $u(t) > 0$ и $\upsilon(t) > 0$ удовлетворяют следующим условиям:

$$U = \left\{ (u(t), \upsilon(t)) \,\middle|\, u_1 \le u(t) \le u_2,\ \upsilon_1 \le \upsilon(t) \le \upsilon_2 \right\} \quad (3)$$

где u_1 - минимальное количество входящих дополнительных сил для стороны X и u_2 - максимальное количество входящих дополнительных сил; υ_1 - минимальное количество входящих дополнительных сил для стороны Y и υ_2 - максимальное количество входящих дополнительных сил соответственно.

Предположение 2. Обозначим через M_0 и N_0 общее количество вспомогательных сил, приходящих к конфликтующим сторонам, и пусть они удовлетворяют следующим условиям:

$$\int_0^T u(t)dt \le M_0; \quad \int_0^T \upsilon(t)dt \le N_0. \tag{4}$$

$$u_2 T \ge M_0; \qquad \upsilon_2 T \ge N_0. \tag{5}$$

На основе условия (4) и (5), введем, понятия обычного времени распределения вспомогательных ресурсов сил. То есть, определяем, обычное время распределения вспомогательных ресурсов сил для стороны X как t_u, а для стороны Y как t_υ.

Используя условия (4) и (5), находим обычное время распределения дополнительных сил t_u и t_υ.

$$t_u = \frac{M_0 - u_1 T}{u_2 - u_1}, \qquad t_\upsilon = \frac{N_0 - \upsilon_1 T}{\upsilon_2 - \upsilon_1}. \tag{6}$$

Таким образом, игровую задачу можно объяснить следующим образом: - цель атакующей стороны $x(t)$, используя такую u^* оптимальную стратегию, получить максимальное значение $J(u,\upsilon)$; - цель защищающей стороны $y(t)$, используя такую υ^* оптимальную стратегию получить минимальное значение $J(u,\upsilon)$. Т.е.

$$J(u^*,\upsilon^*) = \max_u \min_\upsilon J(u,\upsilon). \tag{7}$$

Решение системы (1) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}\left(x_0 - \sqrt{\frac{a}{b}} y_0 \right) \mathrm{e}^{\sqrt{ab}\,t} + \frac{1}{2}\left(x_0 + \sqrt{\frac{a}{b}} y_0 \right) \mathrm{e}^{-\sqrt{ab}\,t} + \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^T \left[\left(u - \sqrt{\frac{a}{b}}\upsilon \right) e^{\sqrt{ab}(\tau - t)} + \left(u + \sqrt{\frac{a}{b}}\upsilon \right) e^{-\sqrt{ab}(\tau - t)} \right] d\tau \\ y(t) &= \frac{1}{2}\left(y_0 - \sqrt{\frac{b}{a}} x_0 \right) e^{\sqrt{ab}\,t} + \frac{1}{2}\left(y_0 + \sqrt{\frac{b}{a}} x_0 \right) e^{-\sqrt{ab}\,t} + \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^T \left[\left(\upsilon - \sqrt{\frac{b}{a}} u \right) e^{\sqrt{ab}(\tau - t)} + \left(\upsilon + \sqrt{\frac{b}{a}} u \right) e^{-\sqrt{ab}(\tau - t)} \right] d\tau \end{aligned} \tag{8}$$

Используя решение (8), $J(u,\upsilon)$ - целевую функцию выразим следующим образом:

$$J(u,\upsilon) = I_0 + \int_0^T (I_1 u - I_2 \upsilon) dt \tag{9}$$

Здесь

$$I_0 = \frac{1}{2}\left(x_0 - y_0 + \sqrt{\frac{b}{a}}x_0 - \sqrt{\frac{a}{b}}y_0 \right)\mathrm{e}^{\sqrt{ab}T} + \frac{1}{2}\left(x_0 - y_0 - \sqrt{\frac{b}{a}}x_0 + \sqrt{\frac{a}{b}}y_0 \right)\mathrm{e}^{-\sqrt{ab}T}$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \sqrt{\frac{b}{a}} \right)\mathrm{e}^{\sqrt{ab}(T-t)} + \left(1 - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)\mathrm{e}^{-\sqrt{ab}(T-t)} \right]$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \sqrt{\frac{a}{b}} \right)\mathrm{e}^{\sqrt{ab}(T-t)} + \left(1 - \sqrt{\frac{a}{b}} \right)\mathrm{e}^{-\sqrt{ab}(T-t)} \right]$$

При этом постоянными x_0, y_0 и T оптимальное значение целевой функции $J(u,\upsilon)$ может быть получено путем определения оптимального значения следующей целевой функции:

$$f(u,\upsilon) = \int_0^T (I_1 u - I_2 \upsilon)dt \qquad (10)$$

Теорема 1 (принцип максимума). Пусть функции $u^*(t), \upsilon^*(t)$ являются оптимальными управлениями, а функции $x^*(t), y^*(t)$ оптимальными траекториями для задачи (1).

Тогда существуют отрицательное число ψ_0^* и векторная функция $\psi^*(t) = (\psi_1^*(t), \psi_2^*(t))$ с непрерывными на отрезке $[0,T]$ такими компонентами, что выполняются следующие три условия:

1) вектор-функция $\hat{\psi}^*(t) = (\hat{\psi}_0^*, \hat{\psi}_1^*(t), \hat{\psi}_2^*(t))$ является ненулевой на отрезке $0 \le t \le T$;

2) вектор-функция $\hat{\psi}^*(t) = (\hat{\psi}_1^*(t), \hat{\psi}_2^*(t))$ является решением сопряженной системы

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_1}{dt} = -\psi_0^* \dfrac{\partial f_0(t, x^*, y^*, u^*, v^*)}{\partial x} - \psi_1 \dfrac{\partial f_1(t, x^*, y^*, u^*, v^*)}{\partial x} - \psi_2 \dfrac{\partial f_2(t, x^*, y^*, u^*, v^*)}{\partial x} \\ \dfrac{d\psi_2}{dt} = -\psi_0^* \dfrac{\partial f_0(t, x^*, y^*, u^*, v^*)}{\partial y} - \psi_1 \dfrac{\partial f_1(t, x^*, y^*, u^*, v^*)}{\partial y} - \psi_2 \dfrac{\partial f_2(t, x^*, y^*, u^*, v^*)}{\partial y} \end{cases}$$

$$0 \le t \le T;$$

3) при каждом $t \in [0,T]$, в котором обе функции $u = u^*(t), \upsilon = \upsilon^*(t)$ кусочно-постоянная, функция $H(t, x^*(t), y^*(t), \psi_0^*, \psi_1^*, \psi_2^*, u, \upsilon)$ двух переменных. При u, υ функция H достигает максимума на множестве $U, U \subset R^2$, при $u = u^*(t), \upsilon = \upsilon^*(t)$. Т.е.

$$H(t, x^*(t), y^*(t), \psi_0^*, \psi_1^*(t), \psi_2^*(t), u^*(t), \upsilon^*(t)) = \max_{(u,\upsilon)\in U} H(t, x^*(t), y^*(t), \psi_0^*, \psi_1^*(t), \psi_2^*(t), u^*, \upsilon^*),$$

$$0 \le t \le T.$$

Теорема 2. Пусть подцелевая функция

$$f(u^*, \upsilon^*) = \max_u \min_\upsilon f(u, \upsilon)$$

достигает своего максимума (минимума) при значениях функций $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ в обычных t_u, t_υ и вспомогательных силах $u^*(t) \in [u_1, u_2]$, $\upsilon^*(t) \in [\upsilon_1, \upsilon_2]$) удовлетворяющих условии $\int_0^T u dt \le \int_0^T u^* dt$; $\int_0^T \upsilon dt \le \int_0^T \upsilon^* dt$. Тогда целевая функция $J(u, \upsilon)$ достигает также своего максимума (минимума). Т.е. выполяется следующая равенства

$$J(u^*, \upsilon^*) = \max_u \min_\upsilon J(u, \upsilon).$$

Функция Гамильтона достигает максимального значения (из-за линейности переменных u, υ) только в граничных точках множества U, т.е.

$$u = \begin{cases} u_2, \text{ если } \psi_0 I_1 + \psi_1 \ge 0, \\ u_1, \text{ если } \psi_0 I_1 + \psi_1 < 0. \end{cases}$$

$$\upsilon = \begin{cases} \upsilon_2, \text{ если } -\psi_0 I_2 + \psi_2 \le 0, \\ \upsilon_1, \text{ если } -\psi_0 I_2 + \psi_2 > 0. \end{cases}$$

Далее находим оптимальные времени распределения вспомогательных ресурсов сил, поступающих в стороны.

Предположим, что t_1 и t_2 моменты времени равно $I_1(t_1) = \psi_1(t_u)$ и $-I_2(t_2) = \psi_2(t_\upsilon)$. В этом случае

$$t_1 = T - \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \ln \left(\frac{\psi_1(t_u) + \sqrt{\psi_1^2(t_u) - 1 + \frac{\beta}{\alpha}}}{1 + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}} \right). \qquad (11)$$

$$t_2 = T - \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \ln \left(\frac{-\psi_2(t_\upsilon) + \sqrt{\psi_2^2(t_\upsilon) - 1 + \frac{\alpha}{\beta}}}{1 + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}} \right). \qquad (12)$$

В этом случае оптимальную стратегию сторон можно записать следующим виде

$$u^*(t)=\begin{cases}u_2,\ t\in[0,\ t_1]\\ u_1,\ t\in(t_1,\ T]\end{cases}$$

$$\upsilon^*(t)=\begin{cases}\upsilon_2,\ t\in[0,\ t_2]\\ \upsilon_1,\ t\in(t_2,\ T]\end{cases} \tag{13}$$

Рассмотрим дифференциальную игру (1) - (7) при следующих условиях

$x_0=1000,\ y_0=1000,\ T=3,\ \alpha=0.4,\ \beta=0.9,\ u_1=25,\ u_2=50,\ \upsilon_1=20,\ \upsilon_2=40,\ M_0=100,\ N_0=100.$

Согласно теореме 2 оптимальными стратегиями для u^* и υ^* являются:

$$u^*(t)=\begin{cases}50,\ t\in[0,\ 0.9814]\\ 25,\ t\in(0.9814,\ 3]\end{cases}$$

$$\upsilon^*(t)=\begin{cases}40,\ t\in[0,\ 1.9789]\\ 20,\ t\in(1.9789,\ 3]\end{cases}$$

где $t_1=0.9814$ и $t_2=1.9789$. Исходя из выше изложенного, решения следующие:

$$\psi_1=4.12,\ \psi_2=-1.63,\ \int_0^T u^*dt=99{,}5349,\ \int_0^T \upsilon^*dt=99{,}5798.$$

В этом случае значение $J(u,\upsilon)$ целевой функции равно

$$\max_u \min_\upsilon J(u,\upsilon)=x(T)-y(T)=482.3$$

В этом случае побеждает сторона X.

На Рис. 1 показано стратегии оптимального распределения вспомогательных сил сторон.

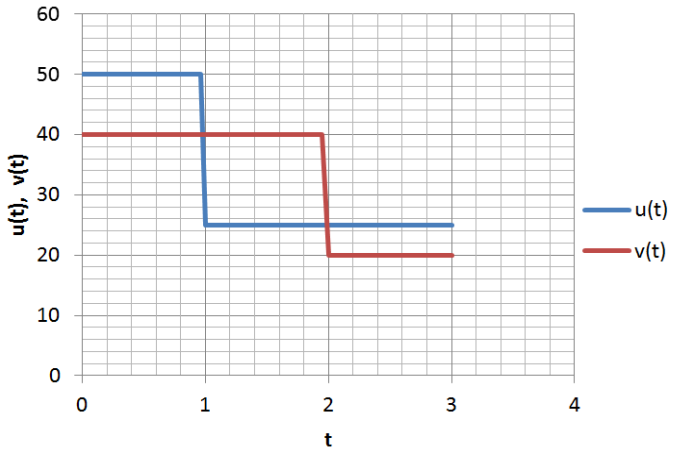


Рис. 1. Стратегии оптимального распределения вспомогательных сил сторон.

Решение дифференциальной игры в случае $T=2,3,4,5,10$, u^* и υ^* приведены в Таблице 1.

Таблица 1

T	t_1	t_2	$\int_0^T u^*(t)dt$	$\int_0^T \upsilon^*(t)dt$	M_0	N_0
2	1.1806	1.7167	79.5156	74.3334	80	75
3	0.9814	1.9789	99.5349	99.5798	100	100
4	3.1978	3.4149	179.9439	148.2971	180	150
5	2.9986	2.4879	199.9674	149.7584	200	150
10	5.9563	4.9867	398.9087	299.7349	400	300

В работе изучена оптимальность стратегии каждой стороны для функционального процесса по параметрам управления противоборствующих сторон. А также предложен метод, и приведен результаты численных расчетов решения указанных задач

Литература

1. X. Y. Chen, Y. W. Jing, C. J. Li et al., “Differential game model and its solutions for force resource complementary via Lanchester square law equation,” in *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, pp. 1024–1030, Milano, Italy, 2011.
2. Sheeba P. S. and D. Ghose. Optimal resource allocation and redistribution strategy in military conflicts with Lanchester square law attrition. Naval Research Logistics, 55(6): 2008, 581-591. https://doi.org/10.1002/nav.20303
3. Маматов М.Ш., Каримов Н.М. Задача распределения вспомогательных ресурсов сил в конфликтных ситуациях. ISJ Theoretical &Applied Science, 06 (86), 639-645 стр, Международный научный журнал. (2020). https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2020.06.86.117

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В ДВУХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

[1]Касимов Ш.Г., [2]Жовлиева Г.А.
[1,2] Национальный Университет Узбекистана
[1]Ташкентский филиал НИЯУ МИФИ, г. Ташкент
shokiraka@mail.ru

Постановка задачи.

Многие задачи о колебаниях балок и пластин, которые имеют большое значение в строительной механике, приводят к дифференциальным уравнениям более высокого порядка [1, с. 141-143], [2, с. 278-280], [3, гл.3], [4, с.45], [5, с.35], [6. гл.4]. Отметим также, что к уравнению колебаний балки

приходят во многих задачах при расчёте устойчивости вращающихся валов и изучении вибрации кораблей [7, гл.2].

В данной работе рассматривается дифференциальное уравнение с дробной производной

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,y,t)+a^2\frac{\partial^{4m}u(x,y,t)}{\partial x^{4m}}+(-1)^s b^2\frac{\partial^{2s}u(x,y,t)}{\partial y^{2s}}=f(x,y,t), \quad (1)$$

$$(x,y,t)\in\Pi\times(0,T),\quad l-1<\alpha\le l$$

с начальными и граничными условиями

$$D_{0t}^{\alpha-i}u(x,y,t)\Big|_{t=0}=\varphi_i(x,y),\quad i=1,2,...,l, \quad (2)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^{4k}u(x,y,t)}{\partial x^{4k}}\Big|_{x=0}=0,\ \dfrac{\partial^{4k+1}u(x,y,t)}{\partial x^{4k+1}}\Big|_{x=0}=0,\\ \dfrac{\partial^{4k}u(x,y,t)}{\partial x^{4k}}\Big|_{x=p}=0,\ \dfrac{\partial^{4k+1}u(x,y,t)}{\partial x^{4k+1}}\Big|_{x=p}=0,\ k=\overline{0,m-1},\\ \dfrac{\partial^{2j}u(x,y,t)}{\partial y^{2j}}\Big|_{y=0}=0,\ \dfrac{\partial^{2j}u(x,y,t)}{\partial y^{2j}}\Big|_{y=q}=0,\ j=\overline{0,s-1},\end{cases} \quad (3)$$

которое при $\alpha=l=2,\ m=s=1$ имеет приложения в строительной механике, здесь $(x,y,t)\in\Pi\times(0,T)$, $\Pi=(0,p)\times(0,q)$, $m,\ s,\ l\in\mathbb{N}$, $p,\ q,\ T>0$ – заданные положительные числа и $f(x,y,t),\ \varphi_i(x,y),\quad i=1,2,...,l$ – достаточно гладкие функции разлагаемые по собственным функциям $\{v_n(x,y),\ n\in\mathbb{N}^2\}$ спектральной задачи:

$$a^2\frac{\partial^{4m}v(x,y)}{\partial x^{4m}}+(-1)^s b^2\frac{\partial^{2s}v(x,y)}{\partial y^{2s}}-\lambda v(x,y)=0, \quad (4)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^{4k}v(x,y)}{\partial x^{4k}}\Big|_{x=0}=0,\ \dfrac{\partial^{4k+1}v(x,y)}{\partial x^{4k+1}}\Big|_{x=0}=0,\\ \dfrac{\partial^{4k}v(x,y)}{\partial x^{4k}}\Big|_{x=p}=0,\ \dfrac{\partial^{4k+1}u(x,y)}{\partial x^{4k+1}}\Big|_{x=p}=0,\ k=\overline{0,m-1},\\ \dfrac{\partial^{2j}v(x,y)}{\partial y^{2j}}\Big|_{y=0}=0,\ \dfrac{\partial^{2j}v(x,y)}{\partial y^{2j}}\Big|_{y=q}=0,\ j=\overline{0,s-1},\end{cases} \quad (5)$$

λ – спектральный параметр.

Здесь при $\alpha<0$ дробная интеграл $\alpha<0$ имеет вид

$$D_{at}^{\alpha}u(x,y,t)=\frac{sign(t-a)}{\Gamma(-\alpha)}\int_a^t\frac{u(x,y,\tau)\cdot d\tau}{|t-\tau|^{\alpha+1}},$$

при $\alpha=0$, то $D_{at}^{\alpha}u(x,y,t)=u(x,y,t)$, а при $l-1<\alpha\le l,\ l\in\mathbb{N}$, дробная производная определяется по формуле

$$D_{at}^{\alpha}u(x,y,t)=sign^{l}(t-a)\frac{d^{l}}{dt^{l}}D_{at}^{\alpha-l}u(x,y,t)=\frac{sign^{l+1}(t-a)}{\Gamma(l-\alpha)}\frac{d^{l}}{dt^{l}}\int_{a}^{t}\frac{u(x,y,\tau)\cdot d\tau}{|t-\tau|^{\alpha-l+1}}.$$

В работах [8-10] для уравнения балки, т.е. для уравнения (1) при $\alpha=2$, $m=1, b=0$ изучены начально-граничные задачи. В данной работе на основании работ [8,11,12] получена теорема единственности и существования решения задачи (1) – (3) в пространстве Соболева. Решение построено в виде суммы ряда по системе собственных функций двухмерной спектральной задачи (4), (5).

Полнота системы собственных функций в классах Соболева.

Будем искать собственные функции задачи (4), (5) в виде произведения $v(x,y)=X(x)Y(y)$. Тогда для определения каждого $X(x)$ и $Y(y)$ мы получаем одномерную спектральную задачу вида:

$$X^{(4m)}(x)-\lambda X(x)=0,\quad 0<x<p, \tag{6}$$

$$X^{(4k)}(0)=X^{(4k+1)}(0)=X^{(4k)}(p)=X^{(4k+1)}(p)=0,\ k=\overline{0,m-1} \tag{7}$$

и

$$Y^{(2s)}(y)-\lambda Y(y)=0,\quad 0<y<q, \tag{8}$$

$$Y^{(2j)}(0)=Y^{(2j)}(q)=0,\quad j=\overline{0,\ s-1}. \tag{9}$$

Введем пространство $W_2^{\alpha}(0,p)$ с нормой

$$\|f\|^2_{W_2^s(0,p)}=\|f\|^2_{L_2(0,p)}+\left\|D^{\alpha}f\right\|^2_{L_2(0,p)},$$

где α произвольное натуральное число, при этом $W_2^0(0,l)=L_2(0,l)$.

Обозначим через $\overset{\circ}{V}{}_2^{4m}(0,p)$ множество всех функций $f(x)\in W_2^{4m}(0,p)$, удовлетворяющих граничным условиям $f^{(4k)}(0)=f^{(4k+1)}(0)=f^{(4k)}(p)=f^{(4k+1)}(p)=0$ при $k=0,1,\dots,\left[\frac{s+1}{2}\right]-1$. А также, через $\overset{\circ}{M}{}_2^{2s}(0,q)$ множество всех функций $g(y)\in W_2^{2s}(0,q)$, удовлетворяющих граничным условиям $g^{(2j)}(0)=g^{(2j)}(q)=0$ при $j=0,1,\dots,-[-s]-1$.

Далее, обозначим через $\overset{\circ}{V}{}_2^{4m,\,2s}\left((0,p)\times(0,q)\right)$ множество всех функций $f(x,y)\in W_2^{4m,2s}\left((0,p)\times(0,q)\right)$, удовлетворяющих граничным условиям $f^{(4k)}(0,y)=f^{(4k+1)}(0,y)=f^{(4k)}(p,y)=f^{(4k+1)}(p,y)=0$ при $k=0,1,\dots,\left[\frac{s+1}{2}\right]-1$ и граничным условиям $f^{(2j)}(x,0)=f^{(2j)}(x,q)=0$ при $j=0,1,\dots,-[-s]-1$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Система собственных функций*

$$X_n(x)=\frac{1}{\sqrt{1+d_n^{4s}}}\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{l}\left|tg\dfrac{d_n l}{2}\right|}\left(\dfrac{shd_n(x-\frac{l}{2})}{ch\dfrac{d_n l}{2}}-\dfrac{\sin d_n(x-\frac{l}{2})}{\cos\dfrac{d_n l}{2}}\right), & n=2i,\ i=1,2,...,\\ \dfrac{1}{\sqrt{l}\left|ctg\dfrac{d_n l}{2}\right|}\left(\dfrac{chd_n(x-\frac{l}{2})}{sh\dfrac{d_n l}{2}}+\dfrac{\cos d_n(x-\frac{l}{2})}{\sin\dfrac{d_n l}{2}}\right), & n=2i-1,\ i=1,2,\ldots\end{cases}$$

спектральной задачи (6) и (7) является полной ортонормированной системой в классе Соболева $\overset{\circ}{V}{}_2^{4m}(0,p)$, *где числа* d_n *являются положительними корнями трансцендентного уравнения* $chd_n l\cdot\cos d_n l=1$ *и этих положительных корней этого уравнения удовлетворяет неравенству* $0<d_1<d_2<...<d_n<...$, *при этом справедлива при больших* n *асимптотическая формула*

$$d_n=\frac{\pi n}{l}+\frac{\pi}{2l}+O\left(e^{-2\pi n}\right).$$

Лемма 1. *Система собственных функций*

$$Y_m(y)=\sqrt{\frac{2}{q}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{m\pi}{q}\right)^{2s}}}\sin\frac{m\pi}{q}y,\qquad m=1,2,...$$

спектральной задачи (8) и (9) является полной ортонормированной системой в классе Соболева $\overset{\circ}{M}{}_2^{2s}(0,q)$.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2. *Система собственных функций*

$$\left\{v_{n,m}(x,y)\right\}_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}=\left\{X_n(x)Y_m(y)\right\}_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}\qquad(10)$$

спектральной задачи (4), (5) является полной ортонормированный системой в классе Соболева $\overset{\circ}{V}{}_2^{4m,\,2s}\left((0,p)\times(0,q)\right)$.

Существование и единственность решения начально-граничной задачи.

Регулярным решением уравнения (1) в области $Q=\Pi\times(0,T)$ назовем функцию $u(x,y,t)$ из класса $u(x,y,t)\in C(\bar{Q})$, $D_{0t}^{\alpha}u(x,y,t)\in C(Q)$, $\dfrac{\partial^{4m-3}u(x,y,t)}{\partial x^{4m-3}}\in C(\bar{Q})$, $\dfrac{\partial^{4m}u(x,y,t)}{\partial x^{4m}}\in C(Q)$, $\dfrac{\partial^{2s-2}u(x,y,t)}{\partial y^{2s-2}}\in C(\bar{Q})$, $\dfrac{\partial^{2s}u(x,y,t)}{\partial x^{2s}}\in C(Q)$ и удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $(x,y,t)\in Q$.

Функцию $u(x,y,t)$ назовем регулярным решением задача (1)–(3) в области $Q=\Pi\times(0,T)$, если функция $u(x,y,t)$ регулярные решение уравнения (1) в области $Q=\Pi\times(0,T)$ и удовлетворяет начальным и граничным условиям (2) и (3).

Пусть функция $u(x,y,t)\in W_2^{s_1,\,s_2;\,\theta}(Q)$ с показателем $s_1=4m+1$, $s_2=2s+1$, $\theta=-[-\alpha]$ удовлетворяют уравнению (1) во всех точках $(x,y,t)\in Q$ и удовлетворяет начальным и граничным условиям (2) и (3). Тогда функция $u(x,y,t)$ является регулярным решением задача (1)–(3) в области Q.

Введем функции

$$T_{n,\,m}(t)=\int\limits_{\Pi}u(x,y,t)\tilde{v}_{n,m}(x,y)dxdy, \tag{11}$$

где $\tilde{v}_{n,\,m}(x,\,y)=\tilde{X}_n(x)\tilde{Y}_m(y)$,

$$\tilde{X}_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{l}\left|tg\dfrac{d_n l}{2}\right|}\left(\dfrac{shd_n(x-\dfrac{l}{2})}{ch\dfrac{d_n l}{2}}-\dfrac{\sin d_n(x-\dfrac{l}{2})}{\cos\dfrac{d_n l}{2}}\right), & n=2i,\ i=1,2,...,\\ \dfrac{1}{\sqrt{l}\left|ctg\dfrac{d_n l}{2}\right|}\left(\dfrac{chd_n(x-\dfrac{l}{2})}{sh\dfrac{d_n l}{2}}+\dfrac{\cos d_n(x-\dfrac{l}{2})}{\sin\dfrac{d_n l}{2}}\right), & n=2i-1,\ i=1,2,\ldots\end{cases}$$

и

$$\tilde{Y}_m(y)=\sqrt{\frac{2}{q}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{m\pi}{q}\right)^{2s}}}\sin\frac{m\pi}{q}y,\qquad m=1,2,\ldots.$$

В силу (1)–(3) неизвестные функции $T_{n,\,m}(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$D_{0t}^{\alpha}T_{n,\,m}(t)+\lambda_{n,m}T_{n,\,m}(t)=f_{n,\,m}(t),\ l-1<\alpha\le l,\ l\in\mathbb{N}, \tag{12}$$

и начальным условиям

$$\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-i}T_{n,\,m}(t)=(\varphi_i)_{n,\,m},\ i=1,2,...,l,\quad n,m\in\mathbb{N}, \tag{13}$$

где

$$f_{n,\,m}(t)=\int\limits_{\Pi}f(x,y,t)\tilde{v}_{n,\,m}(x,y)dxdy,\qquad (\varphi_j)_{n,\,m}=\int\limits_{\Pi}\varphi_j(x,y)\tilde{v}_{n,\,m}(x,y)dxdy. \tag{14}$$

Решение задачи Коши (12), (13) известно (см.,например [14, с. 601-602], [15, с. 221-223], [16, с. 16-17]) и оно имеет вид

$$T_{n,\,m}(t)=\sum_{j=1}^{l}(\varphi_j)_{n,\,m}\cdot t^{\alpha-j}\cdot E_{\alpha,\alpha-j+1}(\mu_{n,\,m}\cdot t^{\alpha})+$$

$$+\int\limits_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\cdot E_{\alpha,\alpha}\left[\mu_{n,\,m}\cdot(t-\tau)^{\alpha}\right]f_{n,\,m}(\tau)d\tau, \tag{15}$$

где

$$\mu_{n,\,m} = -\lambda_{n,\,m} = -a^2 d^{2m} - b^2 \left(\frac{\pi m}{q} \right)^2, \tag{16}$$

$$E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(\mu_{n,\,m} \cdot t^{\alpha} \right) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\left(\mu_{n,\,m} t^{\alpha} \right)^q}{\Gamma\left(\alpha q + \alpha - j + 1 \right)}, \tag{17}$$

$$E_{\alpha,\alpha}\left(\mu_{n,\,m} \cdot (t-\tau)^{\alpha} \right) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\left(\mu_{n,\,m} \right)^{q-1} (t-\tau)^{\alpha(q-1)}}{\Gamma(\alpha q)}. \tag{18}$$

Поскольку функции (11) построены в явном виде (15), то на основании полноты системы собственных функций (10) в $L_2(\Pi)$ нетрудно доказать единственность решения задачи (1) – (3). Пусть $f(x,y,t) \equiv 0$ и $\varphi_i(t) \equiv 0,\ i = \overline{1,l}$. Тогда из формулы (15) и (11) следует, что

$$\int_{\Pi} u(x,y,t) \tilde{v}_{n,\,m}(x,y)\, dxdy = 0$$

при всех $n,\ m \in \mathbb{N}$ и любом $t \in [0,T]$. Отсюда в силу полноты системы собственных функций (10) в $L_2(\Pi)$ вытекает, что $u(x,y,t) = 0$ почти всюду в области Π при любом $t \in [0,T]$. Как известно, по теореме вложения Соболева функция $u(x,y,t)$ непрерывна на $\bar{Q}$, то $u(x,y,t) \equiv 0$ в $\bar{Q}$. Это доказывают единственность решения задачи (1) – (3).

При каждом $t > 0$ функция $u(x,y,t) \in \overset{\circ}{V}{}_2^{\,s_1,\,s_2;\,\theta}(Q)$ по переменной (x,y) является функций из класса $u(x,y,t) \in \overset{\circ}{V}{}_2^{\,s_1,\,s_2}(\Pi)$. Поэтому, рассматривая $t > 0$ как параметр, решение задачи (1) – (3) будем искать из класса $\overset{\circ}{V}{}_2^{\,s_1,\,s_2;\,\theta}(Q)$ в виде суммы ряда по системе собственных функций (10) спектральной задачи (4), (5):

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T_{n,\,m}(t) \cdot \tilde{v}_{n,m}(x,y), \tag{19}$$

где $\tilde{v}_{n,\,m}(x,\,y) = \tilde{X}_n(x) \tilde{Y}_m(y)$, $T_{n,\,m}(t)$ – определяется по формуле (15).

После подстановки (15) в (19) мы получим единственное решение задачи (1) – (3) в виде ряда

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{l} \left(\varphi_j \right)_{n,\,m} t^{\alpha-j} \cdot E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(\mu_{n,\,m} \cdot t^{\alpha} \right) + \right.$$

$$\left. + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left[\mu_{n,\,m} \cdot (t-\tau)^{\alpha} \right] f_{n,\,m}(\tau)\, d\tau \right] \cdot \tilde{v}_{n,\,m}(x,\,y) \tag{20}$$

Поскольку система собственных функций (10) спектральной задачи (4), (5) образует базис Рисса в пространстве Соболева $\overset{\circ}{F}{}^{\,s_1,s_2}(\Pi)$, где через $\overset{\circ}{F}{}^{\,s_1,s_2}(\Pi)$

обозначено множество всех функций $f(x,y)\in H^{s_1,s_2}(\Pi)$, удовлетворяющих граничным условиям $f^{(4k)}(0,y)=f^{(4k+1)}(0,y)=0$, $f^{(4k)}(p,y)=f^{(4k+1)}(p,y)=0$ при $k=0,1,\ldots,\left[\frac{s_1+1}{2}\right]-1$ и граничным условиям $f^{(2j)}(x,0)=f^{(2j)}(x,q)=0$ при $j=0,1,\ldots,-\left[-\frac{s_2}{2}\right]-1$, то любая функция из этого класса разлагается единственным образом в ряд Фурье сходящийся по норме пространства $H^{s_1,s_2}(\Pi)$. Поэтому ряд (19) сходится в $H^{s_1,s_2}(\Pi)$ при любом $t\in[0,T]$. Выясним условия существования решения из класса $\overset{\circ}{V}{}_2^{s_1,\,s_2;\,\theta}(Q)$. Согласно теореме 2, система собственных функций (10) спектральной задачи (4), (5) образует базис Рисса в пространствах Соболева $\overset{\circ}{F}{}^{s_1,s_2}(\Pi)$ и $\overset{\circ}{V}{}_2^{s_1,\,s_2}(Q)$. Поэтому справедливо неравенство

$$\left\|u(x,y,t)\right\|^2_{C^{4m,\,2s}(\Pi)}\le c_8\left\|u(x,y,t)\right\|^2_{H^{s_1,\,s_2}(\Pi)}\le$$

$$\le c_9\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{l}\left(\varphi_j\right)_{n,m}\cdot t^{\alpha-j}\cdot E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(\mu_{n,m}\cdot t^{\alpha}\right)+\right.$$

$$\left.+\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\mu_{n,m}\cdot(t-\tau)^{\alpha}\right]f_{n,m}(\tau)\,d\tau\right|^2\cdot\left(1+d_n^{2s_1}\right)\left(1+\left(\frac{m\pi}{q}\right)^{2s_2}\right)<\infty. \qquad (21)$$

По теореме вложения Соболева условие (21) является достаточным условием сушествования регулярного решения задачи (1) – (3) из класса $\overset{\circ}{V}{}_2^{s_1,\,s_2;\,\theta}(Q)$ с показателем $s_1=4m+1$, $s_2=2s+1$, $\theta=-[-\alpha]$.

Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть начальные функций* $\varphi_i(x,y)$, $i=1,2,\ldots,l$ *и правую часть* $f(x,y,t)$ *удовлетворяет условию (21) при каждом* $t>0$. *Тогда регулярные решение задачи (1) – (3) из класса* $\overset{\circ}{V}{}_2^{s_1,\,s_2;\,\theta}(Q)$ *с показателем с показателем* $s_1=4m+1$, $s_2=2s+1$, $\theta=-[-\alpha]$ *существует, единственно и представляется в виде ряда (20), где коэффициенты определяется по формулам (14) – (18).*

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. 3-е изд. М.: Наука, 1977. 736 с.
2. Рэлей Л. Теория звука. 2-е изд. Т.1. М.: 1955. 504 с.
3. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.

4. Коренев Б.Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. М.: Наука, 1965. 355 с.
5. Коллатц Л., Задачи на собственные значения с техническими приложениями. М.: Наука, 1968. 504 с.
6. Гулд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях: Введение в метод промежуточных задач Вайнштейна. М.: Мир, 1970. 328 с.
7. Крылов А.Н. Вибирация судов. М.: Наука, 2012. 216 с.
8. Сабитов К.Б. Колебания балки с заделанными концами. // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19. N2, 311 - 324.
9. Сабитов К.Б. К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок. // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. N 1, С.89-100.
10. Сабитов К.Б. Начальная задача для уравнения колебаний балки. // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. N 5, С.665-671.
11. Касимов Ш.Г., Атаев Ш.К., Мадрахимов У.С. О разрешимости смешанной задачи для уравнения с частными производными дробного порядка с операторами Штурма-Лиувилля с нелокальными краевыми условиями. // Узбекский математический журнал. 2016. N2,С.158-169.
12. Касимов Ш.Г., Атаев Ш.К. О разрешимости смешанной задачи для уравнения с частными производными дробного порядка с операторами Лапласа с нелокальными краевыми условиями в классах Соболева. // Узбекский математический журнал. 2018. N1,С.1-16.
13. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.
14. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск. Наука и техника, 1987. 688 с.
15. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применения. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
16. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 200 с.
17. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. 3-е изд. М.: Наука, 1980. 688 с.
18. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965. 448 с.
19. Igor Podlubny. Fractional Differential Equations. Mathematics in science and engineering. Volume 198. 1999. p.340.
20. Сабитов К.Б., Касимов Ш.Г., Мадрахимов У.С. Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высокого порядка в многомерном случае // Вестник РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика». 2020. № 1. С. 75-101.

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ, СВЯЗАННЫЕ С УРАВНЕНИЯМИ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ С УЧЁТОМ ЕЁ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

[1]Касимов Ш.Г., [2]Кощанов А.П.
[1,2] Национальный Университет Узбекистана
[1]Ташкентский филиал НИЯУ МИФИ, г. Ташкент
shokiraka@mail.ru, allanazarkoshanov@mail.ru

Постановка задачи.

Изгибные поперечные колебания однородных тонких упругих стерженей и балок с учётом их вращательного движения при изгибе описывается дифференциальным уравнением в частных производных четвёртого порядка

$$u_{tt}(x,t)+a^2u_{xxxx}(x,t)-b^2u_{xxtt}(x,t)-c^2u_{xx}(x,t)=F(x,t),\quad (x,t)\in(0,l)\times(0,T), \quad (1)$$

где $u(x,t)-$ смещение точек балки в момент времени t.

Отметим, что многие задачи о колебаниях балок и пластин, которые имеют большое значение в строительной механике, приводят к дифференциальным уравнениям более высокого порядка [1, с. 141-143], [2, с. 278-280], [3, гл.3], [4, с.45], [5, с.35], [6. гл.4]. Отметим также, что к уравнению колебаний балки приходят во многих задачах при расчёте устойчивости вращающихся валов и изучении вибрации кораблей [7, гл.2].

В данной работе рассматривается дифференциальное уравнение с дробной производной

$$\begin{aligned} &D_{0t}^{\alpha}u(y,t)+a^2\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^{4m}u(y,t)}{\partial y_j^{4m}}+(-1)^m b^2\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^{4m}u(y,t)}{\partial y_j^{2m}\partial t^{2m}}+\\ &+(-1)^s c^2\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^{2s}u(y,t)}{\partial y_j^{2s}}=F(y,t),\quad (y,t)\in\Pi\times(0,T),\quad p-1<\alpha\le p \end{aligned} \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями

$$D_{0t}^{\alpha-i}u(y,t)\Big|_{t=0}=\varphi_i(y),\quad i=1,2,...,p, \quad (2)$$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial^{4k}u(y,t)}{\partial y_j^{4k}}\right|_{y_j=0}=0,\ \left.\dfrac{\partial^{4k+1}u(y,t)}{\partial y_j^{4k+1}}\right|_{y_j=0}=0,\\ \left.\dfrac{\partial^{4k}u(y,t)}{\partial y_j^{4k}}\right|_{y_j=l}=0,\ \left.\dfrac{\partial^{4k+1}u(y,t)}{\partial y_j^{4k+1}}\right|_{y_j=l}=0,\ k=\overline{0,m-1},\ j=\overline{1,N}, \end{cases} \quad (3)$$

которое при $\alpha=p=2,\ N=m=1,\ b=c=0$ имеет приложения в строительной механике, здесь $(y,t)=(y_1,...,y_j,...,y_N,t)\in\Pi\times(0,T)$, $\Pi=(0,l)\times...\times(0,l)$, $N,\ m,\ p\in\mathbb{N},\quad l,\ T>0$ – заданные положительные числа и $F(y,t)$,

$\varphi_i(y),\ i=1,2,...,p$ – достаточно гладкие функции разлагаемые по собственным функциям $\{v_n(y),\ n\in\mathbb{N}^N\}$ спектральной задачи:

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^{4m}v(y)}{\partial y_j^{4m}}-(a^2+\lambda b^2)\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^{2m}v(y)}{\partial y_j^{2m}}+\lambda v(y)=0 \tag{4}$$

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial^{4k}v(y)}{\partial y_j^{4k}}\right|_{y_j=0}=0,\ \left.\dfrac{\partial^{4k+1}v(y)}{\partial y_j^{4k+1}}\right|_{y_j=0}=0,\\ \left.\dfrac{\partial^{4k}v(y)}{\partial y_j^{4k}}\right|_{y_j=l}=0,\ \left.\dfrac{\partial^{4k+1}v(y)}{\partial y_j^{4k+1}}\right|_{y_j=l}=0,\ k=\overline{0,m-1},\ j=\overline{1,N},\end{cases} \tag{5}$$

λ – спектральный параметр.

Здесь при $\alpha<0$ дробная интеграл $\alpha<0$ имеет вид

$$D_{at}^{\alpha}u(y,t)=\frac{sign(t-a)}{\Gamma(-\alpha)}\int_a^t\frac{u(y,\tau)\cdot d\tau}{|t-\tau|^{\alpha+1}},$$

при $\alpha=0$, то $D_{at}^{\alpha}u(y,t)=u(y,t)$, а при $p-1<\alpha\le p,\ p\in\mathbb{N}$, дробная производная определяется по формуле

$$D_{at}^{\alpha}u(y,t)=sign^p(t-a)\frac{d^p}{dt^p}D_{at}^{\alpha-p}u(y,t)=\frac{sign^{p+1}(t-a)}{\Gamma(l-\alpha)}\frac{d^p}{dt^p}\int_a^t\frac{u(y,\tau)\cdot d\tau}{|t-\tau|^{\alpha-p+1}}.$$

В работах [8-10] для уравнения балки, т.е. для уравнения (1) при $\alpha=2$, $m=1, N=1$ изучены начально-граничные задачи. В данной работе на основании работ [8,11,12] получена теорема единственности и существования решения задачи (1) – (3) в пространстве Соболева. Решение построено в виде суммы ряда по системе собственных функций многомерной спектральной задачи (4), (5).

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. 3-е изд. М.: Наука, 1977. 736 с.
2. Рэлей Л. Теория звука. 2-е изд. Т.1. М.: 1955. 504 с.
3. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
4. Коренев Б.Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. М.: Наука, 1965. 355 с.
5. Коллатц Л., Задачи на собственные значения с техническими приложениями. М.: Наука, 1968. 504 с.
6. Гулд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях: Введение в метод промежуточных задач Вайнштейна. М.: Мир, 1970. 328 с.
7. Крылов А.Н. Вибирация судов. М.: Наука, 2012. 216 с.
8. Сабитов К.Б. Колебания балки с заделанными концами. // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19. N2, 311 - 324.

9. Сабитов К.Б. К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок. // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. N 1, С.89-100.
10. Сабитов К.Б. Начальная задача для уравнения колебаний балки. // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. N 5, С.665-671.
11. Касимов Ш.Г., Атаев Ш.К., Мадрахимов У.С. О разрешимости смешанной задачи для уравнения с частными производными дробного порядка с операторами Штурма-Лиувилля с нелокальными краевыми условиями. // Узбекский математический журнал. 2016. N2,С.158-169.
12. Kasimov Sh.G., Ataev Sh.K., On solvability of the mixed problem for a partial equation of a fractional order with Laplace operators and nonlocal boundary conditions in the Sobolev classes // Uzbek Mathematical Journal. Tashkent. "FAN". 2018. № 1. P. 73 - 89.
13. Сабитов К.Б., Касимов Ш.Г., Мадрахимов У.С. Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высокого порядка в многомерном случае // Вестник РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика». 2020. № 1. С. 75-101.

14. Сабитов К.Б. Начально-граничные задачи для уравнения колебаний балки с учётом её вращательного движения при изгибе // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. N 3, С. 364 - 374.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАЗЛИЧНОГО ТИПА

Каххаров А.Э., Буранов Ж.И., Хусанов Д.Х.
Академический лицей имени И.Каримова ТГТУ

Интенсивное развитие науки и техники, создание новых информационных технологий определяют необходимость разработки новых подходов к исследованию проблемы устойчивости управляемыми системами, моделируемых дифференциальными уравнениями. Значительное место в решении этой проблемы занимает разработка качественных методов исследования, одним из которых является прямой метод Ляпунова и его развитие – метод сравнения с вектор-функцией Ляпунова. Метод сравнения является универсальным методом анализа различных свойств систем, независимо от их сложности, природы и структуры, эффективным в динамике систем и теории управления.

В тезисе рассматривается задача об устойчивости положения равновесия и стационарных движений механических систем.

Рассмотрим голономную механическую систему, описываемую n обобщенными координатами $q_1, q_2, \dots, q_n$, с кинетической энергией

$2T = \dot{q}^T A(q)\dot{q},$ находящуюся под действием потенциальных сил с потенциальной энергией $\Pi = \Pi(t,q),\ \frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0,$ при $q = 0$ для всех $t \in R^+$, и других обобщенных сил с равнодействующей $Q = Q(t,q,\dot{q}), Q(t,0,0) \equiv 0.$

Уравнения движения такой системы могут быть записаны в форме уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} + Q \tag{1}$$

Теорема 1. Предположим, что:

1) $\Pi = \Pi(t,q)$ имеет в точке $q = 0$ изолированный минимум, $\left\|\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right\| \geq \delta(\eta) > 0,$ для всех $t \in R^+$ и $q \in G_{\eta\varepsilon} = \{0 < \eta \leq \|q\| < \varepsilon\}$;

2) совместное действие всех сил таково, что для всех $(t,q,\dot{q}) \in R^+ \times G_\varepsilon \times G_\varepsilon$, $(t,\dot{q}) \in R^+ \times G_\varepsilon$, $(t,\dot{q}) \in R^+ \times G_{\eta\varepsilon}$ выполняются соответственно соотношения

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t}(t,q) + \dot{q}^T Q(t,q,\dot{q}) \leq f(t, T + \Pi) + g(t,\dot{q})$$

$$g(t,\dot{q}) \leq 0, \left|g(t,\dot{q})\right| \geq \delta(\eta) > 0$$

3) нулевое решение скалярного уравнения $\dot{u} = f(t,u)$ устойчиво.

Тогда положение равновесия $\dot{q} = q = 0$ системы (1) является асимптотически устойчивым.

Пусть обобщенные координаты механической системы (1) разделяются на позиционные и квазициклические $q = (r,z)',\ r = (q_1,...,q_k)'$ и $z = (z_1,...,z_{n-k})' = (q_{k+1},...,q_n)'$, так что $\frac{\partial T}{\partial z} \equiv 0, \frac{\partial \Pi}{\partial z} \equiv 0.$

Кинетическая и потенциальная энергии, равнодействующая обобщенных сил системы представляются в виде

$$2T = \dot{r}' A(r)\dot{r} + 2\dot{r}' B(r)\dot{z} + \dot{z}' C(r)\dot{z},\ \ \Pi = \Pi(t,r),$$

$$Q = (Q^r, Q^z)', Q^r = Q^r(t,r,\dot{r}), Q^z = Q^z(t,\dot{z})$$

Тогда уравнения движения системы могут быть записаны в следующей форме

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial R}{\partial r} = Q^T,\ \frac{dp}{dt} = Q^z,\ \frac{dz}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial p} \tag{2}$$

где

$$R = R(t, r, \dot{r}, p) = R_2 + R_1 - W, 2R_2 = \dot{r}' F \dot{r}, F = A - BC^{-1}B',$$
$$R_1 = p'C^{-1}B'r, W(t, r, p) = \Pi + \frac{1}{2} p'C^{-1}p$$

Допустим, что при $\dot{r} = r = 0, p = p_0, \dot{z}_0 = C^{-1}(0)p_0$ для всех $t \in R^+$ выполняются равенства $\frac{\partial W}{\partial p} = 0, Q^r = Q^z = 0$.

Тогда система имеет установившееся движение

$$r = 0, \dot{r} = 0, p = p_0, \dot{z} = \dot{z}_0 = C^{-1}(0)p_0 \qquad (3)$$

Теорема 2. Предположим, что:

1) функция $W(t, r, p)$ имеет при $p = p_0$ в точке $r = 0$ изолированный минимум, $\left\| \frac{\partial W}{\partial r} \right\| \geq \delta(\eta) > 0$ при $p = p_0$ для всех $t \in R^+$ и $r \times G_{\eta\varepsilon}$;

2) совместное действие сил по позиционным координатам таково, что при $p = p_0$ для всех $(t, r, \dot{r}) \in R^+ \times G_\varepsilon \times G_\varepsilon$, $(t, \dot{r}) \in R^+ \times G_\varepsilon$ и $(t, \dot{r}) \in R^+ \times G_{\eta\varepsilon}$ выполняются соответственно соотношения

$$\frac{\partial W}{\partial t}(t, r, p_0) + \dot{r}' Q^r(t, r, \dot{r}) \leq f^r(t, R_2 + W) + g(t, \dot{r})$$
$$g(t, \dot{r}) \leq 0, \left| g(t, \dot{r}) \right| \geq \delta(\eta) > 0$$

3) действие сил по циклическим координатам таково, что для всех $t \in R^+, \beta \in \left\{ \beta \in R^{n-k} : \|\beta\| < \varepsilon \right\}$ выполняются скалярные неравенства $Q_i^z(t, \dot{z} - \dot{z}_0)\beta_i \leq f_i^z(t, \beta_1^2, \beta_2^2, ..., \beta_{n-k}^2), (i = 1, ..., n-k),$ где $f^z = (f_1^z, f_2^z, ..., f_{n-k}^z)^T$ – квазимонотонная функция;

4) нулевые решения скалярного уравнения $\dot{u} = f^r(t, u)$ и векторного уравнения сравнения $\dot{u} = f^z(t, u)$ устойчивы.

Тогда установившееся движение (3) системы (2) устойчиво по $r, \dot{r}, \dot{z}$, асимптотически устойчиво по $r, \dot{r}$ относительно движений, отвечающих невозмущенному значению $p = p_0$.

Теоремы 1 и 2 развивают и дополняют результаты работ [1-5] об устойчивости установившегося движения механических систем.

Литература

1. Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости неавтономных систем / А.С. Андреев // ПММ. – 1979. – Т. 43. – С. 796-805.
2. Андреев А.С. К методу сравнения в задачах об асимптотической устойчивости / А.С. Андреев, О.А. Перегудова // ПММ. – 2006. – Т. 70. – В. 6. – С. 965-976.
3. Перегудова О.А. Метод сравнения в задачах устойчивости и управления движениями механических систем / О.А. Перегудова. – Ульяновск: УлГУ, 2009. – 253 с.
4. Хусанов Д.Х. Метод функций Ляпунова в исследованиях устойчивости уравнени с периодической правой частью. ДАН Рес. Уз. Том 6, стр.3-6, 2002 г.
5. Хусанов Дж.Х., Бердияров А.Ш., Буранов Ж.И. Функционалы и функционально-дифференциальные уравнения. Устойчивость решений. VII Международная конференция «Математика, ее приложения и математическое образование» г. Улан-Удэ, Байкал, 7 – 12 сентября 2020 г., ISBN 978-5-907331-29-7, с.228-232.

ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ УЧАСТКОВ МАКСИМАЛЬНОЙ ТЯГИ В СЛУЧАЕ ЦЕНТРАЛЬНОГО НЬЮТОНОВСКОГО ПОЛЯ

Коршунова Н.А., Собитова К.У.
Национальный университет Узбекистана
bea40371@rambler.ru

Существует проблема оптимизации движения точки переменной массы (центр масс космического аппарата) в гравитационных полях. Наиболее важной, но и наиболее трудной частью проблемы является определение аналитических решений для участков максимальной тяги (МТ). Для дифференциальных уравнений вариационной задачи, описывающих участки МТ и имеющих четырнадцатый порядок, известно в случае центральных полей только пять общих интегралов. Невозможность проинтегрировать дифференциальные уравнения вариационной задачи на участках МТ привела к созданию импульсной теории, в которой полагают, что секундный расход массы равен бесконечности, то есть, резерв тяги ракетного двигателя неограничен. Активные участки аппроксимируют точками соединения. На практике такая аппроксимация часто не отражает истинного маневра. Поэтому представляет интерес определение частных интегралов и частных аналитических решений для активных участков.

Рассмотрим вариационную задачу о движении точки с ограниченным секундным расходом массы в плоском случае центрального ньютоновского поля. Система дифференциальных уравнений вариационной задачи имеет гамильтонову форму [1]

$$\dot{\vec{v}} = \frac{cm}{M}\frac{\vec{\lambda}}{\lambda} - \frac{\mu}{r^3}\vec{r}\,;\;\; \dot{\vec{r}} = \vec{v}\,;\;\; \dot{M} = -m\,;$$

$$\dot{\vec{\lambda}} = -\vec{\lambda}_r\,;\;\; \dot{\vec{\lambda}}_r = \frac{\mu}{r^3}\vec{\lambda} - \frac{3\mu}{r^5}(\vec{r}\cdot\vec{\lambda})\vec{r}\,;\;\; \dot{\lambda}_M = \frac{cm}{M^2}\lambda\,. \qquad (1)$$

Здесь $\vec{v},\vec{r}$, $M(t)$ - скорость, радиус-вектор и масса точки; $\vec{\lambda},\vec{\lambda}_r,\lambda_M$ - множители Лагранжа, сопряженные $\vec{v},\vec{r}$ и M соответственно; c – относительная скорость истечения продуктов сгорания; μ - гравитационный параметр центра притяжения; m - секундный расход массы. Для участков МТ $m = \tilde{m}$.

В работе [2] показано, что выражение $\vec{\lambda} = n(t)\vec{v}$ является частным интегралом системы (1) на участках МТ, то есть вектор тяги направлен по скорости. Поскольку базис-вектор $\vec{\lambda}$ должен удовлетворять уравнениям (1), то коэффициент пропорциональности n принимает следующее значение

$$n = \frac{1}{-\alpha t - \gamma},$$

где α,γ - произвольные постоянные.

Можно показать, что оба интеграла

$$\lambda_i = -\frac{1}{\alpha t + \gamma}v_i \;\; (i = 1,2) \qquad (2)$$

имеют место при выполнении условия $\frac{cm}{Mv} = \frac{2\alpha}{\alpha t + \gamma}$. Учитывая интегралы (3) и соотношение $M = M_0 - \tilde{m}t$ [1], первое уравнение системы (1) в плоском случае запишем следующим образом

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{\beta}{1-\beta t}k(t)\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{\mu}{r^3}x, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{\beta}{1-\beta t}k(t)\dfrac{dy}{dt} - \dfrac{\mu}{r^3}y \end{cases} \qquad (3)$$

Здесь $\beta = \dfrac{\tilde{m}}{M_0}$, $k(t) = \dfrac{c}{v}$. Система (4) неавтономная. Сведём её к автономной при помощи следующего преобразования

$$\xi = f(t)x, \quad \eta = f(t)y, \quad d\tau = f_1(t)dt \qquad (4)$$

Найдём это преобразование. Первое уравнение системы (3) в новых переменных примет вид

$$\frac{1}{f}\frac{d\xi}{d\tau}\frac{df_1}{dt}-2\frac{f_1}{f^2}\frac{d\xi}{d\tau}\frac{df}{dt}+\frac{f_1^2}{f}\frac{d^2\xi}{d\tau^2}-\frac{\xi}{f^2}\frac{d^2f}{dt^2}+\frac{2\xi}{f^3}\left(\frac{df}{dt}\right)^2=$$
$$=\frac{\beta k(t)}{1-\beta t}\left(\frac{f_1}{f}\frac{d\xi}{d\tau}-\frac{\xi}{f^2}\frac{df}{dt}\right)-\frac{\mu\xi f^3}{f\rho^3}, \qquad (5)$$

где $r^3=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3=\left(\sqrt{\left(\frac{\xi}{f}\right)^2+\left(\frac{\eta}{f}\right)^2}\right)^3=\frac{\left(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\right)^3}{f^3}=\frac{\rho^3}{f^3}$

Чтобы уравнение (5) свести к автономному

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2}=-\frac{\mu\xi}{\rho^3},$$

коэффициенты при этих величинах должны быть равными, а коэффициенты при $\frac{d\xi}{d\tau}$ и ξ должны быть равны нулю:

$$f_1^2=f^3$$
$$\frac{1}{f}\frac{df_1}{dt}-2\frac{f_1}{f^2}\frac{df}{dt}-\frac{\beta k}{1-\beta t}\frac{f_1}{f}=0,$$
$$-\frac{d^2f}{dt^2}+\frac{2}{f}\left(\frac{df}{dt}\right)^2+\frac{\beta k}{1-\beta t}\frac{df}{dt}=0.$$

Из полученной системы найдём функции

$$k=\frac{A(1-\beta t)}{1-A(1-\beta t)},\quad f=B(1-A+A\beta t)^{-2},\quad f_1=B^{3/2}(1-A+A\beta t)^{-3}.$$

Здесь A, B - произвольные постоянные.

Таким образом, преобразование (4) найдено

$$\xi=\frac{Bx}{(1-A+A\beta t)^2};\qquad \eta=\frac{By}{(1-A+A\beta t)^2};\quad d\tau=\frac{B^{3/2}dt}{(1-A+A\beta t)^3}$$

Перейдя к полярным координатам, решение уравнений

$$\frac{d^2\xi_i}{d\tau^2}=-\frac{\mu}{\rho^3}\xi_i,\ (i=1,2)$$

можно записать в виде

$$r = \frac{b^2\left[1 - A(1 - \beta t)\right]^2}{B\mu(1 + \varepsilon\cos\varphi)},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{B^{3/2}\mu^2(1 + \varepsilon\cos\varphi)^2}{b^3\left[1 - A(1 - \beta t)\right]^3},$$

где b, ε - произвольные постоянные.

Таким образом, траекториями точки оказались дуги спиралевидных кривых, перейти на которые можно в определенных точках эллиптической орбиты. Найденное решение применено к задаче об оптимальном уходе с эллиптической орбиты. В двух точках эллиптической орбиты, где трансверсальная составляющая скорости равна местной круговой (истинная аномалия равна 90° или 270°), координаты точки, её скорость, составляющие базис-вектора совпадают с начальными условиями найденного участка МТ. Приложив в одной из этих точек реактивную силу, величина и направление которой изменяются по найденным законам, точка перейдёт на участок МТ. Найдены аналитические и графические зависимости от эксцентриситета эллиптической орбиты величин, описывающих маневр ухода: характеристики расхода массы, направление силы тяги, угловая и радиальная дальности участка МТ, его длительность, изменение скорости точки. Показано, что эксцентриситет начального эллипса должен быть не меньше некоторой величины, а следовательно, полученное решение не применимо в случае малых эксцентриситетов, в частности при решении задачи об уходе с круговой орбиты. В числовом примере используется гравитационный параметр Земли.

Литература

1. Азизов А.Г., Коршунова Н.А. Вариационные задачи механики космического полета. - Учебное пособие. – Т.: ТашГУ, 1991.
2. Азизов А.Г., Коршунова Н.А. О траекториях полета с максимальной касательной тягой в центральном ньютоновском поле // Космические исследования. – Москва, 1983. – Т.21. Вып.4. – С. 538-542.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

[1]Куйлиев С.Б., [2]Имомназаров Х.Х., [3]Урев М.В., [4]Искандаров И.К.

[1]Саманкандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан

[2,3]Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН. Проспепкт Лаврентьева 6, 630090, г. Новосибирск, Россия

[4]Тихоокеанский государственный университет, 680035, г. Хабаровск, Тихоокеанская ул., 136, Россия
imom@omzg.sscc.ru

Многофазные потоки широко распространена и часто бывает определяющей в технологических и природных процессах. С многофазными потоки как правило приходится иметь дело гораздо чаще, чем с однофазными. Следовательно, возникающие начально краевые задачи для таких сред является актуальной и важной проблем гидромеханики вообще и механики многофазных сплошных сред в частности [1-3].

Гетерогенные многофазные среды описывают многообразие, взаимовлияние явлений и сложность эффектов, возникающих благодаря неоднофазности. К таким эффектам можно отнести фазовые переходы, химические превращения, капиллярные эффекты, сегрегации, пульсационное и хаотическое движение, деформация фаз, процессы столкновений, дроблений, коагуляции частиц и т.д.

Основной проблемой при математическом моделирования многоскоростного континуума является построение термодинамически согласованных замкнутых динамических уравнений смеси для заданных физико-химических свойств каждой фазы и заданной исходной структуры смеси. При стационарном случае, когда имеет место равновесие фаз по давлению и в диссипативном приближении когда потеря энергии происходит только за счет вязкостей фаз, система уравнений оказывается переопределенной [4-8].

Обобщенное решение системы Навье-Стокса в двухмерных неограниченных областях, в частности в полуплоскости, имеет существенное отличие от трехмерного случая. Именно, в двухмерном случае для скоростей невозможно удовлетворить наперед поставленным условиям на бесконечности и ставится условие ограниченности на бесконечности. В [5] показано, что обобщенное решение $\mathbf{u}$ задачи Стокса, принадлежащее $\mathbf{V}(\mathbb{R}^2_+)$, $\mathbb{R}^2_+ = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$, имеет вполне определенный предел $\lim\limits_{x_2 \to +\infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^\infty = \text{const}$, если массовая сила $\mathbf{f}$ имеет компактный носитель или достаточно быстро убывает при $x_2 \to +\infty$. Таким образом, вектор $\mathbf{u}^\infty$ определяется $\mathbf{f}$ и не может задаваться произвольно.

Вторая краевая задача для двухскоростной системы Стокса с одним давлением в полупространстве.

При заданном давлении p двухжидкостной среды для одной из скорости $\mathbf{w}$ получим следующую задачу

$$\Delta \mathbf{w} = \mathbf{F}, \ \operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \ \text{в} \ \mathbb{R}^2_+, \ \mathbf{w}|_S = \mathbf{0}, \qquad (1)$$

где $S = \{(x_1, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\}$, $\mathbf{F} = \frac{1}{\nu}\left(\nabla p - \rho \mathbf{f}\right)$, ν - соответствующая сдвиговая вязкость, ρ - общая плотность двухжидкостной среды.

Другими словами, давление p перенормирует массовую силу $\mathbf{f}$ и поле скорости $\mathbf{w}$ является соленоидальным решением краевой задачи для векторного уравнения Пуассона [].

Разложение Вейля для случая ограниченной области с достаточно гладкой границей [3, с. 41] справедливо и для полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$ [8, с. 43]. Пространство $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2_+)$ раскладывается в прямую сумму

$$\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2_+) = \overset{\circ}{\mathbf{J}}(\mathbb{R}^2_+) \oplus \mathbf{G}(\mathbb{R}^2_+)$$

замкнутых подпространств соленоидальных и потенциальных векторных полей.

Обозначим через $\mathbf{V}(\mathbb{R}^2_+)$ пополнение $\dot{\mathbf{J}}(\mathbb{R}^2_+)$ по введенной норме с соответствующей этому замыканию нормой $\| \mathbf{u} \|_{\mathbf{V}(\mathbb{R}^2_+)} \forall u \in \mathbf{V}(\mathbb{R}^2_+)$. Легко видеть, что $\mathbf{V}(\mathbb{R}^2_+)$ является замкнутым подпространством в пространстве вектор-функций $\mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+) = \left(V_0^1(\mathbb{R}^2_+)\right)^2$. После замыкания по норме пространства $\mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+)$, неравенство

$$\| \mathbf{w} \|_{\mathbf{L}_{2,\omega}(\mathbb{R}^2_+)} \le 2 \| \mathbf{w}_{\mathbf{x}} \|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2_+)} \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2_+),$$

где $L_{2,\omega}(\mathbb{R}^2_+) = \{u : \omega u \in L_2(\mathbb{R}^2_+)\}$, $\omega(x_2) = \frac{1}{(3+x_2)\ln(3+x_2)}$, становится верным для $\forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+)$. $\mathbf{V}(\mathbb{R}^2_+)$ замкнутое подпространство в $\mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+)$, определяемое как

$$\mathbf{V}(\mathbb{R}^2_+) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+) : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}.$$

Хейвудом доказано [10, теорема 9], что $\mathbf{V}(\mathbb{R}^2_+) = \mathbf{V}(\mathbb{R}^2_+)$ (в его обозначениях $J_0^*(\mathbb{R}^2_+) = J_0(\mathbb{R}^2_+)$).

Теперь перейдем к рассмотрению системы уравнений (1) относительно скорости $\mathbf{w}$ второй фазы жидкости с уже известным давлением $p \in M = L_2(\mathbb{R}^2_+)$.

Для $p \in M$ градиент ∇p есть линейный непрерывный функционал над пространством $\mathbf{X} = \mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+)$, действующий по правилу

$$< \nabla p, \mathbf{w} >= -\int_{\mathbb{R}^2_+} p(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{w}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{X},$$

то есть $\nabla p \in \mathbf{X}^* = \mathbf{V}^{-1}(\mathbb{R}^2_+)$.

Лемма. Справедливо неравенство

$$\| p \|_{0,\mathbb{R}^2_+} \le K \| \nabla p \|_{-1,\mathbb{R}^2_+}, \qquad \forall p \in M,$$

где $K > 0$ --постоянная.

Таким образом, в задаче (1) правая часть $\mathbf{F} \in \mathbf{X}^* \subseteq \mathbf{V}^*(\mathbb{R}^2_+)$. Обобщенное решение переопределенной задачи (1) следуя [3], [4] будем искать в подпространстве $\mathbf{V}(\mathbb{R}^2_+)$ соленоидальных векторных функций. Требуется найти $\mathbf{w} \in \mathbf{V}(\mathbb{R}^2_+)$:

$$(\nabla \mathbf{w}, \nabla \mathbf{v})_{0,\mathbb{R}^2_+} = < \mathbf{F}, \mathbf{v} >_{-1,1,\mathbb{R}^2_+}, \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}(\mathbb{R}^2_+). \qquad (2)$$

Имеем

$$(\nabla \mathbf{w}, \nabla \mathbf{w})_{0,\mathbb{R}^2_+} = \| \mathbf{w} \|^2_{1,\mathbb{R}^2_+}, \qquad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}(\mathbb{R}^2_+),$$

то есть билинейная форма в левой части (2) $\mathbf{V}(\mathbb{R}^2_+)$ -- коэрцитивна. Правая часть в (2) есть линейный непрерывный функционал над элементами пространства $\mathbf{V}(\mathbb{R}^2_+)$. Тогда по лемме Лакса-Мильграма задача (2) имеет единственное решение $\mathbf{w} \in \mathbf{V}(\mathbb{R}^2_+)$ и

$$\| \mathbf{w} \|_{1,\mathbb{R}^2_+} \le C \| \mathbf{F} \|_{-1,\mathbb{R}^2_+}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 21-51-15002).

Литература

1. Доровский В.Н. Образование диссипативных структур в процессе необратимой передачи импульса литосферы // Геология и геофизика, 1987, № 6, с. 108-117.

2. Доровский В.Н., Перепечко Ю.В. Теория частичного плавления // Геология и геофизика, 1989, № 9, с. 56-64.

3. Джураев Д., Имомназаров Х.Х., Урев М.В. Краевая задача для одной переопределенной системы, возникающей в двухскоростной гидродинамике // Тезисы республиканской научной конф. (с участием зарубежных ученых) "Математическая физика и родственные проблемы современного анализа", 26-27 ноября 2015 г., Бухара, с. 197-198.

4. Имомназаров Х.Х., Имомназаров Ш.Х., Маматкулов М.М., Черных Е.Г. Фундаментальное решение для стационарного уравнения двухскоростной гидродинамики с одним давлением // Сиб. журн. индустр. матем., 2014, т. 17, № 4, с. 60-66.

5. Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х. Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред. Ташкент, 2012., 212 с.

6. Жураев Д.А., Жиан-Ган Тан, Имомназаров Х.Х., Урев М.В. Краевая задача для одной переопределенной системы, возникающей в двухжидкостной среде // УзбМЖ, 2016, No.3, с. 58-69.

7. Урев М.В., Имомназаров Х.Х., Жиан-Ган Тан. Краевая задача для одной переопределенной стационарной системы, возникающей в двухскоростной гидродинамике // Сиб. журн. вычисл. математики. 2017. Т. 20, No 4. С. 425-437.
8. Перепечко Ю. В., Сорокин К. Э., Имомназаров Х. Х. Влияние акустических колебаний на конвекцию в сжимаемой двухжидкостной среде // Труды XVII Международная конференция "Современные проблемы механики сплошной среды", Ростова-на-Дону, 2014, с. 166-169.
9. Солонников В.А. Оценки решений нестационарной линеаризованной системы уравнений Навье-Стокса // Тр. МИАН СССР. 1964. Т. 70. С. 213-317.
10. Солонников В.А. Оценки решения одной начально-краевой задачи для линейной нестационарной системы уравнений Навье-Стокса // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1976. Т. 59. С. 178-254.
11. Солонников В.А. Оценки решения второй начально-краевой задачи для системы Стокса в пространствах функций с непрерывными по Гельдеру производными по пространственным переменным // Зап. научн. семин. ПОМИ. 1999. Т. 259. С. 254-279.
12. Бондарь Л.Н. Разрешимость второй краевой задачи для системы Стокса // Сиб. журн. индустр. матем. 2014. Т. 17, No 3. С. 26-39.
13. Amrouche C., Girault V. *Problemes generalises de Stokes //* Portugaliae Mathematica, 1992, v. 49, pp. 463-503.
14. Borchers W., Miyakawa T. L^2 *-decay for Navier-Stokes flows in* unbounded *domains,* with *applications to exterior stationary flo*ws // Arch. Rat. Mech. Anal., 1992, v. 118, pp. 273-295.
15 Borchers W., Sohr H. On the *semigroup of* the *Stokes* operator for *exterior domains in* L^q *spaces //* Math. Z, 1987, v.196, pp. 415---425.
16. Finn R. On the *exterior stationary problem of* the *Navier-Stokes equations* and associated *perturbation problems //* Arch. Rat. Mech. Anal., 1965, v.19, pp. 363-406.
17. Galdi G.P., Simader C.G., *Existence, uniqueness* and L^q *--estimates for* the *Stokes problem in* an *exterior* domain // Arch. Rat. Mech. Anal, 1990, v. 112, pp. 291-318.
18. Giga Y. *Analyticity of* the *semigroup* generated *by* the *Stokes* operator *in* L^q *spaces //* Zeitschrift 1981, pp. 297-329.
19. Giga Y., Sohr H. On the *Stokes* operator *in exterior* domains // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 1989, v. 36, pp. 103-130.
20. Girault V. The gradient, *divergence, curl* and *Stokes operators in weighted Sobolev spaces* of R^3 // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 1992, v. 39, No. 2, pp. 279-307.
21. Girault V., Sequeira A. *A well-posed problem for* the *exterior Stokes equations in two* and three *dimensions //* Arch. Rat. Mech. and Anal, 1991, v. 114, pp. 313-333.

22. Girault V., Giroire J., Sequeira A. *A* stream *function-vorticity* variational *formulation for* the *exterior Stokes problem in weighted Sobolev spaces,* Math. Meth. in App. Sci., 15 (1992), 345-363.
23. Temam R. Navier-Stokes Equations. Theory and Analysis, North-Holland, Amsterdam, 1985.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Курбанов О.Т, Холбоев Б.М.
Ташкентский филиал РЭУ им. Г.В. Плеханова

Требуется определить в области $D=\{(x,y): h_1(y)<x<h_2(y), 0<y\le 1\}$ функцию u(x,y), обладающую свойствами:

1) $u(x\,y)\in C^{3,1}(D)\cap C^{2,0}(x=h_2(y), 0<y\le 1)\cap C^{1,0}(\overline{D})$;

2) являющейся регулярным решением уравнение

$$L(x,y)\equiv u_{xxx} - u_y = f(x,y,u(x,y)) \tag{1}$$

в области D;

3) удовлетворяющую условиями

$$u(x,o)=u_0(x),\quad h_1(0)\le x\le h_2(0) \tag{2}$$

$$u(h_1(y),y)=\varphi(y)\ ,\ 0\le y\le 1 \tag{3}$$

$$u_x(h_1(y),y)=\psi(y)\ ,\ 0\le y\le 1 \tag{4}$$

$$u_{xx}(h_2(y),y)+\alpha u_x(h_2(y),y)=g(u(h_2(y),y),y)\ ,\ 0\le y\le 1 \tag{5}$$

а также естественные условия согласования в угловых точках:

$$u_0''(h_2(0))+u_0'(h_2(0))=g(u_0(h_2(0)),0)\ ,\quad u_0(h_1(0))=\varphi(0)\ ,$$

$$u_0'(h_2(0))=\psi(0)\ .$$

Имеет место

Теорема. Пусть $h_r(y)\in C^1[0;1], r=1,2$ и $g(u,y)$, $f(x,y,u(x,y))$ непрерывные функции своих аргументов $0\le y\le 1$ при любом $|u|<\infty$, удовлетворяющие условии

$$|g(u_1,y)-g(u_2,y)|\le l(y)|u_1-u_2| \tag{6}$$

$$|f(x,y,u_1)-g(x,y,u_2)|\le L(x,y)|u_1-u_2|. \qquad (7)$$

Тогда решение задачи (1) - (5) единственно.

Единственность решение задачи доказано методом интегралов энергии, применением некоторые элементарные неравенства.

Литература

1. L. Cattabriga. Un problem al contorno per una equazione parabolica di ordin dispari. Amali della Souola Normale Superiore di Pisa a Matematicha. Seria III. Vol XIII. Fasc. II. 1959. – P.163 - 203.
2. Хашимов А.Р. Нелинейные краевые задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Уз МЖ .1993. № 2.
с.97 - 102.
3. Курбанов О.Т., Холбоев Б.М. Об одной нелинейной краевой задаче для уравнения нечетного порядка с кратными характеристиками// Уз МЖ. 2003. № 3 - 4. с. 35 - 40.

МЕТОД РАЗРЕШАЮЩИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ЗАДАЧИ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Мамадалиев Н.
Национальный университет Узбекистана,
m_numana59@mail.ru

В конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим конфликтно-упавляемый процесс, эволюция которого описывается линейным дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом [1]

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-h) - Cu(t) + Dv(t), \qquad (1)$$

где $z(t)\in\mathbb{R}^n$, $n\ge 1$, $u(t)\in\mathbb{R}^m$, $m\ge 1$, $v(t)\in\mathbb{R}^k$, $k\ge 1$, $t\ge 0$; $h\ge 0$ – фиксированное действительное число, величина запаздывания; A, B – постоянные прямоугольные матрицы размерности которых $(n\times n)$, $(n\times n)$, C, D – постоянные прямоугольные матрицы порядка $(n\times m)$ и $(n\times k)$. Функции $u(t)$ и $v(t)$ – называются *управлениями* преследующего и убегающего игроков, соответственно. Управления $u=u(\cdot)$, $v=v(\cdot)$ выбираются из класса $L_p[0,+\infty)$, $p\ge 1$, измеримых векторных функций, удовлетворяющих интегральным ограничениям

$$\int_0^\infty \|u(\cdot)\|^p \le \rho^p, \quad \int_0^\infty \|v(\cdot)\|^p \le \sigma^p, \quad \rho>0, \quad \sigma>0, \qquad (2)$$

в этих неравенствах ρ и σ – константы.

Измеримые функции $u(t)$, $v(t)$, $0 \le t < +\infty$, удовлетворяющие интегральным ограничениям (2), назовем *допустимыми управлениями* преследующего и убегающего игроков, соответственно.

Кроме процесса (1) в пространстве $\mathbb{R}^n$ выделено терминальное множество M, имеющая цилиндрический вид $M = M_0 + M_1$, где M_0 – линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, M_1 – выпуклое компактное подмножество подпространства L, L – ортогональное дополнение к подпространству M_0 в $\mathbb{R}^n$(т.е. $M_0 \oplus L = \mathbb{R}^n$). Задача убегающего противоположна – избежать встречи с терминальным множеством M.

Начальным положением для преследования является n – мерная функция $z_0(\cdot) \in X$, где

$$X = \left\{ \begin{matrix} z_0(\cdot) : z_0(t) - \textit{абсолютно непрерывная функция}, \\ \textit{определенная на отрезке}\, [-h, 0],\ z_0(0) \in \mathbb{R}^n \setminus M \end{matrix} \right\}. \qquad (3)$$

Через $K(t), -\infty < t \le \tau, -$ обозначим матричную функцию, обладающую следующими свойствами: а) $K(t) = \tilde{0},\ t < 0,\ \tilde{0}$ – нулевая матрица порядка n; б) $K(0) = E$, E – единичная матрица порядка n; в) элементы матрицы $K(t)$, $0 \le t \le \tau$, принадлежат классу $C^1[0, \tau]$; г) $K(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{K}(t) = AK(t) + BK(t-h),\ t > 0. \qquad (4)$$

Заметим, что матричная функция $K(t), -\infty < t \le \tau$, удовлетворяющая условиям а) - б) может быть получена обычным методом интегрирования по шагам уравнения (4).

В настоящей работе исследуется конфликтно-игровые задачи, описываемой системой линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом при интегральными ограничениями на управления игроков, с точки зрения завершения преследования за конечное время. Надо отметить, что данное работа без запаздывание рассмотрена в работе [5,6].

С использованием идей работы [5,6] получено достаточное условие для завершения преследования из заданной начальной точки. Данная работа непосредственно примыкает к исследованиям [4-6].

Пусть допустимые управления $u = u(s), v = v(s)$ преследующего и убегающего игроков выбраны на отрезке $[0, t]$, тогда для определения решения $z(t), 0 \le t \le \tau$, уравнения (1) при начальном условии (3) имеется следующее представление [1]

$$z(t) = K(t)z_0(0) + \int_{-h}^{0} K(t-s-h)Bz_0(s)ds - \int_{0}^{t} K(t-s)[Cu(s) - Dv(s)]ds.$$

Определение 1. Будем говорить, что траекторию процесса (1),(2) из начального положения $z_0(\cdot) \in X$ можно перевести на терминальное множество M в момент времени $T = T(z_0(\cdot)) > 0$, если по любой допустимой функции $v(t), 0 \le t < +\infty, v(t) \in \mathbb{R}^q$, можно построит допустимую функцию

$$u(t) = u(t, z_0(\cdot), v_t(\cdot)), 0 \le t \le T, \quad (5)$$

где $v_t(\cdot) = \{v(r) : 0 \le r \le t\}$, или допустимое управление

$$u(t) = u(t, z_0(\cdot), v(\cdot)), 0 \le t \le T, \quad (6)$$

такое, что абсолютно непрерывное решение $z = z(t)$ задачи Коши $\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-h) - Cu(t) + Dv(t),$ при начальном условии (3) попадает на терминальное множество M за время не превосходящее число T, т.е. $z(t^*) \in M$ при некотором $t = t^* \in [0, T(z_0(\cdot))]$. до момента $T(z_0(\cdot))$ времени t.

Пусть $\tau > 0$ и $t \in [0, \tau]$. через $\pi -$ обозначим матрицу оператора ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на $L : \pi : \mathbb{R}^n \to L$. Под интегралом однозначной или многозначной функции (многозначного отображения) понимается ее интеграл Лебега.

Рассмотрим линейные отображение $\pi K(t)CR^m \to L, \pi K(t)DR^k \to L,$ где $t \ge 0$.

Предположение 1. Пусть существует непрерывная неособая матрица $F(\cdot) : R^k \to R^m,$ которая является решением матричного уравнения [5,6]

$$\pi K(t)CX = \pi K(t)D,$$

где $X -$ искомая матрица.

С помощью неособой матрицы $F(\cdot)$ построим следующую функцию [5,6]

$$\chi^p(t) = \sup\left\{\int_0^t \left\|F(t-\tau)w(\tau)\right\|^p d\tau : \int_0^t \left\|w(\tau)\right\|^p d\tau \le 1\right\},$$

где $w(\cdot) -$ произвольная функция из пространства $L_p[0, +\infty), p > 1,$ с указанным ограничением.

С помощью функции $\chi^p(t)$ определим величину [5,6].

$$\chi^p = \sup\left\{\chi^p(t), 0 \le t < +\infty\right\}.$$

Очевидно, что $\chi^p > 0$.

Предположение 2. Имеет место неравенство $\delta = \rho^p - \sigma^p \chi^p > 0$.

Пусть справедливы предположения 1,2 и $\gamma(\tau) -$ измеримая по t функция из класса $L_p[0, +\infty), p > 1,$ которая удовлетворяет ограничению $\int_0^\infty \left\|\gamma(\tau)\right\|^p d\tau \le \delta$. Исходя из работ [5,6], будем ее называть функцией сдвига и зафиксируем в дальнейшем. Введем функцию

$$\xi(t) = \xi[t, z_0(\cdot), \gamma(\cdot)] = \pi K(t) z_0(0) + \int_{-h}^0 \pi K(t-\tau-h) B z_0(\tau) d\tau + \int_{-h}^0 \pi K(t-\tau) C\gamma(\tau) d\tau.$$

Через $U(t, \tau, v, \lambda)$ обозначим многозначное отображение определенную следующим образом:

$$U(t,\tau,v,\lambda)=\left\{u\in R^m:\|u\|\le\left(\|F(t-\tau)w(\tau)\|^p+\lambda\delta\right)^{\frac{1}{p}}\right\},$$

где $(t,\tau)\in\Delta=\{(t,\tau):0\le\tau\le t<+\infty\}$, $v\in R^k$, $\lambda\ge 0$, $\delta=\rho^p-\sigma^p\chi^p$. Отображение $U(t,\tau,v,\lambda)$ является выпуклозначным компактозначным многозначным отображением.

Пусть $M(t)\subset L,\ 0\le t\le\tau,-$ измеримое компактнозначное многозначное отображение удовлетворяющее условию $\int_0^\tau M(t)dt\subset M_1$. Введем для $(t,\tau)\in\Delta$, $v\in R^k$ и $z_0(\cdot)\in X$ многозначное отображение вида

$$W(M(t),t,\tau,z_0(\cdot))=\{\lambda\ge 0:\lambda\xi(t)\in[M(t)+\pi K(\tau)C(U(t,\tau,v,\lambda)-\gamma(\tau))]-\pi K(\tau)v\}.$$

Предположение 3. Для некоторого начального положения $z_0(\cdot)\in X$ и функции сдвига $\gamma(\cdot)$, многозначного отображение $W(M(t),t,\tau,z_0(\cdot))$ принимает непустые значения на множестве $\Delta\times R^k$.

Если выполнено предположение 3, то по аналогии [5] введем верхнюю и нижнюю разрешающие функции в следующим виде:

$$\lambda^*(t,\tau,v,z_0(\cdot))=\sup\{\lambda:\lambda\in W(M(t),t,\tau,z_0(\cdot))\},$$
$$\lambda_*(t,\tau,v,z_0(\cdot))=\inf\{\lambda:\lambda\in W(M(t),t,\tau,z_0(\cdot))\},$$

где $0\le\tau\le t, v\in R^k, z_0(\cdot)\in X$.

Рассмотрим множество

$$T(z_0(\cdot),\gamma(\cdot))=\left\{t\ge 0:\inf_{\int_0^t\|v(\tau)\|^p d\tau\le\sigma^p}\int_0^t\lambda^*(t,\tau,v(\tau),z_0(\cdot))d\tau\ge 1,\ \sup_{\int_0^t\|v(\tau)\|^p d\tau\le\sigma^p}\int_0^t\lambda^*(t,\tau,v(\tau),z_0(\cdot))d\tau<1\right\}.$$

Теорема. Пусть выполнены предположения 1-3 и для соответствующей функции сдвига $\gamma(\cdot)$ множество $T(z_0(\cdot),\gamma(\cdot))$ не пусто, а $T\in T(z_0(\cdot),\gamma(\cdot))$. Тогда траекторию процесса (1),(2) из начального положения $z_0(\cdot)\in X$ можно перевести на терминальное множество M в момент времени T с использованием допустимого управления вида (5).

Литература

1. Р.Беллман. Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. 576 с.

2. Н.Мамадалиев. Линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями при наличии запаздываний// Математические заметки, 2012. №5. С.750–760.

3. Н.А.Мамадалиев.Задача преследования для линейных игр с интегральными ограничениями на управления игроков//Известия вузов. Матема-тика. Казан. 2020. №3. С.12 – 29.

4. А.А.Чикрий, И.С.Раппопорт. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов//Кибернетика и системный анализ.

2012, том.48. №4. С. 40-64.
5. И.С.Раппопорт. Метод разрешающих функций для игровых задач управления с интегральными ограничениями//Кибернетика и системный анализ. 2018, том.54. №5. С. 109-127.
6. Б.Т.Саматов. Метод разрешающих функций для решения задачи преследования при интегральных ограничениях на управления//Кибернетика и системный анализ. 2013, №5. С. 132-145.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

[1]Мамадалиев Н., [2]Назаров Ф.У., [3]Носирхонов А.И.
[1,2]Национальный университет Узбекистана,
[3]Наманганский государственный университет
m_numana59@mail.ru

В пространстве $\mathbb{R}^n$ рассматривается линейная дифференциальная игра, описываемая системой уравнений с запаздывающим аргументом [1]

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-h) - Cu(t) + Dv(t), \qquad (1)$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, $v(t) \in \mathbb{R}^q$, $q \geq 1$, $t \geq 0$; $h -$ фиксированное положительное действительное число; A, $B -$ постоянные квадратные матрицы порядка $(n \times n)$, $(n \times n)$, C, $D -$ постоянные матрицы порядка $(n \times p)$, $(n \times q)$. Функции $u(t)$, $v(t) -$ называются *управлениями* преследующего и убегающего игроков, соответственно. Управления $u(t)$, $v(t)$, $0 \leq t < +\infty$, выбираются из класса измеримых векторных функций, удовлетворяющих интегральным ограничениям

$$\|u(\cdot)\|_{L_2[0,\infty)} \leq 1, \quad \|v(\cdot)\|_{L_2[0,\infty)} \leq 1. \qquad (2)$$

Измеримые функции $u(t)$, $v(t)$, $0 \leq t < +\infty$, удовлетворяющие интегральным ограничениям (2), назовем *допустимыми управлениями* преследующего и убегающего игроков, соответственно.

Терминальное множество M является линейным подпространством $\mathbb{R}^n$.

Задача преследователя состоит в том, чтобы определенным образом выбирая управление $u(t)$, за конечное время вывести траекторию системы (1) на терминальное множество M. Задача убегающего противоположна – избежать встречи с терминальным множеством M.

Начальным положением для преследования является $n -$ мерная функция $z_0(\cdot) \in X$, где

$$X = \left\{ \begin{matrix} z_0(\cdot) : z_0(t) - \textit{абсолютно непрерывная функция}, \\ \textit{определенная на отрезке } [-h, 0],\ z_0(0) \in \mathbb{R}^n \setminus M \end{matrix} \right\}. \qquad (3)$$

Через $K(t), -\infty < t \le \tau, -$ обозначим матричную функцию, обладающую следующими свойствами: а) $K(t) = \tilde{0},\ t < 0, \tilde{0} -$ нулевая матрица порядка n; б) $K(0) = E,\ E -$ единичная матрица порядка n; в) элементы матрицы $K(t),\ 0 \le t \le \tau,$ принадлежат классу $C^1[0,\tau]$; г) $K(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{K}(t) = AK(t) + BK(t-h),\ t > 0. \qquad (4)$$

Существование и единственность матричной функции $K(t), -\infty < t \le \tau,$ удовлетворяющей условиям а) - б) могут быть доказаны обычным методом интегрирования по шагам уравнения (4).

В настоящей работе исследуется конфликтно-игровые задачи, описываемой системой линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с интегральными ограничениями на управления игроков, с точки зрения завершения преследования за конечное время. Надо отметить, что данное работа без запаздывание рассмотрена в работе [4].

С использованием идей работы [4] получено достаточное условие для завершения преследования из заданной начальной точки. Данная работа непосредственно примыкает к исследованиям [1-4].

Пусть допустимые управления $u = u(\mathrm{s}),\ v = v(\mathrm{s})$ преследующего и убегающего игроков выбраны на отрезке $[0,t],$ тогда для определения решения $z(t), 0 \le t \le \tau,$ уравнения (1) при начальном условии $z(t) = z_0(t), -h \le t \le 0,$ имеется следующее представление [1]

$$z(t) = K(t)z_0(0) + \int_{-h}^{0} K(t-s-h)Bz_0(s)ds - \int_{0}^{t} K(t-s)[Cu(s) - Dv(s)]ds.$$

Определение. Будем говорить, что в игре (1),(2) из начального положения $z_0(\cdot) \in X$ возможно завершение преследования за время $T = T(z_0(\cdot)) > 0,$ если существует функция $u = u(t,v), 0 \le t < +\infty, v \in \mathbb{R}^q,\ u(t,v) \in \mathbb{R}^p,$ что для произвольной суммируемой с квадратом функции $v(t), 0 \le t < +\infty, v(t) \in \mathbb{R}^q,$ удовлетворяющей неравенству $\| v(\cdot) \|_{L_2} \le 1,$ функция $u(t) = u(t, v(t)), 0 \le t < +\infty,$ является функцией суммируемым с квадратом, удовлетворяет неравенству $\| u(\cdot) \|_{L_2} \le 1,$ и траектория $z(t), 0 \le t < +\infty,$ уравнения (1) с учетом начального условия (3) до момента $T(z_0(\cdot))$ времени t попадает на множество $M : z(t) \in M$ при некотором $t = t^* \in [0, T(z_0(\cdot))].$

Пусть $\tau > 0$ и $t \in [0,\tau].$ через $\pi -$ обозначим матрицу оператора ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на $L : \pi : \mathbb{R}^n \to L.$ Под интегралом однозначной или многозначной функции (многозначного отображения) понимается ее интеграл Лебега.

Предположение. *Существует такое число* $\alpha, 0 \le \alpha < 1,$ *что для всех* $t > 0$ *имеет место включение*

$$\pi K(t)DV \subset \alpha \cdot \pi K(t)CU,$$

где $\mathrm{U}=\{u\in R^p:\|u\|\le 1\}$ *и* $V=\{v\in R^q:\|v\|\le 1\}$ – *единичные шары в пространствах* R^p *и* R^q. *В дальнейшем препологаем, что предположение 1 на параметры игры выполнено.*

Зафиксируем некоторое начальное положение $z_0(\cdot)\in X$. Рассмотрим многозначное отображение в виде [4]

$$W(\tau,t,v)=\left\{\lambda\in R:\lambda\xi(t)+\pi K(\tau)v\in\sqrt{(1-\alpha)\lambda+\alpha\|v\|^2}\,\pi K(\tau)CU\right\},$$

где $\xi(t)=\xi[\tau,z_0(\cdot)]=\pi K(\tau)z_0(0)+\int\limits_{-h}^{0}\pi K(\tau-t-h)Bz_0(t)dt,\ \lambda\ge 0, v\in R^q,\ 0<\alpha<1,$

$(\tau,t)\in\Delta=\{(\tau,t):0\le t\le\tau<+\infty\}$.

Рассмотрим так называемую разрешающую функцию [4] определенную следующим образом:

$$\lambda(\tau,t,v)=\sup W(\tau,t,v).$$

Теперь сформулируем достаточное условие гарантированного приведения решения уравнения (1), (2) из начального положения $z_0(\cdot)\in X$ на терминальное множество M.

Теорема. *Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено предположения. Предположим, что существует момент времени* $\tau=\tau_1(z_0(\cdot))$ такой, что либо $\xi(t)=0$, либо $\xi(t)\ne 0$ и *для всех допустимых управлений* $v(\cdot)$ *справедливо неравенство*

$$1-\inf\left\{\int\limits_0^{\tau_1}\lambda(\tau_1,t,v(t))dt:\int\limits_0^{\tau_1}\|v(\cdot)\|^2\,dt\le 1\right\}\le 0.$$

Тогда в игре (1), (2) возможно завершение преследования за время $T=\tau_1(z_0(\cdot))$.

Литература

1. Р.Беллман. Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. 576 с.

2. Н.Мамадалиев. Линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями при наличии запаздываний// Математические заметки, 2012. №5. С.750–760.

3. Н.А.Мамадалиев.Задача преследования для линейных игр с интегральными ограничениями на управления игроков//Известия вузов. Матема-тика. Казан. 2020. №3. С.12 – 29.

4. А.А.Чикрий, А.А.Белоусов. О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями//Тр. ИММ УрО РАН, 2009. №4, Т.15. С. 290 - 301.

ЗАДАЧА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА УПРАВЛЕНИЯ ИГРОКОВ

[1]Мамадалиев Н., [2]Муйдинов Х.Н., [2]Акрамжонов А.Д.
[1]Национальный университет Узбекистана,
[2]Андижанский госуниверситет
m_numana59@mail.ru

В пространстве $\mathbb{R}^n$ рассматривается линейная дифференциальная игра, описываемая системой уравнений с запаздывающим аргументом [1]

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-h) - Cu(t) + Dv(t), \qquad (1)$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, $v(t) \in \mathbb{R}^q$, $q \geq 1$, $t \geq 0$; h – фиксированное поло-жительное действительное число; A, B – постоянные квадратные матрицы порядка $(n \times n)$, $(n \times n)$, C, D – постоянные матрицы порядка $(n \times p)$, $(n \times q)$. Функции $u(t), v(t)$ – называются *управлениями* преследующего и убегающего игроков, соответственно. Управления $u(t)$, $v(t)$, $0 \leq t < +\infty$, выбираются из класса измеримых векторных функций, удовлетворяющих интегральным ограничениям

$$\|u(\cdot)\|_{L_2[0,\infty)} \leq 1, \quad \|v(\cdot)\|_{L_2[0,\infty)} \leq 1. \qquad (2)$$

Измеримые функции $u(t)$, $v(t)$, $0 \leq t < +\infty$, удовлетворяющие интегральным ограничениям (2), назовем *допустимыми управлениями* преследующего и убегающего игроков, соответственно.

Задача преследователя состоит в том, чтобы определенным образом выбирая управление $u(t)$, за конечное время вывести траекторию системы (1) на цилиндрическое терминальное множество M, которое имеет вид $M = M_0 + M_1$, где M_0 – линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, M_1 – выпуклое компактное подмножество подпространства L, L – ортогональное дополнение к подпространству M_0 в $\mathbb{R}^n$(т.е. $M_0 \oplus L = \mathbb{R}^n$). Задача убегающего противоположна – избежать встречи с терминальным множеством M.

Начальным положением для преследования является n – мерная функция $z_0(\cdot) \in X$, где

$$X = \left\{ \begin{matrix} z_0(\cdot) : z_0(t) - \textit{абсолютно непрерывная функция}, \\ \textit{определенная на отрезке } [-h, 0],\ z_0(0) \in \mathbb{R}^n \setminus M \end{matrix} \right\}. \qquad (3)$$

Через $K(t), -\infty < t \leq \tau,$ – обозначим матричную функцию, обладающую следующими свойствами: а) $K(t) = \tilde{0}$, $t < 0$, $\tilde{0}$ – нулевая матрица порядка n; б) $K(0) = E$, E – единичная матрица порядка n; в) элементы матрицы $K(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, принадлежат классу $C^1[0, \tau]$; г) $K(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{K}(t) = AK(t) + BK(t-h), \ t > 0. \qquad (4)$$

Существование и единственность матричной функции $K(t), -\infty < t \leq \tau$,

удовлетворяющей условиям а) - б) могут быть доказаны обычным методом интегрирования по шагам уравнения (4).

В настоящей работе исследуется конфликтно-игровые задачи, описываемой системой линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с интегральными ограничениями на управления игроков, с точки зрения завершения преследования за конечное время. Надо отметить, что данное работа без запаздывание рассмотрена в работе [4].

С использованием идей работы [4] получено достаточное условие для завершения преследования из заданной начальной точки. Данная работа непосредственно примыкает к исследованиям [1-4].

Пусть допустимые управления $u = u(s),\ v = v(s)$ преследующего и убегающего игроков выбраны на отрезке $[0,t]$, тогда для определения решения $z(t), 0 \le t \le \tau,$ уравнения (1) при начальном условии $z(t) = z_0(t), -h \le t \le 0,$ имеется следующее представление [1]

$$z(t) = K(t)z_0(0) + \int_{-h}^{0} K(t-s-h)Bz_0(s)ds - \int_{0}^{t} K(t-s)[Cu(s) - Dv(s)]ds.$$

Определение. Будем говорить, что в игре (1),(2) из начального положения $z_0(\cdot) \in X$ возможно завершение преследования за время $T = T(z_0(\cdot)) > 0,$ если существует функция $u = u(t,v), 0 \le t < +\infty, v \in \mathbb{R}^q,\ u(t,v) \in \mathbb{R}^p,$ что для произвольной суммируемой с квадратом функции $v(t), 0 \le t < +\infty, v(t) \in \mathbb{R}^q,$ удовлетворяющей неравенству $\| v(\cdot) \|_{L_2} \le 1,$ функция $u(t) = u(t, v(t)), 0 \le t < +\infty,$ является функцией суммируемым с квадратом, удовлетворяет неравенству $\| u(\cdot) \|_{L_2} \le 1,$ и траектория $z(t), 0 \le t < +\infty,$ уравнения (1) с учетом начального условия (3) до момента $T(z_0(\cdot))$ времени t попадает на множество $M: z(t) \in M$ при некотором $t = t^* \in [0, T(z_0(\cdot))].$

Пусть $\tau > 0$ и $t \in [0,\tau],$ через $\pi -$ обозначим матрицу оператора ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на $L: \pi: \mathbb{R}^n \to L.$ Под интегралом однозначной или многозначной функции (многозначного отображения) понимается ее интеграл Лебега.

Пусть $M(t) \subset L,\ 0 \le t \le \tau, -$ измеримое компактнозначное многозначное отображение удовлетворяющее условию $\int_0^{\tau} M(t)dt \subset M_1.$

Зафиксируем некоторое начальное положение $z_0(\cdot) \in X.$ Рассмотрим многозначное отображение в виде [4]

$$W(M(t),\tau,t,v) = \left\{ \lambda \in R : \lambda\xi(t) + \pi K(\tau)v \in \left[M(t) + \sqrt{(1-\alpha)\lambda + \alpha \|v\|^2}\, \pi K(\tau)CU \right] \right\},$$

где $\xi(t) = \xi[\tau, z_0(\cdot)] = \pi K(\tau)z_0(0) + \int_{-h}^{0} \pi K(\tau - t - h)Bz_0(t)dt,\ \lambda \ge 0, v \in R^q,\ 0 < \alpha < 1,$

$(\tau,t) \in \Delta = \{(\tau,t) : 0 \le t \le \tau < +\infty\},\ \mathrm{U} = \{u \in R^p : \|u\| \le 1\}.$ Рассмотрим так называ-

емую разрешающую функцию [4] определенную следующим образом:

$$\lambda(\tau,t,v)=\sup W(M(t),\tau,t,v).$$

Предположение. *Существуют число* τ_1 *и многозначное отображение* $M(t)$, $0\le t\le\tau_1$, *удовлетворяющее условию* $\int_0^{\tau_1}M(t)dt\subset M_1$ *такое, что для всех* $t\in[0,\tau_1]$ *множество* $W(M(t),\tau,t)$ *непусто.*

Теперь сформулируем достаточное условие гарантированного приведения решения уравнения (1), (2) из начального положения $z_0(\cdot)\in X$ на терминальное множество M.

Теорема. *Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено предположения. Предположим, что для всех допустимых управлений* $v(\cdot)$ *справедливо неравенство*

$$1-\inf\left\{\int_0^{\tau_1}\lambda(\tau_1,t,v(t))dt:\int_0^{\tau_1}\|v(\cdot)\|^2dt\le 1\right\}\le 0.$$

Тогда в игре (1), (2) возможно завершение преследования за время $T=\tau_1(z_0(\cdot))$.

Литература

1. Р.Беллман. Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. 576 с.

2. Н.Мамадалиев. Линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями при наличии запаздываний// Математические заметки, 2012. №5. С.750–760.

3. Н.А.Мамадалиев.Задача преследования для линейных игр с интегральными ограничениями на управления игроков//Известия вузов. Матема-тика. Казан. 2020. №3. С.12 – 29.

4. А.А.Чикрий, А.А.Белоусов. О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями//Тр. ИММ УрО РАН, 2009. №4, Т.15. С. 290 - 301.

КВАЗИЛИНЕЙНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

Мамадалиев Н., Каримова М.Ё., Шадиев Д.Т.
Национальный университет Узбекистана,
m_numana59@mail.ru

В настоящей работе рассматривается квазилинейная дифференциальная игра преследования при геометрических ограничениях на управляющие параметры. Применяется модификации третьего метода решения дифферен-

циальных игр преследования.

Рассматривается квазилинейная дифференциальная игра преследования, описываемая уравнениями нейтрального типа [2,3]

$$\dot{z}(t) = Az(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i \dot{z}(t-h_i) + \sum_{i=1}^{m} C_i z(t-h_i) - f(u,v),\ t \geq 0, \quad (1)$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^n,\ n \geq 1,\ A, B_i, C_i\ (i = 1,2,...,m),-$ постоянные матрицы соответствующих размерностей; $0 = h_0 < h_1 < ... < h_m -$ константы. $u \in P \subset \mathbb{R}^p,\ v \in Q \subset \mathbb{R}^q -$ управляющие векторы преследующего и убегающего игроков, соответственно; множества P и $Q -$ компактны. Вектором $u(t) -$ распоряжается преследующий объект, вектором $v(t) -$ распоряжается убегающий объект, $f : P \times Q \to \mathbb{R}^n -$ непрерывная функция.

Терминальное множество M имеет вид $M = M_0 + M_1$, где $M_0 -$ линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, $M_1 -$ выпуклое компактное подмножество подпространства $L, L -$ ортогональное дополнение к подпространству M_0 в $\mathbb{R}^n$ (т.е. $M_0 \oplus L = \mathbb{R}^n$); через $\pi -$ обозначим матрицу оператора ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на $L : \pi : \mathbb{R}^n \to L$; начальным положением для преследования (1) является $n -$ мерная абсолютно непрерывная функция $\varphi(t)$, определенная на отрезке $[-h_m, 0]$.

Определение 1. *Пусть* $K(t), -\infty < t \leq \tau, -$ *единственная функция обладающая следующими свойствами [2,3]: а)* $K(t) = \tilde{0},\ t < 0,\ \tilde{0} -$ *нулевая матрица порядка* n; *б)* $K(0) = E,\ E -$ *единичная матрица порядка* n; *в) элементы матрицы* $K(t),\ 0 \leq t \leq \tau,$ *принадлежат классу* $C^1[0,\tau]$; *г)* $K(t)$ *удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению*

$$\dot{K}(t) = AK(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i \dot{K}(t-h_i) + \sum_{i=1}^{m} C_i K(t-h_i), \quad t > 0. \quad (2)$$

Существование и единственность матричной функции $K(t), -\infty < t \leq \tau,$ удовлетворяющей условиям а) - б) могут быть доказаны обычным методом интегрирования по шагам уравнения (2).

Определение 2. Будем говорить, что в игре (1) из начального положения $\varphi(\cdot)$ возможно завершение преследования за время $T = T(\varphi(\cdot)),\ 0 \leq T < +\infty,$ если существует функция $u(t,v), 0 \leq t \leq T, v \in Q,$ принимающая значения из множество P такая, что для произвольной измеримой функции $v = v(t), 0 \leq t \leq T, v(t) \in Q,$ функция $u(t, v(t)), 0 \leq t \leq T,$ является измеримой и соответствующая траектория $z = z(t),$ т.е. решение уравнение (1) с учетом начального условия $z(s) = \varphi(s), -h \leq s \leq 0,$ при некотором $t = t^* \in [0,T],$ попадает на терминальное множество M.

Пусть $\tau > 0,\ t \in [0,\tau]$. Пусть $M(t) \subset L,\ 0 \leq t \leq \tau, -$ измеримое компактнозначное многозначное отображение удовлетворяющее условию $\int_0^{\tau} M(t)dt \subset M_1$ [3].

Введем следующие множества [1]

$$W(M(t),t,v) = M(t) + \pi K(t)Cf(P,v),\ 0 \le t \le \tau,\ W(M(t),t) = \bigcap_{v \in Q} W(M(t),t,v),$$

$$W(\tau) = \int_0^{\tau} W(M(t),t)dt,\quad 0 \le t \le \tau,\ \text{где}\quad \pi K(t) f(P,v) = \{\pi K(t) f(u,v) : u \in P\}.$$

Целью настоящей работы является получение некоторых достаточных условий при выполнении которых для данного начального положения $\varphi(\cdot)$, из которых в игре (1) гарантируется возможности завершения преследования за конечное время $t = t(\varphi(\cdot))$.

Предположение. *Существуют число* τ, *многозначное отображение* $M(t),\ 0 \le t \le \tau,$ *удовлетворяющее условию* $\int_0^{\tau} M(t)dt \subset M_1$ *такое, что для всех* $t \in [0,\tau]$ *непусто множество* $W(\tau)$.

Положим при $t \ge 0$

$$\Phi(t)\varphi(\cdot) = \left[K(t) - \sum_{i=0}^{m} K(t-h_i)B_i \right]\varphi(0) + \sum_{i=0}^{m} K(t-h_i) \int_{-h}^{0} K(t-s-h_i)\left[B_i \dot{\varphi}(s) + C_i\varphi(s) \right] ds.$$

Введем гарантированный момент времени поимки преследователем убегающего игрока для игры (1), положим

$$\Theta(\varphi(\cdot)) = \left\{ \tau \ge 0 : \pi\Phi(\tau)\varphi(\cdot) \in W(\tau) \right\},$$

и нижнюю грань их обозначим через $T(\varphi(\cdot))$ следующим образом:

$$T(\varphi(\cdot)) = \inf \left\{ \tau : \tau \in \Theta(\varphi(\cdot)) \right\},$$

определяющую наименьшее гарантированное время схемы третьего метода задачи преследования. Завершение преследования понимается в смысле определения 2.

Теорема. *Пусть выполнены условия предположения и множество* $\Theta(\varphi(\cdot))$ *непусто. Кроме того, существует число* $\tau_0 > 0, \tau_0 \in \Theta(\varphi(\cdot))$ *такое, что имеет место включение*

$$\pi\Phi(\tau)\varphi(\cdot) \in W(\tau).$$

Тогда в игре (1) из начального положения $\varphi(\cdot)$ *возможно завершение преследования за время* $T = \tau_0$.

Литература

1. Л.С.Понтрягин. Избранные труды. – М.: Наука, 1988. – Т. 2. – 576 с.

2. Н.Мамадалиев. Линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями при наличии запаздываний// Математические заметки, 2012. №5. С.750–760.

3. Н.А.Мамадалиев.Задача преследования для линейных игр с интегральными ограничениями на управления игроков//Известия вузов. Матема-тика. Казан. 2020. №3. С.12 – 29.
4. А.А.Чикрий. Верхняя и нижняя разрешающие функции в игровых задачах динамики//Тр. ИММ УрО РАН, 2017. №1, Т.23. С. 293 – 305.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВИДА $\left(a\frac{\partial}{\partial x}+c\right)(Lu)=0$ В ПЯТИУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ С ТРЕМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА, КОГДА ВСЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ЧАСТИ ОБЛАСТИ ЯВЛЯЮТСЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ ТРЕУГОЛЬНИКАМИ

[1]Мамажонов М., [2]Шерматова Х.М., [3]Мирзабоев М.Р.
[1]КГПИ, [2]ФерГУ, [3]КГПИ

I. Введение

В настоящее время интенсивно развивается исследование неклассических уравнений математической физики, в частности, уравнений смешанного, составного и смешанно-составного типов. Одной из основных причин этого процесса является появление прикладных применений краевых задач, поставленных для таких уравнений.

Известно, что первоначально изучались смешанные уравнения второго порядка эллиптико-гиперболического типа. Фундаментальные исследования по таким уравнениям начаты в 1920-е годы итальянским математиком Трикоми и развиты Геллерстедтом, А.В.Бицадзе, К.И.Бабенко, И.Л.Каролем, Ф.И.Франклем, М.М.Смирновым, М.С.Салахитдиновым, Т.Д.Джураевым и другими учеными.

Исследования уравнений эллиптико-параболического и параболо-гиперболического типов второго порядка начались в 50-60 годах прошлого века. В 1959 году И.М.Гельфанд [1] указал на необходимость совместного рассмотрения уравнений в одной части области параболического, а другой части – гиперболического типов. Он приводит пример, связанный с движением газа в канале, окруженном пористой средой: в канале движение газа описывается волновым уравнением, вне его – уравнением диффузии.

Затем в 70-80 годах двадцатого века начаты исследования по уравнениям третьего и высокого порядков параболо-гиперболического типа. Краевые задачи для таких уравнений поставлены и изучены впервые Т.Д.Джураевым [2] и его учениками [3].

II. Постановка задачи

В данном сообщении в области G плоскости xOy рассматривается параболо-гиперболическое уравнение третьего порядка вида

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+c\right)(Lu)=0, \tag{1}$$

где $a,c\in R$, причем $a\neq 0$; $G=G_1\cup G_2\cup G_3\cup G_4\cup J_1\cup J_2\cup J_3$, а G_1 – прямоугольник с вершинами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$; G_2 – треугольник с вершинами в точках A, B, $C(1/2,-1/2)$; G_3 – треугольник с вершинами в точках A, $D(-1/2,1/2)$, A_0; G_4 – треугольник с вершинами в точках B, B_0, $E(3/2,1/2)$; J_1 – открытый отрезок с вершинами в точках A, B; J_2 – открытый отрезок с вершинами в точках A, A_0; J_3 – открытый отрезок с вершинами в точках B, B_0; $u=u(x,y)$ – неизвестная функция, а

$$Lu=\begin{cases}u_{xx}-u_y, & (x,y)\in G_1,\\ u_{xx}-u_{yy}, & (x,y)\in G_j,\ j=2,3,4.\end{cases}$$

Для уравнения (1) в области G можно сформулировать и исследовать следующую краевую задачу:

Задача M_{ac}**.** Требуется найти функцию $u(x,y)$, которая 1) непрерывна в $\overline{G}$ и в области $G\setminus J_1\setminus J_2\setminus J_3$ имеет непрерывные производные, участвующие в уравнение (1), причем u_x и u_y – непрерывны в G вплоть до части границы области G, указанные в краевых условиях; 2) удовлетворяет уравнению (1) в области $G\setminus J_1\setminus J_2\setminus J_3$; 3) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u\big|_{BC}=\psi_1(x),\ 1/2\le x\le 1; \tag{2}$$

$$u\big|_{AD}=\psi_2(x),\ -1/2\le x\le 0; \tag{3}$$

$$u\big|_{B_0E}=\psi_3(x),\ 1\le x\le 3/2; \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AC}=\psi_4(x),\ 0\le x\le 1/2; \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AD}=\psi_5(x),\ -1/2\le x\le 0; \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{A_0D}=\psi_6(x),\ -1/2\le x\le 0; \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BE}=\psi_7(x),\ 1\le x\le 3/2; \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{B_0E} = \psi_8(x),\ 1 \le x \le 3/2; \tag{9}$$

и 4) следующим непрерывным условиям склеивания:

$$u(x,+0) = u(x,-0) = \tau_1(x),\ 0 \le x \le 1; \tag{10}$$

$$u_y(x,+0) = u_y(x,-0) = \nu_1(x),\ 0 \le x \le 1; \tag{11}$$

$$u(+0,y) = u(-0,y) = \tau_2(y),\ 0 \le y \le 1; \tag{12}$$

$$u_x(+0,y) = u_x(-0,y) = \nu_2(y),\ 0 \le y \le 1; \tag{13}$$

$$u_{xx}(+0,y) = u_{xx}(-0,y) = \mu_2(y),\ 0 < y < 1; \tag{14}$$

$$u(1+0,y) = u(1-0,y) = \tau_3(y),\ 0 \le y \le 1; \tag{15}$$

$$u_x(1+0,y) = u_x(1-0,y) = \nu_3(y),\ 0 \le y \le 1. \tag{16}$$

Здесь $\psi_j\left(j=\overline{1,8}\right)$ – заданные достаточно гладкие функции, τ_i, ν_i $\left(i=\overline{1,3}\right)$, μ_2 – неизвестные пока достаточно гладкие функции, подлежащие определению; n – внутренняя нормаль к прямой $x+y=-1$ (AD) или $x-y=-1$ (A_0D) или $x-y=1$ (BE) или $x+y=2$ (B_0E); AD и A_0D (BE и B_0E) – отрезки с концами в точках A, D и A_0, D (B, E и B_0, E) соответственно.

Здесь должны выполняться равенства: $\tau_1(0) = \tau_2(0)$, $\nu_1(0) = \tau_2'(0)$, $\tau_1(1) = \tau_3(0)$, $\nu_1(1) = \tau_3'(0)$.

III. Исследование задачи

Теорема. Если $\psi_1(x) \in C^3[1/2,1]$, $\psi_2(x) \in C^3[-1/2,0]$, $\psi_3(x) \in C^3[1,3/2]$, $\psi_4(x) \in C^2[0,1/2]$, $\psi_5(x), \psi_6(x) \in C^2[-1/2,0]$, $\psi_7(x), \psi_8(x) \in C^2[1,3/2]$ и выполняются условия согласования $\psi_4(0) = \psi_5(0)$, $\psi_5'(-1/2) = \psi_6'(-1/2)$, $\psi_7'(3/2) = \psi_8'(3/2)$, то задача M_{ac} допускает единственное решение.

Здесь мы даем лишь идею доказательства этой теоремы. Теорема доказывается методом построения решения. Для этого уравнение (1) перепишем в виде

$$u_{1xx} - u_{1y} = \omega_1(y) e^{-\frac{c}{a}x},\ (x,y) \in G_1, \tag{17}$$

$$u_{jxx} - u_{jyy} = \omega_j(y) e^{-\frac{c}{a}x},\ (x,y) \in G_j,\ \ j = \overline{2,3,4}, \tag{18}$$

где введено обозначения $u(x,y)=u_j(x,y),\ (x,y)\in G_j\ \ (j=\overline{1,4})$, а $\omega_j(y)\ \left(j=\overline{1,4}\right)$ – неизвестные пока достаточно гладкие функции, подлежащие определению.

Задача M_{ac} рассматривается сначала в области G_2. Записывая решение уравнения (18) $(j=2)$, удовлетворяющее условиям (10), (11) и удовлетворяя условию (5), находим функцию $\omega_2(y)$.

Далее, подставляя это решение в условие (2), после некоторых упрощений, получим первое соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$ на линии изменения типа J_1.

Переходя в уравнение (17) к пределу при $y\to 0$, получим второе соотношение между $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$ на линии изменения типа J_1.

Исключая из этих соотношений функцию $\nu_1(x)$ и интегрируя полученное уравнение от 0 до x, приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению относительно $\tau_1(x)$.

Решая это уравнение при условиях

$$\tau_1(0)=\psi_2(0),\ \tau_1'(0)=\frac{1}{2}\psi_2'(0)+\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_5(0),\ \tau_1(1)=\psi_1(1),$$

однозначно находим функцию $\tau_1(x)$ и тем самым и функции $\nu_1(x)$, $u_2(x,y)$.

Теперь рассмотрим задачу в области G_3. Записывая решение уравнения (18) $(j=3)$, удовлетворяющее условиям (12), (13) и подставляя это решение в условия (6) и (7), после некоторых выкладок, находим функцию $\omega_3(y)$.

Далее, подставляя это решение в условие (3), после некоторых вычислений, имеем первое соотношение между неизвестными функциями $\tau_2(y)$ и $\nu_2(y)$.

Теперь переходя в уравнениях (17) и (18) ($j=3$) к пределу при $x\to 0$, имеем две соотношения относительно неизвестных функций $\tau_2(y)$, $\nu_2(y)$ и $\mu_2(y)$. Исключая из этих соотношений функцию $\mu_2(y)$, получим соотношение между неизвестными функциями $\omega_1(y)$ и $\tau_2(y)$.

Далее, переходим в область G_4. Записывая решение уравнения (18) ($j=4$), удовлетворяющее условиям (15), (16) и подставляя это решение в условия (8) и (9), после некоторых вычислений и преобразований, находим функцию $\omega_4(y)$. Теперь подставляя это решение в условие (4), после

некоторых вычислений, имеем первое соотношение между неизвестными функциями $\tau_3(y)$ и $\nu_3(y)$.

Теперь переходим в область G_1. Записывая решение уравнения (17), удовлетворяющего условиям (10), (12) и (15) и дифференцируя это решение по x и устремляя x к нулю и к единице, в силу полученных трех соотношений между неизвестными функциями $\tau_2(y)$ и $\nu_2(y)$, $\omega_1(y)$ и $\tau_2(y)$, $\tau_3(y)$ и $\nu_3(y)$, после длинных вычислений и преобразований, приходим к системе двух интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно $\tau_2''(y)$ и $\tau_3'(y)$.

Решая эту систему, находим функции $\tau_2''(y)$ и $\tau_3'(y)$, тем самым и функции $\nu_2(y)$, $\nu_3(y)$, $\omega_1(y)$, $u_3(x,y)$, $u_4(x,y)$ и $u_1(x,y)$. Таким образом, мы нашли решение поставленной задачи единственным образом. Теорема доказана.

Литература

1. Гельфанд И.М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных ураванений. УМН, т. XIV, вып. 3(87), 1959, с. 3-19.
2. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1979, 240 с.
3. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент, Фан, 1986, 220 с.
4. Джураев Т.Д., Мамажанов М. Краевые задачи для одного класса уравнений четвертого порядка смешанного типа. Дифференциальные уравнения, 1986, т.22, №1, с.25-31.
5. Тахиров Ж.О. Краевые задачи для смешанного параболо-гиперболического уравнения с известной и неизвестной линиями раздела. Автореферат кандидатской диссертации. Ташкент, 1988.
6. Бердышев А.С. Краевые задачи и их спектральные свойства для уравнения смешанного параболо-гиперболического и смешанно-составного типов. – Алматы, 2015, 224 с.

ВЛИЯНИЕ ИСТОЧНИКА ТЕПЛА НА ПЛОТНОСТЬ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССАХ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ В МНОГОМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ

[1]Маматов А. У., [2]Хайдаров Т. А.

[1,2]Национального университета Узбекистана

[1]mmtovabrorjon1995@gmail.com, [2]haydarovabdu@rambler.ru

В настоящее время одним из наиболее частых процессов закалки является процесс тепловыделения, когда основное явление в этом процессе зависит от того, в какой области распределяется тепло. Философия жизни

показывает, что распространение тепла в природе может быть либо в многомерной области, либо в одномерной области. Конечно, в этом процессе мы должны составить эволюционное уравнение процесса с учетом плотности среды, положительного или отрицательного источника тепла, теплоемкости, зависимости среды от коэффициента теплопередачи. Как известно, процессы тепловыделения в многомерных областях находятся в нелинейном состоянии. В таком процессе основное внимание уделяется теплоемкости. Для процесса рассеивания тепла без каких-либо царапин должна быть задана начальная температура (условие Коши). Для нелинейного рассеивания тепла многие ученые на протяжении многих лет изучали квазилинейные диффузионные модели, свойство пространственной локализации и эффект рассеивания тепла с ограниченной скоростью. Он также был использован в нелинейных процессах, встречающихся в многомерных областях изучаемых математических моделей, и обнаружил новые эффекты, не характерные для линейных уравнений. Научные исследования, посвященные нелинейным системам для случаев изменяющейся плотности, проводимости среды, проводимости конвективной миграции, приводящей к параболическим уравнениям с искажениями, стали рассматриваться как основные проблемы современности. Чтобы произвести впечатление на процесс рассеивания тепла без линий в многомерных областях, мы видим следующее уравнение в области $Q = \{(t,x): t \in R_+, x \in R\}$:

$$Au \equiv -\rho_1(|x|)u_t + \nabla\left(\rho_2(|x|)u^{m-1}\left|\nabla u^k\right|^{p-2}\nabla u^l\right) + v\nabla u + \varepsilon\gamma u^\beta \qquad (1)$$

начальное (условие Коши)

$$u(0,x) = u_0(x) \geq 0, \qquad (2)$$

пусть условие дано.

Здесь $u(x,t)$-температура теплоты, $v(t) \in c(Q)$ -скорость среды, $\rho_1(|x|) = |x|^{-n}, \rho_2(|x|) = |x|^q$ -плотность среды, которая является непрерывной функцией β- параметром, γu^β- представляет собой положительную ($\varepsilon = +1$) или отрицательную ($\varepsilon = -1$) мощность источника теплоты.

(1) уравнение представляет собой ряд физических процессов: процесс реакции диффузии в нелинейной среде, процесс тепловыделения в нелинейной среде, фильтрацию жидкости и газа в нелинейной среде, они представляют собой существование закона политропии и других нелинейных перемещений[1,2,6].

(1) проблема Коши и краевые задачи для уравнения наблюдались многими авторами в одномерных и многомерных случаях [1-5].

(1) в процессах, представленных уравнением, возникает явление конечного распределения температуры [4]. При наличии коэффициента поглощения может возникнуть явление “заднего” фронта, то есть левый фронт может через некоторое время остановиться и двигаться вдоль среды[1-8].

Метод решения

(1) запишем уравнение для случая *N=2* следующим образом:

$$\begin{cases} |x|^{-n}\dfrac{\partial u_1}{\partial t}=\nabla\left(|x|^{q}u_i^{m_1-1}\left|\nabla u_1^{k}\right|^{p-2}\nabla u_1^{l}\right)+v(t)\nabla u_1+\gamma_1 u_2^{\beta_1} \\ |x|^{-n}\dfrac{\partial u_2}{\partial t}=\nabla\left(|x|^{q}u_i^{m_2-1}\left|\nabla u_2^{k}\right|^{p-2}\nabla u_2^{l}\right)+v(t)\nabla u_1+\gamma_i u_1^{\beta_2} \end{cases} \quad (3)$$

(3) система уравнений должна присутствовать в решении в $m=k, n=0, l=1, 0<\beta_i<1$ положении[3]

$$\beta_i=\frac{p-\left[m_i\cdot(p-1)-1\right]}{p-1}, 1<m_i<2,\ p>m_i\cdot(p-1)-1$$

достаточно выполнить условие. При выполнении этого условия возникают определенные свойства растворов: пространственная локализация теплоты и влияние лака конечного решения, влияние времени на скорость тепловой среды, плотность среды и новые эффекты, образующиеся от воздействия источника тепла.

(3) в системе уравнений выполним следующую подстановку

$$|x|=r=\left(\sum_{i=1}^{N}x_i^2\right)^{1/2};$$

вот размер пространства. Эта замена называется радиально-симметричной заменой[1].

Из приведенной выше подстановки (3) система уравнений изменяется следующим образом:

$$\begin{cases} r^{-n}\dfrac{\partial u}{\partial t}=r^{1-N}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^{q+N-1}u_1^{m_1-1}\left|\dfrac{\partial u_1^{k}}{\partial r}\right|^{p-2}\dfrac{\partial u_1^{l}}{\partial r}\right)+r^{1-N}v(t)\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^{N-1}\dfrac{\partial u_1}{\partial r}\right)+\gamma_1 u_2^{\beta_1} \\ r^{-n}\dfrac{\partial u}{\partial t}=r^{1-N}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^{q+N-1}u_2^{m_2-1}\left|\dfrac{\partial u_2^{k}}{\partial r}\right|^{p-2}\dfrac{\partial u_2^{l}}{\partial r}\right)+r^{1-N}v(t)\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^{N-1}\dfrac{\partial u_2}{\partial r}\right)+\gamma_2 u_1^{\beta_2} \end{cases} \quad (4)$$

(4) чтобы решить систему уравнений, мы сначала ищем решение следующим образом:

$$u_i(t,r)=v^{\alpha_i}\cdot w_i(\xi);\ \xi=r\cdot v^{-\mu};\ i=1,2 \quad (5)$$

здесь α_i - искомое число, w_i - неизвестная функция, ξ - параметр, $\mu=const.$

(5) положения (1) применим к системе уравнений:

$$r^{-n}\frac{\partial u_i}{\partial t}=\xi^{-n}v^{-n\mu}\left[\alpha_i v^{\alpha_i-1}v' w_i-\mu v^{\alpha_i-1}v'\xi w_{i\xi}\right]=\xi^{-n}v^{\alpha_i-1-n\mu}v'\left[\alpha_i w_i-\eta\xi w_{i\xi}\right];\ i=1,2$$

$$r^{-n}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{q+N-1}u_i^{m_i-1}\left|\frac{\partial u_i^{k}}{\partial r}\right|^{p-2}\frac{\partial u_i^{k}}{\partial r}\right)=\xi^{1-N}v^{\mu(p-q)+\alpha_i(k(p-2)+l+m_i-1)}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{q+N-1}w_i^{m_i-1}\left|\frac{dw_i^{k}}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{dw_i^{l}}{d\xi}\right)$$

$$r^{-n}v\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{N-1}\frac{\partial u_i}{\partial r}\right)=\xi^{1-N}v^{1+\alpha_i-2\mu}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}\frac{dw_i}{d\xi}\right)$$

$$\gamma_i u_{3-i}^{\beta_i}=\gamma_i v^{\alpha_{3-i}\beta_i}w_{3-i}^{\beta_i}$$

v -мы устанавливаем следующие условия для функции:

$$v' v^{\alpha_i - 1 - n\mu} = v^{\alpha_{3-i}\beta_i}$$

$$v^{-n\mu + \alpha_i - \alpha_{3-i}\beta_{i-1}} dv = dt$$

$$v(t) = A_0 (T_0 + t)^{\frac{1}{\lambda_0}}$$

оно здесь $\lambda_0 = \alpha_i - \alpha_{3-i}\beta_i - n\mu \neq 0;\ A_0 = (\lambda_0)^{\frac{1}{\lambda_0}}$ [3-6]. Если: , $\lambda_0 = 0$, $v(t) = c_1 t :\ c_1 = const$

После завершения всех расчетов появится новое решение

$$u_A(t,x) = A(T+t)\left(a - \frac{1}{1 - \frac{2(s+N)}{N(p-2)}} \cdot \left(\frac{1}{s}\right)^{1 - \frac{2(s+N)}{N(p-2)}} \cdot \left(\frac{\mu}{l \cdot k^{\,p-2}}\right)^{\frac{1}{p-1}} \cdot \left(\frac{m_i + k\cdot(p-2) + l - 2}{p-1}\right) \varphi^{1 - \frac{2(s+N)}{N(p-2)}} \right)^{\frac{p-2}{m_i + k(p-2) + l - 2}}$$

здесь $a = const \geq 0$.

Лемма: Пусть

$$\frac{(\beta_i + 1)\cdot(p-q) + (1-n)\cdot\left((\beta_1 + 1)\cdot(m_1 + k(p-2) + l - 2) + (q - p + 1)\cdot(1 - \beta_1 \cdot \beta_2) + (q-p)\cdot(1 - \beta_1 \cdot \beta_2)\right)}{(\beta_1 + 1)\cdot(m_1 + k(p-2) + l - 2) + (q - p + 1)\cdot(1 - \beta_1 \cdot \beta_2)} > 0, i = 1,2.$$

тогда $L\bar{f}_i < 0$ и $f_i \leq \bar{f}_i$, $\bar{f}_i$ называется sup решение на $\left(-\left(\frac{a}{b_i}\right)^{\frac{1}{\delta_0}}; \left(\frac{a}{b_i}\right)^{\frac{1}{\delta_0}} \right)$

Теорема: Пусть,

$$k(p-1) > m+1,\ \gamma_i > m_i \gamma_{3-i},\ -\frac{N}{p}\frac{\gamma_i}{\gamma_i - m_i \gamma_{3-i}} + h_i \leq 0,\ i = 1,2,$$

$$u_{1_+}(0,x) \geq u_{1_0}(x), u_{2_+}(0,x) \geq u_{2_0}(x), x \in R^N.$$

тогда решение уравнения (1) обладает свойством пространственной сходимости[1,8].

Результаты численных экспериментов и визуализация

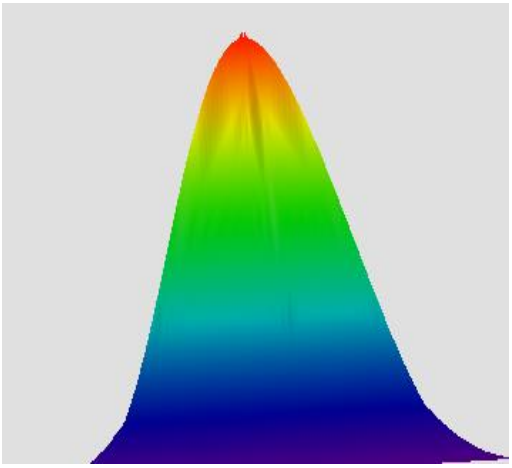
При численном решении задачи уравнение аппроксимируется на сетке с использованием неявной схемы переменных направлений (для многомерного случая) в сочетании с балансовым методом. Итерационные процессы строились на основе метода Пикара, метода Ньютона, а также специального метода.

Разработан вычислительный алгоритм. При разработке программного обеспечения, иллюстрирующего процесс моделирования поведения решения во времени (визуализация), использовалась среда Visual Studio 2019 C# с включением графической библиотеки Open GL.

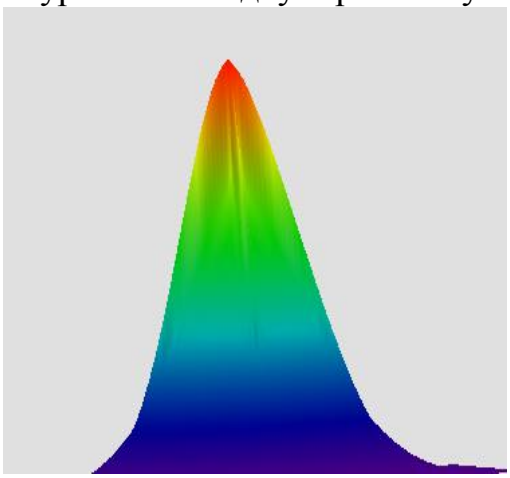
Результаты вычислительных экспериментов показывают, что для построенной схемы подходят все итерационные методы. Для достижения той же точности метод Ньютона требует меньше итераций, чем метод Пикара. В некоторых случаях количество итераций почти вдвое, а максимальное количество итераций в 3-4 раза меньше, чем в других методах. Поскольку степенная нелинейность присутствует в правой части уравнения (1), естественно, что специальный метод дает лучшие результаты, чем метод Пикара.

В качестве тестового примера мы использовали решения уравнения (1), полученные методами опорных уравнений и нелинейного расщепления [2]. На фиг. 1-4 приведены результаты расчетов для различных значений $p, n, m, k, l, \mu, \beta$ параметров и времени.

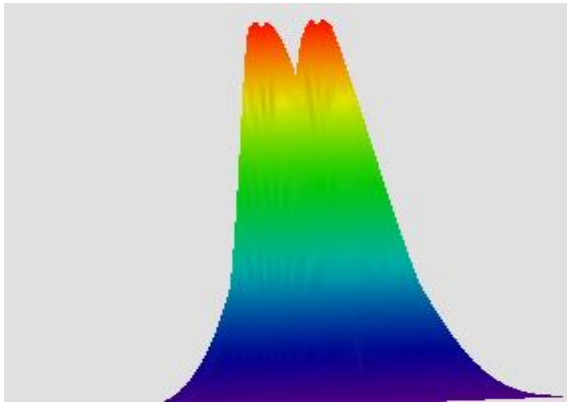
Ниже приведены результаты вычислительного эксперимента для различных значений параметров, входящих в уравнение в двумерном случае:



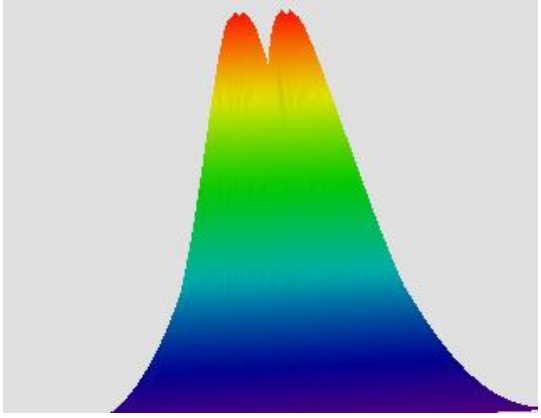
Фиг.1. *p=2.5, n=1, m=1.4, k=1, l=1*



Фиг.2. *p=2.4, n=1, m=1.2, k=1.3, l=1*



Фиг.3. *p=2.1, n=1.2, m=1, k=1, l=1*



Фиг.4. *p=2.3, n=1, m=1.2, k=1.3, l=1*

Литература

1. Ангар Юнгель. Кросс-диффузионные системы с энтропийной структурой. arXiv: 1710.01623v1 [математика.AP] 4 октября 2017 года. Труды EQUADIFF, (2017).
2. Маматов А. У., Бобокандов М. М. Исследование влияния нелинейной скорости окружающей среды на нелинейный процесс тепловыделения в многомерных областях методом переменных направлений. Журнал ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ, ISSN 2409-1677, №12,34-38(2019).
3. Маматов А. У., Баратов И. И., Амиркулов С. С. Моделирование многомерной задачи нелинейной теплопроводности в недивергентном случае. Конференция “Современные проблемы математики: проблемы и решения”, 2020,318-319.

4. Рахмонов З. Р., Урунбаев Ж. Е. Об одной задаче поперечной диффузии с нелокальными граничными условиями / / Сиб.Фед. Унив. - Математика. Физ., 2019.
5. Маматов А. У., Рихсибоев Д. Р. Исследование плотности окружающей среды и состояния теплового нагрева методом переменных направлений в процессе неравномерного распределения тепла. Журнал ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ, ISSN 2409-1677, № 12,39-41 (2019).
6. Маматов А. У. Численное моделирование процесса теплопроводности с двойной нелинейностью в двумерном случае при наличии переноса и источника (поглощения). Научный журнал Самаркандского университета, ISSN: 2091-544, № 1, 41-44 (2020)
7. Маматов А. У. Моделирование влияния двумерного нелинейного уравнения тепловыделения на биологическую популяцию с плотностью окружающей среды / / Научный журнал Самаркандского университета.
8. Ван М., Вэй Ю. Свойства раздутия вырожденной параболической системы с нелинейными локализованными источниками. Анал. Appl. 343, 621-635 (2008).

ДИСКРЕТНЫЕ ИГРЫ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ОПИСИВАЕМАЯ УРАВНЕНИЯМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

[1]Маматов М.Ш., [2]Эсонов Э.Э.
[1]Национальный университет Узбекистана,
[2]Ташкентский Государственный технический университет

Рассматривается управляемая система, описываемая дискретными уравнениями

$$z_{k+1} - Cz_k + z_{k-1} = -u_k + \upsilon_k,\ z_0 = \varphi_0,\ z_1 = \varphi_1, \qquad (1)$$

где z_k, u_k, υ_k $-$ n мерные матрицы–столбцы, соответственно φ_0, φ_1 начальные векторы, C $-$ n-мерная квадратная трехдиагональная матрица. Пусть в R^n выделено терминальное множество M.

Определение 1. Будем говорить, что в игре (1) из точки $z_0 = \varphi_0$, $z_1 = \varphi_0$ можно завершить преследования за $N(z_0, z_1) \le \theta$ шагов, если по любой последовательности $\overline{\upsilon}_1, \overline{\upsilon}_2, \ldots, \overline{\upsilon}_{N-1}$ значений управления убегания можно построить такую последовательность $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_{N-1}$, управления преследования, что решение $(z_0, z_1, \overline{z}_2, \ldots, \overline{z}_N)$ уравнения $z_{k+1} - Cz_k + z_{k-1} = -\overline{u}_k + \overline{\upsilon}_k$, $z_0 = \varphi_0$, $z_1 = \varphi_1$, $k = 1, \ldots, N-1$ при некотором $d \le N$ удовлетворяют условию: $\overline{z}_d \in M$.

Пусть дискретная игра описывается уравнениями (1). Через $U_m(y)$ обозначим полином Чебышева второго рода степени n [6,273]:

$$U_m(y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(m+1)\arccos y}{\sin\arccos y}, & |y|\le 1,\\ \dfrac{1}{2\sqrt{y^2-1}}\left[\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)^{m+1}-\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)^{-(m+1)}\right], & |y|>1.\end{cases}$$

Отсюда можно получить следующее: $U_{-2}(y)=-1$, $U_{-1}(y)=0$, $U_0(y)=1$, $U_1(y)=2y$, и т.д. Известно следующие рекуррентные соотношения для $U_m(y)$:

$$U_{m+2}(y)=2yU_{m+1}(y)-U_m(y),\ m\ge 0,\ U_0(y)=1,\ U_1(y)=2y. \qquad (2)$$

Далее через $U_m(Y)$ обозначим матричный полином Чебышева от матрицы Y, определяемой по рекуррентным формулам (2). Отсюда видно, что $U_{-2}(Y)=-E$, $U_{-1}(Y)=\overline{0}$, $U_0(Y)=E$, $U_1(Y)=2Y$, где E – единичная, а $\overline{0}$ – нулевая матрица.

Лемма. Пусть $\overline{u}=\overline{u}_k=\overline{u}(k)$, $\overline{\upsilon}=\overline{\upsilon}_k=\overline{\upsilon}(k)$, $1\le k\le N$ – заданные управления. Тогда решение уравнения (1) с начальными условиями $z_0=z(0)=\overline{\varphi}_0$, $z_1=z(1)=\overline{\varphi}_1$ определяется формулой

$$z_m=z(m)=U_{m-2}\left(\frac{1}{2}C\right)\overline{\varphi}_0-U_{m-1}\left(\frac{1}{2}C\right)\overline{\varphi}_1+$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}U_{m-k-1}\left(\frac{1}{2}C\right)\left(-\overline{u}(k)+\overline{\upsilon}(k)\right), \qquad (3)$$

Доказательство. Подставляя (3) в уравнение (1) и учитывая равенство (2), получим

$$U_{m-3}\left(\frac{1}{2}C\right)z_0-U_{m-2}\left(\frac{1}{2}C\right)z_1+\sum_{k=1}^{m-2}U_{m-k-2}\left(\frac{1}{2}C\right)\left(-\overline{u}(k)+\overline{\upsilon}(k)\right)-$$

$$-C\left[U_{m-2}\left(\frac{1}{2}C\right)z_0-U_{m-1}\left(\frac{1}{2}C\right)z_1+\sum_{k=1}^{m-1}U_{m-k-1}\left(\frac{1}{2}C\right)\left(-\overline{u}(k)+\overline{\upsilon}(k)\right)\right]+$$

$$+U_{m-1}\left(\frac{1}{2}C\right)z_0-U_m\left(\frac{1}{2}C\right)z_1+\sum_{k=1}^{m}U_{m-k}\left(\frac{1}{2}C\right)\left(-\overline{u}(k)+\overline{\upsilon}(k)\right)=$$

$$=\left[U_{m-3}\left(\frac{1}{2}C\right)-CU_{m-2}\left(\frac{1}{2}C\right)+U_{m-1}\left(\frac{1}{2}C\right)\right]z_0-$$

$$-\left[U_{m-2}\left(\frac{1}{2}C\right)-CU_{m-1}\left(\frac{1}{2}C\right)+U_m\left(\frac{1}{2}C\right)\right]z_1+$$

$$+\sum_{k=1}^{m-2}\left[U_{m-k-2}\left(\frac{1}{2}C\right)-CU_{m-k-1}\left(\frac{1}{2}C\right)+U_{m-k}\left(\frac{1}{2}C\right)\right]\left(-\bar{u}(k)+\bar{\upsilon}(k)\right)-$$

$$-CU_0\left(\frac{1}{2}C\right)\tau^2\left(-\bar{u}(m-1)+\bar{\upsilon}(m-1)\right)+U_1\left(\frac{1}{2}C\right)\left(-\bar{u}(m-1)+\bar{\upsilon}(m-1)\right)+$$

$$+U_0\left(\frac{1}{2}C\right)\left(-\bar{u}(m)+\bar{\upsilon}(m)\right)=\left(-\bar{u}(m)+\bar{\upsilon}(m)\right).$$

Лемма доказана.

Предположение 1. $M=M_0+M_1$, где M_0 – $(n-r)$-мерное линейное подпространство R^n; M_1 – подмножество подпространства L – ортогонального дополнения M_0 в R^n. Через Π обозначим операцию ортогонального проектирования из R^n на L, а через $A+B$ и $A\overset{*}{-}B$ алгебраическую сумму и геометрическую разность множеств A,B соответственно. Пусть

$$W_1(m)=\sum_{k=1}^{n}\bigcap_{\upsilon(k)\in Q}\Pi U_{m-k-1}\left(\frac{1}{2}C\right)(-P+\upsilon(k))-M_1. \qquad (4)$$

Предположение 2. Пусть существует такое $m=m_0$, что

$$-\Pi\left[U_{m_0-2}\left(\frac{1}{2}C\right)\bar{\varphi}_0-U_{m_0-1}\left(\frac{1}{2}C\right)\bar{\varphi}_1\right]\in W_1(m_0). \qquad (5)$$

Теорема 1. Если выполнены предположения 1, 2, то в игре (1) из начального положения $(\bar{\varphi}_0,\bar{\varphi}_1)$ возможно завершение преследования за $N(\bar{\varphi}_0,\bar{\varphi}_1)\le m_0$ шагов.

Доказательство. Из (4) и (5) следует существования таких

$$a(k)\in\bigcap_{\upsilon(k)\in Q(k)}\Pi U_{m_0-k-1}\left(\frac{1}{2}C\right)(-P+\upsilon(k))$$

и $l\in M_1$, что

$$-\Pi\left[U_{m_0-2}\left(\frac{1}{2}C\right)z_0-U_{m_0-1}\left(\frac{1}{2}C\right)z_1\right]=\sum_{k=1}^{m_0-1}a(k)-l. \qquad (6)$$

Пусть $\upsilon = \upsilon^0(k)$, $1 \le k \le m_0 - 1$ – произвольное допустимое управление убегающего игрока; управление преследующего игрока $u = u^0(k)$ построим как решение следующего уравнения

$$\Pi U_{m_0-k-1}\left(\frac{1}{2}C\right)\left(-u^0(k)+\upsilon^0(k)\right) = a(k). \qquad (7)$$

Ясно, что эти уравнения имеют решения по выбору $a(k)$, так как $\upsilon^0(k) \in Q$ и $u^0(k) \in P$. Подставляя $\upsilon = \upsilon^0(k)$ и $u = u^0(k)$ в (1) и применяя формулу (3), получим

$$z_{m_0} = z(m_0) = U_{m_0-2}\left(\frac{1}{2}C\right)z_0 - U_{m_0-1}\left(\frac{1}{2}C\right)z_1 +$$

$$+\sum_{k=1}^{m_0-1} U_{m_0-k-1}\left(\frac{1}{2}C\right)\left(-u^0(k)+\upsilon^0(k)\right).$$

Отсюда, применяя к обеим частям равенства оператор проектирования Π и из равенств (6), (7), имеем

$$\Pi z(m_0) = \left[U_{m_0-2}\left(\frac{1}{2}C\right)z_0 - U_{m_0-1}\left(\frac{1}{2}C\right)z_1\right] +$$

$$+\sum_{k=1}^{m_0-1}\Pi U_{m_0-k-1}\left(\frac{1}{2}C\right)\left(-u^0(k)+\upsilon^0(k)\right) = \Pi\left[U_{m_0-2}\left(\frac{1}{2}C\right)z_0 - U_{m_0-1}\left(\frac{1}{2}C\right)z_1\right] +$$

$$+\sum_{k=1}^{m_0-1} a(k) = \Pi\left[U_{m_0-2}\left(\frac{1}{2}C\right)z_0 - U_{m_0-1}\left(\frac{1}{2}C\right)z_1\right] -$$

$$-\Pi\left[U_{m_0-2}\left(\frac{1}{2}C\right)z_0 - U_{m_0-1}\left(\frac{1}{2}C\right)z_1\right] + l = l \in M_1.$$

Из этого включения получим, что $\Pi z(m_0) \in M_1$ и, значит, $z(m_0) \in M$. Что и требовалось доказать.

Пусть $1 \le k \le m-1$, $W_2(0) = -M_1$,

$$W_2(k) = \bigcap_{\upsilon(k)\in Q(k)}\left[W_2(k-1) + \Pi U_{m-k-1}\left(\frac{1}{2}C\right)\left(-P+\upsilon(k)\right)\right]. \qquad (8)$$

Предположение 3. Пусть существует такое $m = m_0$, что

$$-\Pi\left[U_{m_0-2}\left(\frac{1}{2}C\right)z_0-U_{m_0-1}\left(\frac{1}{2}C\right)z_1\right]\in W_2(m_0-1). \qquad (9)$$

Теорема 2. Если выполнено предположения 3, то в игре (1) из начального положения (z_0, z_1) возможно завершение преследования за $N(z_0, z_1)\le m_0$ шагов.

Доказательство. По условию теоремы существуют (см. (8)) такие векторы $\bar{a}(k)\in\Pi U_{m_0-k-1}\left(\frac{1}{2}C\right)(-P+\upsilon(k))$, $1\le k\le m_0-1$ и $\bar{l}\in M$, что

$$-\Pi\left[U_{m_0-2}\left(\frac{1}{2}C\right)z_0-U_{m_0-1}\left(\frac{1}{2}C\right)z_1\right]\in W_2(k)+$$

$$+\bar{a}(m_0-1)+\bar{a}(m_0-2)+\ldots+\bar{a}(k),\quad 1\le k\le m_0-1.$$

Отсюда получим, что

$$-\Pi\left[U_{m_0-2}\left(\frac{1}{2}C\right)z_0-U_{m_0-1}\left(\frac{1}{2}C\right)z_1\right]\in\sum_{k=1}^{m_0-1}\bar{a}(k)-\bar{l}\,.$$

Пусть теперь $\upsilon=\upsilon^0(k)$, $1\le k\le m_0-1$ – произвольное допустимое управление убегающего игрока; управления преследующего игрока $u=u^0(k)$, $u^0(k)\in P$ строятся как решения следующего уравнения

$$\Pi U_{m_0-k-1}\left(\frac{1}{2}C\right)\left(-u(k)+\upsilon^0(k)\right)=\bar{a}(k),\quad 1\le k\le m_0-1.$$

Подставляя $u=u^0(k)$, $\upsilon=\upsilon^0(k)$ в (1) и одновременно применяя формулу (3) и оператор проектирования Π, имеем

$$\Pi z(m_0)=\Pi\left[U_{m_0-2}\left(\frac{1}{2}C\right)z_0-U_{m_0-1}\left(\frac{1}{2}C\right)z_1\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{m_0-1}\Pi U_{m_0-k-1}\left(\frac{1}{2}C\right)\tau^2\left(-u^0(k)+\upsilon^0(k)\right)=\sum_{k=1}^{m_0-1}\bar{a}(k)-\sum_{k=1}^{m_0-1}\bar{a}(k)+l=l\in M_1\,.$$

Отсюда получим $z(m_0)\in M$. Теорема доказана.

Литература

1.Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 570 с.

2.Маматов М.Ш. О применении метода конечных разностей к решению задача преследования в системах с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика. – Москва. 2009. – № 8. – С.123-132.
3.Маматов М.Ш., Зуннунов А.О.,О задаче простого преследования на правильном звездном многоугольнике «Колмогоровские чтения. Общие проблемы управления и их приложения (ОПУ–2020)» Тамбов, 12-16 октябрь, 2020. -С.61-65.
4.Маматов М.Ш.,Зуннунов А.О.,Эсонов Э.Э. Количественный анализ задачи «Лев и Человек» при наличии кругового препятствия//Проблемы управления и информатики., 2020.-№1. С.57 - 66.

КОМПАКТ ТЎПЛАМДАГИ КЎП ИШТИРОКЧИЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ЎЙИНЛАРДА ҚОЧИШ МАСАЛАСИ

Маматов М.Ш., Зуннунов А.О.
Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий Университети
mamatovmsh@mail.ru, zizu.zunnunov@gmail.com

R^n фазода битта бошқарилувчи қочувчи объект- $x_0, x_0 \in R^n$ ва бошқарилувчи бошқа - $x_i, x_i \in R^n$, $1 \le i \le k$ қувувчи объектлардан иборат содда қувиш-қочиш масаласини қарайлик. $x_i, 0 \le i \le k$ нуқталарнинг ҳаракати қуйидагича содда дифференциал тенгламалар билан берилган бўлсин

$$\dot{x}_0 = u_0, \quad \dot{x}_i = u_i, \quad \|u_0\| \le 1, \ \|u_i\| \le 1, 1 \le i \le k, \tag{1}$$

бунда $R^n - n$ ўлчовли Эвклид фазоси, u_0, u_i – лар бошқарилувчи параметрлар; u_0 – қочувчи ўйинчининг бошқарув параметри, u_i–эса i-қувувчи ўйинчининг бошқарув параметрлари ва улар $t \ge 0$ да ўлчовли функциялардир, $\|z\| = \sqrt{(z,z)}$, (z_1, z_2) $-z_1, z_2 \in R^n$ даги векторларнинг скаляр кўпайтмаси. Маълумки, $t \ge 0$ да ҳар қандай $u_i = u_i(t), 0 \le i \le k$ функциялар мажмуи учун (1) системаси абсалют узлуксиз ягона ечимга эга. Энди R^n фазода барча $t \ge 0$ ва $0 \le i \le k$ учун $x_i = x_i(t) \in N$ ички нуқта бўладиган бўш бўлмаган N компакт берилган бўлсин. Бу компакт ичида [3] ишда келтирилганидек, битта қочувчи x_0 ва kта қувувчилардан $x_i, 1 \le i \le k$ иборат қувиш–қочиш дифференциал ўйинини кўрамиз.

Агар қандайдир $i, 1 \le i \le k$ учун T вақт моментида $x_0(T) = x_i(T)$ шарт бажарилса, (1) ўйин ниҳоясига етган ҳисобланади. Бундай ҳолда, ўйинни устма-уст тушиш маъносида якунланди дейилади [3].

Энди ҳар қандай абсолют узлуксиз $x_i(t)$ траекториялар учун ўйинчиларнинг t га боғлиқ ўлчовли функцияли стратегияларини топиш талаб этилади. Ушбу стратегиялар ёрдамида ҳар қандай $t \ge 0$ учун ва қувувчиларнинг ҳар қандай ўлчовли бошқарувида ҳам қочувчи қувувчи

билан учрашмаслиги таъминланади. Ёки, аксинча қочувчининг ҳар қандай ўлчовли бошқарувида ҳам ўйин чекли вақтда ниҳоясига етиши таъминланади.

Таъриф. x_0 қочувчи ўйинчининг позицион ε – стратегияси деб шундай t га боғлиқ ўлчовли $u_0(x_0(t), x_1(t), ..., x_k(t))$, $t_j \le \tau \le t_{j+1}$ функциясига айтиладики $u_0(x_0(\tau), x_1(\tau), ..., x_k(\tau)) = u_0(x_0(t_j), x_1(t_j), ..., x_k(t_j))$ бўлади, бу ерда $0 = t_1 < t_2 < ... < t_j < ...$ ва $\lim t_j = +\infty$.

Теорема. N компактда битта қочувчи ва k $(k < n)$ та қувувчилардан иборат "содда қувиш-қочиш" ўйини берилган бўлиб, $x_0(0)$- N компактда жойлашган бўлсин. У ҳолда қочувчида $t \ge 0$ вақтда қувувчилар билан учрашмасликни таъминловчи ε-стратегия мавжуд.

Исбот. Бошланғич вақт моментида қочувчидан қувувчиларгача бўлган масофаларнинг барчаси мусбат, акс ҳолда ўйин ниҳоясига етган бўлади, шу сабабли исботни умумийлигини чегараламаган ҳолда $x_0(0)$ нуқтани N компактнинг ички нуқтаси деб олсак бўлади. Энди N компактда шундай S шар танлаб оламизки, $x_0(0)$ нуқта унда ички бўлиши керак. O-шар маркази, r-унинг радиуси бўлиб, унинг узунлиги $r = \|\vec{r}\|$, r_0-эса $x_0(0)$ нуқтадан S шар марказигача бўлган энг қисқа масофа бўлсин, яъни $r_0 = \|\vec{r}_0\|$. $\varepsilon = \sqrt{r^2 - r_0^2}$ деб белгилаш киритиб оламиз. Энди қочувчи сттратегиясини қуйидагича киритамиз. N компакт ичида қочувчи ва k та $(k < n)$ қувувчи ҳаракатланмоқда, агар қувувчилардан камида биттаси N компактда танлаб олинган S шарни ичига кирсагина қочувчи қувувчилардан қочиш мақсадида ўзининг стратегиясини қўллаш учун ҳаракатга келади, акс ҳолда қочувчи бу S шар ичида ҳаракатсиз ҳолатда бўлади. Қувувчилар сони кўпи билан $n-1$та бўлиши мумкин эканлигини эслатиб ўтамиз. Қувувчилар қочувчи танлаб олган S шар ичида $n-1$ таси кириб жойлашди дейлик, у ҳолда қочувчи учун ε-стратегияни қуришда, қочувчи ва қувувчиларнинг бошланғич ҳолатлари r радиусли S шарнинг $x_0(0), x_i(0)$ векторлар орқали ифодаланган $M(0)$ ва $L_i(0)$ нуқталарида бўлсин. Қочувчи учун ε стратегия - синиқ чизиқни қуйидагича қурамиз. $n-1$та қувучилардан ихтиёрий $n-2$ тасини танлаб оламиз ҳамда улар жойлашган $L_i(0)$, $(1 \le i \le n-2)$ нуқталар, қочувчи жойлашган $M(0)$ нуқта ва S шарнинг O маркази орқали (n ўлчовли фазода n та нуқтадан гипертекислик ўтказиш мумкин) гипертекислик ўтказамиз. Бу гипертекислик ўз навбатида S шарни (шу жумладан N компактни ҳам) иккита қисмга ажратади. Шунингдек S шар ичидаги икки қисмнинг бирида ушбу гипертекисликда ётмаган битта қувувчи $x_{n-1}(0)$ вектор орқали ифодаланган $L_{n-1}(0)$ нуқтада қолди. Қочувчининг кейинги ҳаракати учун $M(0)$ нуқтадан $L_{n-1}(0)$ нуқта жойлашган қисмга қарама-қарши равишда ушбу гипертекисликка перпендикуляр тарзда $u_0(t) = p_1$, $\|p_1\| = 1$ вектор бўйлаб

$M(0)M(t_2)=\dfrac{\varepsilon}{2}$ масофага юрамиз ва $x_0(t_2)$ вектор орқали ифодаланган $M(t_2)$, $t_2=\dfrac{\varepsilon}{2}$ нуқтани эгаллаймиз (бу ерда $M(0)M(t_2)-\varepsilon$ синиқ чизиқнинг биринчи бўғини). Ўз навбатида қувувчилар $x_l(t_2)$, $t_2=\dfrac{\varepsilon}{2}$ векторлар орқали ифодаланган $L_i(t_2)$ нуқталарни эгаллайдилар. Энди $M(t_2)$нуқтадан O марказгача бўлган масофани r_1 орқали белгилаймиз, унинг узунлиги эса $r_1=\|\vec{r}_1\|$га тенг бўлади. $r_1^2=r_0^2+\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^2$эканлигини кўриш қийин эмас. Энди $M(t_2)$ нуқтадан, $x_0(t_3)$, $t_3=\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{3}$ вектор орқали ифодаланувчи $M(t_3)$ нуқтага боришимиз керак. Бунинг учун яна $n-1$ та қувувчидан иҳтиёрий $n-2$ тасини танлаб оламиз ва қочувчи жойлашган $M(t_2)$ нуқта, S шарнинг O маркази ҳамда $L_i(t_2)$, $(1\le i\le n-2)$ нуқталар орқали гипертекислик ўтказамиз. Бу гипертекислик ҳам S шарни иккита қисмга ажратади. Шунингдек S шар ичидаги икки қисмнинг бирида ушбу гипертекисликда ётмаган битта қувувчи $x_{n-1}(t_2)$ вектор орқали ифодаланган $L_{n-1}(t_2)$ нуқтада қолди. Энли қочувчи турган $M(t_2)$ нуқтадан бу гипертекисликка перпендикуляр тарзда $L_{n-1}(t_2)$ нуқта жойлашмаган қисмга $u_0(t)=p_2$, $\|p_2\|=1$ вектор бўйлаб $M(t_2)M(t_3)=\dfrac{\varepsilon}{3}$ масофага юрамиз ва $x_0(t_3)$, $t_3=\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{3}$ вектор орқали ифодаланувчи $M(t_3)$, $t_3=\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{3}$нуқтани эгаллаймиз. Ўз навбатида қувувчиларнинг қочувчи томон яқинлашган нуқталарини $L_i(t_3)$, $(1\le i\le n-1)$ деб белгилаймиз. Энди $M(t_3)$ нуқтадан O марказгача бўлган масофани r_2 орқали белгилаймиз, унинг узунлиги эса $r_2=\|\vec{r}_2\|$, $r_2^2=r_1^2+\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right)^2=r_0^2+\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right)^2$ га тенг бўлади. Кейинги ҳаракатлар ҳам юқоридаги сингари давом этади. Умумий ҳолда қочувчи $M(t_j)$ нуқтада, қувувчилар эса $L_i(t_j)$ нуқтада турган бўлса, у ҳолда $M(t_{j+1})$ нуқтани танлашимиз учун $n-1$та қувувчидан иҳтиёрий $n-2$ тасини танлаб оламиз ва $M(t_j)$ нуқта, S шарнинг O маркази ҳамда $L_i(t_j)$, $(1\le i\le n-2)$ нуқталар орқали гипертекислик ўтказамиз. Бу гипертекислик ҳам S шарни иккита қисмга ажратади. Шунингдек S шар ичидаги икки қисмнинг бирида ушбу гипертекисликда ётмаган битта қувувчи $x_{n-1}(t_j)$ вектор орқали ифодаланган $L_{n-1}(t_j)$ нуқтада қолди. Қочувчи турган $M(t_j)$ нуқтадан бу гипертекисликка

перпендикуляр тарзда $u_0(t)=p_{j+1}$, $\|p_{j+1}\|=1$ вектор бўйлаб $L_{n-1}(t_j)$ нуқта жойлашмаган қисмга $M(t_j)M(t_{j+1})=\dfrac{\varepsilon}{j+1}$ масофага юрамиз ва $M(t_{j+1})$, $t_{j+1}=\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{3}+...+\dfrac{\varepsilon}{j+1}$ нуқтани эгаллаймиз (бу ерда $M(t_j)M(t_{j+1})-\varepsilon$ синиқ чизиқнинг $j+1$-бўғини). Ўз навбатида қувувчилар $L_i(t_{j+1})$, $(1\le i\le n-1)$ нуқталарни эгаллайдилар. Энди $M(t_{j+1})$ нуқтадан O марказгача бўлган масофани r_j орқали белгилаймиз, унинг узунлиги эса $r_j=\|\vec{r}_j\|$, $r_j^2=r_{j-1}^2+\left(\dfrac{\varepsilon}{j+1}\right)^2=r_0^2+\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right)^2+...+\left(\dfrac{\varepsilon}{j+1}\right)^2$ га тенг бўлади. Шундай қилиб биз ε синиқ чизиқни ҳосил қилдик. Қочувчи учун юқорида қурилган ε стратегия қуйидаги учта шартни қаноатлантирса, теорема исботланган бўлади.

1) Қочувчи бундай стратегияни қўллаганда S шардан чиқиб кетмайди ва демак, N компактдан ҳам чиқиб кетмайди.

2) Қочувчи бундай стратегияни қўллаш давоомида бирорта ҳам қувувчига қўлга тушмайди

3) $T_j=\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{3}+...+\dfrac{\varepsilon}{j}$ вақт $j\to\infty$ чексизга интилади.

Ушбу учта шартни исботлаймиз.

1) Қочувчи S шардан чиқиб кетмаслигини кўрсатайлик. Хақиқатдан ҳам

$$r_j^2=r_{j-1}^2+\left(\frac{\varepsilon}{j+1}\right)^2=r_0^2+\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^2+...+\left(\frac{\varepsilon}{j+1}\right)^2=$$

$$r_0^2+\varepsilon^2\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{(j+1)^2}\right)=r_0^2+\varepsilon^2\left(\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 3}+...+\frac{1}{(j+1)\cdot(j+1)}\right)<$$

$$r_0^2+\varepsilon^2\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{j\cdot(j+1)}\right)=r_0^2+\varepsilon^2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{j}-\frac{1}{(j+1)}\right)=$$

$$r_0^2+\varepsilon^2\left(1-\frac{1}{(j+1)}\right)<r_0^2+\varepsilon^2=r_0^2+r^2-r_0^2=r^2$$

$r_j<r$. Демак қочувчи бундай ҳаракатлар давомида S шар чегарасидан чиқиб кетмайди.

2) Қочувчи ўз стратегиясини қуришига кўра гипертекисликлардаги нуқталарнинг ҳолати $L_i(t_j)M(t_j)\perp M(t_j)M(t_{j+1})$, $(1\le i\le n-2)$ кўринишда бўлади. Гипертекисликда ётмаган $L_{n-1}(t_j)$ нуқтани ҳам қолган ўйинчилар жойлашган гипертекисликка проексияласак, у ҳолда ушбу гипертекисликда $L_{n-1}'(t_j)$ нуқта ҳосил бўлади. Бу нуқтанинг вазияти ҳам

$L_{n-1}'(t_j)M(t_j) \perp M(t_j)M(t_{j+1})$ кўринишда бўлади. Демак стратегияни қурилишига кўра қувувчилар $t_j \le \tau \le t_{j+1}$ вақт оралиғида қочувчини қўлга туширишлари учун қочувчидан кўпроқ масофани босиб ўтишлари керак. Буни эса (1)га кўра иложи йўқ. Демак қочувчи бундай стратегияни қўллаш давоомида бирорта ҳам қувувчига қўлга тушмайди.

Хақиқатдан ҳам $z_i = x_0 - x_i$, $z_i^0 = x_0(t_j) - x_i(t_j)$ деб белгиласак ва $\dot{z}_i = u_0 - u_i$ бўлади. Бундан $z_i(t) = z_i^0 + \int_0^t u_0(\tau)d\tau - \int_0^t u_i(\tau)d\tau$ келиб чиқади. Агар $u_i(t) = \frac{1}{t}\int_0^t u_i(\tau)d\tau$ деб белгилаш киритсак, бу ерда $\|u_i(t)\| \le 1$ ва p_j танланишига кўра $u_0(\tau) = p_j$, $(z_i^0, p_j) \ge 0$. Булардан эса $z_i(t) = z_i^0 + tp_j - tu_i(t)$ ни оламиз. У ҳолда норманинг хоссасига кўра қуйидагини оламиз

$$\|z_i(t)\| \ge \|z_i^0 + tp_j\| - t\|u_i(t)\| \ge \|z_i^0 + tp_j\| - t = \sqrt{\|z_i^0\|^2 + 2t(z_i^0, p_j) + t^2} - t \ge$$

$$\ge \sqrt{\|z_i^0\|^2 + t^2} - t > 0.$$

Демак, қочувчи ε синиқ чизиқнинг ҳар бир бўлагида қувувчига қўлга тушмайди. Бундан эса қочувчи синиқ чизиқ бўйлаб ҳаракат қилса, қувувчига қўлга тушмаслиги келиб чиқади.

3) $T_j = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{3} + ... + \frac{\varepsilon}{j}$ вақт чексиз давом этишини кўрсатамиз. Бунинг учун T_j йиғиндини $T_j = \varepsilon\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{j}\right)$ кўринишда ёзсак ва $L_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{j}$ орқали белгиласак, у ҳолда $T_j = \varepsilon L_j$. Маълумки $\lim_{j\to\infty} L_n \to \infty$. Демак $T_j = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{3} + ... + \frac{\varepsilon}{j}$ вақт чексиз давом этар экан. Бундан эса қочувчи қувувчилардан чексиз вақт қочиб юра олиши келиб чиқади.

Хулоса қилиб айтганда қочувчи бундай стратегияни қўллаш давоомида O марказли, r радиуали S шардан ва шу жумладан N компактдан ҳам чиқиб кетмайди. Шу билан бирга бундай ҳаракатлари давомида бирорта ҳам қувувчига қўлга тушмайди ва қувувчилардан чексиз вақт қочиб юра олади

Теорема исботланди.

Адабиётлар

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры.-М.: МИР, 1967. 480с.
2. Понтрягин Л.С. Линейное дифференциальные игры преследования // Мат. сборник.- Москва.1980.- Т.112. №3.-С. 307-330.
3. Иванов Р.П. Простое преследование - убегание на компакте//Док. АН

СССР.1980.Т.254.№6.С. 1318-1321.
4. Littlewood J.E. A mathematician's miscellany/ London: Methuen, 1953.- 136p.
5. Mamatov, M., Zunnunov, A. and Esonov, E. (2020) Quantitative Analysis of the Problem of Lion and Man in the Presence of a Circular Obstacle. Journal of Automation and Information, 52, p.42-52.
6. Zunnunov A.O. Yopiq arenada sher va odam o'rtasida quvish masalasi Matematika Instituti Byulleteni-2020. №6. 4-8 b.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО УРОВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА.

[1]Муминов Ф.М., [2]Муминов С.Ф
[1]ТДТУОлмалиқ филиали,
[2]Оҳангарон туман 15-мактаб

Рассмотрим уровнение :

$$LU = K(x;\mathrm{y})\,\mathrm{U}_{yy} + U_{xx} + \alpha(x;\mathrm{y})\,\mathrm{U}_{y} + b(x;y)U + m|u|^{\rho}U = f(x;y) \qquad (1)$$

Где К(х,у)–непреривно дифференцируемая функция , причем $K(x,y)\geq 0$ при $y\geq 0, K(x,y)<0$ при $y<0,\ a(x,y)\in \bar{\mathrm{C}}(D), \mathrm{b}(x,y)\in \mathrm{C}^{1}(\bar{\mathrm{D}})$, $m<0,\ p>0$

Область D– которая состоить при у>0 из прямоугольника с вершинами в точках А(0;0), В(1;0), A_1(0;1), B_1(1;1), а при у<0 ограничена характеристиками уровнения (1)

$$S_1 = \left\{(x;y): \frac{dx}{dy} = -\sqrt{-K},\ y(0)=0,\ y<0\right\}$$

$$S_2 = \left\{(x;y): \frac{dx}{dy} = -\sqrt{-K},\ y(0)=0,\ y<0\right\}$$

Положим $S = S_1 \cup S_2$

Краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области D такое, что

$$U(0;y) = U(1;y) = 0 \qquad (2)$$

$$\mathrm{U}(\mathrm{x};1) = \beta(\mathrm{x})\,\mathrm{U}(\mathrm{x};\mathrm{y})/_{S} \qquad (3)$$

Всюду ниже предполагается что, у∈S. $\beta(\mathrm{x}) = \exp\left[\frac{\lambda}{p+2}(-1+y)\right], \lambda>0, \mathrm{y}\in \mathrm{S}.$

Где $y<0$. Через $W_2^1(D)$ обозначим под пространство функций из пространства $W_2^1(D)$ которые удовлетворяют краевым условиям (2)-(3)

Определение 1. Функци и $(x;y)\in W_2^1(D)$) называется обобщенным решением задачи(1)-(3), если выполнено интегральное то ждество.

$$\int_d \left[-U_y(KV)_Y - U_x V_x + a(x;y)U_y V + bUY + m|U|^\rho UV \right] dD = \int_D fV dD$$

для любой функции V из $\overset{0}{W}{}_2^1(D)$.

Существование обобщенного решения краевой задачи (1)-(3) установым с помощью метода Галеркина. Пусть $\{\varphi_n(x,y)\}$–множество функций из пространства $W_2^1(D)$ обладающее тем свойством , что все $\varphi_n(x,y)$ линейно независимы , а их линейные комбинации плотны в этом пространстве . Такое множество, как известно [1], [4]сушествует.

Расмотрим вспомогательную задачу

$$lW_n = e^{-\lambda y} W_{ny}(x;y) = \varphi_n(x;y) \tag{5}$$

$$W_n(x;1) = \beta(x) W_n(x;y) \Big/_S \tag{6}$$

Решение задачи (5)-(6)

$$W_n(x,y) = \int_s^y e^{\lambda\tau}\varphi_n(x;\tau)dt + \frac{1}{\beta - 1}\int_S e^{\lambda t}\varphi_n(x;t)dt$$

Ясно, что $W_n(x,y)$ линейно независимы. Действительно , если $\sum_{n=1}^{N} C_n W_n = 0$ для кокого–небудь набора $W_1, W_2, \ldots\ldots W_n$ то действуя на эту сумму оператором L , имеем

$$\sum_{n=1}^{N} C_n \varphi_n(x;y) = 0 \Rightarrow C_n = 0, \forall n$$

Ясно, что $W_n(x;y) \in W_2^1(D)$ нетрудно получить отценку

$$\|W_n\|^p_{L_p(D)} \le m\|\varphi_n\|^p_{L_p(D)}$$

Кроме того $W_n(x,y)$ удовлетворяет условиям (6) для любого n. Приближенное решение задачи (1)-(3) будем искать в виде

$$U^N(x;y) = \sum_{n=1}^{N} C_n W_n(x;y)$$

Где C_n постоянные, которые определяются из системы нелинейных алгебраических уравнений виде

$$(LU^N_{,}U_n)_0 = (f_{,}U_n)_0, n = 1, N \tag{7}$$

Разрешимость этой системы алгебраических уравнений следует из получаемых ниже оприорных оценок для приближенных решений и [4] леммы “ об остром угле “

Лемма 1. Пусть выполнены условия $K(x;1) \geq 0$ и неравенства

$$2a(x;y) - K_y(x;y) - \lambda K(x;y) \geq \delta > 0$$

Тогда справедлива оценка

$$\left\|U^N\right\|^2_{W_2^1(D)} + \left\|U^N\right\|^p_{L_p(D)} \leq K_2 \tag{8}$$

K_2 не зависит от n.

Доказательство . Умножим (7) на C_n суммируя по n от 1 до N получим тождество

$$\int_D e^{\lambda y} U_y^N L U^N dD = \int_D e^{\lambda y} U_y^N f dD \tag{9}$$

Интегрируя левую часть равенство (9) но частям , получаем

$$\left[\lambda (U_y^N)^2 + (2a - \lambda K - Ky)(U_x^N)^2 + + \lambda (U^N)^2 + \frac{2m}{p}\left\|U^N\right\|^P\right] dD -$$

$$-\frac{e^\lambda}{2}\int_0^1 (U_x^N)^2 dx + \frac{e^\lambda}{2}\int_0^1 K(x;1)(U_y^N)^2 dx - \frac{e^\lambda}{2}\int_0^1 (U^N)^2 dx + \frac{1}{2}\int_S e^{\lambda y}\left[((U_y^N)^2 - K(U_y^N)^2 + m\left|U^N\right|^p + (U^N)^2)n_1 - 2(U_x^N)(U_y^N)n_2\right] ds$$

Где n=(n_1:n_2)– единичный вектор внутренный нормали к ∂D. Используя условия (3) и условия леммы получим неравенство (8). Вернемся к вопросу о разрешимости системы уравнений (7). Если записать ее в виде $\overrightarrow{F_m}(\overrightarrow{C}) = 0$, где $\overrightarrow{C} = (C_{1_m} ..... C_{n_m})$ то как мы только что убедились умножая $(\overrightarrow{F_m}(\overrightarrow{C}), \overrightarrow{C})_0$ получаем оценку $(\overrightarrow{F_m}(\overrightarrow{C}), \overrightarrow{C})_0 \geq K_0 \left\|U^N\right\|^2_{w_2^1(D)} - K_1$

В силу того , что линейная оболочка $L(W_1, W_2, ... W_m)$ есть конечномерное пространство , существует $К_2(m)$ такое , что значить , выполнено неравенство $(\overrightarrow{F_m}(\overrightarrow{C}), \overrightarrow{C})_0 \geq K_2(m)\sum_{S=1}^{N} C_S^2 - K_1 \geq 0$

Если $\vec{C}$ достаточно большая величина

А это условие “острого угла ”, достаточное для разрешимости системы уровнений (7) .

Теорема . Пусть выполнены условия леммы.

Тогда для любой функйии $f(x;y) \in L_2(D)$ существует обобщенное решение задачи (1)–(3).

Доказательство . В силу оценки (8), последовательность $\left\{\left|U^N\right|^p U^N\right\}$ оргоничено в пространстве L_q где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда на основании (8) из последовательности

$\{U^N\}$ можно выбрать подпоследовательность , сходящуюся слабо в $W_2^1(D)$ к некоторой функции $U(x,y)$ и последовательности $|U^N|^p U^N$ слабо сходится в $L_q(D)$ к функции $q(x;y)$ $|U^N|^\rho U^N \to q(x;y)$ в L_q

Одноко но теореми веожение $W_2^1(D)$ в $L_2(D)$ вполне непрерывно. Следовательно , мы можем считать , что подпоследовательность $U^N(x;y)$ силно в $L_2(D)$ и почти всюду . Теперь применим лемму 1 из [2], [4] о предельнои переходе в нелинейном члене в случае , когда

из нее следует, что $q(x,y) = |U|^p U$

Далее , переходя к пределу при $N \to \infty$ в (7) при функсированном n, будем иметь равенство

$$\int_D \left[-U_y (K\varphi_n)_y - U_x \varphi_n + \alpha U \varphi_n + \beta(x;y) U \varphi_n + m|U|^p U \varphi_n \right] dD = \int_D f \varphi_n dD$$

Где функцие $U(x;y)$ принадлежить $W_2^1(D)$. Отсюде в виду плотносити $\{\varphi_n\}$ в пространстве $W_2^1(D)$ следует, что интегральное тождество $|4|$ справедливо для любой $V(x;y) \in \overset{0}{W}{}_2^1(D)$ теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА.

1.Врагов В.Н. Краевые задании неклассических уравнений математической функци. Новосибирек: НГУ,1983-1984

2.Врагов В.Н.К. вопросу о единственности решения обобщенной задачи Трикоми. Докл. АН.СССР.1996-Т.226 №4 . С 761-764.

3.Глазатов С.Н. Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений смещанного типа. Афтореф. Диес.к.ф.м.н Новосибирек,1986.

4.Лионс. Ж.Л.Некоторые методы решения нелинейных краевих задач. М: Мир,1972.

5. Ф.М.Муминов. О нелокальных краевых задачах для уравнений смешанного типа второго рода. Ташкент 2011.

НЕЛОКОЛЬНАЯ РАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРОВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА.

Мўминов Ф.М., Мўминов С.Ф.
ТДТУ Олмалиқ филиали,
Оҳангарон туман 15-мактаб

В работе [1] А. В. Бицадзе, А.А. Самарского была поставлена и исследована новая нелокальная задача для Эллиптических уровнений, которая в ностоящее время называется задачей Бицадзе – Самарского.В дальнейшем такие нелокальние задачи для различных классов уровнени

нашли приложения в линеных обратных или задачах упровления и в целом ряде других задач из механики и физики [2,3]. В этом статъе предлогается постановка нелокальной задачи для смешанного уровнения и доказывается, что при опредиленных условиях на коэффиценты уровнения поставленные задачи разрешимы в пространстве Соболева

Постановка задачи .

Рассмотрим уровнение.

$$Lu = yU_{yy} + U_{xx} + \alpha(x;y)Uy = f(x,y) \tag{1}$$

Это уровнение Эллиптического типа при $y > 0$

и гиперболического типа при $y < 0$. Характеристики уровнения (1) ветви семейства парабол $x - 2\sqrt{-y} = cons\alpha$ имеют свою огибающую ось $y = 0$ – параболическую линию вырождения уровнения (1). Таким оброзом ,линия параболического вырождения уровнения (1) является одновременно его характеристикой. Обозначены через Д ограниченную область, ограниченную прямиугольником ABA_1B_1 с вершинами $A(0,0)$; $B(1,0)$; $B_1(1,1)$; $A_1(0,1)$ лежащей в полуплоскости и характеристиками $AC: x - 2\sqrt{-y} = 0$ и $BC: x + 2\sqrt{-y} = 1$ уровнения (1).

Задача. Найти решения уровнения .

$Lu = yU_{yy} + U_{xx} + \alpha(x,y)Uy = f(x,y)$ в области D, удовлетворяющее условиам

$$U(0,y) = U(1,y) = 0 \tag{2}$$

$$U(x;1) = \beta(x)U(x;y)/_{ACUBC} \tag{3}$$

$n = (n_1, n_2)$ -единичный вектор внутренней нормали к ∂D . Всюду ниже предполагается, что $\alpha(x,y) \in c^2(D)$

$$\beta(x) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{\alpha}{2}\left(\frac{x^2}{4}+1\right)\right], 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ \exp\left[-\frac{\alpha}{2}\left(\frac{(1-x)^2}{4}\right)\right], \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

где $\alpha > 0$

Обозначим C_L класс функций из $C^2(D)$, удовлетворяющие краевм условиям (2)-(3). Через $W_2^1(D)$ будем обозначить пространства Соболева, полученные замыканием класса функций C_L по норме

$$\|U\|_1^2 = \int_D (U_x^2 + U_y^2 + U^2)\alpha D$$

По простройством функций $W_2^1(D)$ и $L_2(D)$ построим негативное пространство $W_2^{-1}(D)$

$$\|U\|_1^2 = \frac{\sup}{u \in W_2^1}; \left(\frac{(f_1 u)0}{\|U\|_1}\right) \tag{4}$$

Лемма 1. Пусть существует константа $\lambda > 0$ такая, что выпольнены неравенства $2\alpha(x;y) - \lambda y - 1 \geq \delta > 0$ в облосит D

Тогда справедлива следующая оценка:

$$\|f\|_0 \geq m_1 \|U\|^2_{W_2^1}$$

$$\left|(Lu_1 e^{\lambda y}\ \mathrm{Uy})_0\right| \geq m_2 \|U\|^2_{W_2^1} \qquad (5)$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$2(\mathrm{Lu_1 e^{\lambda y} Uy})_0$, где $U \in C^2(D)$

Итегрируя это выражение по частям имеем

$$2(\mathrm{Lu_1 e^{\lambda y} Uy})_0 = \int e^{xy}\left[\lambda U_x^2 + (2\alpha - \lambda\,\mathrm{y} - 1)\,\mathrm{U}_y^2\right]dD - \int e^{\lambda y}\left[(\mathrm{U}_x^2 - \mathrm{yU}_y^2)\right]n_1 - e^x\int_0^1 U_x^2(\mathrm{x};1)\,\mathrm{dx} + \int_0^1 U_y^2(\mathrm{x};1)\,\mathrm{dD}$$

Используя условия (3) и условия теоремы, получим неравенство (4) .Отсюда следует единственность регулярного решения задачи (1)–(3).

Теорема.Пусть выполнены условия лемми.

Тогда для любой функции и $L_2(D)$ сушествует об обшенное решени задачи (1)–(3) из простройства $W_2^1(\overline{D})$.

Доказательство.

Виберим последовательность собственных функции

$\left\{V_n(\mathrm{x};\mathrm{y})\ \right\} \in \mathrm{W}_2^4(D) \cap \overset{0}{W}{}_2^2(D)$ задачи $\Delta^2 V_n(\mathrm{x};\mathrm{y}) = \lambda_n^2 V_n(\mathrm{x};\mathrm{y})$

$$V_n(x;y)/_{\partial D} = 0, \quad \frac{\partial V_n(x;y)}{\partial N}/_{\partial D} = 0$$

Извество ,что система собственных функций $\{V_n\}$ полна в $W_2^4(D) \cap \overset{0}{W}{}_2^2(D)$ определим последовательность функций следующем образом

$$\mathrm{e}^{\lambda y}\varphi_{ny}(x;y) = U_n(x;y) \qquad (5)$$

$$\varphi_n(x;1) = \beta(x)U_n(x;y)/_\Gamma\ n = 1,2,3\ldots \qquad (6)$$

Легко видеть, что существует единственное решение $\mathrm{U}_n \in C_L$ этой задачи, которое дается формулой

$$\varphi_n(x;y) = \int_\Gamma e^{-\lambda\tau}V_n(x;\tau)d\tau + \frac{1}{\beta - 1}\int_\Gamma e^{-\lambda t}V_n(x;t)dt$$

Пусть φ_n (x;y) решение задачи (5)-(6). Тогда получаем

$$(\varphi_{n_1}\,\mathrm{L}^*\mathrm{V}_n)_0 = (L\varphi_{n_1}V_n)_0 \geq m_2\|\varphi_n\|_1^2 \geq m_0\|V_n\|_0^2$$

Откуда

$$\|L^*V_n\|_{W_2^1(D)} \geq C\|U_n\|_{W_2^1}\|V_n\|_0$$

$$\|L^*V_n\|_{W_2^{-1}} \geq C_1\|V_n\|_0$$

Где m_0, m_2, C_1, C постаянное L^* – формально сопряженный оператор К L.

Решение задачи (1)-(3) будем искать в виде

$$U^N(x;y)=\sum_{n=1}^{N}C_nU_n(x;y)$$

Где постаянное C_n определяются из систем линейных алгебраических уравнений

$$(LU_1^N e^{\lambda y}\varphi_n)=(f_1e^{\lambda y}U_n) \qquad (7)$$

Система (7) разрешима при любых $f\in L_2(\mathrm{D})$, ибо для нее имеет место теорема единственности . Действительно если бы к соотношению

$$(LU_{,}^N \mathrm{e}^{\lambda y}\mathrm{U}_y^N)_0=0$$

Из которого в силу (7) . Следовало бы , что $U^N(x,y)=0$ т.е все $C_n, n=1,N$ равны нулью. Итак система (7) одназначно определяет $U^N(x,y)$. Умножим каждое из (7) на C_n и сложим по n от $n=N$. Это дает равенство

$$(LU_1^n e^{\lambda y}U_y^N)_0=(f_1e^{\lambda y}U_y^N)_0$$

Из которого в силу (4) следует неравенства

$$C\left\|U^N\right\|^2_{W_2^1}\le\|f\|_0\left\|U^N\right\|_{W_2^1}$$

Откуда $C\left\|U^N\right\|^2_{W_2^1}\le\|f\|_0$

Таким образом множество функции $\{U^N\}$, $N=1,2,3,\ldots.$ Ограничено в W_2^1 . Известно [4], Что множство слабо компактно в $W_2^1(D)$, т.е из него можно выделить подпоследовательность слабо сходящуюся в $W_2^1(D)$ к некоторой функции $n\in W_2^1(D)$. Тем самым теорема доказана.

Литература

1.Бицадзе А.В, Самарский А.А. О некоторых простейших обобщенных линейных эллипитических краевых задач. Докл.АН СССР–1969–Т. 185 N=(4). С739–740

2.Врагов В.Н.К теорем краевых задач для уровнений смешанного типа плохсти и в пространийве Автореф.дис… доктора физ–ма: 01.01.02 – Новосибирек , 1973–28с

3. Врагов В.Н смешанная задач для одного класса гипербола – параболического уровнений второго порядка (Дифференц.уровнение.)–1976–Т.12 N(1), с–24–31.

4.Михайлов В.П об обобщенной задаче трикоми. Труды или АН СССР, 1968–Т:СШ.–142–171

5. Соболев С.А. Некоторые применения функции–онального анализе в математической физике – Новосибирек: наука ,1962.

О ГРУППЕ СИММЕТРИЙ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Нарманов О.А., Насридинов С.С., Рахимова Ф.С.
ТУИТ
otabek.narmanov@mail.ru

В настоящей работе приводится решения двумерного уравнения теплопроводности без источника и стока, инвариантные относительной одной однопараметрической группы симметрий. При этом используется, алгебра Ли, инфинитезимальных образующих группы симметрий двумерного уравнения теплопроводности, найденная в работе [1].

Рассмотрим двумерное уравнение теплопроводности

$$u_t = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_i(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \tag{1}$$

Где $u = u(x_1, x_2, t)$ - температурная функция, $k_i(u) \geq 0$ функции от температурной функции. Мы рассмотрим случай $k_1(u) = k_2(u) = u$. В этом случае уравнение (1) имеет следующий вид:

$$u_t = u\Delta u + (\nabla u)^2 \tag{2},$$

где $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$, -оператор Лапласа, $\nabla u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\}$- градиент функции u.

В работе [1] найдена группы симметрий и алгебра Ли инфинитезимальных образующих группы симметрий для двумерного и трехмерного уравнения теплопроводности. Алгебра Ли инфинитезимальных образующих группы симметрий для одномерного уравнения теплопроводности найдена в работе [3] ,[3].

Одним из Ли инфинитезимальных образующих группы симметрий для уравнения (2) является векторное поле

$$X = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + 2t \frac{\partial}{\partial t}, \tag{3}$$

которое порождает следующую группу симметрий пространства переменных (x_1, x_2, t)

$$(x_1, x_2, t) \to \left(x_1 e^s, x_2 e^s, \mathrm{t} e^{2s} \right),$$

Относительно которых решения уравнения (2) являются инвариантными .т.е. если $u = u(x_1, x_2, t)$- решение уравнения (2), то при каждом s функции $u = u\left(x_1 e^{-s}, x_2 e^{-s}, t e^{-2s}\right)$ также являются решениями уравнения (2).

Найдем инвариантов этой группы симметрий. Функция $\xi(x_1, x_2, t)$ является инвариантом группы симметрий тогда и только тогда, когда $X(\xi) = 0$. Из этого условия находим

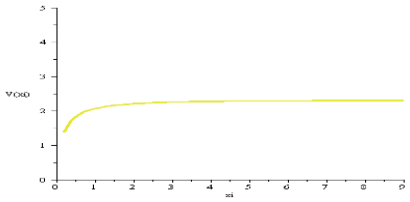
$$\xi(x_1, x_2, t) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2t}$$

Решение уравнения будем искать в виде $u = v(\xi)$. Подставляя производные функции u в уравнение (2) получим диффернциальное уравнение второго порядка относительно функции $v(\xi)$

$$\xi v v'' + v v' + v'^2 \xi + \xi v' = 0. \quad (4)$$

Численное интегрирование этого уравнения показывает, что существует точка ξ_0, которая зависит от начальных значений функции $v(\xi)$ и ее производной $v(\xi_0)$, такая, что производная функции $v(\xi)$ равна нулю: $v'(\xi_0) = 0$. При $\xi \to \xi_0$ функция $v(\xi)$ равномерно растет и стремится к значению $v(\xi_0)$.Таким образом при $\xi \to \xi_0$ происходит стабилизация температуры.

На рисунке -1 показан график температурной функции при начальных условиях $v(0.1) = 0.9\ v'(0.1) = 10$.



p

рис-1

Литература

1. Дородницын В. А. , Князева И. В. , Свирщевский С. Р. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях. Дифференц. уравнения, 1983, том 19, номер 7, 1215–1223

2. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

3. Narmanov Otabek A. Lie algebra of infinitesimal generators of the symmetry group of the heat equation. Journal of Applied Mathematics and Physics, 2018, 6,373-381

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Орипов Т.С., Донаев Н.
Денауский институт предпринимательства и педагогики

В настоящей работе рассматриваются переопределённые системы трёх дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярными коэффициентами, относительно неизвестной функции различного вида.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a_1(x,y,z)\cdot m\left(z,u'_x\right), \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \dfrac{a_2(x,y,z)}{xz}\cdot m\left(z,u'_x\right), \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \dfrac{c\left(x,y,z;u'_x\right)}{yz}, \end{cases} \tag{1}$$

где в ней ее функций $a_j(x,y,z),\ c(x,y,z;u)$ при всех значениях $j=1,2$ являются заданными функциями в заданной области $\overline{D},$ т. е. $a_j(x,y,z),\ c(x,y,z;u)\in C^1(\overline{D}), u\in C^3(\overline{D})$ считаются непрерывными и непрерывно-дифференцируемыми функциями и регулярными. Прежде всего, заменяя в системе (1) $u'_x = V,\ V = V(x,y,z)$ вводим новую функцию, и преобразуем данную систему в регулярной системе дифференциальных уравнений в полных дифференциалах (п.д.- систем) вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = a(x,y,z)\cdot m\left(z,V\right), \quad \dfrac{\partial V}{\partial y} = \dfrac{1}{xz}\cdot b(x,y,z)\cdot m\left(z,V\right), \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} = \dfrac{1}{yz}c\left(x,y,z;V\right). \end{cases} \tag{2}$$

Если при ограниченности неизвестной функции и ее частные производные по

$$\lim_{x,z\to 0}\left(xzV'_y\right)=0,\ \lim_{y,z\to 0}\left(yzV'_z\right)=0,$$

все переменным, и существуют конечные пределы
тогда найдётся некоторое частное решение системы (2) в виде V=h(z), V=q(x,y,z). Если эти функций удовлетворяют системе (2), то они возможно будут некоторыми частными решениями системы (2).
Д ля системе (1) получаем многообразие ее решений содержащиеся одно произвольное постоянное.

Условия совместности системы (2) записываются в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{b}{xz}\right)=\dfrac{\partial a}{\partial y}, \quad c'_x + a\cdot m\cdot c'_V = y\,z\,a\cdot m\cdot c + yz(a\cdot m'_z + a'_z\cdot m), \\ x\cdot y\cdot c'_y + b\cdot m\cdot c'_V = (x+xy\cdot b\cdot m'_V)c + xy^2 z(b''_z m + b\cdot m'_z). \end{cases} \tag{3}$$

Из первой пары уравнений системы (2) следует выполнение

первое соотношение из (3)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{xz}\right)=\frac{\partial a}{\partial y};\ \text{следует}\ b(x,y,z)=xz[\alpha(y,z)+A'_y(x,y,z)],\quad A(x,y,z)=\int_0^x a(t,y,z)dt. \tag{4}$$

С такими данными функциями, первое соотношение в (3) выполняется по всем переменным, и в результате интегрирование этой пары уравнений системы упрощается данная система в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x}=a(x,y,z)\cdot m(z,V),\ \dfrac{\partial V}{\partial y}=[\alpha(y,z)+A'_y(x,y,z)]\cdot m(z,V), \\ \dfrac{\partial V}{\partial z}=\dfrac{1}{yz}c(x,y,z;V). \end{cases} \tag{5}$$

Решением первой пары уравнений системы (5) имеет следующий вид:

$M(z;V)-\omega(x,y,z)=U,\ \omega'_x=a(x,y,z),\ \omega'_y=\alpha(y,z)+A'_y(x,y,z),\ U=U(z)-$

новая неизвестная функция. Дифференцируем последнее соотношение по переменной z, при этом условие совместности системы (5) по всем переменным выполняется тождественно, если взаимосвязь между данными функциями исходной системы и функции c(x,y,z;V) определяется формулой вида:

$$c(x,y,z;V)=yz\cdot\left\{\frac{\partial\omega}{\partial z}-\frac{\partial M}{\partial z}+f\left[z;M(z,V)-\omega(x,y,z)\right]\right\}\cdot m(z;V). \tag{6}$$

Тогда процесс интегрирование системы (5), с учётом функции (6) приводит к интегрированию обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ

$$\frac{dU}{dz}=f(z;U) \tag{7}$$

где в ней функция *f(z;v)*- определяется по формуле (6). Если это ОДУ в каком либо виде интегрируется, например, в виде $U=F(z,\ C_1)$, то исходная система также интегрируема, и многообразие ее решений представляется в виде

$$M(z;V)-\omega(x,y,z)=F(z,C_1),\Rightarrow V(x,y,z)=M^{-1}[z;\omega(x,y,z)+F(z,C_1)].$$

Учитывая предыдущую замену, получаем многообразие решений системы формулой вида

$$u(x,y,z)=C_2(y,z)+\int_0^x M^{-1}[z;\omega(t,y,z)+F(z,C_1)]dt. \tag{8}$$

Теорема : Пусть в системе дифференциальных уравнений (1) ее данные

$$a_j(x,y,z),\ c(x,y,z;u)\in C^1(\overline{D}), u\in C^3(\overline{D}).$$

Если условия совместности (3) выполняются, но не тождественно, тогда возможно находятся некоторые частные, либо особые решения данной системы. Для того ,чтобы условия совместности (3) выполнялись тождественно, необходимо и достаточно, чтобы ее данные функций удовлетворяли условия вида (4) и (6). Тогда исходная система разрешима и многообразие ее решений представляется формулой вида (8) непрерывной на всей данной области

2.Анологично рассматривается система дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярными коэффициентами вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a_1(x,y,z)\cdot m\left(z,u'_x\right), \ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} = \dfrac{a_2(x,y,z)}{(xz)^k}\cdot m\left(z,u'_x\right), \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial x} = \dfrac{c\left(x,y,z;u'_x\right)}{(xyz)^n}, \end{cases} \tag{9}$$

Литература

1.Михайлов Л.Г. Некоторые переопределённые системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями./Л.Г.Михайлов//- Душанбе,: Дониш, -1986-116.

2. Михайлов Л.Г. Об одном свойстве сингулярных дифференциальных уравнений. / Л.Г. Михайлов //- ДАН СССР-1991- т.321(№4)- с.681-686.

3. Михайлов Л.Г . Шарипов Б. О системах в полных дифференциалах для функций от произвольного числа независимых переменных и с сингулярными точками. / Л.Г. Михайлов //- Докл. АН Респ. Таджикистан - 2011- т.54(№8)- с.701-708.

4. Михайлов Л.Г., Орипов Т.С. Формулы представления решений систем уравнений в полных дифференциалах второго порядка с сингулярными линиями.// Михайлов Л.Г., Орипов Т.С.//- Вестник Таджикского Национального Университета.- Душанбе, 2005 г., № 2, с. 83-85.

5. Раджабов Н. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами. Душанбе, 1992, 236 с.

6. 3 Орипов Т.С. Об одном классе систем уравнений в полных дифференциалах второго порядка с сингулярными коэффициентами. // Орипов Т.С. //-Труды Таджикского технического университета.- Душанбе, 2013 г., № 4(14), с. 6-9

7 Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.-Л.ГИФ-МЛ,1959,-465 с.

К ЗАДАЧЕ СКОРЕЙШЕГО ПРОХОЖДЕНИЯ ОБЛАСТИ

Очилов С., Косимова М.А.
Самаркандский государственный университет

Задачи скорейшего прохождения области довольно часто возникают не только в повседневной, но и в сфере военной деятельности. В качестве примеров можно привести задачу скорейшего прохождения зараженной области с учетом известной (поддающейся описанию) на рассматриваемый временной период «розы ветров», задачу скорейшего прохождения летательным объектом грозового облака и ряд других.

Опуская конкретную содержательную постановку той или иной задачи, с целью получения математической модели, рассмотрим задачу минимизации времени прохождения области управляемым объектом, поведение которого описывается дифференциальной линейной системой, зависящей от параметра. В предположении, что начальное состояние и конечное множества объекта расположены вне движущейся области, найдем необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина. В основу положим редукцию исходной задачи к общей задаче линейного программирования и использования правила множителей Лагранжа на произвольные линейные пространства [1].

Предположим, что поведение объекта описывается системой линейных дифференциальных уравнений с параметром и заданным начальным условием. Заданы множества: M_1 - конечное множество, $M(t)$ - многозначное отображение отрезка [0,1] в множество всевозможных подмножеств R^n. Сформулируем словесную постановку задачу, заимствуя монографию [2].

Найти такие управление $u(t)$, $t \in [0,1]$ и параметр w, что время, в течении которого траектория динамической системы с начальным условием расположена в возможно движущейся области $M(t)$, $t \in [0,1]$ минимально при достижении траектории системы конечного множества M_1.

Специфика задачи состоит в том, что параметр $w \in W$должен определяться в начальный момент времени $t = 0$ (до начала движения) и оставаться постоянным на всем промежутке времени [0,1]. Это следует из того, что если найдена оптимальная траектория, то каждый её отдельный кусок на части отрезка [0,1] также оптимален. Если это не так и траектория может быть “улучшена” на части отрезка [0,1] за счет параметра w, то это значение параметра w может не совпадать с параметром на всем отрезке [0,1].

Литература

1. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума. 2-е изд., - М.: Наука, 1982.
2. Понтрягин Л.С., В.Г.Болтянский, Р.В.Гамкрелидзе, Е.Ф.Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. 3-е изд., - М.: Наука, 1976.

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ СУММИРУМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ В-ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Пирматов Ш.Т.
Ташкентский Государственный технический университет
shamshod@rambler.ru

Рассмотрим евклидово полупространство R_N^+ точек (x', y), где $x' = (x_1, x_2, ..., x_{N-1})$, $y = x_N$ и $y > 0$. Пусть ограниченная область Ω^+ с гладкой границей Γ расположена в полупространстве R_N^+ и прилегает к гиперплоскости $y = 0$. Часть границы Γ, расположенную в R_N^+, обозначим Γ^+, а часть границы Γ, лежащую на гиперплоскости $y = 0$, обозначим через Γ^0. В области Ω^+ рассмотрим дифференциальный оператор вида

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{k}{y}\frac{\partial}{\partial y},$$

где k – фиксированное положительное число. Обозначим через $u(x', y)$ четное по y, классическое решение в области Ω^+ уравнение

$$\Delta_B^m u - (-1)^m \lambda u = 0,$$

где m – любое натуральное число, $\lambda > 0$. Оператор Δ_B^m будем именовать В-полигармоническим. $\{u_n(x', y)\}$ – полная ортонормированная система собственных функций рассматриваемого оператора Бесселя, отвечающих собственным значениям $\{\lambda_n\}$:

$$\Delta_B^m u_n(x', y) - (-1)^m \lambda_n u_n(x', y) = 0.$$

В области Ω функции $f \in L_{2,k}(\Omega)$ по собственным функциям $\{u_n(x', y)\}_{n=1}^{\infty}$ разложим в ряд Фурье $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n u_n$, где f_n – коэффициенты Фурье.

Спектральное разложение произвольной функции $f \in L_{2,k}(\Omega)$ имеет вид

$$E_\lambda f(x) = \sum_{\lambda_n < \lambda} f_n u_n(x),$$

а среднее Рисса порядка s определяется равенством

$$E_\lambda^s f(x) = \sum_{\lambda_n<\lambda}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda}\right)^s f_n u_n(x) = \int_0^\lambda\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^s dE_t f.$$

Теорема. Предположим, что для некоторого s в точке $x_0 \in \Omega$ спектральное разложение функции $f \in L_{2,k}(\Omega)$ суммируется средним Рисса порядка s. Тогда для любого

$$\alpha > s - \frac{N+k-3}{2}$$

справедливо следующее утверждение

$$\lim_{R\to 0} S_R^\alpha f(x_0) = f(x_0).$$

$S_R^\alpha f(x)-$ среднее значение порядка $\alpha \geq 0$ функции $f(x)$ в данной точке x.

Доказательство теоремы опирается на формула среднего значения, полученного Н.И. Киприяновой в работе (см. [2]).

Литература

1. Titchmarsh E.C. Eigenfunction Expansions Associated with Second Order Differential Equations, part II, Oxford 1958.
2. Киприянова Н.И. Формула среднего значения для собственных функций сингулярного дифференциального оператора второго порядка. Дифференциальное уравнения, 1985, том 21, № 11, 1998-2001 Differential Equations, part II, Oxford 1958.

НЕКОТОРЫЕ МНОГОМЕРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ РЕШЕНИЯ

Пулатова М. И.
Бухарский инженерно-технологический институт,
pulatovamanzura1954@gmail.com

Рассмотрим многомерное дифференциальное уравнение:

$$y'(x) = f\big(x, y(x)\big), \quad f\colon R^m \cdot R^n \to R^{m+n} \tag{1}$$

Пусть в открытом множестве:

$$A \cdot B \subset R^m \cdot R^n$$

уравнение (1) вполне интегрируемо и точка

$$(x_0, 0) \in \overline{A \cdot B}.$$

Предположим, что

$$f\big((x_0) + t\xi, y\big) \cdot \xi = (\Lambda(t) + D(t) \cdot y + \Phi(t, y, \xi)$$

где параметр

$$\xi \in A, \Lambda(t) = diag(\lambda_i(t)_1^n, D(t) = (d_{ij}(t))_{i,j=1}^n, \qquad d_{ii} = 0.$$

Теорема. Пусть существует функция $\Psi(t,\xi)$, определенная и непрерывно дифференцируемая на множестве

$$I \cdot A_1 = \{(t,\xi)\big||t| < 1+\delta, \|\xi\| \le a, \delta \ge 0, a > 0, \delta, a = const\},$$

$$(\Psi(t,\xi)) \to 0$$

$$t \to 0, \|\xi\| \le a, \Psi(t,\xi) > 0$$

такая, что при

$$y_i(x_0 + t\xi) \le \Psi_i(t,\xi), i = \overline{1,n},\ (t,\xi) \in I \cdot A_1,$$

выполняется соотношение порядка

$$D(t)\Psi(t,\xi) + \Phi(t,y,\xi) = 0$$

$$(\Lambda(t)\Psi(t,\xi) - \Psi_t'(t,\xi), t \to 1, \xi \in A$$

При этом

$$sgn\ (-1(t)\Psi - \Psi'(t) = \begin{cases} 1, i = \overline{1,k} \\ -1, i = \overline{k+1,n} \end{cases}$$

Тогда:

1. Если $k = 0$, то существует хотя бы одно решение системы (1), обладающее асимптотикой

$$(i = \overline{1,n})\ \ |y_i(x)| \le \Psi_i(1 \pm 0, x - x_0),$$

$$\|x - x_0\| \le \alpha,\ \ 0 \le \alpha = const$$

2. Если $k \ge 1$, то существует k −параметрическое семейство таких решений.

Исследованы случаи “почти треугольной”, “почти диагональной” матрицы $\Lambda(t) + D(t)$, матрицы общего вида. В каждом из них асимптотика уточнена.

Литература

1. Гайшун И.В. «Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения», изд-во: Едиториал, 2004г.

2. Амелькин В.В. «Дифференциальные уравнения с “многомерным временем”», изд-во: LAP Lambert Academic Publishing, 2012г, 236 стр.

3. Понтрягин Л.С. «Дифференциальные уравнения и их приложения», изд-во: Едиториал, 2011г.

ЗАДАЧА С ДВУМЯ СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Расулов.М.С, Норов.А.К.
Институт математики имени В.И.Романовского

В настоящее время ведутся интенсивные исследования новых классов нестандартных задач со свободной границей, которые возникают в приложениях. Например, в работах [1, 3] изучены задачи для параболических уравнений с двумя свободными границами.

Задача со свободной границей для уравнения реакция-диффузия изучились многими авторами. В работе [1] изучалась диффузионная логистическая модель со свободной границей популяционной биологии и приводились некоторых прикладных результаты. Эти результаты были обобщены в [2, 3] для более общих классов уравнений. В работе [4] модель исследована в контексте онлайн социальных сетей, т.е. как модель диффузии информации.

Во многих исследованиях термин конвекция является линейным и зависит только от градиента плотности компонентов. Однако в целом на конвекцию также влияет плотность компонентов, что, в свою очередь, приводит к нелинейной конвекции. В [3] авторы исследовали задачу со свободной границей для уравнения реакция-диффузия с нелинейным членом конвекции. Они получили результат дихотомии и представили постоянную асимптотическую скорость распространения расширяющегося фронта.

Постановка задачи. Требуется найти функций $h(t)$, $s(t)$, $u(t,x)$ в области $D=\{(t,x): 0<t\le T, h(t)<x<s(t)\}$, удовлетворяющие условиям

$$k(u)u_t - du_{xx} - muu_x = u(a-bu), \quad (t,x)\in D, \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad -s_0 \le x \le s_0, \tag{2}$$

$$u(t,h(t)) = 0, \qquad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u(t,s(t)) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$h'(t) = -\mu u_x(t,h(t)), \quad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

$$s'(t) = -\mu u_x(t,s(t)) \quad 0 \le t \le T, \tag{6}$$

где $s(0)=s_0, h(0)=h_0=-s_0$, $x=h(t)$ и $x=s(t)$ – свободные (неизвестные) границы, которая определяется вместе с функцией $u(t,x)$.

Относительно данных задачи предполагаются выполненными следующие условия:

(I) функции $k(u)$ и $k'(u)$ определены для любого значения аргумента и ограничены на замкнутом множестве аргумента, причем $k(u)\ge k_0>0$;

(II) d, a, b, s_0, μ, m – положительные постоянные;

Задача (1)-(6) исследована в работе [1] при $k(u)=1,\ m=0$.

Априорные оценки. Установим некоторые априорные оценки шаудеровского типа, которые будут использованы при доказательстве глобальной разрешимости задачи (1)-(6) в классе $C^{2+\alpha}$ ([1, 2]).

Теорема 1. Пусть функции $h(t), s(t), u(t,x)$ являются решением задачи *(1)-(6). Тогда существуют положительные постоянные* M_1, M_2, *не зависящие от* T, *для которых справедливы оценки*

$$0 < u(t,x) \le M_1, \quad (t,x) \in \bar{D}, \tag{7}$$

$$0 < s'(t), -h'(t) \le M_2, \quad 0 \le t \le T, \tag{8}$$

Введем преобразование $t=t,\quad y=\dfrac{2s_0x}{s(t)-h(t)}-\dfrac{s(t)+h(t)}{s(t)-h(t)}s_0.$ Тогда области D соответствует область $Q=\{(t,y):0<t<T,-s_0<y<s_0\}$, а ограниченная функция $v(t,y)=u(t,x)$ является решением задачи

$$v_t = A(t,y,s,h,v)v_{yy} + B(t,y,s,h,s',h',v_y),(t,y)\in Q, \tag{9}$$

$$v(0,y)=v_0(y),\quad -s_0 \le y \le s_0, \tag{10}$$

$$v(t,s_0)=0,\quad 0\le t\le T, \tag{11}$$

$$v(t,-s_0)=0,\quad 0\le t\le T, \tag{12}$$

где $v=v_0(y)\equiv u_0(y),\ s'(t)=-\dfrac{2s_0\mu}{s-h}v_y(t,s_0),\ h'(t)=-\dfrac{2s_0\mu}{s-h}v_y(t,-s_0),$

$$A(t,y,s,h,v)=\frac{1}{a(v)}\frac{4s_0^2}{(s-h)^2},$$

$$B(t,y,s,h,s',h',v_y)=-\left(\frac{s'-h'}{s-h}y+2s_0\frac{ss'+hh'}{(s-h)^2}+mv\frac{1}{a(v)}\frac{2s_0}{s-h}\right)v_y-\frac{1}{a(v)}v(a-bv).$$

Теорема 2. Пусть функция $v(t,y)$ непрерывна в $\bar{Q}$ вместе с v_y и удовлетворяет условиям задачи (9)-(12). Тогда

$$|v_y(t,y)| \le M_4(M_1,M_2,M_3,A_0,\delta),(t,y)\in Q^\delta. \tag{13}$$

Если $v|_{\Gamma(t=0,\,y=\pm s_0)}\equiv 0$, то для $(t,y)\in\bar{Q}$

$$|v_y(t,y)| \le M_4(M_1,M_2,M_3,A_0). \tag{14}$$

где $Q^\delta=\{(t,y):0<\delta\le t\le T,-s_0+\delta\le y\le s_0-\delta\}$, $A_0=\min\limits_{\bar{Q}}A,$

$\Gamma(t=0,y=\pm s_0)-$ параболическая граница.

Теорема 3. Пусть непрерывная в $\bar{Q}$ функция $v(t,y)$ удовлетворяет условиям задачи (9)-(12). Предположим, что ограниченные функции $A(t,y,s(t),h(t),v)$, $B(t,y,s(t),h(t),v_y)$ для $(t,y)\in\bar{Q}$, $|v|\le M_1$ и произвольных v_y удовлетворяют условиям

$$\frac{\left|B(t,y,s,h,v_y)\right|}{A(t,y,s,h,v)}\le K_1\left(v_y^2+1\right),\quad K_1>0.$$

Кроме того, если $A(t,y,s(t),h(t),v)\le A_1$ в области $\left\{(t,y)\in\bar{Q},|v|\le M_1,|v_y|\le M_4\right\}$ то

$$|v|_{\frac{2}{3}}^{Q^\delta}\le M_5\left(M_1,M_2,A_1,K_1,\delta\right) \tag{15}$$

Пусть $v(t,y)$ обладает обобщенными производными $v_{ty},v_{yy}\in L_2(Q)$, то

$$|v|_{1+\gamma}^{Q^\delta}\le M_6\left(M_1,K_1,\delta\right),\quad 0<\gamma<1, \tag{16}$$

Если $v\big|_{\Gamma(t=0,y=\pm s_0)}=0$, то оценки (15)-(16) справедливы и в $\bar{Q}$.

Теорема 4 (Единственность решения). Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда решение задачи (1)-(6) единственно.

Теорема 5 (Существование решения). Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда существует в D решение $u(t,x)\in C^{2+\gamma}\left(\bar{D}\right)$, $s(t)\in C^{1+\gamma}\left([0,T]\right)$, $h(t)\in C^{1+\gamma}\left([0,T]\right)$ задачи (1)-(6).

Литература

1. Du Y., Lin Z. Spreading-vanishing dichotomy in the diffusive logistic model with a free boundary // SIAM J. Math. Anal, 2010. vol. 42, no. 1. pp. 377–405.
2. Takhirov J. O. A free boundary problem for a reaction-diffusion equation appearing in biology // Indian J.Pure Appl.Math, 2019. vol. 50, no. 1. pp. 95–112.
3. Wang R. H., Wang L., Wang Z. Ch. Free boundary problem of a reaction-diffusion equation with nonlinear convection term // J. Math. Anal. Appl, 2018. vol. 467, no. 2. pp. 1233–1257.
4. Lei Ch., Lin Zh., Wang H. The free boundary problem describing information diffusion on online social networks // J. Differential equations, 2013, Vol. 254, pp. 1326-1341.

ЗАДАЧА СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ СИСТЕМ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТИПА РЕАКЦИЯ – ДИФФУЗИЯ

Расулов М.С., Сафоев Ш.Ж.
Институт математики имени В.И.Романовского

В настоящее время одной из главных неотложных задач в физических, экологических, биологических исследованиях является обобщение огромного количества данных. Это, в свою очередь, требует понимания взаимодействия и координации множества сложных взаимосвязанных процессов, происходящих в самых разных и смешанных областях. Такие взаимодействия (системы) оказываются намного более сложными. Во многих случаях такие процессы представлены задачей со свободной границей для уравнений или систем реакции-диффузии [1-4].

В работе рассматривается задача с двумя разными свободными границами для системы квазилинейных параболических уравнений типа реакция-диффузия, описывающих модель динамики популяции в биологии.

Требуется найти функции $u(t,x)$, $v(t,x)$, $s_i(t)$, $g_i(t)$, удовлетворяющие условиям

$$u_t - d_1 u_{xx} - m_1(u)u_x = u(a_1 - b_1 u - c_1 v), \qquad (t,x) \in D_1, \tag{1}$$

$$v_t - d_2 v_{xx} - m_2(v)v_x = v(a_2 - b_2 u - c_2 v), \qquad (t,x) \in D_1, \tag{2}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \ -g_1(0) \le x \le s_1(0) = s_1^0, \tag{3}$$

$$v(0,x) = v_0(x), \ -g_2(0) \le x \le s_2(0) = s_2^0, \tag{4}$$

$$u \equiv 0, \qquad x \notin (g_1(t), s_1(t)) \qquad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

$$v \equiv 0, \qquad x \notin (g_2(t), s_2(t)) \qquad 0 \le t \le T, \tag{6}$$

$$\dot{g}_1(t) = -\mu_1 u_x(t, g_1(t)), \qquad 0 \le t \le T, \tag{7}$$

$$\dot{g}_2(t) = -\rho_1 v_x(t, g_2(t)), \qquad 0 \le t \le T, \tag{8}$$

$$\dot{s}_1(t) = -\mu_1 u_x(t, s_1(t)), \qquad 0 \le t \le T, \tag{9}$$

$$\dot{s}_2(t) = -\rho_2 v_x(t, s_2(t)) \qquad 0 \le t \le T, \tag{10}$$

где $D_i = \{(t,x) : 0 < t \le T, g_i(t) < x < s_i(t)\}$; $u(t,x)$, $v(t,x)$ – плотности популяции в момент времени t в точке x; $g_i(t)$, $s_i(t)$ – свободные границы, которые представляют фронты распространения, определяются вместе с функциями $u(t,x)$, $v(t,x)$; d_i – коэффициент диффузии, a_i – коэффициенты удельной скорости роста популяций, $i = 1,2$; c_1 и b_2 – коэффициенты межвидовой

конкуренции, c_2 и b_1 – коэффициенты внутривидовой конкуренции, $u_0(x)$, $v_0(x)$ – начальные плотности популяции соответственно находятся в областях $\left[g_i^0, s_i^0\right]$. А параметры μ_i и ρ_i соответственно представляют скорость распространения в новые области для $u(t,x)$ и $v(t,x)$.

Начальные функции $u_0(x)$, $v_0(x)$ удовлетворяют

$$\begin{cases} s_i^0 > 0, (i=1,2); \quad u_0 \in C^2([-s_1^0, s_1^0]), \quad v_0 \in C^2([-s_2^0, s_2^0]), \\ u_0(x) = 0 \quad для \quad x \notin (-s_1^0, s_1^0); \quad v_0(x) = 0 \quad для \quad x \notin (-s_2^0, s_2^0); \\ u_0(x) > 0 \quad для \quad x \in (-s_1^0, s_1^0); \quad v_0(x) = 0 \quad для \quad x \in (-s_2^0, s_2^0); \\ u_{0'}(-s_1^0) > 0, \quad u_{0'}(-s_1^0) > 0, \quad v_{0'}(-s_2^0) > 0, \quad v_{0'}(-s_2^0) > 0, \end{cases}$$

Задача (1)-(10) исследована в работе [5] при $m_i(\cdot) \equiv 1$, $i = 1,2$.

Теорема 1. Если функции $u(t,x)$, $v(t,x)$, $s_i(t)$, $g_i(t)$ – являются решением задачи (1)-(10), то справедливы оценки

$$0 < u(t,x) \le M_1 \equiv \frac{a_1}{b_1}, \qquad (t,x) \in \bar{D}_1,$$

$$0 < v(t,x) \le M_2 \equiv \frac{a_2}{c_2}, \qquad (t,x) \in \bar{D}_2,$$

$$0 < \dot{s}_i(t) \le M_3, \qquad 0 \le t \le T,$$

$$0 < \dot{g}_i(t) \le M_4, \qquad 0 \le t \le T.$$

Литература

1. Chen Q, Li F, Wang F. A reaction-diffusion-advection competition model with two free boundaries in heterogeneous time-periodic environment // IMA Journal of Applied Mathematics. 2017, Vol.82, P. 445-470.
2. Du Y., Wu CH. Spreading with two speeds and mass segregation in a diffusive competition system with free boundaries // Calc. Var. 2018. Vol. 57, N. 52.
3. Duan B., Zhang Z.C. A two-species weak competition system of reaction-diffusion-advection with double free boundaries // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. 2019. Vol.24, N.2. P. 801-829.
4. Guo J.S., Wu C.H., Dynamics for a two-species competition-diffusion model with two free boundaries, Nonlinearity. 2015. Vol.28, 1-27.
5. Ren X, Liu L. A weak competition system with advection and free boundaries // J.Math.Anal.Appl. 2018. Vol.463, N. 2. P. 1006-1039.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ НАГРУЖЕННОГО НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

Рахимов И. Д.
Ургенчский государственный университет,
ilxom@urdu.uz

Многие физические задачи о нелинейных волнах описываются математическими моделями, представляющими нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных, имеющие специальные частные решения - солитоны. Значительное место в теории солитонов отводится комплексным нагруженний нелинейным уравнениям.

Мы рассмотрим нагруженного нелинейное уравнение Шредингера:

$$iu_t + 2|u|^2 u + u_{xx} = \gamma(t)u(0,t)u_x, \tag{1}$$

при начальном условии

$$u(x,t)\big|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in R. \tag{2}$$

Где начальная функция $u_0(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ обладает следующими свойствами:

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)|u_0(x)|dx < \infty,$$

2) Оператор $L(0)$ не имеет спектральных особенностей и имеет ровно $2N$ простых собственных значений $\xi_1(0), \xi_2(0), ..., \xi_{2N}(0)$.

$$\text{где } L(0) = i\begin{pmatrix} \dfrac{d}{dx} & -u(x,0) \\ -u^*(x,0) & -\dfrac{d}{dx} \end{pmatrix}.$$

В рассматриваемой задаче $\gamma(t)$ является заданной действительной непрерывной функцией. $i = \sqrt{-1}$, $u(x,t)$ является комплексной функцией и определяется по всей вещественной прямой. Аргументы x и t обозначают соответственно пространственную и временной переменных.

Пусть, функция $u(x,t)$ обладает достаточной гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x \to \pm\infty$, т.ч.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left((1+|x|)|u(x,t)| + \sum_{k=1}^{3} \left| \frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k} \right| \right) dx < \infty \ . \tag{3}$$

В этой работе будут получены представления для решений $u(x,t)$ задачи (1) в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора $L(t)$.

Литература

1. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи.–М.:Мир, 1987. 479 с.
2. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейной среде// ЖЭТФ. – Москва, 1971. - Т.61.- № 1. - С.118-134.
3. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния // Функц. анализ и его прилож. – Москва, 1979. – Т.13, № 3. – С.13-22.
4. Хасанов А.Б., Уразбаев Г.У. Об интегрировании одной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений методом обратной задачи рассеяния // Узб. матем. журнал. –Ташкент, 2001. № 2. С. 64-73.

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Рузиев М.Х.
Институт Математики АНРУз

Рассмотрим уравнение

$$sign y|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \qquad (1)$$

в области $D = D^+ \cup D^- \cup I$ комплексной плоскости $z = x + iy$, где D^+ - первый квадрант плоскости, D^- - конечная область четвертый квадрант плоскости, ограниченная характеристиками OC и BC уравнения (1) выходящими из точек $O(0,0)$, $B(1,0)$ и отрезком OB прямой y=0, $I = \{(x,y): 0 < x < 1, y = 0\}$. В (1) m, β_0 - некоторые действительные числа, удовлетворяющие условиям $m > 0$, $-(m/2) < \beta_0 < 1$.

Введем обозначения:

$J_0 = \{(x,y): 0 < y < \infty, x = 0\}$, $J_1 = \{(x,y): 1 < x < \infty, y = 0\}$, C_0 и C_1 - соответственно точки пересечения характеристик OC и BC с характеристикой исходящей из точки $E(c,0)$, где $c \in I$ - произвольное фиксированное число. Пусть $p(x) \in C^1[0,c]$ - диффеоморфизм из множества

точек отрезка $[0,c]$ в множество точек отрезка $[c,1]$, причем $p'(x)<0$, $p(0)=1$, $p(c)=c$. В качестве примера такой функции приведем линейную функцию $p(x)=1-kx$, где $k=(1-c)/c$.

Задача B. Найти в области D функцию $u(x,y)$ со свойствами:

1) $u(x,y)\in C(\bar{D})$, где $\bar{D}=\bar{D}^{-}\cup D^{+}\cup\bar{I}_0\cup\bar{I}_1$;
2) $u(x,y)\in C^2(D^{+})$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;
3) $u(x,y)$ является обобщенным решением класса R_1 [1] в области D^{-};
4) выполняются равенства

$$\lim_{R\to\infty}u(x,y)=0,\ R^2=x^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2},\ x\ge 0,\ y\ge 0;$$

5) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(0,y)=\varphi(y),\ y\ge 0,$$
$$u(x,0)=\tau_1(x),\ x\in\bar{J}_1,$$
$$u[\theta_0(x)]+\mu u[\theta_1(p(x)]=\psi(x),\ 0\le x\le c,$$
$$u(p(x),0)=\rho u(x,0)+f(x),\quad 0\le x\le c,$$

и условию сопряжения

$\lim\limits_{y\to+0}y^{\beta_0}u_y=\lim\limits_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}u_y,\quad x\in I\setminus\{c\}$, причем эти пределы при $x=0$, $x=1$, $x=c$ могут иметь особенности порядка ниже $1-2\beta$, где $\beta=\dfrac{m+2\beta_0}{2(m+2)}$, $f(x)\in C[0,c]\cap C^{1,\delta_1}(0,c)$, $f(0)=0$, $f(c)=0$, $\psi(x)\in C[0,c]\cap C^{1,\delta_2}(0,c)$, $\psi(0)=0$, $\tau_1(x)\in C(\bar{J}_1)$ причем функцию $\tau_1(x)$ в окрестности точке $x=1$ представима в виде $\tau_1(x)=(1-x)\tilde{\tau}_1(x)$, $\tilde{\tau}_1(x)\in C(\bar{J}_1)$, и при достаточно больших x удовлетворяет неравенству $|\tau_1(x)|\le\dfrac{M}{x^{\varepsilon}}$, ε,M - положительные константы, $\tau_1(x)$ - удовлетворяет условию Гельдера на любом отрезке $[1,N]$, $N>1$, $\varphi(y)\in C(\bar{J}_0)$, $y^{\frac{3m+2\beta_0}{4}}\varphi(y)\in L(0,\infty)$, $\varphi(y)$ удовлетворяет условию Гельдера на любом отрезке $[0,N]$, $N>0$, $\varphi(\infty)=0$, $\varphi(0)=0$, $\theta_0(x_0)$ и $\theta_1(p(x_0))$ - точки пересечения характеристик OC и BC соответственно с характеристиками, исходящими из точек $(x_0,0)$ и $(p(x_0),0)$, $x_0\in(0,c)$:

$$\theta_0(x_0)=\left(\frac{x_0}{2},-\left(\frac{m+2}{4}x_0\right)^{\frac{2}{m+2}}\right),$$

$$\theta_1(p(x_0))=\left(\frac{p(x_0)+1}{2},-\left(\frac{(m+2)(1-p(x_0))}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}}\right).$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия $\varphi(y)\equiv 0$, $\psi(x)\equiv 0$, $f(x)\equiv 0$, $\tau_1(x)\equiv 0$, $0<\rho<1$, $\mu\geq 0$. Тогда задача B имеет лишь тривиальное решение.

Теорема 2. Пусть выполнены условия $p(x)=1-kx$, $0<\rho<1$, $0\leq\mu<1$. Тогда решение задачи B существует.

Литература

1. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. Высшая школа, Москва, 1985. 304с.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ СОСТАВНОГО ТИПА

Сраждинов И.Ф.
Алмалыкский филиал ТГТУ
israjdinov@bk.ru

Проблема разрешимости начально-краевой задачи для классических уравнений исследованы в достаточной степени [1,2,3]. Для неклассических уравнений в общем и для уравнений и систем составного типа, в частности, смешанная задача исследована еще недостаточно. Настоящая работа посвящена исследованию разрешимости начально-краевой задачи для одной системы двух уравнений второго порядка, составного типа. Исследование уравнений и систем составного и смешанно – составного типа, а также обзор литературы в данном направлении можно найти в [4–12]. В данном случае под составным типом подразумевается уравнение или система, которая в каждой точке данной области одновременно обладает свойствами, по крайней мере, двух типов. Исследованием одного скалярного уравнения составного типа занимаются многие математики и в настоящее время [13,14,15]. До сих пор для систем составного типа (например, эллиптико-гиперболического типа) начальные условия в смешанной задаче задавались, как отдельное уравнение эллиптического и отдельное гиперболического

типов. В данной работе, воспользуясь взаимосвязанностью решения системы начальные условия ставятся в другом виде.

Настоящая работа посвящена исследованию разрешимости смешанной задачи для системы двух дифференциальных уравнений составного типа, следующего вида:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = aV, \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = bU. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $V = V(t,x)$ и $U = U(t,x)$ – вещественные функции переменных t и x; a, b-неотрицательные постоянные.

Данная система имеет характеристическую форму $\chi(\tau,\xi) = \tau^4 - \xi^4$ и поэтому является системой составного (эллиптико-гиперболического) типа.

Рассмотрим задачу на собственные значения и собственные функции

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad X(0) = X(l) = 0, \tag{2}$$

которая имеет следующие собственные значения и собственные функции [16,стр84]

$$\lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \text{ и } \quad X_n(x) = Sin\frac{n\pi}{l}x \quad \text{соответственно.}$$

Пусть $\Omega = \{(t,x): 0 \le x \le l, t > 0\}$ и $r = 0,1;\ j = 0,1$.

ЗАДАЧА $S_{rj}(\Omega)$.*Найти решение системы (1) в области* **Ω**, *удовлетворяющий следующим начальным*

$$\begin{cases} rU(0,x) + (1-r)U'(0,x) = \varphi(x), \\ jV(0,x) + (1-j)V'(0,x) = \psi(x). \end{cases} \tag{3}$$

и граничным условиям

$$U(t,0) = U(t,l) = V(t,0) = V(t,l) = 0 \tag{4}$$

Таким образом имеем задачи $S_{11}(\Omega)$, $S_{10}(\Omega)$, $S_{01}(\Omega)$, $S_{00}(\Omega)$. Следуя [2,3] ищем решение задачи $S_{rj}(\Omega)$ методом разделения переменных, т.е. искомое решение представляется в виде рядов по собственным функциям задачи (2) и исследуется сходимость этих рядов: $U(t,x) = T(t)X(x)$, $V(t,x) = \theta(t)X(x)$.

Далее, поскольку $\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2$, $X_n(x) = Sin\frac{n\pi}{l}x$, следовательно

$$T_n^{IV} - \left[\left(a + (\frac{n\pi}{l})^2\right)\left(b + (\frac{n\pi}{l})^2\right)\right]T_n = 0 \tag{5}$$

$$\Rightarrow k^4 - \Lambda(a,b,n^4) = 0, \tag{6}$$

где через $\Lambda = \Lambda(a,b,n^4)$ обозначено выражение в квадратной скобке уравнения (5).

$$k_1 = \sqrt[4]{\Lambda},\ k_2 = -k_1,\ k_3 = ik_1,\ k_4 = -ik_1 \Rightarrow k_1 \approx n. \tag{7}$$

Учитывая это получаем:

$$T_n(t) = C_1e^{k_nt} + C_2e^{-k_nt} + C_3Cosk_nt + C_4Sink_nt,\ \theta_n(t) = \frac{1}{a + (\frac{n\pi}{l})^2}\left[T_n''(t)\right] \tag{8}$$

$$\theta_n(t) = \frac{k_n^2}{a + (\frac{n\pi}{l})^2}\left(C_1e^{k_nt} + C_2e^{-k_nt} - C_3Cosk_nt - C_4Sink_nt\right) \tag{9}$$

Введем обозначение: $\alpha_n = \alpha_n(k_n,a,l) = \dfrac{k_n^2}{a + (\frac{n\pi}{l})^2}$

Решая систему четырех уравнений для $T_n(0),\ \theta_n(0), T_n'(0), \theta_n'(0)$ получаем:

$$C_1 = \frac{1}{4\alpha_n}\left[\alpha_n\left(T_n(0) + \frac{1}{k_n}T_n'(0)\right) + \left(\theta_n(0) + \frac{1}{k_n}\theta_n'(0)\right)\right],\ C_3 = \frac{1}{2\alpha_n}\left(\alpha_nT_n(0) - \theta_n(0)\right) \tag{10}$$

$$C_2 = \frac{1}{4\alpha_n}\left[\alpha_n\left(T_n(0) - \frac{1}{k_n}T_n'(0)\right) + \left(\theta_n(0) - \frac{1}{k_n}\theta_n'(0)\right)\right], C_4 = \frac{1}{2\alpha_n}\left(\alpha_n(\frac{1}{k_n}T_n'(0)) - (\frac{1}{k_n}\theta_n'(0))\right)$$

Найдем, теперь ограниченные по t при $t \to \infty$ решения задачи $S_{rj}(\Omega)$. Предположим выполненными следующие равенства

$$\begin{cases} T_n(0) + \dfrac{1}{k_n}T_n'(0) = 0, \\ \theta_n(0) + \dfrac{1}{k_n}\theta_n'(0) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Лемма : *Из равенств (11) следуют равенства* $C_1 = 0$ *и* $C_4 = -C_3$.

Подставляя (11) в формулы (10) и учитывая, то что $r = 1, j = 1$ в условиях (3) для задачи $S_{11}(\Omega)$ получаем:

$$C_2 = \frac{1}{2\alpha_n}\left(\alpha_n T_n(0) + \theta_n(0)\right),\ C_3 = -C_4 = \frac{1}{2\alpha_n}\left(\alpha_n T_n(0) - \theta_n(0)\right) \tag{12}$$

Принимая во внимание (12) решение задачи S_{11} представим в виде:

$$U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\alpha_n}\left[\left(\alpha_n T_n(0) + \theta_n(0)\right)e^{-k_n t} + \left(\alpha_n T_n(0) - \theta_n(0)\right)\left(Cosk_n t - Sink_n t\right)\right] Sin\frac{n\pi}{l}x \tag{13}$$

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left\{\left(\alpha_n T_n(0) + \theta_n(0)\right)e^{-k_1 t} - \left(\alpha_n T_n(0) - \theta_n(0)\right)\left(Cosk_n t - Sink_n t\right)\right\} Sin\frac{n\pi}{l}x$$

Для задачи S_{10} имеем:

$$C_2 = \frac{1}{2\alpha_n}\left(\alpha_n T_n(0) - \frac{1}{k_1}\theta_n'(0)\right)\ ,\ C_3 = \frac{1}{2\alpha_n}\left(\alpha_n T_n(0) + \frac{1}{k_1}\theta_n'(0)\right),\ C_4 = -C_3$$

и следовательно получаем решение в виде:

$$U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\alpha_n}\left[\left(\alpha_n T_n(0) - \frac{1}{k_n}\theta_n'(0)\right)e^{-k_n t} + \left(\alpha_n T_n(0) + \frac{1}{k_1}\theta_n'(0)\right)\left(Cosk_n t - Sink_n t\right)\right] Sin\frac{n\pi}{l}x$$

(14)

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(\alpha_n T_n(0) - \frac{1}{k_n}\theta_n'(0)\right)e^{-k_n t} - \left(\alpha_n T_n(0) + \frac{1}{k_n}\theta_n'(0)\right)\left(Cosk_n t - Sink_n t\right)\ \right\} Sin\frac{n\pi}{l}x$$

Для задачи S_{01} имеем:

$$C_2 = \frac{1}{2\alpha_n}\left(\theta_n(0) - \alpha_n\left(\frac{1}{k_n}T_n'(0)\right)\right),\ \ C_3 = \frac{1}{2\alpha_n}\left(\theta_n(0) - \alpha_n T_n'(0)\right),\ C_4 = -C_3$$

$$U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left\{\ \left(\theta_n(0) - \alpha_n(\frac{1}{k_n}T_n'(0)\right)e^{-k_n t} + \left(\theta_n(0) + \alpha_n(\frac{1}{k_n}T_n'(0)\right)\left(Sink_n t - Cosk_n t\right)\ \right\} Sin\frac{n\pi}{l}x \tag{15}$$

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\alpha_n}\left[\left(\theta_n(0) - \alpha_n(\frac{1}{k_1}T_n'(0)\right)e^{-k_n t} - \left(\theta_n(0) + \alpha_n(\frac{1}{k_1}T_n'(0)\right)\left(Sink_n t - Cosk_n t\right)\right] Sin\frac{n\pi}{l}x$$

И наконец, для задачи S_{00} имеем:

$$C_2 = -\frac{1}{\alpha_n}\left(\alpha_n(\frac{1}{k_n}T_n'(0)) + (\frac{1}{k_n}\theta_n'(0)\right),\ C_3 = \frac{1}{\alpha_n}\left((\frac{1}{k_n}\theta_n'(0)) - \alpha_n(\frac{1}{k_n}T_n'(0)\right),\ C_3 = -C_4\,.$$

$$U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\alpha_n}\left[\left(\alpha_n(\frac{1}{k_n}T_n'(0)) + (\frac{1}{k_n}\theta_n'(0))\right)(-e^{-k_n t}) + \left((\frac{1}{k_n}\theta_n'(0) - \alpha_n(\frac{1}{k_n}T_n'(0))\right)\left(Cosk_n t - Sink_n t\right)\right] Sin\frac{n\pi}{l}x \tag{16}$$

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left[\left(\alpha_n(\frac{1}{k_n}T_n'(0)) + (\frac{1}{k_n}\theta_n(0))\right)(-e^{-k_n t}) - \left((\frac{1}{k_n}\theta_n'(0)) - \alpha_n(\frac{1}{k_n}T_n'(0))\right)\left(Cosk_n t - Sink_n t\right)\right] Sin\frac{n\pi}{l}x$$

Обозначим через $C_0^{k+\nu}[0;l]$ $(0<\upsilon<1)$ класс функций обладающих непрерывными производными $k-$того и кусочно-непрерывными $k+1-$го порядка при $0\le x\le l$ и равные нулю на концах данного отрезка вместе с производными $k=2m$ - (четно)го порядка, $2m\le k$.

ТЕОРЕМА 2: Пусть функции $\varphi(x)\in C_0^{5+\nu}[0;l]$ и $\psi(x)\in C_0^{3+\upsilon}[0,l]$. Тогда ряды (18) удовлетворяют системе уравнений (1), начальным условиям (3)) и граничным условиям (4). При этом возможно, ряды (18), дифференцировать по x и t до двух раз и полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно.
Аналогично доказываются теоремы 3,4,5.(Для (14),(15),(16)).См. также [17-20].

Выражаю благодарность академику Ш. А. Алимову за обсуждение и ценные замечания, благодаря которым появились [18,19] и настоящая работа.

Литература

1.Ладыженская О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения, М., Гостехиздат, 1953 г.
2.Ильин В.А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений. Успехи математических наук,1960,т.15,вып.2(92),стр.97-154.
3.Алимов Ш.А. Избранные научные труды,2015,Ташкент,Meriyus,286 стр.
4.Hadamard J., Proprietes d'une equation //L'Enseignevent Math. – 1936 – V.35
5.Курант Р. Уравнения с частными производными. –М., Мир, 1964
6.Джураев А. Д. Системы уравнений составного типа. –М., Наука, 1972
7.Салахитдинов М.С. Уравнения смешанно – составного типа. –Ташкент, Фан, 1974
8.Берхин П. Е. Начальная краевая задача для одной составной системы. –Сиб. мат. журн. –1976, том XVII , №1, с.12–20.
9.Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно – составного типов. – Ташкент, Фан, 1979
10.Vidic C. Uber zusammengesetze System partieller linearer Differentialgleichungen erster Ordnung. –Berlin: Technische Universitet, 1968
11.Wolfersdorf L. Sjostrandsche Probleme beim einen System vom Partieller Differentialgleichungen erster vom Zusammengesrtzen Typ. –Mathematische Nachrihten–1970–B.46–s. 323–339.
12.Джураев А. Д. Метод сингулярных интегральных уравнений. –М., Наука, 1987
13.Зикиров О.С., Гозиев К.С. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка .Вестник НУУз (точные науки),2017,2/2,стр.138-150.
14.Кожанов А.И. О разрешимости обратной задачи нахождения старшего коэффициента в уравнениях составного типа. Вестник ЮжУралГосУн,N 15(115),2008,стр.27-36

15.Алсыкова А.А. Начально-краевая задача с интегральными граничными условиями для одного класса уравнений составного типа. Вестник Бурятского Государственного Университета, 2013, №9, с.119-129.
16.Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.Москва.,Наука,1972,4- изд.,785стр.
17.Сраждинов И.Ф. «О разрешимости смешанных задач для систем составного типа ».Uzbek mathematical journal,2010,N 3,121-130
18.Сраждинов И.Ф.Доклады Академии наук Республики Узбекистан,2016, № 5, стр.7-10.
19.Сраждинов И.Ф. Разрешимость начально-краевой задачи для одной системы составного типа. Москва.2020.Межвуз.науч.конгресс. Изд-во Инфинити. Том 2. стр.145-152. DOI 37.10.34660 / INF.2019.62.47001.
20.Сраждинов И.Ф. Начально-краевая задача для одной системы составного типа.Central Asian journal of mathematical theory and computer sciences.http://centralasianstudies.org/index.php/CAJMTCS. 02 issue:03. March 2021. ISSN2660-5309.стр.41-47.
21.Сраждинов И.Ф To Investigation of The Mixed Problem For Systems of Equations of Composite Type. CENTRAL ASIAN JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED SCIENCES.Volume: 02 Issue: 04 | April 2021 ISSN: 2660-5317.стр.23-32.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО КВАЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ

Тураев К.Н.
Термезский государственный университет.
k_turaev@mail.ru

В настоящее время в современной науке круг рассматриваемых задач для нагруженных параболических уравнений значительно расширился. Это объясняется тем, что многие практически важные задачи, связанные с динамикой почвенной влаги, с процессом диффузии частиц в турбулентной плазме, с охлаждением неоднородного изогнутого стержня, моделированием процесса излучения лазера, приводят к локальным и нелокальным краевым условиям. Исследования последних лет убедительно показывают, что в математической биологии весьма часто возникают как локальные краевые, так и нелокальные краевые задачи [1].

Требования современной науки и техники приводят к необходимости рассматривать нелокальные задачи для нагруженных параболических уравнений.

Задачи со свободной границей для нагруженных параболических уравнений рассмотрены в работах [2,3].

Задачи со свободной границей с нелокальными граничнными условиями для нагруженных квазилинейных параболических уравнений почти не рассматривались.

В настоящей работе изучается нелокальная задача со свободной границей для нагруженного квазилинейного уравнения диффузии.

Постановка задачи. Требуется найти на некотором отрезке $0 \le t \le T$ непрерывно дифференцируемая функцию $s(t)$, такую, что $s(0) = s_0 > 0,\ 0 < \dot{s}(t) \le N,\ s(t)$ −удовлетворяет условию Гельдера, а функция $u(t,x)$ в области $D = \{(t,x): 0 < t \le T, 0 < x < s(t)\}$ удовлетворяет уравнению

$$u_t(t,x) - a(u_x)u_{xx}(t,x) - bu_x(t,x) = cu(t,0), \quad (t,x) \in D, \tag{1}$$

и следующим начальным и граничным условиям

$$u(0,x) = \varphi(x),\ 0 \le x \le s_0, \tag{2}$$

$$u_x(t,0) = f(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$\alpha u(t,0) = u(t,s(t)), \qquad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$u_x(t,s(t)) = \mu(t), \qquad 0 \le t \le T. \tag{5}$$

Исследование проводится по следующей схеме. Сначала устанавливаются априорные оценки для решений $u(t,x)$, s(t) и их производные в норм Гельдера.

Далее, на основе установленных оценок исследуется поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени, доказывается единственности решения первоначальной задачи, и далее доказывается глобальную разрешимость полученной задачи при помощи методом неподвижной точки Шаудера [2].

Литература

1. Нахушев А.М.Нагруженные уравнения и их применение. Москва: Наука, 2012. 232. с.

2. Adrina C.Briozzo., Domingo A.Tarzia. A one-phase Stefan problem for a non-classical heat equation with a heat flux condition on the fixed face. //App.Math.and Com. 2016. No.182, № 5. P. 809-818.

3. Adrina C.Briozzo., Domingo A.Tarzia. Existence and uniqueness for one-phase Stefan problems of non-classical heat equations with temperature boundary condition at a fixed face.// El.Jour.Differ.Eq. 2016. No.206, № 21. P.1-16.

ЗАДАЧА СТЕФАНА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Тураев Р.Н.
Термезский государственный университет
rasul.turaev@mail.ru

Классическая теория диффузии математически выражается с помощью уравнения теплопроводности и, в более общем смысле, параболическими уравнениями, обычно линейного типа. Такой подход имел огромный успех и теперь является фундаментом в науке и технике. Во второй половине прошлого столетия наблюдалась интенсивная активность и прогресс в теориях нелинейной диффузии, примерам которых является проблемы Стефана для нелинейного параболического уравнения.

В более общем плане, исследования нелокальных задач имеют традицию, задачи со свободной границей, и в последнее десятилетие стали свидетелями быстрого расширения, когда они привлекли внимание экспертов линейных и нелинейных параболических уравнений, которые принесли новые проблемы и методы в эту область. Эта область ставит новые задачи, как для теоретиков, так и для прикладных математиков.

В настоящее время она находится уравнений в частных производных, обеспечивая при этом новую парадигму в научном моделировании. Это взаимодействие между математикой и приложениями порождает новые концепции и методы и, как ожидается, приведет к появлению новых сложных математических проблем на многие годы вперед.

В настоящей работе изучается нелокальная задача Стефана о распространения тепла в среде, агрегатное состояние, которого может меняется при определенных значениях темпратуры ее выделением или поглощением тепла. Примерами могут служить задачи о промерзании и плавлении.

Постановка задачи. Требуется найти пару функций $(s(t), u(t,x))$ таких что $s(t)$ определена и непрерывно дифференцируема на отрезке $0 \le t \le T$, $s(0) = s_0 > 0,\ 0 < \dot{s}(t) \le N,\ \ s(t)$ −удовлетворяет условию Гельдера, а функция $u(t,x)$ в области $D = \{(t,x): 0 < t \le T, 0 < x < s(t)\}$ удовлетворяет уравнению

$$u_t(t,x) = a(u_x)u_{xx}(t,x) + b(u)u_x(t,x), (t,x) \in D, \qquad (1)$$

и следующим начальным и граничным условиям

$$u(0,x)=\varphi(x),\ 0\le x\le s_0, \tag{2}$$

$$u(t,0)=\alpha u(t,x_0) \qquad 0\le t\le T, \tag{3}$$

$$u(t,s(t))=0, \qquad 0\le t\le T, \tag{4}$$

$$\dot{s}(t)=-\beta u_x(t,s(t)), \qquad 0\le t\le T \tag{5}$$

Относительно данных задач в работе предполагаем, что для заданных функций выполнены следующие основные условия:

1. Функции $b(u)$ и $b'(u)$ определены и непрерывны для любого значения аргумента и ограничены на любом замкнутом множестве аргумента;

2. Положительные постоянные удовлетворяют неравенствам $s(0)=s_0>0,\ p>0, 0<\alpha<1,\ \beta>0,\ 0<x_0\le s_0$;

3. $\varphi'(x)-$ непрерывно дифференцируемая функция, $\varphi'(x)$ –удов-летворяют условию Гельдера;

4. Выполнены условия согласования в угловых точках (в т.ч. рассматриваемых вспомогательных задачах). В частности,

$$\varphi(0)=\alpha\varphi(x_0), \qquad \varphi(s_0)=0\,.$$

Задача (1)-(5) исследованы в работах [1], [2], когда $b(u)=1$ и вместо (3) задается граничное условии второго и нелокальные задаче.

Сначала устанавливаются априорные оценки для решений $(s(t),u(t,x))$ и их производных.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия 1.- 4. Тогда в* $\overline{D}$ *для решения* $u(t,x),s(t)$ *задачи (1)-(5) справедливы оценки*

$$0\le u(t,x)\le M_1=\max_{0\le x\le s_0}|\varphi(x)|,$$

$$0<\dot{s}(t)\le M_2=\beta N,\ 0\le t\le T,$$

$$0\le x\le N(s(t)-x),\quad 0\le x\le s(t),\ 0\le t\le T.$$

Далее установлены априорные оценки Шаудеровского типа норм Гельдера. На основе установленных априорных оценок доказана теорема единственности, а существование решения доказана при помощи методом неподвижной точки Шаудера [2].

Литература

1. Douglas, Jr. A uniqueness theorem for the solution of the Stefan problem. // Proc. Amer.Math.Soc. 1957.Vol.8, No.4. P.402-408.
2. Тахиров Ж.О., Тураев Р.Н. Нелокальная задача Стефана для квазилинейного параболического уравнения. Вест.Самарского Гос.Тех.Универ.Сер."Физ.-мат.Науки".2012. №26. С.99-106.

ХОТИРАЛИ БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛ ГИПЕРБОЛИК ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ УЧУН ТЎҒРИ ВА ТЕСКАРИ МАСАЛА

Турдиев Ҳ. Ҳ.
Бухоро давлат университети
hturdiev@mail.ru

Жуда кўплаб физик жараёнлар биринчи тартибли хусусий ҳосилали гиперболик тенгламалар системаси орқали ифодаланади. Масалан акустика тенгламалар системаси, электромагнит тебранишлар, эластиклик назариясининг динамик тенгламаларива бошқа тенгламалар. Маълумки иккинчи тартибли тенгламалар бир нечта қўшимча чегараланишлар орқали улардан келтирилиб чиқарилади. Тескари масалаларни ечиш бевосита ушбу системаларни ечишга олиб келади. Мазкур йўналишда тизимли тартибда изланишлар ўтган асрнинг 70 – йилларида Л.П. Нижник [1], С.П. Белинский[2], В.Г. Романов ва Л.И. Слинючев[3] олимларнинг ишларида бошланган.

Масаланинг қўйилиши. $D=\{(\mathrm{x},\mathrm{t}):\ 0<\mathrm{x}<\mathrm{H},\ \mathrm{t}>0\}$ соҳада $u(\mathrm{x},\mathrm{t})$ функцияга нисбатан n та тенгламалар системасини қарайлик.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A\frac{\partial u}{\partial x}+B(x)\mathrm{u}(x,t)=\int_0^t K(\tau)\mathrm{u}(x,t-\tau)\mathrm{d}\tau+f(x,\mathrm{t}). \qquad (1)$$

Бу ерда $u(x,t)=\left(u_1(x,t),u_2(x,t),\ldots,u_n(x,t)\right)-$вектор функция, A, B ва K – $n\times n$ ўлчамли квадрат матрица

$$A=diag(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n),\ \ B(x)=\left(b_{ij}(x)\right)_{i,j=1}^{n},\ \ K(t)=diag(K_1(t),K_2(t),\ldots,K_n(t))$$

$$f(x,t)=(f_1(x,t),\ f_2(x,t),\ldots,\ f_n(x,t)).$$

λ_k – ҳақиқий, турли ўзгармаслар ва

$$\lambda_k>0,\ k=\overline{1,s};\quad \lambda_k<0,\ \ k=\overline{s+1,n};\ \ 0\le s\le n. \qquad (2)$$

(1) тенгламалар учун қуйидаги бошланғич ва чегаравий шартларни қарайлик

$$u(0,t)=\varphi(x),\ 0\le x\le H, \tag{3}$$

$$u_i(0,t)=g_i(t),\ i=\overline{1,s};\ u_i(H,t)=g_i(t),\ i=\overline{s+1,n}. \tag{4}$$

$u(x,t)$ функция учун биз қуйидаги қўшимча шартларни берамиз.

$$u_i(0,t)=h_i(t),\ i=\overline{s+1,n};\quad u_i(H,t)=h_i(t),\ i=\overline{1,s}. \tag{5}$$

$(1)-(4)$ масала коррект қўйилган масала ҳисобланади [4],[5].

$(1)-(4)$ масалада $K(t)$ матрицани (5) қўшимча шартлар ёрдамида топиш масаласи тескари масала дейилади.

Фараз қилайлик, келишувчанлик шартлари бажарилсин.

$$\varphi_i(0)=g_i(0),\quad i=\overline{1,s};\ \varphi_i(H)=g_i(0),\quad i=\overline{s+1,n}. \tag{6}$$

$$f_i(0,0)+A\frac{d}{dx}\varphi_i\,|_{x=0}-\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(0)\varphi_i(0)=\left[\frac{d}{dt}g_i(t)\right]_{t=0},\quad i=\overline{1,s}, \tag{7}$$

$$f_i(H,0)+A\frac{d}{dx}\varphi_i\,|_{x=H}-\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(H)\varphi_i(H)=\left[\frac{d}{dt}g_i(t)\right]_{t=0},\quad i=\overline{s+1,n}. \tag{8}$$

Бунда g_i нинг $t=0$ даги қиймати, φ_i нинг $x=0$ ва $x=H$ даги қийматлари функциянинг аниқланиш соҳасидаги нуқталарнинг лимит маъносида тушунилади.

Теорема 1. Фараз қилайлик, $b_{ij}(x)\in C[0,H]$, $f(x,t)\in C^1(D)$, $\varphi(x)\in C^1[0,H]$ ва $g(t)\in C^1[0,\infty)$ ва (6), (7), (8) келушувчанлик шартлари бажарилсин. У ҳолда $(1)-(4)$ масаланинг D соҳага тегишли ягона классик ечими мавжуд.

Фараз қилайлик, қуйидаги шартлар

$$\Phi=\varphi(H)\ne 0,\ i=\overline{1,s};\quad \Phi=\varphi(0)\ne 0,\ i=\overline{s+1,n}. \tag{9}$$

ҳамда келишувчанлик шартлари бажарилсин

$$-\frac{1}{\lambda_i}\frac{d^2}{dx^2}g_i(0)+\frac{1}{\lambda_i}K_i(0)\varphi_i(0)+\frac{1}{\lambda_i}\frac{\partial}{\partial t}f_i(0,0)-\frac{1}{\lambda_i}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(0)\frac{d}{dt}g_i(0)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}f_i(0,0)-\lambda_i\frac{d^2}{dx^2}\varphi_i(0)-\sum_{j=1}^{n}\frac{d}{dx}\left[b_{ij}(0)\varphi_i(0)\right] \tag{10}$$

$$-\frac{1}{\lambda_i}\frac{d^2}{dx^2}g_i(0)+\frac{1}{\lambda_i}K_i(0)\varphi_i(H)+\frac{1}{\lambda_i}\frac{\partial}{\partial t}f_i(H,0)-\frac{1}{\lambda_i}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(H)\frac{d}{dt}g_i(0)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}f_i(H,0)-\lambda_i\frac{d^2}{dx^2}\varphi_i(H)-\sum_{j=1}^{n}\frac{d}{dx}\left[b_{ij}(H)\varphi_i(H)\right]. \tag{11}$$

Теорема 2. Фараз қилайлик, $b_{ij}(x) \in C^1[0,H]$, $f(x,t) \in C^1(D)$, $\varphi(x) \in C^1[0,H]$, $g_i(t) \in C^2[0,\infty)$, $h_i(t) \in C^2[0,\infty)$ бўлиб, (9) ва (10), (11) шартлари бажарилсин. У ҳолда, $(1)-(5)$ тескари масала етарлича кичик $H>0$ учун $K(t) \in C\left[0,\frac{H}{\mu}\right]$, $(\mu = \min\limits_{1\le i\le n} |\lambda_i|)$ ягона ечимга эга.

Адабиётлар

1. *Нижник Л.П.* Обратная задача для нестатционарного рассеяния для гиперболической системы уравнений. В кн.: Линейные и нелинейные краевые задачи. Киев: ИМ АН УССР, 1971, с. 205–210.
2. *Белинский С.П.* Об одной обратной задаче для линейных симметрических $t-$ гиперболических систем с $n+1$ независимыми переменными. Диф. уравнения, 1976, вып. 2, № 1, с. 15–23.
3. *Романов В.Г., Слинючева Л.И.* Обратная задача для гиперболических систем первого порядка. В кн.: Математические проблемы геофизики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1972, вып. 3, с. 184–215.
4. Дурдиев Д. К., Сафаров Ж. Ш., “Обратная задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости в ограниченной области”, *Матем. заметки*, 97:6 (2015), 855–867
5. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука. 1984. 264 с

О РАЗРЕШИМОСТИ КОНФЛИКТА ПРИ ИМПУЛЬСНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

[1]Тухтасинов М. [2]Мустапокулов Х.Я.
[1]НУУз, [2]ТГТУ

В статье рассмотрена линейная дифференциальная игра преследования при этом на управления убегающего накладывается интегральное ограничение, а преследователь использует импульсное управление. Эти импульсные воздействия на объект осуществляются в заранее заданных моментах времени, и соответствующее управление представляется при помощи дельта-функции Дирака. Изучаются линейные конфликты, описываемые системой обыкновенных дифференциальных уравнений, траектории которой имеют скачки в определенных моментах времени. Терминальное множество представляется в виде цилиндра в n-мерном евклидовом пространстве. Для решения поставленной задачи применяется метод разрешающих функции. Для доказательства достижения нижней грани применена теория опорных функций. Благодаря этого факта, вместо квазистратегии применяется почти стробоскопическая стратегия и указан способ построения этой стратегии.

1. Минимизация одного функционала в банаховом пространстве

Прежде чем сформулировать результата по минимизации функционала приведем некоторые сведения и определения.

Определение 1. (стр. 237, [1]). Функционал $J(v)$, заданный на некотором подмножестве V банахово пространства B называется *слабо полунепрерывным снизу* в точке $v \in V$, если для любой последовательности $\{v_n\}$, которая слабо сходится к v при $n \to \infty$ имеет место соотношение $J(v) \le \underline{\lim} J(v_n)$.

Определение 2. Пусть V подмножество пространства B. Многозначное отображение $W : V \to \Omega(R^d)$ назовем *слабо полунепрерывным снизу* в точке v, если для любой последовательности $\{v_n\}$, которая слабо сходится к v имеет место неравенство $C(W(v),\psi) \le \underline{\lim} C(W(v_n),\psi)$ при $n \to \infty$ и для каждого $\psi \in R^d$.

Здесь $C(F,\cdot) : R^d \to R^1$-опорная функция непустого компактного подмножества $F \in \Omega(R^d)$ (пространства R^d) (стр. 31, [2]).

Теорема 1. (стр. 238, [1]). Всякий слабо полунепрерывный снизу функционал $J(v)$ на слабо компактном множестве $V \subset B$ ограничен снизу и достигает на V своей нижней грани.

Лемма 1. Пусть $M \subset \Omega(R^d)$-выпуклое множество, $W : V \to \Omega(R^d)$-выпуклозначное слабо полунепрерывное снизу многозначное отображение, кроме того $0 \in \operatorname{int} W(v),\ v \in V,$ где V-слабо компактное подмножество банахово пространства B. Тогда функционал $\alpha(v),\ v \in V,$ определяемый следующим образом

$$\alpha(v) = \begin{cases} \max\{\alpha \ge 0 : \alpha M \cap W(v) \ne \varnothing\}, & \textit{при}\ \ 0 \notin M, \\ 1, & \textit{при}\ \ 0 \in M, \end{cases}$$

слабо полунепрерывен снизу на множестве V.

2. Постановка задачи и вспомогательные построения

Рассматривается линейная дифференциальная игра преследования, описываемая уравнением

$$\dot z = Cz - u + v,\ z \in R^d, \tag{1}$$

где z – фазовый вектор, u, v – параметры управления преследующего и убегающего игроков, соответственно, C – постоянная матрица порядка $d \times d$, U – непустое компактное подмножество в R^d, терминальное множество представляется бесконечным цилиндром вида $M = M^0 + M^1$, где M^0 – линейное подпространство пространства R^d, M^1 – непустой компакт из ортогонального дополнения L к M^0 в пространстве R^d.

Через π обозначим оператор ортогонального проектирования из R^d на L, а через e^{tC} – фундаментальную матрицу однородной части системы (1). Тогда, понятно, что $z \in M$ тогда и только тогда, когда $\pi z \in M^1$. В дальнейшем, этим фактом полностью воспользуемся. Пусть $\{\tau_i\}_{i=0}^{i=\infty}$-последовательность

моментов времени, занумерованных в порядке возрастания, без конечных точек сгущения, т.е. любой отрезок вида $[a,b]$ содержит конечное число элементов этой последовательности, положим $\tau_0 = 0$. Тогда, например, импульсное воздействие преследователя в моментах τ_i времени представляется с помощью функции Дирака $\delta(t-\tau_i)$, т.е. его управления представляется в виде

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \delta(t-\tau_i),\ t \geq 0,$$

где $u_i \in U$.

Через $B(i,\sigma)$ обозначим совокупность всех измеримых функций $v(\cdot):[0,\tau_{i+1}-\tau_i] \to R^d$, удовлетворяющих условиям:

$$\int_0^{\tau_{i+1}-\tau_i} |v(s)|^2\ ds \leq \sigma^2 .$$

Определение 1. (стр. 410. [3]). Стратегией преследователя назовем отображение P, состоящее из совокупности отображений:

$$P_i(\cdot,\cdot): R^d \times B(i,\sigma) \to U .$$

Определение 2. Стратегией убегающего назовем отображение E, состоящее из совокупности отображений:

$$E_i(\cdot): R^d \to B(i,\sigma) .$$

Заданные начальная точка z^0 и пара стратегий P,E порождают единственную траекторию

$$z(t) = z(t; z^0, P, E),\ t \geq 0.$$

Траектория $z(t)$ на полуинтервале $[0,\tau_1)$ определяется как решение задачи

$$\dot{z} = Cz - u_0\delta(t) + v_0(t),\ \ z(0) = z^0,$$

где $v_0(\cdot) = E_0(z^0),\ u_0 = P_0(z^0, v_0(\cdot))$.

Далее, траектория $z(t)$ из отрезка $[0,\tau_k]$ на полуинтервал $[\tau_k,\tau_{k+1})$ продолжается как решение следующей задачи:

$$\dot{z} = Cz - u_k\delta(t-\tau_k) + v_k(t),\ \ z(\tau_k) = z(\tau_k - 0),$$

где $v_k(t) = \bar{v}(t-\tau_k),\ \bar{v}(\cdot) = E_k(z(\tau_k))$ и

$$u_k(t) = [P_k(z(\tau_k), \bar{v}(\cdot))](t-\tau_k),\ \ \tau_k \leq t < \tau_{k+1},\ k = 1,2,\ldots .$$

Определение 3. Игра (1), начинающейся из начальной точки z^0 завершается к моменту τ_K, если существует стратегия P преследующего игрока так, что $z(\tau_K; z^0, P, E) \in M$ для любой стратегии E убегающего игрока.

Постановка задачи. Определить условии, при выполнении которых, для данной начальной точки $z^0 \notin M$ можно завершить преследования.

3. Решение задачи

Рассматривается игра (1) при условии, что преследующий игрок применяет импульсное управление, убегающий имеет право применять измеримое управление $v(t),\ t \geq 0$ с условием:

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\, v(s)\,|^2\ ds \leq \sigma^2,$$

где σ – неотрицательное фиксированное число.

После подстановки в правую часть уравнения (1) допустимых управлений игроков получим систему с правой частью с аддитивно входящей обобщенной функцией. Согласно (стр. 18, [4]) эта система имеет решение при любом начальном условии

$$z(0) = z^0,$$

причем оно единственно и абсолютно непрерывно на интервалах $(\tau_i, \tau_{i+1}),$ где $i = 0,1,...,\ \tau_0 = 0.$ А решения в моментах времени τ_i могут иметь разрывы первого рода. Пусть $v(t),\ t \geq 0,$ – допустимое управление убегающего игрока. Рассмотрим множества

$$W_i(n, v(\cdot)) = \pi e^{(\tau_n - \tau_i)C} U - \int_0^{\tau_{i+1}-\tau_i} \pi e^{(\tau_n - \tau_i - \tau)C} v(\tau)\, d\tau,$$

$$W_i(n) = \bigcap_{v(\cdot)\in B(i,\sigma)} W_i(n, v(\cdot)) = \pi e^{(\tau_n - \tau_i)C} U \overset{*}{-} G(n, \tau_i, \tau_{i+1}).$$

Здесь

$$G(n, \tau_i, \tau_{i+1}) = \left\{ x \in L : x = \int_0^{\tau_{i+1}-\tau_i} \pi e^{(\tau_n - \tau_i - \tau)C} v(\tau)\, d\tau,\ v(\cdot) \in B(i, \sigma) \right\},$$

где $A \overset{*}{-} B = \{x : x + B \subset A\} = \bigcap_{b\in B} (A - b)$ означает геометрическую разность (разность Минковского) множеств A и B.

Лемма 1. Множества $G(n, \tau_i, \tau_{i+1})$ являются выпуклыми компактными подмножествами подпространства L.

Предположение 1. Каждое из множеств $W_i(n)$ имеет внутренний элемент для всех $n, i, n \in N,\ i = 0,1,...,n,$ которых обозначим через $w_i(n).$ Пусть $w = \{w_i(n)\}_{i=0}^n,$ положим

$$\xi(n, z, w) = \pi e^{(\tau_n - \tau_0)C} z + \sum_{i=0}^{n} w_i(n).$$

Определим следующую функцию

$$\alpha_i(n, z, v(\cdot), w) = \sup\{\alpha \geq 0 :\ \alpha[M^1 - \xi(n, z, w)] \cap [W_i(n, v(\cdot)) - w_i(n)] \neq \varnothing\}.$$

Применяя результаты Леммы 1 к функционалу $\alpha_i(n,z,v(\cdot),w),\ v(\cdot)\in B(i,\sigma)$, получим, что существует функция $v_i^*(\cdot)\in B(i,\sigma)$, удовлетворяющей равенству $\inf\limits_{v(\cdot)\in B(i,\sigma)}\alpha_i(n,z,v(\cdot),w)=\alpha_i(n,z,v_i^*(\cdot),w).$

Предположение 2. Пусть выполнено неравенство

$$\sum_{i=0}^{n}\alpha_i(n,z,v_i^*(\cdot),w)\geq 1.$$

Введем следующее обозначение

$$K=K(z,w)=\min\left\{j\in\{0,1,\dots,n\}:\sum_{i=0}^{j}\alpha_i(n,z,v_i^*(\cdot),w)\geq 1\right\}. \qquad (2)$$

Определим функции (стр. 276, [5])

$$\Lambda_i(n,z,w)=\begin{cases}\alpha_i(n,z,v_i^*(\cdot),w), & i=0,\dots,K-1,\\ 1-\sum\limits_{j=0}^{K-1}\alpha_j(n,z,v_i^*(\cdot),w), & i=K,\\ 0, & i=K+1,\ K+2,\dots,n.\end{cases}$$

Справедлива следующая

Лемма 2. Пусть выполнены Предположения 1 и 2, множества M^1 и U выпуклы. Тогда

$$\Lambda_i(n,z,w)[M^1-\xi(n,z,w)]\cap[W_i(n,v_i^*(\cdot))-w_i(n)]\neq\varnothing \text{ для } i,i=0,1,\dots,n.$$

Теорема 2. Если для системы (1) выполнены Предположения 1 и 2, множества M^1, U выпуклы и $K=K(z,w)<\infty((2))$ для начального положения $z=z^0$ и вышеуказанного набора w, то траекторию $z(t)$ системы (1) можно вывести на терминальное множество M к моменту времени $t=\tau_K$.

Литература

1. Васильев Ф.П. Лекции по методам решения экстремальных задач. Изд-во Московского университета, 1974. 374 с.
2. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. М.: Высш.шк., 2001. 239 с.
3. Azamov A. Duality of Linear Differential Games of Pursuit // Soviet Mathem. Doklady. 1982. Vol. 25, No. 2. Pp. 409-412.
4. Филиппов А.В. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
5. Тухтасинов М. Линейная дифференциальная игра преследования с импульсными и интегрально-ограниченными управлениями игроков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 3. С. 273-282.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Усмонов Б.
Chirchiq davlat pedagogika institute
bakhtiyer.usmanov@mail.ru

В последние годы возник интерес исследованию методом спектрального анализа однозначной разрешимости и устойчивости решения прямых задач для модельного уравнения смешанного типа второго и третьего порядка в прямоугольной области. Отметим работы М.М. Хачева [1], К.Б. Сабитова[2-4]. Н.Ю. Капустина и Е.И. Моисеева[5].

Исходя из этого, в данной работе изучается однозначной разрешимости, поставленной задаче для уравнения третьего порядка эллиптико-гиперболического типа в прямоугольной области.

В прямоугольной области $D=\{(x,y):\ 0<x<1,\ -p<y<q\}$ рассмотрим уравнение

$$0=Lu\equiv\begin{cases} u_{xxy}+u_{yyy}, & при\ y>0,\\ (b\dfrac{\partial}{\partial x}+c)\left(u_{xx}-u_{yy}\right), & при\, y<0, \end{cases} \tag{1}$$

b и $c-$заданные вещественные числа, причем $b^2+c^2\neq 0$.

В области D исследуется следующая задача.

Задача. Найти в области D функцию $u(x,y)$ удовлетворяющую условиями:

$$u(x,y)\in C^1(\bar{D}),\ \ u(x,y)\in C^2(D_-),\ \ u_{xxy},\ u_{yyy}\in C(D_+),\ \ u_{xxx},\ u_{xyy}\in C(D_-), \tag{2}$$

$$Lu=0,\quad (x,y)\in D_+\cup D_-, \tag{3}$$

$$u(0,y)=0,\ \ u(1,y)=0,\ \ u_x(0,y)=0,\qquad -p\le y\le q, \tag{4}$$

$$u(x,-\alpha)=\varphi_1(x),\quad u(x,\beta)=\varphi_2(x),\qquad 0\le x\le 1, \tag{5}$$

$$u_y(x,-\alpha)=g(x),\qquad 0\le x\le 1, \tag{6}$$

где $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ g(x)$-заданные достаточно гладкие функции.

При определенных ограничениях параметров и заданные функции установлено критерий единственности и существования решения поставленной задачи. Построено решение задачи в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи. Доказано, что однозначная разрешимость поставленной задачи существенным образом зависит от выбора границы прямоугольной области. Построен пример, в котором поставленная задача с однородными условиями имеет нетривиальное решение. Получены оценки, позволяющие обоснование сходимости рядов в классе регулярных решений данного уравнения и устойчивость решения поставленной задачи от граничных данных.

Литература

1. Хачев М.М. Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лаврентьев – Бицадзе в прямоугольной области. // «Дифференциальные уравнения». 1978. Т.14. № 1 . С.136-139.
2. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области. // «Доклады РАН» 2007. Т.413. № 1. С. 23-26.
3. Сабитов К.Б. Краевая задача для уравнений смешанного типа третьего порядка в прямоугольной области. // «Дифференциальные уравнения». 2011. Т.47. № 5. С.705-713.
4. Сабитов К. Б. Задача Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области. // «Математические заметки». 2009. Т. 86, № 2 С. 273–279.
5. Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И. Об оценке решения одной задачи для параболо-гиперболического уравнения с помощью рядов Фурье.
6. // «Дифференциальные уравнения». 2003. Т.39.№ 5. С.656-662.

ОБОБЩЕННЫЙ (G'/G) МЕТОД РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА

Уразбоев Г., Балтаева И., Рахимов И.
Ургенчский государственный университет,
gayrat71@mail.ru, iroda-b@mail.ru,
ilxom@urdu.uz

В настоящее время существует несколько способов решения нелинейных уравнений в частных производных, таких как прямой метод Хироты [1], метод обратной задачи рассеяния [2,3], метод преобразования Дарбу [4,5] . Кроме этого, метод (G'/G)-представления [6] также эффективен при нахождении решений бегущей волны нелинейных эволюционных уравнений. В этой работе мы покажем использование метода -расширения для решения нагруженного уравнения Кортевега-де Фриза.

В данной работе рассматривается нагруженное уравнение Кортевега-де Фриза

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} - \gamma(t)u(0,t)u_x = 0, \tag{1}$$

где $u(x,t)$- неизвестная функция, $x \in R$, $t \geq 0$, $\gamma(t)$ - заданная непрерывная функция.

Чтобы найти решение типа бегущей волны для уравнения (1), используем калибровочное преобразование

$$u(x,t) = u(\xi), \ \xi = kx + \Omega(t). \tag{2}$$

Подставляя (2) в уравнение (1), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\Omega_t'(t)u' - 6kuu' + k^3u''' - k\gamma(t)u(0,t)u' = 0, \tag{3}$$

интегрируя его по ξ, получаем

$$C + \Omega_t'(t)u - 3ku^2 + k^3u'' - k\gamma(t)u(0,t)u = 0, \tag{4}$$

где C - константа. Предположим, что решение уравнения (4) можно представить в виде многочлена от (G'/G):

$$u(\xi) = a_2\left(\frac{G'}{G}\right)^2 + a_1\left(\frac{G'}{G}\right) + a_0, \tag{5}$$

Здесь $a_2 \neq 0$; a_0, a_1, a_2 — константы, которые будут определены ниже; функция $G(\xi)$ удовлетворяет линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0. \tag{6}$$

λ, μ — произвольные постоянные.

Подставляя (5) в уравнение (4), используя линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (6) и собирая члены одного и того же порядка (G'/G), левую часть уравнения (4) преобразуем в другой многочлен от (G'/G). Приравнивая каждый коэффициент этого многочлена к нулю, получаем систему алгебраических уравнений для a_0, a_1, a_2, C, $\Omega(t)$.

Литература

1. Hirota R. Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons, Phys. Rev. Lett., 1971 vol. 27, pp. 1192-1194.
2. Urazboev G. U., Baltayeva I. I., On integration of the general loaded Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source, Instruments and Systems: Monitoring, Control, and Diagnostics, 2019 vol 10. pp. 7-9.
3. Khasanov A. B., Urazboev G. U., On the sine-Gordon equation with a self-consistent source, Matematicheskie Trudy 11 (1), 153-166 2008.

4. Rogers C., Shadwick W.F., Backlund Transformations, Academic Press, New York, 1982.
5. Wadati M., Shanuki H., Konno K., Prog. Theor. Phys. 53 (1975) 419.
6. Wang M, Li X, Zhang J. The (G'/G)-expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics. Phys Lett A. 2008;372: 417–423.

УСЛОВНАЯ КОРРЕКТНОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

[1]Фаязов К.С., [2]Хажиев И.О., [3]Эгамберганова О.
[1]Туринский политехнический университет в г. Ташкенте,
[2]Национальный университет Узбекистана,
[3]Ташкентский государственный технический университет
kudratillo52@mail.ru, kh.ikrom04@gmail.com

Работа посвящена исследованию некорректной краевой задачи для уравнения смешанного типа высокого порядка.

Пусть $Q_T = \{(x,y,t):(x,y)\in\Omega, 0<t<T\}$, $\Omega = \{(x,y):|x|<l, 0<y<d\}$, S - граница области Ω, $\bar{\Omega} = \Omega\cup S$, $Q_t = \{(x,y,\tau):(x,y)\in\Omega, 0<\tau<t\}$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \operatorname{sgn}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^{2n} u}{\partial y^{2n}} + a\,u = f(x,y,t) \tag{1}$$

в области $Q_T \cap \{x\neq 0\}$ с одной линией изменения типа, где a - некоторая константа, $n\in N$.

Постановка задачи. Найти функцию $u(x,y,t)$ удовлетворяющую уравнению (1) в области $Q_T \cap \{x\neq 0\}$ и следующим условиям:

начальным

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x,y),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x,y),\ (x,y)\in\bar{\Omega}, \tag{2}$$

краевым

$$\begin{aligned} &u\big|_{x=-l} = u\big|_{x=l} = 0,\ 0\le y\le d, 0\le t\le T,\\ &\left.\frac{\partial^{2m} u}{\partial y^{2m}}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial^{2m} u}{\partial y^{2m}}\right|_{y=d} = 0,\ m = 0,1,...,(n-1), -l\le x\le l,\ 0\le t\le T, \end{aligned} \tag{3}$$

и условия склеивания

$$u(-0,y,t) = u(+0,y,t),\ u_x(-0,y,t) = u_x(+0,y,t),\ 0\le y\le d, 0\le t\le T, \tag{4}$$

где $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ достаточные гладкие функции и удовлетворяют условия согласования, $f(x,y,t)$ -функция источника.

Исследование уравнений смешанного типа началось с известных работ M. Gevrey, Ф. Трикоми, С. Геллерстедт. Дальнейшее развитие данная теория получила в работах M. H. Protter, М. А. Лаврентьева, А. В. Бицадзе, А. М.

Нахушева, М. В. Келдыша, С. П. Пулькина, В. Н. Врагова, Ф. И. Франкль, J. M. Rassias и других. Большинство из этих работ посвящены исследованию существования и единственности решения различных краевых задач.

Исследования некорректных краевых задач для таких типов уравнений можно найти в работах H. Levine [2], К.С. Фаязова [3, 4], И.О. Хажиева [1], Я.К. Худайберганова [4] и др.

В данной работе некорректная краевая задача для уравнения смешанного типа высокого порядка исследуется на условную корректность.

Пусть $\|u\|^2 = (u,u)$, где скалярное произведение $(u,v) = \int_{-l}^{l}\int_{0}^{d} uv\,dxdy$.

Лемма 1 Пусть функция $\omega(x,y,t)$ в области $Q_T \cap \{x \neq 0\}$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} + \operatorname{sgn} x\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^{2n}\omega}{\partial y^{2n}} + \sigma\omega = p(x,y,t)$ с условиям $\omega|_{x=-l} = \omega|_{x=l} = 0$, $\partial_y^{2m}\omega\big|_{y=0} = \partial_y^{2m}\omega\big|_{y=d} = 0$, $m = 0,1,...,(n-1)$, $\omega|_{x=-0} = \omega|_{x=+0}$, $\omega_x|_{x=-0} = \omega_x|_{x=+0}$. Тогда для $\omega(x,y,t)$ при $t \in (0,T)$ справедлива оценка

$$\int_{Q_t} \omega_x^2\,dQ_t \le \left(T\int_{\Omega}\omega_x^2\big|_{t=0}\,d\Omega + \gamma\right)^{\theta(t)}\left(\int_{Q_T}\omega_x^2\,dQ_T + \gamma\right)^{1-\theta(t)} c(t)$$

где

$$\gamma = \left(2T^2+3\right)\int_{Q_T} p_x^2\,dQ_T + |\beta|,$$

$$\beta = 2\int_{\Omega}\left(T\operatorname{sgn} x\omega_{xx}^2 + T\omega_{xx}\partial_y^{2n}\omega + \sigma T\omega_{xx}\omega + \omega_x\omega_{xt} - T\omega_{xt}^2\right)\Big|_{t=0} d\Omega,\ \theta(t) = \frac{1-e^{-t}}{1-e^{-T}},$$

$$c(t) = \exp\left(\left(T+1\right)\frac{(1-e^{-t})T - (1-e^{-T})t}{1-e^{-T}}\right),\ \sigma\text{- некоторая константа.}$$

Введем обозначение

$$M = \left\{u(x,y,t) : \int_0^T \|u_x\|^2 dt \le m^2\right\}$$

Теорема 1. Пусть решение задачи (1.1)-(1.4) существует и $u(x,y,t) \in M$. Тогда оно единственно.

Введем обозначение, через $u(x,y,t)$ обозначим решение задачи (1)-(4) по точным данным $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$, $f(x,y,t)$ а через $u_\varepsilon(x,y,t)$ решение задачи (1) -(4) по приближенным данным $\varphi_\varepsilon(x,y)$, $\psi_\varepsilon(x,y)$, $f_\varepsilon(x,y,t)$.

Теорема 2. Пусть решение задачи (1) - (4) существует, $u(x,y,t), u_\varepsilon(x,y,t) \in M$ и $\|\varphi(x,y) - \varphi_\varepsilon(x,y)\|_{W_2^{2,2n}(\Omega)} \le \varepsilon$, $\|\psi(x,y) - \psi_\varepsilon(x,y)\|_{W_2^{1,0}(\Omega)} \le \varepsilon$, $\max\limits_{t\in[0;T]}\|f(x,y,t) - f_\varepsilon(x,y,t)\|_{W_2^{1,0}(\Omega)} \le \varepsilon$. Тогда имеет место оценка

$$\int_0^t \|u - u_\varepsilon\|^2\,d\tau \le c(t)\left(T\varepsilon^2 + \delta(T,a,\varepsilon)\right)^{1-\theta(t)}\left(4m^2 + \delta(T,a,\varepsilon)\right)^{\theta(t)},$$

$\delta(T,a,\varepsilon) = \left(2T^3 + 8T + aT + 1\right)\varepsilon^2$.

Литература

1. Khajiev I.O., Conditional correctness and approximate solution of boundary value problem for the system of second order mixed-type equations, J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 2018, Volume 11, Issue 2, 231–241
2. Levine H. A., Logarithmic Convexity and the Cauchy Problem for some Abstract Second Order Differential Inequalities // Journal of Differential Equations, 8, 34-55 (1970).
3. Фаязов К. С. Некорректная задача Коши для дифференциального уравнения первого и второго порядков с операторными коэффициентами, Сиб. матем. журн., 1994, том 35, номер 3, 702–706
4. Фаязов К. С., Худайберганов Я.К. Некорректная краевая задача для системы уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения, Сиб. электрон. матем. изв., 17 (2020), 647- 660
5. Франкль Ф. И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973. 711 с.

ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ ПСЕВДО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С СМЕШАННЫМИ ДАННЫМИ НА ГРАНИЦЕ ОТРЕЗКА

Фаязова З.К.
Технический институт ЁДЖУ в Ташкенте**,**
z.fayazova@yahoo.com

Работа посвящена исследованию граничной задачи управления для псевдо параболического уравнения.

В ограниченной области $D_T = (0,T)\times D \quad (D = \{x : 0 < x < \pi\})$ рассматривается уравнение

$$u_t(x,t) = u(x,t)_{txx} + u(x,t)_{xx} \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = 0, \quad x \in [0,\pi] \tag{2}$$

с граничными условиями

$$u(0,t) - u_x(0,t) = \mu(t), \quad u|_{x=\pi} = 0, \quad t \in [0,T] \tag{3}$$

Задача. Найти $\mu(t)$ из условия

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} u(x,t)dx = \theta(t), \tag{4}$$

где $\mu(t)$ удовлетворяет условию $\mu(0) = 0,$ а также выполняется ограничение

$$|\mu(t)| \le 1.$$

Уравнения такого типа возникают при моделировании процессов теплопереноса [1], фильтрации в простых средах [2], волновых процессов [3],

квазистационарных процессов в кристаллических полупроводниках [4] (см. также обзор работы [4]). Неустойчивость, единственность и существование решения краевых для таких типов уравнений рассматривались в работах [5-10].

Граничное управление для уравнения гиперболического типа рассматривались в работах В.А.Ильина и Е.И.Моисеева. Для уравнения параболического типа отметим работу Albiero S. и Ш.А.Алимова [11].

Нами для такого типа уравнений граничные управления были исследованы с данными Дирихле и Неймана. В данной работе мы доказываем существование решения граничного управления, изложенного выше.

Определение 1. Управление $\mu(t)$ называется допустимым, если μ-гладкая функция удовлетворяющая условию

$$|\mu(t)| \le 1.$$

В дальнейшем мы воспользуемся результатами собственных значений оператора второго порядка

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad x \in (0, \pi)$$

с граничными условиями

$$X(0) - X'(0) = \rho, \quad X(\pi) = 0.$$

Тогда λ_m положительный корень уравнения $tg\sqrt{\lambda} = -\sqrt{\lambda}$ при каждом $n \in N$ и

$$X_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}(x - \pi), \quad n \in N.$$

Определение 2. Под решением задачи (1)-(3) мы понимаем функцию $u(x,t)$, представимую в виде

$$u(x,t) = \mu(t)\frac{\pi - x}{\pi + 1} - v(x,t),$$

где функция $v(x,t)$ является обобщённым решением из $C([0,T] \to \tilde{W}_2^1(D))$ следующей задачи:

$$v_t(x,t) - v_{xxt}(x,t) - v_{xx}(x,t) = \mu'(t)\frac{\pi - x}{\pi + 1}, \quad (x,t) \in D_T,$$

с однородными начальными и краевыми условиями:

$$v(x,0) = 0, \quad v(0,t) - v_x'(0,t) = 0, \quad v(\pi,t) = 0.$$

Основной результат.

Теорема. Существует постоянная $M > 0$ такая, что для любой функции $\theta \in W_2^1(-\infty, \infty)$, удовлетворяющей условиям

$$\|\theta\|_{W_2^1(\mathbb{R})} \le M, \quad \theta(t) = 0 \quad при \quad t \le 0,$$

найдется допустимое управление $\mu(t)$, обеспечивающее выполнение соотношения (4).

Литература

1. Chen P.J., Gurtin M.E. On a theory of heat conduction involving two temperatures//Z.Angew.Math.Phys.1968. v.19.P.614-627
2. Баренблат Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. «Об основных представлениях теории фильтрации в трещиновых средах»// Прикладная математика и механика. 1960. Т.24. №5. С.852-864.
3. Benjamin T.B., Bona J.L., Mohony J.J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems// Philos.Tranc.Royal Soc. London. Ser. A. 1972. V.272. P.47-78.
4. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плеттер Ю.Д. «Линейные и нелинейные уравнения Соболевского типа». Москва. Физматлит, 2007. С.736.
5. Bernard D. Coleman, Richard J. Duffin, Victor J. Mizel, «Instability, uniqueness, and nonexistence theorems for the equation $u_t = u_{txx} + u_{xx}$ on a strip». Archive for Rational Mechanics and Analysis, January, 1965, Volume 19, Issue 2. P. 100-116.
6. Coleman B.D., Noll W. "An Approximation Theorem for Functionals, with Applications in Continuum Mechanics", Arch. Rational Mech. Anal., 1960, 6. P. 355-370.
7. Colton D. Pseudo parabolic Equations in One Space Variable. Journal of Differential Equations, 1972, 12. P. 559-565.
8. Ляшко С.И. О разрешимости псевдо-параболических уравнений, Известия вузов. Математика, 1985, N 9. С. 71-72.
9. Ting T.W. Certain non-steady flows of second order fluids. Arch. Rat. Mech. Anal. 1963, 14. С. 1-26.
10. Шелковников Ф.А., Такайшвили К.Г. Сборник упражнений по операционному исчислению. М. "Высшая школа" 1976., 184 с.
11. Albeverio S., Alimov Sh. On a Time-Optimal Control Problem Associated with the Heat Exchange Process Appl. Math. and Optim. 2008, V.57. 1. p.58- 68.

ПАРАБОЛИК ФИЛЬТРАЦИЯ ТЕНГЛАМАЛАМАЛАРИ УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛА ҲАҚИДА

Қўчқоров Э.И., Ҳушвақтова Э.О.
ЎзМУ

Қуйидаги параболик типдаги тенгламалар системасини

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} + \mathrm{C}(\mathrm{H}_1 - u_1(x,t)),\ 0 < x < l_1,\ t > 0 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} + \mathrm{C}(\mathrm{H}_2 - u_2(x,t)),\ l_1 < x < l_2,\ t > 0 \qquad (2)$$

ва уларга қўйилган бошланғич ва чегаравий масалаларни қарайлик:

$$u_1(x,t)\big|_{t=0} = H_1, \quad 0 < x < l_1, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad t > 0 \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l_2} = 0, \quad t > 0 \tag{5}$$

$$u_2(x,t)\big|_{t=0} = H_2, \quad l_1 < x < l_2, \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l_1+0} - \left.\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l_1-0} = q(t), \quad t > 0, \tag{7}$$

$$u_1(l_1 - 0, t) = u_2(l_1 + 0, t) = 0, \; t > 0, \tag{8}$$

бу ерда $C > 0,\ H_1 > 0, a > 0$ ва $H_2 > 0$ берилган сонлар, $q(t)$ эса маълум функция. Ушбу кўринишдаги параболик тенгламалар системаси, қудуқлар орқали ғовак муҳитда сизот сувларининг босимини аниқлашда фильрация масалаларини математик моделлаштириш жараёнида келиб чиқадиган ночизиқли тенгламалар системасининг чизиқли қисми сифатида келиб чиқади [1, 2].

Қўйилган масалани ечиш учун $S_1(\mathrm{x},\mathrm{t}) = H_1 - u_1(\mathrm{x},\mathrm{t})$ ва $S_2(\mathrm{x},\mathrm{t}) = H_2 - u_2(\mathrm{x},\mathrm{t})$ алмаштириш бажарамиз, натижада қуйидаги ёрдамчи масалаларга келамиз:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial S_1(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 S_1(x,t)}{\partial t^2} - \mathrm{CS}_1(x,t)), \; 0 < x < l_1, \; t > 0 \tag{9}$$

$$S_1(x,t)\big|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < l_1, \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial S_1(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial S_1(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l_1-0} = q_1(t), \; t > 0, \tag{11}$$

ва

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial S_2(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 S_2(x,t)}{\partial x^2} - \mathrm{CS}_2(x,t)), \; l_1 < x < l_2, \; t > 0 \tag{12}$$

$$S_2(x,t)\big|_{t=0} = 0, \quad l_1 < x < l_2, \tag{13}$$

$$\left.\frac{\partial S_2(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l_1+0} = q_2(\mathrm{t}), \quad \left.\frac{\partial S_1(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l_2} = 0, \; t > 0, \tag{14}$$

$$q_2(\mathrm{t}) - q_1(t) = q(t), \quad t > 0, \tag{15}$$

$$S_2(l_1+0,t)-S_1(l_1-0,t)=H_2-H_1,\ t>0. \qquad (16)$$

Қўйилган (9)-(11) ва (12)-(14) ёрдамчи масалаларни Лаплас алмаштириш ёрдамида ечамиз, сўнгра (15) ва (16) шартлардан берилган тенгламалар системасининг ечимини оламиз.

Шу мақсадда яъни (9)-(11) масала учун, $S_1(\mathrm{x},\mathrm{t})=\vartheta_1(\mathrm{x},\mathrm{t})+\omega_1(\mathrm{x},\mathrm{t})$, (12)-(14) масала учун эса $S_2(\mathrm{x},\mathrm{t})=\vartheta_2(\mathrm{x},\mathrm{t})+\omega_2(\mathrm{x},\mathrm{t})$ алмаштириш бажариб $\vartheta_2(\mathrm{x},\mathrm{t})$ ва $\vartheta_1(\mathrm{x},\mathrm{t})$ функциялар учун бир жинсли чегаравий шартлар ҳосил қиламиз. Бунинг учун $\omega_1(x,t)=\dfrac{x^2}{2l_1}q_1(t)$ ва $\omega_2(x,t)=\dfrac{2xl_2-x^2}{2(l_2-l_1)}q_2(t)$ алмаштириш бажарамиз. Натижада қуйидаги тенгламаларга эга бўламиз:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial\vartheta_1(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2\vartheta_1(x,t)}{\partial x^2}-\mathrm{C}\vartheta_1(x,t)+f_1(x,t),\ \ 0<x<l_1,\ t>0 \qquad (17)$$

$$\vartheta_1(x,t)\big|_{t=0}=\omega_1(x,0),\ 0<x<l_1 \qquad (18)$$

$$\left.\frac{\partial\vartheta_1(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial\vartheta_1(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l_1-0}=0,\ t>0, \qquad (19)$$

ва

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial\vartheta_2(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2\vartheta_2(x,t)}{\partial x^2}-C\vartheta_2(x,t)+f_2(x,y),\ l_1<x<l_2,\ t>0 \qquad (20)$$

$$\vartheta_2(x,t)\big|_{t=0}=\omega_2(x,0),\quad l_1<x<l_2 \qquad (18)$$

$$\left.\frac{\partial\vartheta_2(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l_1+0}=\left.\frac{\partial\vartheta_2(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l_2}=0,\ t>0, \qquad (19)$$

бу тенгламаларда қуйидаги

$$f_1(x,t)=\frac{\partial^2\omega_1(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial\omega_1(x,t)}{\partial t},\qquad f_2(x,t)=\frac{\partial^2\omega_2(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial\omega_2(x,t)}{\partial t}.$$

белгилашлар қабул қилинган. Лаплас алмаштиришини бажарамиз. Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\overline{\vartheta}_1(x,p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\vartheta_1(x,t)dt,\quad \overline{\vartheta}_2(x,p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\vartheta_2(x,t)dt,$$

$$\overline{\omega}_1(x,p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\omega_1(x,t)dt,\quad \overline{\omega}_2(x,p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\omega_2(x,t)dt,$$

$$\overline{f}_1(x,p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt} f_1(x,t)dt,\quad \overline{f}_2(x,p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt} f_2(x,t)dt.$$

У ҳолда Лаплас алмаштириш ёрдамида қараётган тенгламалар оддий дифференциал тенгламлар учун хос қиймат масалаларига келамиз. Бу тенгламалар қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\frac{d^2\overline{\vartheta}_1(x,p)}{dx^2}-(C+\frac{p}{a^2})\overline{\vartheta}_1(x,p)=\frac{1}{a^2}\omega(x,0)-\overline{f}_1(x,p), \tag{20}$$

$$\left.\frac{d\overline{\vartheta}_1(x,p)}{dx}\right|_{x=0}=\left.\frac{d\overline{\vartheta}_1(x,p)}{dx}\right|_{x=l_1}=0,\ p\in\mathbb{C}, \tag{21}$$

$$\frac{d^2\overline{\vartheta}_2(x,p)}{dx^2}-(C+\frac{p}{a^2})\overline{\vartheta}_2(x,p)=\frac{1}{a^2}\omega_2(x,0)-\overline{f}_2(x,p), \tag{22}$$

$$\left.\frac{d\overline{\vartheta}_2(x,p)}{dx}\right|_{x=l_1}=\left.\frac{d\overline{\vartheta}_2(x,p)}{dx}\right|_{x=l_2}=0,\ p\in\mathbb{C}, \tag{23}$$

Энди ҳосил қилинган оддий дифференциал тенгламалар учун хос қиймат масаласини ечамиз. Оддий дифференциал тенгламалар курсидан маълумки, бу тенгламларнинг ечими

$$\overline{\vartheta}_1(x,\lambda)=\frac{1}{a^2}\int_0^{l_1}\overline{g}_1(x,\xi;p,)\omega_1(\xi,0)d\xi-\int_0^{l_1}\overline{g}_1(x,\xi;p,)\,\overline{f}_1(\xi,p)d\xi, \tag{24}$$

$$\overline{\vartheta}_2(x,\lambda)=\frac{1}{a^2}\int_{l_1}^{l_2}\overline{g}_2(x,\xi;p,)\omega_2(\xi,0)d\xi-\int_{l_1}^{l_2}\overline{g}_2(x,\xi;p,)\,\overline{f}_2(\xi,p)d\xi \tag{25}$$

кўринишда бўлади, бу ерда $\overline{g}_1(x,\xi;p,)$ ва $\overline{g}_2(x,\xi;p,)$ функциялар мос равишда

$$\frac{d^2\overline{\vartheta}_1(x,p)}{dx^2}-\lambda\overline{\vartheta}_1(x,p)=0,\ \left.\frac{d\overline{\vartheta}_1(x,p)}{dx}\right|_{x=0}=\left.\frac{d\overline{\vartheta}_1(x,p)}{dx}\right|_{x=l_1}=0,\ p\in\mathbb{C}, \tag{26}$$

$$\frac{d^2\overline{\vartheta}_2(x,p)}{dx^2}-\lambda\overline{\vartheta}_2(x,p)=0,\ \left.\frac{d\overline{\vartheta}_2(x,p)}{dx}\right|_{x=l_1}=\left.\frac{d\overline{\vartheta}_2(x,p)}{dx}\right|_{x=l_2}=0,\ p\in\mathbb{C}, \tag{27}$$

чегаравий масалаларнинг Грин функциялари бўлиб, уларнинг кўриниши

$$\overline{g}_1(x,\xi;p,)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sigma_k(\mathrm{x},\mathrm{p})\sigma_k(\xi,\mathrm{p})}{\lambda_k-\lambda},\quad \overline{g}_2(x,\xi;p,)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(\mathrm{x},\mathrm{p})\varphi_k(\xi,\mathrm{p})}{\mu_k-\lambda}$$

тенглик билан аниқланади, бу ерда $\{\varphi_k(x)\}$ ва $\{\sigma_k(x)\}$ функциялар мос равишда (27) ва (28) масалаларга хос функциялар, $\{\mu_k\}$ ва $\{\lambda_k\}$ сонлар эса мос хос сонлар, $\lambda = C + \frac{p}{a^2}$.

Операцион ҳисоб ва чегирмалар назарияси усулларини қўллаб қатор ҳисоблашдан кейин (26) ва (27) чегаравий масалаларнинг хос сонлари ва хос функцияларини, сўнгра $\overline{\vartheta}_2(x,\lambda)$ ва $\overline{\vartheta}_2(x,\lambda)$ функцияларнинг асли бўлган $\vartheta_2(x,\lambda)$ ва $\vartheta_2(x,\lambda)$ функцияларни топамиз. Натижада берилган масала ечимининг аналитик кўринишини оламиз. Шунга ўхшаш масалаларнинг ечимини қудуқлар сони биттадан кўп бўлган ҳолда ҳам худди шундай усулда аналитик олиш мумкин.

Адабиётлар

1. Шестаков В.М.Динамика подземних вод. Изд-во МГУ, 1973.-327С.
2. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грукнтовых вод. Наука М.,1977, -664 С.
3. Лаврентев М.А.,Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. М.,Наука М., 1973Ю -736 С.
4.Диткин В.А. Прудников А.П. Интегральные преобразование и операционное исчисление. Физ.Мат.Лит. М., -524С.

КОНСЕРВАТИВНЫЕ СХЕМЫ ПО ОПТИМАЛЬНОМУ ВЫБОРУ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА В СТЕРЖНЕ

Хайиткулов Б.Х.
Национальный Университет Узбекистана

В работе [1] изучены стационарные задачи расчета оптимального обогрева простых геометрических областей. В [2-3] рассматривались нестационарные задачи расчета оптимального обогрева простых геометрических областей: отрезок, прямоугольник и параллелепипед.

В данной работе разработаны метод и алгоритм решения задачи об оптимальном выборе плотности источников тепла на стержне таким образом, чтобы температура внутри рассматриваемой области находилась в заданных пределах. При этом источники тепла должны обеспечить заданный температурный режим минимальной суммарной мощности и температуру в заданном коридоре.

В прямоугольнике $D = \{a \le x \le b,\ 0 \le t \le T\}$ требуется определить функцию $f(x,t) \ge 0$, доставляющую при каждом $t \in [0,T]$ минимум линейному функционалу

$$J\{f\} = \int_a^b f(x,t)dx \to \min, \tag{1}$$

при следующих условиях:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\chi(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t),\ a < x < b,\ 0 < t \le T,$$
$$u(x,0) = u_0(x),\ a \le x \le b, \tag{2}$$
$$u(a,t) = \mu_1(t),\ 0 < t \le T,$$
$$u(b,t) = \mu_2(t),\ 0 < t \le T,$$
$$m(x,t) \le u(x,t) \le M(x,t),\ a \le x \le b,\ 0 \le t \le T. \tag{3}$$

Здесь $u = u(x,t)$ – температура стержня в точке x в момент времени t; $\chi(x,t) > 0$ – коэффициент теплопроводности; $u_0(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $m(x,t)$, $M(x,t)$ – заданные функции. Функции $m(x,t)$, $M(x,t)$ имеют смысл функций минимального и максимального профиля температуры в области D соответственно. Плотность источников тепла описывается квадратично интегрируемой функций $f(x,t)$ в пространстве $L_2(D)$. Решение данной краевой задачи можно получить в аналитическом виде с использованием методом Фурье [4].

Оператор $Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\chi(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ с начальным и краевым условием будет самосопряженным, положительно определенным в $L_2(D)$, а значит, он имеет ограниченный обратный оператор $G = L^{-1}$. С его помощью можно переформулировать задачу (1)-(3) как задачу на минимум функционала (1) при следующих условиях на плотность источников:

$$f(\cdot,\cdot) \in L_2(D),\ f(x,t) \ge 0,\quad m(x,t) \le (Gf)(x,t) \le M(x,t). \tag{4}$$

Введем в D равномерную по обеим переменным разностную сетку $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i = ih, t_j = j\tau),\ i = \overline{0, N_1},\ j = \overline{0, N_2}\}$ с шагами $h = (b-a)/N_1$, $\tau = T/N_2$.

Для получения однородных консервативных разностных схем воспользуемся интегро-интерполяционным методом. Для получения разностного уравнения рассмотрим интегральное уравнение баланса тепла на элементарной ячейке сетки на отрезке $x_{i-1/2} \le x \le x_{i+1/2}$ за промежуток времени $t_j \le t \le t_{j+1}$:

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x,t_{j+1})dx - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x,t_j)dx = \int_{t_j}^{t_{j+1}} W(x_{i-1/2},t)dt - \int_{t_j}^{t_{j+1}} W(x_{i+1/2},t)dt + \int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x,t)dxdt.$$

Здесь $W(x,t)$ – поток тепла, $W(x,t) = -\chi(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$.

Аппроксимируем входящие в уравнение баланса интегралы приближенными формулами [4]

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x,t_{j+1})dx \approx hu_i^{j+1};\ \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x,t_j)dx \approx hu_i^j;\ \int_{t_j}^{t_{j+1}} W(x_{i-1/2},t)dt \approx \tau W_{i-1/2}^{j+1};\ \int_{t_j}^{t_{j+1}} W(x_{i+1/2},t)dt \approx \tau W_{i+1/2}^{j+1};$$

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x,t)dxdt \approx \tau h f_i^{\,j+1},$$

$$W_{i+1/2}^{j+1} = -\chi_{i+1/2}^{j+1}\frac{u_{i+1}^{j+1}-u_i^{j+1}}{h};\quad W_{i-1/2}^{j+1} = -\chi_{i-1/2}^{j+1}\frac{u_i^{j+1}-u_{i-1}^{j+1}}{h}.$$

При этом $\chi_{i\pm1/2}^{j+1}$ и $f_i^{\,j+1}$ определяется равенствами

$$\chi_{i+1/2}^{j+1} = \chi\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}, t_{j+1}\right),\ \chi_{i-1/2}^{j+1} = \chi\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}, t_{j+1}\right),\ \chi_i^{j+1} = \chi(x_i,t_{j+1}),\ f_i^{\,j+1} = f(x_i,t_{j+1}).$$

Неявная консервативная разностная схема для задачи (2) имеет вид [4]:

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau} = \left[\chi_{i+1/2}^{j+1}\dfrac{u_{i+1}^{j+1}-u_i^{j+1}}{h^2} - \chi_{i-1/2}^{j+1}\dfrac{u_i^{j+1}-u_{i-1}^{j+1}}{h^2}\right] + f_i^{\,j+1},\ i=\overline{1,N_1-1},\ j=\overline{0,N_2-1}, \\ u_i^0 = u_0(x_i),\quad i=0,1,\ldots,N_1, \\ u_0^{j+1} = \mu_1(t_{j+1}),\quad j=0,1,\ldots,N_2-1, \\ u_{N_1}^{j+1} = \mu_2(t_{j+1}),\quad j=0,1,\ldots,N_2-1. \end{cases} \tag{5}$$

Рассмотрим расширенную матрицу системы:

$$A = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\tau}+\frac{\chi_{1\pm1/2}^{j+1}}{h^2}\right) & -\frac{\chi_{1+1/2}^{j+1}}{h^2} & 0 & \ldots & 0 \\ -\frac{\chi_{i-1/2}^{j+1}}{h^2} & \left(\frac{1}{\tau}+\frac{\chi_{i\pm1/2}^{j+1}}{h^2}\right) & -\frac{\chi_{i+1/2}^{j+1}}{h^2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & -\frac{\chi_{i-1/2}^{j+1}}{h^2} & \left(\frac{1}{\tau}+\frac{\chi_{i\pm1/2}^{j+1}}{h^2}\right) & -\frac{\chi_{i+1/2}^{j+1}}{h^2} \\ 0 & \ldots & 0 & -\frac{\chi_{(N_1-1)-1/2}^{j+1}}{h^2} & \left(\frac{1}{\tau}+\frac{\chi_{(N_1-1)\pm1/2}^{j+1}}{h^2}\right) \end{bmatrix}.$$

Получаем

$$G = A^{-1}.$$

Построим консервативную аппроксимацию (1)-(5) в виде задачи линейного программирования. Разобьём область D по x на N_1 и по t на N_2 равных частей: $D = \bigcup_{j=1}^{N_2}\bigcup_{i=1}^{N_1} D_i^j$, где $D_i^j = \{(x,t),\ x_{i-1}\le x\le x_i,\ t_{j-1}\le t\le t_j\},\ i=\overline{1,N_1},\ j=\overline{1,N_2}$. Обозначим через $S_{N_1}^{N_2}(D)$ подпространство пространства $L_2(D)$, в котором определены кусочно-постоянные функции вида $f(x,t) = f_i^{\,j},\ (x,t)\in D_i^j$ $(i=1,2,\ldots,N_1-1,\ j=1,2,\ldots,N_2)$. Введем в $S_{N_1}^{N_2}(D)$ базис, состоящий из функций $e_i^j(x,t)=1$, при $(x,t)\in D_i^j$ и $e_i^j(x,t)=0$, при $(x,t)\notin D_i^j$. Тогда $f(x,t)\approx\sum_{j=1}^{N_2}\sum_{i=1}^{N_1-1} f_i^{\,j}e_i^j(x,t)$. Пусть $g_{ik}^j = (Ge_k^j, e_i^j)$, $(m(x,t),e_i^j(x,t)) = m_i^j$, $(M(x,t),e_i^j(x,t)) = M_i^j$, $i=\overline{1,N_1-1}$, $k=\overline{1,N_1-1}$, $j=\overline{1,N_2}$, где $(\cdot,\cdot)$ − скалярное произведение в $L_2(D)$. Подставим выражение для $f(x,t)$ в (1) и скалярно умножаем неравенства (4) на $e_i^j(x,t)$ в $L_2(D)$. Получим задачу линейного программирования

$$J_j\{f\} = \sum_{i=1}^{N_1-1} (mesD_i^j)\, f_i^j \to \min,\ \ j = 1,2,\ldots,N_2,$$

$$m_i^j \le \sum_{k=1}^{N_1-1} g_{ik}^j f_k^j \le M_i^j,\ \ i = 1,2,\ldots,N_1-1,\ \ j = 1,2,\ldots,N_2, \qquad (6)$$

$$f_k^j \ge 0,\ \ k = 1,2,\ldots,N_1-1,\ \ j = 1,2,\ldots,N_2.$$

Решением задачи (6) численными методами находится функция $u_i^j = \sum_{k=1}^{N_1-1} g_{ik}^j f_k^j$, которая является решением краевой задачи (2) с f_k^j. При этом задача (6) решается симплекс-методом.

Литература

1. Осипов О.В. Оптимальное расположение источников тепла в неоднородной среде. Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова, 2013, № 1, –С. 154-158.
2. Хайиткулов Б.Х. Численное решение нестационарной задачи об оптимальном выборе источников тепла в стержне. Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2020, № 5(29), –С. 141-146.
3. Tukhtasinov M., Khayitkulov B.Kh. Numerical solution of the non-stationary problem of choosing the optimal placement of heat sources in a parallelepiped. Acta of Turin Polytechnic University in Tashkent, 2021, vol. 11, no. 1, pp. 39-44.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. 7-е изд., М.: Изд-во МГУ, Наука, 2004, 798 с.

ШРЁДИНГЕР ОПЕРАТОРИНИНГ УЗЛУКСИЗ СПЕКТРИ ҲАҚИДА

Халмухамедов А.Р., Эгамбердиев М.Р.
ЎзМУ

Квант механикаси ва ядро физикаси муаммоларини ҳал қилиш Шрёдингер операторининг спектрал хоссаларини чуқур ўрганишни тақозо қилади. Хусусан Шрёдингер операторининг узлуксиз спектрида хос сонларнинг мавжудлик масаласи муҳим математик масала ҳисобланади.

Қуйидаги

$$H = -\Delta + V(x) \qquad (1)$$

кўринишдаги стационар Шрёдингер операторини $L^2(\mathrm{R}^N)$ фазода қараймиз, бу ерда $V(x)$ потенциал. H операторнинг спектри тузилишини тадқиқ қилиш ҳам математик физика, ҳам квант механикаси учун долзарб масалалардан ҳисобланади. Шу сабабли, бу соҳада қатор илмий тадқиқотлар олиб борилган ва муҳим натижалар олинган. Улар хақидаги батафсил шарҳлар [1] адабиётда берилган. Берилган операторнинг фақат узлуксиз спектрга эга бўлиши ҳақидаги муҳим теоремалардан бири Путнам теоремаси бўлади.

Теорема (*Путнам*). H ва A чегараланган операторлар бўлсин. Фараз қилайлик

$$[H,iA]=C^*C \tag{2}$$

тенглик бажарилсин, бу ерда $Ker(C)=\{0\}$. У ҳолда H оператор соф абсолют спектрга эга, бунда $[H,iA]-$коммутатор.

Путнам теоремасидаги (2) тенгликнинг кучсиз варианти мавжуд, Бу вариантни Мурр баҳоси деб талқин қилинади.

Мурр баҳосини баён қилиш учун баъзи тушунчаларни киритамиз.

Гильберт фазосида берилган ўз-ўзига қўшма H операторга мос H_{+2} фазосини $\mathrm{D}(H)$ тўпламда $\|\psi\|_{+2}=\|(H+i)\psi\|$ норма орқали, H_{+1} фазосини эса $|H|^{\frac{1}{2}}$ оператор орқали киритамиз. H_{-1} ва H_{-2} фазолар мос равишда H_{+1}, H_{+2} фазоларига қўшма фазолар.

Таъриф. Ўз-ўзига қўшма бўлган H оператор Δ ораликда Мурр баҳосига бўйсунади дейилади, агар шундай ўз-ўзига қўшма A оператор мавжуд бўлиб

i) $\mathrm{D(A)}\bigcap H_{+2}$ тўплам H_{+2} фазода зич;

ii) $[H,iA]$ квадратик форма маъносида $\mathrm{D(A)}\bigcap H_{+2}$ тўпламда аниқланган, ва H_{+2} фазодан оператор H_{-1} гача чегараланган давоми бўлсин;

iii) шундай α мусбат сон ва K компакт оператор мавжуд бўлсинки ,

$$E_\Delta[H,iA]E_\Delta \geq \alpha E_\Delta + K \tag{3}$$

тенгсизлик бажарилсин. Бу ерда $E_\Delta = E_\Delta(H)-\Delta$ ораликка мос H операторнинг спектрал проектори.

Фараз қилайлик (1) тенглик билан аниқланган H операторнинг потенциали $V(x)=V(|x|)$ сферик симметрик бўлиб, унинг кўриниши қуйидагича бўлсин:

$$V(x)=\frac{1}{|x|^\tau},\quad 0<\tau\leq 1. \tag{4}$$

Ушбу ишда олинган асосий натижа қуйидагича:

Теорема. $V(x)$ потенциал (4) шартни қаноатлантирсин. У ҳолда (1) тенглик билан аниқланган H оператор учун Мурр баҳоси ўринли.

Теореманинг исботи икки босқичда бажарилади. Биринчи босқичда $V(-\Delta+I)^{-1}$ операторнинг компактлиги исботланади. Иккинчи босқичда эса $(-\Delta+I)^{-1}x\cdot\nabla V(-\Delta+I)^{-1}$ операторнинг компакт бўлиши кўрсатилади..

Адабиётлар

1. Х.Цикон, В Фрезе, В. Кирш, Б.Саймон. Операторы Шрёдингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии. Москва «Мир» 1990, -408 С.

2. Putnam C R. Commutation Properties of Hilbert Space Operators and Related Topics (Springer, Berlin, Heidelberg 1967).

3. Mourre E. Absence of singular continuous spectrum for certain selfadjoint operators. Commun. Math. Phys. 78, 391—408, 1981.

4. Kato T. Smooth operators and commutators. Stud. Math. 31, 535—546, 1968.
5. Perry P., Sigal I. M., Simon B. Spectral analysis of N-body Schrodinger operators. Ann. Math. 114, 519—567, 1981.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Хасанов М.М., Балтаева И. И., Хайитбоев И.И.
Ургенчский государственный университет
hmuzaffar@mail.ru, iroda-b@mail.ru

В работе [1] установлена полная интегрируемость модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза (мКдФ), в классе быстроубывающих функций. В работах [2,3] уравнение мКдФ исследована в классе конечнозонных функций.

В этой работе изучается следующее уравнение мКдФ

$$p_t = 6p^2 p_x - p_{xxx}, \quad t>0, \ x\in R. \tag{1}$$

Требуется найти решение $p(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$p(x,t)\big|_{t=0} = p_0(x), \quad p(x+\pi,t)\equiv p(x,t)\in C_x^3(t\ge 0)\cap C_t^1(t>0), \tag{2}$$

где $p_0(x)$ заданная действительная функция. При изучении задачи (1)+(2) используется следующий оператор Дирака

$$L(t)y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x,t) & 0 \\ 0 & -p(x,t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ x\in R. \tag{3}$$

Обозначим через $s(x,\lambda,t) = (s_1(x,\lambda,t), s_2(x,\lambda,t))^T$ решение уравнения (3), удовлетворяющее начальному условию $s(0,\lambda,t) = (0,1)^T$.

Спектр оператора (3) состоит из следующего множества $E = \bigcup\limits_{n\in Z}[\lambda_{2n}, \lambda_{2n+1}]$. Собственные значения $\xi_n(t)$, $n\in Z$ задачи Дирихле $y_1(0)=0$, $y_1(\pi)=0$ для системы (3) вместе со знаками $\sigma_n(t) = sign\{s_2(\pi,\xi_n(t),t) - 1/s_2(\pi,\xi_n(t),t)\}$, $n\in Z$ называются спектральными параметрами задачи (3).

Теорема. Пусть $p(x,t)$ является решением задачи (1)+(2). Тогда спектр оператора Дирака (3) с коэффициентом $p(x+\tau,t)$ не зависит от τ и t, а спектральные параметры $\xi_n = \xi_n(\tau,t), n\in Z$ удовлетворяют системе уравнений Дубровина-Трубовица

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi) \times \{ p_{xx}(\tau,t) - 2p^3(\tau,t) - 2\xi_n p^2(\tau,t) - 4\xi_n^2 (p(\tau,t) + \xi_n)\},$$

$n \in Z$ (4) где $h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n(\tau) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(\tau))} \cdot \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n(\tau))(\lambda_{2k} - \xi_n(\tau))}{(\xi_k(\tau) - \xi_n(\tau))^2}}$.

Знак $\sigma_n(\tau,t) \equiv \pm 1$ меняется при каждом столкновении $\xi_n(\tau,t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(\tau,t)\big|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \ \ \sigma_n(\tau,t)\big|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau) \ , \quad n \in Z, \tag{5}$$

где $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$ $n \in Z$ - спектральные параметры оператора Дирака соответствующие коэффициенту $p_0(x+\tau)$.

Учитывая формулы следов

$$p(\tau,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau,t) \right)$$

$$p_{xx} = -4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n^2(\xi)\xi_n - 4 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau,t) \right) \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n^2(\xi) +$$

$$+2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau,t) \xi_n \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial \tau}$$

систему (4) можно переписать в замкнутой форме.

Следствие 1. Эта теорема дает метод решения задачи (1)+(2). Для этого сначала найдем спектральные данные λ_n, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \in Z$, соответствующие коэффициенту $p_0(x+\tau)$. Далее, решая задачу Коши (4)+(5) находим $\xi_n(\tau,t)$, $n \in Z$. После этого, по формуле $p(\tau,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau,t) \right)$, определяем $p(x,t)$.

Следствие 2. Из результатов работы [4] следует, что если начальная функция $p_0(x)$ является действительной аналитической функцией, то и решение $p(x,t)$ является действительной аналитической функцией по x.

Следствие 3. Используя результаты работы [5], выводим, что если $\pi/2$ является периодом начальной функции $p_0(x)$, то и решение $p(x,t)$ является $\pi/2$-периодическим по x.

Следствие 4. Используя результаты работы [6], выводим, что если $\pi/2$ является антипериодом начальной функции $p_0(x)$, то и решение $p(x,t)$ является $\pi/2$-антипериодическим по x.

Литература

1. Wadati M. *The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation* // J. Phys. Soc. Japan. 1972. - V. 32. P. 1681.
2. Итс А.Р. *Точное интегрирование в римановых θ-функциях нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза.* - Дисс. канд. физ.-мат. наук, Л.: ЛГУ, 1977.
3. Смирнов А.О. *Эллиптические решения нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза* // Мат. сб., 1994. - Т. 185. N 8. - С. 103-114.
4. Хасанов А.Б., Ибрагимов А.М. *Об обратной задаче для оператора Дирака с периодическим потенциалом* // УзМЖ. 2001. - N 3-4. С. 48-55.
5. Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. *Аналог обратной теоремы Г.Борга для оператора Дирака* // УзМЖ. 2000. - N 3. - С. 40-46.
6. Currie S., Roth T., Watson B. Borg's periodicity theorems for first-order self-adjoint systems with complex potentials // Proceedings of the Edinburgh mathematical society, 2017. - v. 60. - P. 615-633.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ МКДФ В КЛАССЕ БЫСТРОУБЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Хоитметов У.А., Юлдашев С.

Метод обратной задачи рассеяния ведет свое начала с работы Гарднера, Грина, Крускала и Миура [1]. Им удалось найти глобальное решение задачи Коши для уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ), сведением ее к обратной задачи рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля. В работе [4] П.Лакс показал универсальность метода обратной задачи рассеяния и обобщил уравнение КдФ, введя понятие высшего уравнения КдФ. Вскоре М.Вадати [2] предложил метод решения модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза (мКдФ).

Нагруженными дифференциальными уравнениями в литературе принято называть уравнения, содержащие в коэффициентах или в правой части какие-либо функционалы от решения, в частности значения решения или его производных на многообразиях меньшей размерности. Среди работ, посвященных нагруженным уравнениям, следует особо отметить работы А.М. Нахушева [5], А.И. Кожанова [6] и других.

В данной работе изучается нагруженное модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза, а именно, рассмотрим следующее уравнение:

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} + \gamma(t)u(0,t)u_x(x,t) = 0 \tag{1}$$

Уравнение (1) рассматривается при начальном условии

$$u_{t=0} = 0 \tag{2}$$

где начальная функция $u_0(x)$ $\left(-\infty < x < \infty\right)$ обладает следующими свойствами:

$$1)\ \int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|x|\right)|u_0(x)|dx < \infty; \tag{3}$$

2) Оператор $L(0) = i\begin{pmatrix} \dfrac{d}{dx} & -u_0(x) \\ -u_0(x) & -\dfrac{d}{dx} \end{pmatrix}$ имеет ровно $2N$ простых собственных значений $\xi_1(0), \xi_2(0), ..., \xi_{2N}(0)$.

Пусть функция $u(x,t)$ обладает требуемой гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x \to \pm\infty$ т.ч.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left(1+|x|\right)|u(x,t)| + \sum_{k=1}^{3}\left|\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k}\right|\right)dx < \infty. \tag{4}$$

Основная цель данной работы – получить представления для решения $u(x,t)$ задачи (1)-(4) в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора $L(t)$.

Система уравнений

$$LY = \xi Y,\ -\infty < x < \infty \tag{5}$$

обладает решениями Йоста со следующими асимптотиками

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x,\xi) &\sim \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\xi x} \\ \bar{\varphi}(x,\xi) &\sim \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}e^{i\xi x} \end{aligned}\right\} \text{ при } x \to -\infty, \qquad \left.\begin{aligned} \psi(x,\xi) &\sim \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{i\xi x} \\ \bar{\psi}(x,\xi) &\sim \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\xi x} \end{aligned}\right\} \text{ при } x \to \infty.$$

(Отметим, что $\bar{\varphi}$ не является комплексным сопряжением к φ). При действительных ξ, пары вектор-функций $\{\varphi, \bar{\varphi}\}$ и $\{\psi, \bar{\psi}\}$ являются парами линейно независимых решений для системы уравнений (5). Поэтому имеют место соотношения

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= a(\xi)\bar{\psi} + b(\xi)\psi, \\ \bar{\varphi} &= -\bar{a}(\xi)\psi + \bar{b}(\xi)\bar{\psi} \end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{aligned} \psi &= -a(\xi)\bar{\varphi} + \bar{b}(\xi)\varphi, \\ \bar{\psi} &= \bar{a}(\xi)\varphi + b(\xi)\bar{\varphi} \end{aligned}\right\}, \tag{6}$$

где $a(\xi) = W\{\varphi, \psi\}$, $b(\xi) = W\{\bar{\varphi}, \psi\}$. Функция $a(\xi)$ $\left(\bar{a}(\xi)\right)$ аналитически продолжается в верхнюю (нижнюю) полуплоскость и имеет там конечное число ξ_k $\left(\bar{\xi}_k\right)$, причём ξ_k $\left(\bar{\xi}_k\right)$ является собственным значением оператора L, так что

$$\varphi\left(x,\xi_k\right) = C_k\psi\left(x,\xi_k\right) \qquad \left(\bar{\varphi}\left(x,\bar{\xi}_k\right) = \bar{C}_k\bar{\psi}\left(x,\bar{\xi}_k\right)\right),\ k = 1,2,...,N.$$

Требование отсутствия у оператора L спектральных особенностей означает отсутствие действительных нулей у функций $a(\xi)$ и $\overline{a}(\xi)$.

Справедливы следующие равенства [3]

$$\overline{a}(\xi)=a(-\xi),\quad \overline{b}(\xi)=b(-\xi),\quad \overline{\xi}_k=-\xi_k,\ \overline{C}_k=C_k,\ k=1,2,...,N.$$

Хорошо известно, что для решении $\psi(x,\xi)$ справедливо следующее интегральное представление

$$\psi(x,\xi)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{i\xi x}+\int_x^\infty K(x,s)e^{i\xi s}ds, \tag{7}$$

где $K(x,s)=\begin{pmatrix}K_1(x,s)\\K_2(x,s)\end{pmatrix}$. В представлении (7), ядро $K(x,y)$ не зависят от ξ и связаны с потенциалом $u(x)$ с помощью равенства

$$u(x)=-2K_1(x,x). \tag{8}$$

Компоненты ядра $K(x,y)$ при $y>x$ являются решениями системы интегральных уравнений Гельфанда-Левитана-Марченко

$$\begin{cases}K_2(x,y)+\int_x^\infty K_1(x,s)F(s+y)ds=0,\\ -K_1(x,y)+F(x+y)+\int_x^\infty K_2(x,s)F(s+y)ds=0,\end{cases}$$

где

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r^+(\xi)\,e^{i\xi x}d\xi-i\sum_{j=1}^{N}C_j e^{i\xi_j x},$$

при этом потенциал $u(x)$ находится по формуле (8).

Определение 1. Набор величин

$$\left\{r^+(\xi)\equiv\frac{b(\xi)}{a(\xi)},\quad \xi_k,\ C_k,\quad k=1,2,...,N\right\}$$

называются данными рассеяния для системы уравнений (5).

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. Если функция $u(x,t)$ является решением задачи (1) - (4), то данные рассеяния оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x,t)$ меняются по t следующим образом

$$\frac{dr^+}{dt}=\left(8i\xi^3-2i\xi\gamma(t)u(0,t)\right)r^+,\quad \operatorname{Im}\xi=0,$$

$$\frac{dC_n}{dt}=\left(8i\xi_n^{\,3}-2i\xi\gamma(t)u(0,t)\right)C_n(t),\ \frac{d\xi_n}{dt}=0,\quad n=1,2,...,N.$$

Полученные равенства полностью определяют эволюцию данных рассеяния, что позволяет применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи Коши (1) - (4).

Литература

1. Gardner C.S., Greene I.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for Solving the Korteweg-de Vries Equation// Phys. Rev. Lett. 1967, №19, P.1095-1097.
2. Wadati M. The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation // J.Phys. Soc. Japan. – Japan, 1972 // - v.32. – pp.1681.
3. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. – М.:Мир, 1987 -479 с.
4. Lax P.D. Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves// Comm. Pure and Appl. Math. 1968 **21**, №5, P.467-490.
5. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М. Высшая школа, 1995.
6. Кожанов А.И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004, Т. 44, №4, С.694–716.
7. Хасанов А.Б., Уразбоев Г.У. Метод решения уравнения мКдФ с самосогласованным источником // Узб. матем. журнал, 2003. № 1. С. 69-75.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ НАГРУЖЕННОГО ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА В КЛАССЕ БЫСТРОУБЫВАЮЩИХ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

[1]Хоитметов У.А., [2]Мусаева Ф.
[1]Хорезмское отделение института математики,
[2]УрГУ

Метод обратной задачи рассеяния ведет свое начала с работы Гарднера, Грина, Крускала и Миуры [1]. Им удалось найти глобальное решение задачи Коши для уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ), сведением ее к обратной задачи рассеяния для самосопряженного оператора Штурма-Лиувилля на всей прямой. Эта обратная задача рассеяния впервые была решена в работе Л.Д. Фаддеева [2], затем в работах В.А. Марченко [3], Б.М. Левитана [4] и др. Далее, П.Лакс [5] впервые заметил универсальность метода обратной задачи рассеяния и обобщил уравнение КдФ, введя понятие высшего уравнения КдФ.

Нагруженными дифференциальными уравнениями в литературе принято называть уравнения, содержащие в коэффициентах или в правой части какие-либо функционалы от решения, в частности значения решения или его производных на многообразиях меньшей размерности. Исследование таких уравнений представляет интерес как с точки зрения построения общей теории дифференциальных уравнений, так и с точки зрения приложений. Среди работ, посвященных нагруженным уравнениям, следует особо отметить работы А.М. Нахушева [6], А.И. Кожанова [7] и других.

Пусть

$$H = -\frac{1}{2}\frac{d^3}{dx^3} + 2u\frac{d}{dx} + u',$$

где $u = u(x,t)$, а штрих означает частную производную по x. Согласно [4], существуют полиномы P_k (от u и производных u по x) такие, что

$$HP_k = P'_{k+1}.$$

Так, например

$$P_0 = -\frac{1}{2}, \quad P_1 = -\frac{1}{2}u, \quad P_2 = \frac{1}{4}u_{xx} - \frac{3}{4}u^2, \quad P_3 = -\frac{1}{8}u_{xxxx} + \frac{5}{4}uu_{xx} + \frac{5}{8}(u_x)^2 - \frac{5}{4}u^3,$$

и т.д.

Положим

$$L(t) \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + u(x,t).$$

Оператор (см. [4])

$$B_q = \sum_{k=0}^{q}\left(\frac{1}{2}P'_k - P_k\frac{d}{dx}\right)(2L)^{q-k}$$

удовлетворяет соотношению Лакса $[B_q, L] = B_qL - LB_q = -P'_{q+1}$. Пусть $c_0, c_1, c_2, ..., c_p$ произвольные действительные числа. Введем следующие обозначения

$$X_q = -P'_{q+1}, \; Y_p = \sum_{q=0}^{p} c_q B_q, \quad Z_p = \sum_{q=0}^{p} c_q X_q.$$

Тогда, справедливо равенство $[Y_p, L] = Z_p$. Уравнение

$$u_t = Z_p(u),$$

называется общим уравнением КдФ. В частности, при $p = 1, \; c_0 = 0, \; c_1 = 4$ и $p = 2, \; c_0 = 0, \; c_1 = 0, \; c_2 = 8$ соответственно имеем

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \; u_t = u_{xxxxx} - 20u_xu_{xx} - 10uu_{xx} + 30u^2u_x.$$

Рассмотрим нагруженное общее уравнение КдФ вида

$$u_t = Z_p(u) + \gamma(t)F(u(0,t))u_x, \tag{1}$$

где $F(u(0,t))$ - некоторый многочлен от $u(0,t)$ и $\gamma(t)$ - заданная непрерывная функция.

Уравнение (3) рассматривается при начальном условии

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R, \tag{2}$$

где начальная функция $u_0(x)$ является комплекснозначной и обладает свойствами:

1) для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_0(x)| e^{\varepsilon|x|} dx < \infty, \tag{3}$$

2) оператор $L(0)=-\frac{d^2}{dx^2}+u(x,0)$ имеет ровно N комплексных собственных значений $\lambda_1(0),\lambda_2(0),...,\lambda_N(0)$ с кратностями $m_1(0),m_2(0),...,m_N(0)$ и не имеет спектральных особенностей.

Пусть функция $u(x,t)=\mathrm{Re}u(x,t)+i\,\mathrm{Im}u(x,t)$ обладает достаточной гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x\to\pm\infty$, т.ч.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left|\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j}\right|e^{\varepsilon|x|}\right)dx<\infty,\quad j=0,1,2,3\,. \tag{4}$$

Основная цел данной работы является нахождение уравнения динамики по времени t данных рассеяния несамосопряженного оператора L(t) с потенциалом являющимся решением нагруженного общего уравнения КдФ в классе быстроубывающих комплекснозначных функций.

2. Рассмотрим уравнение

$$L(0)y:=-y''+u_0(x)y=k^2y,\quad x\in R\,, \tag{5}$$

где потенциал $u_0(x)$ предполагается комплекснозначной и удовлетворяет условию (3). В этом пункте будут приведены необходимые для дальнейшего изложения сведения, касающиеся прямой и обратной задачи рассеяния для уравнения (5). Нетрудно проверить, что следующие функции являются решениями уравнения (5) с условиями на бесконечности при $\mathrm{Im}\,k>-\varepsilon/2$:

$$e_+(x,k)=e^{ikx}+\overline{=}o(1)\ \text{ при }\ x\to\infty,\qquad e_-(x,k)=e^{-ikx}+\overline{=}o(1)\ \text{ при }\ x\to-\infty. \tag{6}$$

Эти решения называется решениями Йоста и для них справедлива следующие представления

$$e_\pm(x,k)=e^{\pm ikx}\pm\int_x^{\pm\infty}K_\pm(x,y)e^{\pm iky}dy\,. \tag{7}$$

Эти решения, при выполнении условии (3) существуют, единственны и голоморфны по k в полуплоскости $\mathrm{Im}\,k>-\varepsilon/2$. Кроме того, ядра $K_\pm(x,y)$ связаны с потенциалом $u_0(x)$ следующим образом:

$$u_0(x)=\mp2\frac{dK_\pm(x,x)}{dx}\,. \tag{8}$$

Обозначим через $\omega(k)$ и $\nu(k)$ вронскианы

$\omega(k)=e_-(x,k)e_+'(x,k)-e_-'(x,k)e_+(x,k)$, $\nu(k)=e_+(x,-k)e_-'(x,k)-e_-(x,k)e_+'(x,-k)$.

Функция $\omega(k)$ аналитически продолжается в полуплоскость $\mathrm{Im}\,k>-\varepsilon/2$ и обладает асимптотикой

$$\omega(k)=2ik\left[1+O\left(1/k\right)\right],\quad |k|\to\infty, \tag{9}$$

равномерно в каждой полуплоскости $\mathrm{Im}\,k\ge\eta,\ \eta>-\varepsilon/2$. Из асимптотики (9) и аналитичности $\omega(k)$ следует, что в полуплоскости $\mathrm{Im}\,k\ge0$ функция $\omega(k)$ имеет конечное число нулей (в общем случае кратных). Требование

отсутствия спектральных особенностей оператора $L(0)$ означает отсутствие действительных нулей у функции $\omega(k)$, т.е. $\omega(k)\neq 0$, $k\in R$. Пусть невещественные нули $\omega(k)$ есть $k_1,k_2,...,k_N$ $(\operatorname{Im}k_j>0, j=\overline{1,N})$, тогда $\lambda_j=k_j^2$, $j=\overline{1,N}$ собственные значения оператора $L(0)$. Кратность корня k_j уравнения $\omega(k)=0$ обозначим через m_j, $j=\overline{1,N}$.

Существуют так называемые нормировочные цепочки чисел $\{\chi_0^j,\chi_1^j,...,\chi_{m_j-1}^j\}$ такие, что имеют место соотношения

$$\frac{1}{s!}\left(\left(\frac{d}{dk}\right)^s f_-(x,k)\right)_{k=k_j}=\sum_{\nu=0}^{s}\chi_{s-\nu}^j\frac{1}{\nu!}\left(\left(\frac{d}{dk}\right)^\nu f_+(x,k)\right)_{k=k_j},\ s=\overline{0,m_j-1},\ j=\overline{1,N},$$

при этом $\chi_0^j\neq 0$.

Известно (см. [8]]), что ядро $K_+(x,y)$ оператора преобразования (7) удовлетворяет интегральному уравнению Гельфанда-Левитана-Марченко

$$K_+(x,y)+F_+(x+y)+\int_x^\infty K_+(x,s)F_+(s+y)ds=0,\ x\le y,$$

где

$$F_+(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(k)e^{ikx}dk+\sum_{j=1}^{N}\sum_{\nu=0}^{m_j-1}\chi_{m_j-\nu-1}^j\frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{dk^\nu}\left(\frac{2k(k-k_j)^{m_j}}{w(k)}e^{ikx}\right),$$

$$S(k):=\frac{\nu(k)}{\omega(k)},$$

при этом потенциал $u_0(x)$ находится по формуле (8).

Определение. Набор $\{S(k),\lambda_j,\chi_0^j,...,\chi_{m_j-1}^j,\ j=\overline{1,N}\}$ называется данными рассеяния для оператора $L(0)$.

Нахождение комплекснозначного потенциала $u_0(x)$ по данным рассеяния называют обратной задачей.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. Если функция $u(x,t)$ являются решением задачи (1)-(4), то данные рассеяния оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x,t)$ меняются по t следующим образом

$$\frac{\partial S(k,t)}{\partial t}=\left[ik\sum_{l=0}^{p}c_l\left(2k^2\right)^l+2ik\gamma(t)F(u(0,t))\right]S(k,t),\quad \left(|\operatorname{Im}k|<\varepsilon/2\right)$$

$$\lambda_n(t)=\lambda_n(0),$$

$$\frac{\partial\chi_r^n}{\partial t}=i\left(\sum_{q=0}^{p}c_q2^qk_n^{2q+1}+2k_n\gamma(t)F(u(0,t))\right)\chi_r^n$$

$$+i\left(\sum_{q=0}^{p}c_q2^q(2q+1)k_n^{2q}+2\gamma(t)F(u(0,t))\right)\chi_{r-1}^n+i\sum_{l=2}^{r}\left[\sum_{q=0}^{p}c_q2^q\frac{1}{l!}\frac{(2q+1)!}{(2q+1-l)!}k_n^{2q+1-l}\right]\chi_{r-l}^n.$$

Полученные равенства полностью определяют эволюцию данных рассеяния, что позволяет применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи (1)-(4).

Литература

1. *Gardner C.S., Greene I.M., Kruskal M.D., Miura R.M.* Method for Solving the Korteweg-de Vries Equation// *Phys. Rev. Lett.* 1967, №19, P.1095-1097.
2. *Фаддеев Л.Д.* Свойства S-матрицы одномерного уравнения Шредингера// *Труды института им. В.А.Стеклова*. 1964, 73, С.314-336.
3. *Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения*. Киев, Наукова думка, 1977.
4. *Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля*. М.Наука, 1984.
5. *Lax P.D.* Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves// *Comm. Pure and Appl. Math.* 1968 **21**, №5, P.467-490.
6. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их приложения// *Дифференциальные уравнения.* 1983, Т. 19, №1, С.86-94.
7. *Кожанов А.И.* Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи// *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2004, Т. 44, №4, С.694-716.
8. *Блащак В.А.* Аналог обратной задачи теории рассеяния для несамосопряженного оператора. I// *Дифференциальные уравнения*. 1968, Т. 4, №8, С.1519-1533.
9. Hoitmetov U.A. Integration of the loaded Korteweg-de Vries equation in the class of rapidly decreasing complex-valued functions // Uzbek Math. Journal, 2020, №4 , pp.44-52.

ЛАПЛАС АЛМАШТИРИШИ ЁРДАМИДА БАЪЗИ ПАРАБОЛИК ФИЛЬТРАЦИЯ ТЕНГЛАМАЛАРИНИ ЕЧИШ

Ҳушвақтова Э.О.
ЎзМУ

Фильтрация жараёнларининг математик моделини тузишда хусусий ҳосилали чизиқсиз тенгламалар келиб чиқади. Чизиқсиз дифференциал тенгламаларнинг чизиқли қисмини ажратилганда кўп ҳолларда параболик тенгламалар ҳосил қилинади. Математик физика курсидан маълумки чегараланган соҳаларда хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни ўзгарувчиларни ажратиш, яъни Фурье усулида, ечиш қулай ҳисобланади, бироқ тенгламаларни Фурье усулида ечганимизда ечим қидирилаётган тўплам тор синф бўлади, масалан функцияларнинг абсолют жиҳатдан интегралланувчи бўлиши зарурий шартлиги келиб чиқади. Бу эса функцияларга чегаранлиги каби шартларни юклашга олиб келади. Амалий масалаларни ечишда функциялар чексизликда чегараланмаган бўлиши

мумкин. Фурье усули билан бир қаторда математик физика тенгламаларини ечишда Лаплас усули яъний операцион ҳисоб кенг қўлланилади.

Ушбу ишда бир нечта параболик фильтрация ва диффузия тенгламаларини Лаплас усули ёрдамида ечиш усули келтирилган. Асосий олинган натжаларни келтирамиз.

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ 0<x<l,\ t>0 \tag{1}$$

$$u(x,t)\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad 0<x<l, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l}=0,\ t>0 \tag{3}$$

(1)-(3) масалани ечиш учун Лаплас алмаштиришини қўллаймиз. Бунинг учун (1) тенгламанинг иккала қисмини e^{-pt} функцияга кўпайтириб $[0;+\infty)$ ораликда интеграллаймиз. Агар $\bar{u}(x,p)=\int\limits_0^{+\infty}u(x,t)e^{-pt}dt$ белгилашни киритсак ва бўлаклаб интегралласак ҳамда (2) бошланғич (3) чегаравий шартларни инобатга олсак (1) тенгламани қуйидаги оддий дифференциал тенгламага келтирамиз:

$$\frac{d^2\bar{u}(x,p)}{dx^2}-\frac{p}{a^2}\bar{u}(x,p)=-\frac{1}{a^2}\varphi(x), \tag{4}$$

$$\left.\frac{d\bar{u}(x,p)}{dx}\right|_{x=0}=\left.\frac{d\bar{u}(x,p)}{dx}\right|_{x=l}=0. \tag{5}$$

Аввал (4) тенгламанинг бир жинсли қисмини ечиб оламиз. $\lambda=\frac{p}{a^2}$ белгилашни киритсак бир жинсли тенгламанинг

$$\bar{u}(x,p)=A(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}+B(p)e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

кўринишдаги умумий ечими оламиз. Энди (5) чегаравий шартлардан фойдаланиб (4) тенгламанинг хос сонлари ва хос функцияларини топамиз.

$$\left.\frac{d\bar{u}(x,p)}{dx}\right|_{x=0}=\frac{\sqrt{p}}{a}\left(-A(p)+B(p)\right)=0,$$

$$\left.\frac{d\bar{u}(x,p)}{dx}\right|_{x=0}=\frac{\sqrt{p}}{a}\left(-A(p)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}l}+B(p)\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}l}\right)=0.$$

Бу система нолдан фарқли ечимга эга бўлиши учун системанинг асосий детерминанти нолга тенг бўлиши зарур ва етарли. Демак асосий детерминанти ҳисобласак

$$sh\left(\frac{\sqrt{p}}{a}l\right)=0 \qquad (6)$$

тенгламани оламиз. Бу тенгламанинг илдизларини ҳисобласак $\sqrt{p_k}=\frac{a\pi ki}{l}$ $k=0,1,3,...$ илдизларни топамиз. Хос функциялар эса $\varphi_k(x)=sh\left(\frac{ak\pi i}{l}x\right)$ бўлади. У ҳолда (4) тенгламанинг ечими қуйидаги

$$\bar{u}(x,p)=-\frac{1}{a^2}\int_0^l \bar{g}(\mathrm{x},\xi,\mathrm{p})\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

кўринишга эга бўлади, бу ерда $\bar{g}(x,\xi,p)$ функция (4) тенгламанинг ўнг томонида турган иккинчи тартиб оддий дифференциал операторнинг Грин функцияси, яъни тескари операторнинг ядроси. $\bar{g}(x,\xi,p)$ функция қўйидаги кўринишга эга

$$\bar{g}(x,\xi,\mathrm{p})=\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(\mathrm{x})\varphi_k(\xi)}{\lambda(p)-\lambda_k},$$

бу ерда $\lambda=\frac{\sqrt{p}}{a}$, $\lambda_k=\sqrt{p_k}$. Агар $\bar{g}(x,\xi,p)$ функциянинг аслини топсак ва уни $g(x,\xi,\mathrm{t})$ каби белгиласак (4) тенгламанинг ечими

$$u(x,\mathrm{t})=-\frac{1}{a^2}\int_0^l g(\mathrm{x},\xi,\mathrm{t})\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

қуйидаги кўринишда бўлади. $g(x,\xi,\mathrm{t})$ функциянинг аниқ кўриниши Лаплас алмаштиришига тескари бўлган

$$g(x,\xi,\mathrm{t})=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+j\infty}\bar{g}(x,\xi,\mathrm{p})\mathrm{e}^{pt}\,dp$$

алмаштириш ёрдамида топилади. Асл ядро $g(x,\xi,\mathrm{t})$ функцияни топишда комплекс анализнинг чегирмаларни ҳисоблаш усулларидан фойдаланамиз.

Худди шундай параболик фильтрация масалалари билан боғлиқ бошқа тенгламаларни ҳам шу усулда ечиш мумкин, ечимнинг аналитик ифодасини аниқ ёзиш мумкин.

Адабиётлар

1. Шестаков В.М.Динамика подземних вод. Изд-во МГУ, 1973.-327С.
2. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грукнтовых вод. Наука М.,1977, -664 С.

3. Лаврентев М.А.,Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. М.,Наука М., 1973. -736 С.
4. Диткин В.А. Прудников А.П. Интегральные преобразование и операционное исчисление. Физ.Мат.Лит. М., -524С.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ТРЕМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

Холбеков Ж.А.
Ташкентский государсвенный технический университет
xolbekovja@mail.ru

Краевые задачи для нагруженных уравнений второго порядка гиперболического, параболического, гиперболо-параболичесского и эллиптико-параболического типов исследованы в работах [1-4]. В работе [5] изучено аналог задачи Трикоми для параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа.

Настоящая работа посвящена постановке и изучению локальной краевой задаче для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа, содержащий в себе след и производный от искомой функции.

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xx}-u_y+\alpha u_x(x,0) \quad \alpha>0 & (x,y)\in\Omega_0, \\ u_{xx}-u_{yy}-\mu_j signy H_j\left[u(x,y)\right], & (x,y)\in\Omega_j, (j=\overline{1,3}), \end{cases} \tag{1}$$

где μ_j $(j=\overline{1,3})$ – заданные действительные числа, причем

$$\mu_j\geq 0,\ (j=\overline{1,3}), \tag{2}$$

$$H_j\left[u(x,y)\right]=\begin{cases} u(x,0) & при \quad j=1, \\ u(0,y) & при \quad j=2, \\ u(1,y) & при \quad j=3. \end{cases} \tag{3}$$

Пусть Ω_0 – область, ограниченная отрезками AB, BC, CD, DA прямых $y=0$, $x=1$, $y=1$, $x=0$ соответственно. Ω_1 – характеристический треугольник, ограниченный отрезком AB оси Ox и двумя характеристиками $AN: x+y=0$, $BN: x-y=1$ уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $B(1,0)$, пересекающимися в точке $N(0{,}5;-0{,}5)$; Ω_2 – характеристический треугольник, ограниченный отрезком AD оси Oy и

двумя характеристиками $AK: x+y=0$, $DK:\ y-x=1$ уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $D(0,1)$, пересекающимися в точке $K(-0{,}5;\,0{,}5)$; Ω_3 – характеристический треугольник, ограниченный отрезком BC и двумя характеристиками $CM: x+y=2$, $BM:\ x-y=1$ уравнения (1), выходящими из точек $B(1,0)$ и $C(1,1)$, пересекающимися в точке $M(1{,}5;\,0{,}5)$

Введем обозначения:

$$\Omega=\sum_{j=0}^{3}\Omega_j\cup J_1\cup J_2\cup J_3,\quad J_1=\{(x,y):0<x<1,\ y=0\},$$

$$J_2=\{(x,y):0<y<1,\ x=0\},\quad J_3=\{(x,y):0<y<1,\ x=1\},$$

$$\Omega_1^*=\Omega_1\cup J_1\cup\Omega_0,\quad \Omega_2^*=\Omega_2\cup J_2\cup\Omega_0\cup J_3\cup\Omega_3,$$

$$W=\{u:u\in C(\bar{\Omega}),\ u_y\in C(\Omega_2^*)\cap C(\Omega_0\cup AB)\cap C(\Omega_1\cup AB),$$

$$u_x\in C(\Omega_1^*)\cap C(\Omega_0\cup AD\cup BC)\cap C(\Omega_2\cup AD)\cap C(\Omega_3\cup BC)\}. \quad (3)$$

Определение. Решение уравнения (1) при $y\neq 0,\ \ x\neq 0,\ x\neq 1$ будем называть регулярным, если функция $u(x,y)$ обладает непрерывными производными, входящими в уравнение (1).

Задача. AT_2 Найти регулярное решение уравнения (1) в области Ω из класса W, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x,y)\big|_{NB}=\varphi_1(x),\quad \frac{1}{2}\le x\le 1, \quad (4)$$

$$u(x,y)\big|_{AK}=\varphi_2(y),\quad 0\le y\le\frac{1}{2}, \quad (5)$$

$$u(x,y)\big|_{MC}=\varphi_3(y),\ \frac{1}{2}\le y\le 1, \quad (6)$$

а на линиях изменения типа условиям склеивания

$$u_y(x,-0)=a_1(x)u_y(x,+0)+b_1(x),\quad (x,0)\in J_1, \quad (7)$$

$$u_x(-0,y)=a_2(y)u_x(+0,y)+b_2(y),\quad (0,y)\in J_2, \quad (8)$$

$$u_x(1-0,y)=a_3(y)u_x(1+0,y)+b_3(y),\quad (1,y)\in J_3, \quad (9)$$

где $\varphi_j(t),\ a_j(t),\ b_j(t)\ (j=\overline{1,3})$ – заданные функции, причем $\varphi_1(1)=0,$ $\varphi_2(0)=0,$

$$a_1(x),\ b_1(x)\in C\left(\overline{J}_1\right)\cap C^1\left(J_1\right),\quad a_1(x)>0,\ \forall x\in\overline{J}_1, \tag{10}$$

$$a_j(y),\ b_j(y)\in C\left(\overline{J}_j\right)\cap C^2\left(J_j\right),\quad a_j(y)\neq 0,\ \forall y\in\overline{J}_j,\ (j=2,3), \tag{11}$$

$$\varphi_1(t),\ \varphi_3(t)\in C^1\left[\frac{1}{2},1\right]\cap C^2\left(\frac{1}{2},1\right),\quad \varphi_2(y)\in C^1\left[0,\frac{1}{2}\right]\cap C^2\left(0,\frac{1}{2}\right). \tag{12}$$

Заметим, что задача типа задачи AT_2 для уравнения (1) при $\mu_j\equiv 0,\ (j=\overline{1,3})$

Теорема. Если выполнены условия (2), (3), (10), (11), (12), то в области Ω существует единственное регулярное решение задачи AT_2.

Литература

1. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения. // Дифф. уравнения. 1983. № 1. Т 19. С. 86-94.
2. Исломов Б., Курьязов Д.М. Краевые задачи для смешанного нагруженного уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа. // Узбекский математический журнал. 2000. № 2. С. 29-35.
3. Дженалиев М.Т. О нагруженных уравнениях с периодическими граничными условиями. // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. № 1. С. 48-54.
4. Исломов Б., Балтаева У.И. Краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений гиперболического и смешанного типов третьего порядка. // «Уфимский математический журнал» 2011.Том 3. № 3. С.15-25.
5. Исломов Б.,Холбеков Ж.А. Аналог задачи Трикоми для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа-**I,II** .// «Узбекский математический журнал». 2015. № 4. С. 47-56(**I**); 2016. № 1.С. 49-56(**II**).

ИССЛЕДОВАНИЕ СЕТЕЙ СВЯЗИ С ОТКАЗАМИ В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ

Шамсиев Р.Н., Куралов Б.А.
Ташкентский государсвенный технический университет

Рассмотрим сеть связи, состоящую из узлов A и B, в которые поступают Пуассоновские потоки сообщений с параметром λ. Длины сообщений- экспоненциально распределенные случайные величины с параметром λ. Если в момент возникновения сообщения в узле A этот узел свободен, то оно передаётся в узел B в течении времени длины сообщения. Если в момент окончания передачи сообщения узел B занят другим сообщением, то оно выбывает из сети (отказ сети), если же узел B свободен, то оно с вероятностью $\frac{1}{2}$ выбывает из сети и с вероятностью $\frac{1}{2}$ передаётся в узел A, после чего выбывает из сети. Если же в момент возникновения сообщения в узле A этот узел занят другим сообщением, то оно выбывает из сети (отказ сети). Сообщения, возникшие в узле B, точно также «ведут себя», как сообщения из узла A.

Обозначим через $P(t,n,m)$ вероятность того, что в момент t в узле A имеется n сообщений, а в узле B имеется m сообщений, где n,m=0,1. Если допустить, что процесс начинается из любого состояния сети, т.е. равновероятны любые начальные состояния, тогда

$$P(0,0,0) = P(0,0,1) = P(0,1,0) = P(0,1,1) = 0{,}25 \qquad (1)$$

Работа сети описывается следующими уравнениями:

$$P(t+\Delta t,0,0) = P(t,0,0)(1-2\lambda) + P(t,0,1)\frac{1}{2}\lambda\Delta t + P(t,1,0)\frac{1}{2}\lambda\Delta t \qquad (2)$$

Левая часть этого уравнения есть вероятность того, что за время $t+\Delta t$ не поступило ни одного сообщения в узлы A и B. Согласно закону умножения вероятностей двух независимых событий, значение $P(t+\Delta t,0,0)$ равно вероятности отсутствия сообщений в узлах A и B в интервале t, умноженном на вероятность отсутствия поступлений в оба узла сети; плюс вероятность нахождения в узле B одного сообщения, а в узле A вероятность отсутствия сообщений в момент t, умноженного на вероятность того, что за время Δt одно сообщение из узла B успеет оказаться переданной своему адресату и покинет сеть; плюс вероятность нахождения в узле A одного сообщения, а в узле B нет сообщений в момент t, умноженный на вероятность того, что за время Δt одно сообщение из узла A успеет оказаться переданным своему адресату и покинет сеть.

Перенеся $P(t+\Delta t,0,0)$ влево и устремив Δt к нулю, получим

$$P'(t,0,0) = -2\lambda P(t,0,0) + \frac{1}{2}\lambda P(t,0,1) + \frac{1}{2}\lambda P(t,1,0) \qquad (3)$$

Для другой вероятности имеем

$$P(t+\Delta t,0,1) = P(t,0,1)(1-2\lambda\Delta t) + P(t,0,0)\lambda\Delta t + P(t,1,0)\frac{1}{2}\lambda\Delta t + P(t,1,1)\frac{1}{2}\lambda\Delta t \quad (4)$$

Из этого уравнения следует, что вероятность нахождения в узле B одного сообщения, а в узле A отсутствие сообщений в момент $t+\Delta t$ равно вероятности нахождения в узле B одного сообщения, а в узле A отсутствие сообщений в момент t, умноженное на вероятность того, что в узел A не поступили сообщения, сообщение из узла B не успело оказаться переданной своему адресату; плюс вероятность отсутствия сообщений в узлах A и B в момент t, умноженная на вероятность того, что за время Δt одно сообщение поступило в узел B; плюс вероятность нахождения в узле A одного сообщения, а в узле B отсутствие сообщений в момент t, умноженное на вероятность того, что за время Δt одно сообщение из узла A успеет оказаться переданным в узел B и оно займет место передачи в этом узле; плюс вероятность нахождения в узлах A и B по одному сообщению в момент t, умноженному на вероятность того, что за время Δt одно сообщение из узла A успеет оказаться переданным своему адресату и покинет сеть.

Перенеся $P(t+\Delta t,0,1)$ влево и устремив Δt к нулю, получим

$$P'(t,0,1) = \lambda P(t,0,0) - 2\lambda P(t,0,1) + \frac{1}{2}\lambda P(t,1,0) + \frac{1}{2}\lambda P(t,1,1) \quad (5)$$

Применив такие же вероятностные рассуждения для вероятностей $P(t,1,0)$, $P(t,1,1)$ получим соответствующие уравнения:

$$P'(t,1,0) = \lambda P(t,0,0) + \frac{1}{2}\lambda P(t,0,1) - 2\lambda P(t,1,0) + \frac{1}{2}\lambda P(t,1,1) \quad (6)$$

$$P'(t,1,1) = \lambda P(t,0,1) + \lambda P(t,1,0) - 2\lambda P(t,1,1) \quad (7)$$

Введем обозначения $x = P(t,0,0), y = P(t,0,1), z = P(t,1,0), u = P(t,1,1)$ и

$\frac{dx}{dt} = P'(t,0,0), \frac{dy}{dt} = P'(t,0,1), \frac{dz}{dt} = P'(t,1,0), \frac{du}{dt} = P'(t,1,1)$. Тогда из уравнений (3)-(7) получим систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2\lambda x + \frac{1}{2}\lambda y + \frac{1}{2}\lambda z \\ \frac{dy}{dt} = \lambda x - 2\lambda y + \frac{1}{2}\lambda z + \frac{1}{2}\lambda u \\ \frac{dz}{dt} = \lambda x + \frac{1}{2}\lambda y - 2\lambda z + \frac{1}{2}\lambda u \\ \frac{du}{dt} = \lambda y + \lambda z - 2\lambda u \end{cases} \quad (8)$$

Интегрируя эту систему получим общее решение системы (8):

$$\left.\begin{aligned} x = {} & C_2 e^{-2\lambda t} + C_3 0{,}5 \cdot e^{\frac{-7-\sqrt{33}}{4}\lambda t} + C_4 0{,}5 \cdot e^{\frac{-7+\sqrt{33}}{4}\lambda t} \\ y = {} & C_1 e^{-\frac{5}{2}\lambda t} - C_3 0{,}593 \cdot e^{\frac{-7-\sqrt{33}}{4}\lambda t} + C_4 0{,}843 \cdot e^{\frac{-7+\sqrt{33}}{4}\lambda t} \\ z = {} & -C_1 e^{-\frac{5}{2}\lambda t} - C_3 0{,}593 \cdot e^{\frac{-7-\sqrt{33}}{4}\lambda t} + C_4 0{,}843 \cdot e^{\frac{-7+\sqrt{33}}{4}\lambda t} \\ u = {} & -C_2 2 \cdot e^{-2\lambda t} + C_3 e^{\frac{-7-\sqrt{33}}{4}\lambda t} + C_4 e^{\frac{-7+\sqrt{33}}{4}\lambda t} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Если переходим к вероятностным обозначениям, то система (9) имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} P(t,0,0) = {} & C_2 e^{-2\lambda t} + C_3 0{,}5 \cdot e^{\frac{-7-\sqrt{33}}{4}\lambda t} + C_4 0{,}5 \cdot e^{\frac{-7+\sqrt{33}}{4}\lambda t} \\ P(t,0,1) = {} & C_1 e^{-\frac{5}{2}\lambda t} - C_3 0{,}593 \cdot e^{\frac{-7-\sqrt{33}}{4}\lambda t} + C_4 0{,}843 \cdot e^{\frac{-7+\sqrt{33}}{4}\lambda t} \\ P(t,1,0) = {} & -C_1 e^{-\frac{5}{2}\lambda t} - C_3 0{,}593 \cdot e^{\frac{-7-\sqrt{33}}{4}\lambda t} + C_4 0{,}843 \cdot e^{\frac{-7+\sqrt{33}}{4}\lambda t} \\ P(t,1,1) = {} & -C_2 2 \cdot e^{-2\lambda t} + C_3 e^{\frac{-7-\sqrt{33}}{4}\lambda t} + C_4 e^{\frac{-7+\sqrt{33}}{4}\lambda t} \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Из начальных условий (1) находим коэффициенты C_1, C_2, C_3, C_4 в системе (10):

$$\left.\begin{aligned} C_2 + 0{,}5C_3 + 0{,}5C_4 &= 0{,}25 \\ C_1 - 0{,}593C_3 + 0{,}843C_4 &= 0{,}25 \\ -C_1 - 0{,}593C_3 + 0{,}843C_4 &= 0{,}25 \\ -2C_2 + C_3 + C_4 &= 0{,}25 \end{aligned}\right\}$$

Решив эту систему, получим $C_1 = 0, C_2 = 0{,}0625, C_3 \approx 0{,}046, C_4 \approx 0{,}329$. Подставив эти полученные значения в систему (19), получим окончательное решение задачи сетей связи из двух узлов с отказами:

$$\left.\begin{aligned} P(t,0,0) &= 0{,}0625 \cdot e^{-2\lambda t} + 0{,}023 \cdot e^{\frac{-7-\sqrt{33}}{4}\lambda t} + 0{,}1645 \cdot e^{\frac{-7+\sqrt{33}}{4}\lambda t} \\ P(t,0,1) &= -0{,}0273 \cdot e^{\frac{-7-\sqrt{33}}{4}\lambda t} + 0{,}277 \cdot e^{\frac{-7+\sqrt{33}}{4}\lambda t} \\ P(t,1,0) &= -0{,}0273 \cdot e^{\frac{-7-\sqrt{33}}{4}\lambda t} + 0{,}277 \cdot e^{\frac{-7+\sqrt{33}}{4}\lambda t} \\ P(t,1,1) &= -0{,}125 \cdot e^{-2\lambda t} + 0{,}046 \cdot e^{\frac{-7-\sqrt{33}}{4}\lambda t} + 0{,}329 \cdot e^{\frac{-7+\sqrt{33}}{4}\lambda t} \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Теорема. Уравнения (3), (5)-(7), описывающие работы сети связи из двух узлов с протоколом «отказа» имеют единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям (1) и эти решения получаются через систему (11).

Из системы (11) видно, что вероятности $P(t,0,1)$, $P(t,1,0)$ вычисляются по одной формуле, это связано с тем, что узлы A и B «симметричны» относительно работы сети.

Задачи такого рода рассматривались в [1]-[3].

Литература

1. Шамсиев Р.Н., Куралов Б.А. Сети с очередями трех периферийных узлов с протоколом коммутации каналов. //Вестник ТашГТУ, 2014. №3. С.8-12.
2. Шамсиев Р.Н., Куралов Б.А. Вероятностные характеристики состояния сетей связи с двумя типами сообщений.// Вестник науки и образования 2019, № 4(58). Часть 2.С.6-8.
3. Р.Н.Шамсиев. Вероятностные характеристики сетей связи из двух узлов в реальном времени. //Вестник ТашГТУ, 2019. №2. С.3-8.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТИПА ХОПФА

[1]Эркинова Д. А., [2]Имомназаров Б. Х., [3]Имомназаров Х.Х.
[1]Национальный университет Узбекистана,
[2]Новосибирский государственный университет,
[3]Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН.
imom@omzg.sscc.ru

Природа дает нам много примеров нелинейных случайных полей и волн. Необходимость их изучения не нуждается в комментариях и ясна уже из краткого перечисления. Это турбулентность жидкости и газа, хаотические движения плазмы, интенсивные акустические шумы, случайные волнения морской поверхности и др. Одна из тенденций развития теории нелинейных случайных волн состоит в выделении небольшого числа понятий и идей, позволяющих, с одной стороны, единым образом описывать поведение нелинейных случайных волн разной физической природы, а с другой, довольна четко классифицировать нелинейные случайные волны по характеру присущих им взаимодействий. Сюда относятся в первую очередь понятия слабой и сильной турбулентности. Режим слабой турбулентности характерен для слаболинейных волн в средах с сильной дисперсией, когда энергия взаимодействия пространственных гармоник мала по сравнению с их полной энергией. Приближение хаотических фаз, предполагающее, что взаимодействие между гармониками некогерентно, позволяет в этом случае перейти к замкнутому статическому описанию турбулентного режима . Если дисперсия волн мала или отсутствует, свойства турбулентности определяются сильным взаимодействием большого числа когерентных гармоник волны. В этих случаях принято говорить о сильной турбулентности. Наиболее известный пример сильной турбулентности - вихревая турбулентность жидкости с малой вязкости .

Чрезвычайная трудность анализа нелинейных волн, в особенности сильной турбулентности, обусловила другую тенденцию развития их теории - переход от сложных уравнений нелинейных случайных волн к более простым модельным уравнениям . Одним из таких модельных уравнений турбулентности является уравнение Бюргерса.

Современные теории механики сплошной среды предполагают влияние на движение среды ее прошлого, причем в общем случае материал может иметь сколь угодно длинную "память". Однако долгая память порождает значительные трудности, преодолеть которые можно двумя путями: во-первых, рассматривать специальные классы движений, в которых память - какова бы она ни была - не имеет возможности существенно проявиться (например, вискозиметрические течения вязких жидкостей [5, гл. V]), во-вторых, выделять классы сред или материалов, в которых на напряжения в любой точке влияет лишь предыстория движения на произвольно малом интервале времени. Материалы такого типа называются материалами с инфинитезимальной памятью.

Наиболее важными из материалов с инфинитезимальной памятью являются материалы, в которых напряжения в точке $\mathbf{x}$ в момент времени t^* определяются первыми n производными градиента деформации $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ по времени t в тот же момент t^*. Такие материалы называются материалами дифференциального типа сложности $n = 1, 2, \ldots$. Теория изотропных жидкостей дифференциального типа сложности n была построена Ривлином и Эрикееном , а на основе этой теории Колеманом и Ноллом была построена более простая асимптотическая теория замедленных движений жидкостей порядка $n = 1, 2, \ldots$. В случае несжимаемых жидкостей жидкость нулевого порядка — это упругая жидкость, движение которой описывается уравнениями Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_k \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \mathbf{F}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{1}$$

жидкость первого порядка — это ньютоновская линейно-вязкая жидкость, движение которой описывается уравнениями Навье-Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_k \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_k} - \nu \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \mathbf{F}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{2}$$

причем $\rho > 0$ и $\nu > 0$.

Система уравнений двухскоростной гидродинамики

Уравнения движения двухскоростной среды в диссипативном случае с одним давлением в системе в изотермическом случае имеет вид

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho_1 \mathbf{v}_1\right) = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho_2 \mathbf{v}_2\right) = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1, \nabla)\mathbf{v}_1 + \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{\nu_1}{\rho}\Delta \mathbf{v}_1 + \frac{\nu_1 + 3\mu_1}{3\rho}\nabla \mathrm{div}\mathbf{v}_1 + \frac{\rho_2}{2\rho}\nabla(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 + \mathbf{F}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t} + (\mathbf{v}_2, \nabla)\mathbf{v}_2 + \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{\nu_2}{\rho}\Delta \mathbf{v}_2 + \frac{\nu_2 + 3\mu_2}{3\rho}\nabla \mathrm{div}\mathbf{v}_2 - \frac{\rho_1}{2\rho}\nabla(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 + \mathbf{F}, \tag{6}$$

где $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ --- векторы скоростей подсистем, составляющих двухскоростной континуум с соответствующими парциальными плотностями ρ_1 и ρ_2, ν_1 (μ_1) и ν_2 (μ_2) --- соответствующие сдвиговые (объёмные) вязкости, $\rho = \rho_1 + \rho_2$ --- общая плотность двухскоростного континуума; $\mathbf{F}$ - вектор массовой силы, отнесенной к единице массы. Система уравнений (3)-(6) замыкается уравнением состояния двухскоростного континуума

$$p = p(\rho, (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2).$$

Система уравнений типа Хопфа

Системы уравнений (3)-(6) в случае постоянстве насыщенности фаз являются обобщением системы (1) и (2) для многофазной среды, соответственно. Подклассом системы (3)-(6) в случае постоянстве насыщенности фаз и диссипативном случае являются системы уравнений типа Хопфа. В одномерном случае в отсутствии массовых сил данная системы имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -b(u - v), \tag{7}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = \varepsilon b(u - v), \tag{8}$$

где $\varepsilon = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ -- безразмерная положительная постоянная.

Система (7), (8) отличается от системы двухскоростной гидродинамики в диссипативном случае, обусловленной коэффициентом трения, отсутствием давления и условием несжимаемости. По этой причине проблемы, связанные с системой типа Хопфа, систему иногда будем называть двухскоростной гидродинамикой без давления. Также в случае, когда диссипация энергии

происходит только за счет коэффициента межфазного трения, будем называть невязкой системой типа Бюргерса или системой типа Хопфа, или также будем называть системой типа Римана, которая дает простейшую квазилинейную систему уравнений. При исчезновении коэффициента трения ($b = 0$) система (7), (8) переходит к известному уравнению Хопфа .

Зельдович предложил рассматривать невязкую свободную систему в односкоростном случае в отсутствии массовых сил как уравнение, описывающее эволюцию разреженного газа невзаимодействующих частиц . Согласно его идее, чистая кинематика лежащих в основе частиц может привести к особенностям в распределении массы и ответственна за неоднородность вещества во Вселенной.

В данной работе получена система уравнений типа Хопфа из системы нестационарных уравнений двухскоростной гидродинамики. Считается, что диссипация энергии происходит за счет коэффициента межкомпонентного трения. Исследуется задача Коши для данной системы уравнений в классе ограниченных измеримых функций на основе метода Кружкова .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 21-51-15002).

Литература

1. Кадомцев Б.Б., Карпман В.И. Нелинейные волны // УФН, 1971, т. 103, С. 193-232.
2. Кадомцев Б.Б., Конторович В.М. Теория турбулентности в гидродинамике и плазме // Изв. вузов. Радиофизика. 1974, т. 17, No. 4, С. 511-540.
3. Монин А.С., Яглом А.М. Статическая гидромеханика. - М.: Наука, ч. 1, 1965; ч. 2, 1967.
4. Гурбатов С.Н., Саичев А.И., Якушкин И.Г. Нелинейные волны и одномерная турбулентность в средах без дисперсии // УФН, 1983, т. 141, с. 221-255.
5. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. - 592 с.
6. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. - 256 с.
7. Седов Л.И. Механика сплошной среды. т.2. М.: Наука, 1973, - 584 с.
8. Доровский В.Н., Перепечко Ю.В. Теория частичного плавления // Геология и геофизика. 1989. No.9. С.56-64.

9. Урев М.В., Имомназаров Х.Х., Жиан-Ган Тан Краевая задача для одной переопределенной стационарной системы, возникающей в двухскоростной гидродинамике // СибЖВМ, 2017, т. 20, No. 4, С. 425-437.
10. Имомназаров Х.Х., Имомназаров Ш.Х., Маматкулов М.М., Черных Е.Г. Фундаментальное решение для стационарного уравнения двухскоростной гидродинамики с одним давлением // Сиб. журн. индустр. матем., 2014, т. 17, № 4, С. 60-66.
11. Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х. Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред, Изд-во НУУз им. Мирзо Улугбека, 2012, 212 с.
12. Имомназаров Х.Х., Холмуродов А.Э. Моделирование и исследование прямых и обратных динамических задач пороупругости. Изд. Университет, Ташкент, 2017, 120с.
13. Турдиев У.К., Имомназаров Х.Х. Система уравнений типа Римана, возникающая в двухжидкостной среде // Тезисы Межд. конфер. «Обратные и некорректные задачи» 2-4 октября 2019 г. Самарканд, Узбекистан, с. 119-120.
14. Hopf E. The partial differential equation // Comm. Pure Appl. Math., 1950, v. 3, № 3, pp. 201—230.
15. Zeldovitch Ya.B. Gravitational instability: An approximate theory for large density perturbations // Astronom. and Astrophys., 1970, No. 5, pp. 84-89.
16. Кружков С.Н. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Матем. сб., 1970, т. 81(123), No. 2, С. 228–255.

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ГЕНЕРИРУЕМЫЕ КВАДРАТИЧНЫМИ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ОПЕРАТОРОВ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА И ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

[1]Эшниязов А.И., [2]Менгнаров Х.Э.
[1]Гулистанский государственный университет,
[2]Термезский филиал Ташкентского государственного педагогического университета

Пусть

$$S^{m-1}=\left\{x_1,x_2,...,x_m\in\mathbb{R}^m:\ \sum_{k=1}^{m}x_k=1,\ x_k\geq 0\right\}$$

$(m-1)-$ мерный симплекс. Точки $e_k=(\delta_{1k},\delta_{2k},...,\delta_{mk})$ называются вершинами симплекса, где $\delta_{ik}-$символ Кронекера. Пусть $I=\{1,2,...,m\}$ и

$\alpha \subset I$ – произвольное подмножество. Множества

$$\Gamma_\alpha = \left\{ x \in S^{m-1} : \; x_k = 0, \; k \notin \alpha \right\}$$

называются гранями симплекса. Грань $\Gamma_\alpha = co\left\{e_k\right\}_{k\in\alpha}$ также является $\left(|\alpha|-1\right)$ – мерным симплексом. Множество

$$ri\Gamma_\alpha = \left\{ x \in \Gamma_\alpha : \; x_k > 0, \; k \in \alpha \right\}$$

называется относительным внутренностью грани Γ_α.

Для векторов $x, y \in \mathbb{R}^m$ положим $x_\alpha \succ y$, если $x_i > y_i$ при $i \in \alpha$ и $x_i \geq y_i$ при $i \notin \alpha$. Если $\alpha = \varnothing$, то мы просто пишем $x \succeq y$.

Пусть отображение $f = \left(f_1, f_2, ..., f_m \right) : S^{m-1} \to \mathbb{R}^m$ удовлетворют следующим условиям:

1^0. Отображение $f : S^{m-1} \to \mathbb{R}^m$ непрерывно.

2^0. Для любой $x \in S^{m-1}$ выполняется $f(x) \succeq -\mathrm{I}=(-1,-1,...,-1)$

3^0. Для любой $x \in S^{m-1}$ выполняется $f((x), x) = 0$

4^0. Для любого $\alpha \subset I$ выполняется $f(x)_\alpha \succ -\mathrm{I}$, для любой $x \in ri\Gamma_\alpha$.

Предложение 1. *Для того чтобы линейное отображение f удовлетворяло условиям $1^0 - 4^0$, необходимо и достаточно, чтобы матрица A, соответствующая отображению f, была кососимметрической, т.е. $A^T = -A$ и $|a_{ki}| \leq 1$ для любого k, $i = \overline{1, m}$.*

Замечание 1. В этом случае условие 4^0 следует из остальных.

Определение 1. *Оператор вольтерровского типа $V : S^{m-1} \to \mathbb{R}^m$ определяется следующей формулой для всех $x \in S^{m-1}$*

$$(Vx)_k = x_k' = x_k(1 + f_k(x)), \quad k = \overline{1, m}, \qquad (1)$$

где отображение $f = \left(f_1, f_2, ..., f_m \right) : S^{m-1} \to \mathbb{R}^m$ удовлетворяет условиям $1^0 - 4^0$.

Замечание 2. В случае когда f_k – линейные функционалы, динамика траекторий оператора вольтерровского типа изучена в [1].

i. Отметим некоторые свойства операторов вольтерровского типа.

оператор вольтерровского типа отображает симплекс в себя.

Действительно, из 2^0 и 3^0 следует, что

$$x_k' = x_k(1 + f_k(x)) \geq 0 \quad k = \overline{1, m},$$

$$\sum_{k=1}^{m} x_k' = \sum_{k=1}^{m} x_k(1 + f_k(x)) = \sum_{k=1}^{m} x_k + \sum_{k=1}^{m} x_k f_k(x) = \sum_{k=1}^{m} x_k + (f(x), x) = 1.$$

ii. Любая грань симплекса инвариантна относительно оператора вольтерровского типа.

Действительно, пусть грань Γ_α – грань симплекса S^{m-1}. Тогда из (1) ясно, что при $x_k = 0$ имеем $x_k' = 0$. Поэтому $V(\Gamma_\alpha) \subset \Gamma_\alpha$.

iii. Вершины симплекса являются неподвижными точками

оператора вольтерровского типа.

Действительно, поскольку вершина e_k – нуль мерная грань симплекса S^{m-1}, то $(Ve_k)_i = 0$ при $i \neq k$. Из 3^0 следует, что $f_k(e_k) = 0$, тогда $(Ve_k)_k = 1$. Таким образом $Ve_k = e_k$.

iv. Относительная внутренность любой грани симплекса инвариантна относительно оператора вольтерровского типа. Это следует из 4^0.

v. Сужение оператора вольтерровского типа на любую грань является оператором вольтерровского типа.

Действительно, ясно что сужение $f_\alpha = f\Big|_{\Gamma_\alpha}$ отображения f на грань снова Γ_α удовлетворяет условиям $1^0 - 4^0$. Поэтому сужение $V_\alpha = V\Big|_{\Gamma_\alpha}$ оператора вольтерровского типа.

Пусть x^0 – начальная точка и $\{x^0, x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}, ...\}$ – траектория, начинающаяся в точке x^0 ($x^{(n+1)} = Vx^{(n)}$, $n = 0,1,2,...$). Обозначим через $\omega(x^0)$ множество предельных точек траектории. Поскольку $\{x_n\} \subset S^{m-1}$ и S^{m-1} компактен, то $\omega(x^0) \neq \varnothing$. Очевидно, если $\omega(x^0)$ состоит из одной точки, то траектория сходится, причем $\omega(x^0)$ – неподвижная точка оператора V.

Теорема 1. *Если отображение* $f: S^{m-1} \to \mathbb{R}^m$ *удовлетворяет условиям* $1^0 - 4^0$, *тогда*

$$\mathrm{P} = \left\{x \in S^{m-1} : f(x) \succeq 0\right\} \neq \varnothing, \quad \mathrm{Q} = \left\{x \in S^{m-1} : f(x) \preceq 0\right\} \neq \varnothing.$$

Следствие 1. *P и Q состоят из неподвижных точек оператора вольтерровского типа.*

Определение 2. *Непрерывный функционал* $\varphi: S^{m-1} \to \mathbb{R}^m$ *называется функцией Ляпунова, если для любой начальной точки* $x^0 \in S^{m-1}$ *существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x^{(n)})$.

Ясно что, если $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x^{(n)}) = C$, то $\omega(x^0) \subset \varphi^{-1}(C)$.

Теорема 2. *Если* $p \in \mathrm{P}$, *то* $\varphi(x) = x_1^{p_1} x_2^{p_2} ... x_m^{p_m}$ *является функцией Ляпунова.*

Предложение 2. *Если* $p \in \mathrm{P}$, *то* $1 = \max\limits_{x \in S^{m-1}} \psi(x) = \psi(\overline{x})$ *тогда и только тогда, когда* $\overline{x} \in \mathrm{P}$.

Теорема 3. *Если* $x^0 \in riS^{m-1}$ *и* $Vx^0 \neq x^0$, *то*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x^{(n)}) = 0$, *более того* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi(x^{(n)}) < +\infty$, *где* $p \in \mathbf{P}$, $\varphi(x) = x_1^{p_1} x_2^{p_2} ... x_m^{p_m}$;

b) $\omega(x^0) \subset \partial S^{m-1}$.

Следствие 2. *Справедливо включение*

$$\omega(x^0) \subset \bigcap_{p\in \mathrm{P}} \left\{ x \in S^{m-1} : x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_m^{p_m} = 0 \right\}.$$

Теорема 4. *Множество* $\omega(x^0)$ *либо состоит из одной точки, либо бесконечно.*

Следствие 3. *Оператор вольтерровского типа не имеет периодических траекторий.*

Теорема 5. *Пусть* $x^0 \in riS^{m-1}$, $Vx^0 \neq x^0$ *и траектория* $\left\{x^{(n)}\right\}$ *сходится. Тогда предельная точка траектории принадлежит множеству* $\mathbb{Q}$.

Теорема 6. *Оператор вольтерровского типа* $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$ *является гомеоморфизмом.*

Следствие 4. *Для любой начальной точки* $x^0 \in S^{m-1}$ *существует* «*отрицательная*» *траектория*

$$\left\{x^0, V^{-1}x^0, V^{-2}x^0, \ldots, V^{-n}x^0, \ldots\right\}$$

Пусть $\alpha(x^0)$ – множество предельных точек «отрицательной» траектории, начинающейся в точке $x^0 \in S^{m-1}$. Ясно, что $\alpha(x^0) \neq \varnothing$ и замкнуто.

Теорема 7. *Если* $x^0 \in riS^{m-1}$, *то* $\alpha(x^0) \subset \mathrm{P}$.

Теорема 8. «*Отрицательные*» *траектории всегда сходятся.*

Литература

1. Р.Н.Ганиходжаев. Квадратичные стохастические оператор, функции Ляпунова и турниры. *Мат.сб.*, **183** (1992), № 8, 121-140.
2. Л.В.Канторович, Г.П.Акилов. Функциональный анализ. Наука, М., 1977.
3. Э.Спеньер. Алгебраическая топология. Мир. М., 1971.

THE DYNAMICS OF SUPERPOSITION OF NON-VOLTERRA QUADRATIC STOCHASTIC OPERATORS ON S^2

Aralova K.A., Jamilov U.U.
V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Academy of Sciences of Uzbekistan
uygun.jamilovu@mathinst.uz, aralovak.a@mail.ru

Consider discrete-time dynamical systems generated by quadratic stochastic operators. The motivations for such investigations can be seen e.g. in [1,2] and references therein.

Let

$$S^{m-1} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m : \text{ for any } i,\ x_i \geq 0, \text{ and } \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\}$$

be the $(m-1)$-dimensional simplex. A map $V: S^{m-1} \to S^{m-1}$ is called a *quadratic stochastic operator* (QSO) if

$$(V\mathbf{x})_k = \sum_{i,j=1}^{m} p_{ij,k} x_i x_j \tag{1}$$

for any $\mathbf{x} \in S^{m-1}$ and for all $k = 1, \ldots, m$, where

$$p_{ij,k} \geq 0, \qquad p_{ij,k} = p_{ji,k} \quad \textit{for all } i, j, k; \qquad \sum_{i,j=1}^{m} p_{ij,k} = 1 \tag{2}$$

The trajectory $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ *of an operator* V *for an initial point* $\mathbf{x}^{(0)} \in S^{m-1}$ *is defined by*

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = V(\mathbf{x}^{(n)}) = V^{n+1}(\mathbf{x}^{(0)}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Denote by $\omega_V(\mathbf{x}^{(0)})$ the set of limit points of the trajectory $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$.

A *Volterra* QSO (see [2]) is defined by (1), (2) and with the additional assumption

$$p_{ij,k} = 0, \ k \notin \{i, j\}, \text{ for any } i, j, k \in E \tag{3}$$

Definition 1. *A point* $x \in S^{m-1}$ *is called a fixed point of* V *if* $V(x) = x$.

Denote the set of all fixed points by $\mathrm{Fix}(V)$. Let $D_{\mathbf{x}}V(\mathbf{x}^*) = (\partial V_i / \partial x_j)(\mathbf{x}^*)$ be a Jacobian of V at the point $\mathbf{x}^*$.

Definition 2. *A fixed point* $\mathbf{x}^*$ *is called hyperbolic if its Jacobian* $D_{\mathbf{x}}V(\mathbf{x}^*)$ *has no eigenvalues on the unit circle. A hyperbolic fixed point* $\mathbf{x}^*$ *is called:*

i) attracting if all the eigenvalues of the Jacobian $D_{\mathbf{x}}V(\mathbf{x}^*)$ *are less than 1 in absolute value;*

ii) repelling if all the eigenvalues of the Jacobian $D_{\mathbf{x}}V(\mathbf{x}^*)$ *are greater than 1 in absolute value;*

iii) a saddle otherwise.

Let us consider the following non-Volterra QSOs defined on the two-dimensional simplex

$$V_0: \begin{cases} x_1' = x_1^2 + 2x_2x_3, \\ x_2' = x_2^2 + 2x_1x_3, \\ x_3' = x_3^2 + 2x_1x_2, \end{cases} \qquad V: \begin{cases} x_1' = 2x_3x_2, \\ x_2' = 2x_3x_1, \\ x_3' = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2. \end{cases}$$

Note that in [2] the QSO V_0 was studied and it was showed that the all trajectories of the QSO converge to the center of the two-dimensional simplex. In [4] the QSO V_1 was studied and it was showed that the all trajectories of the QSO converge to a periodic trajectory with the period two.

Consider the nonlinear operator $W_0 := V_0 \circ V$ defined by superposition of the given operators and this operator has the form

$$W_0: \begin{cases} x_1' = 4x_3^2x_2^2 + 4x_3x_1(2x_3^2 - 2x_3 + 1), \\ x_2' = 4x_3^2x_1^2 + 4x_3x_2(2x_3^2 - 2x_3 + 1), \\ x_3' = 8x_1x_2x_3^2 + (2x_3^2 - 2x_3 + 1). \end{cases}$$

Theorem 1. *For the operator* W_0, *the following statements are true:*

i) The sets $M_1 = \{\mathbf{x} \in S^2 : x_1 = x_2\}$, $M_2 = \{\mathbf{x} \in S^2 : x_1 > x_2\}$ *and* $M_3 = \{\mathbf{x} \in S^2 : x_1 < x_2\}$ *are invariant sets of* W_0*;*

ii) $\mathbf{e}_3$ *and* $\mathbf{x}^* = \left(\frac{1-x^{**}}{2}, \frac{1-x^{**}}{2}, x^{**}\right)$ *are fixed points of the operator* W_0*, where* $x^{**} = \frac{\sqrt[3]{2+2\sqrt{17}}}{6} - \frac{2}{3\sqrt[3]{2+2\sqrt{17}}} + \frac{1}{3}$*;*

iii) $W_0(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{e}_3$ *for any* $\mathbf{x}^{(0)} \in E_3 = \{\mathbf{x} \in S^2 : x_3 = 0\}$;

iv) if $\mathbf{x}^{(0)} \in M_1 \setminus E_3$ *then* $\omega_{W_0}(\mathbf{x}^{(0)}) = \{\mathbf{x}^*\}$;

References

1. Ganikhodzhaev R.N. Quadratic stochastic operators, Lyapunov functions and tournaments.Sb. Math. 76(2), pp. 489–506 (1993).
2. Ganikhodzhaev R.N. A family of quadratic stochastic operators that act in S^2. Dokl. Akad. Nauk UzSSR 1, pp. 3–5 (1989).
3. Jamilov U.U. On a family of strictly non-volterra quadratic stochastic operators.Jour. Phys. Conf. Ser., 697, 2016, 012013.
4. Khamraev, AYu.: On the dynamics of a quasistrictly non-Volterra quadratic stochastic operator. Ukr. Math. J. 71(8), 1116–1122 (2019).

POLIGARMONIK OPERATORIGA MOS SPEKTRAL YOYILMALARNING DEYARLI YAQINLASHISHI

Buvayev Q.T., To‘xtaeva N.M.
O’zbekiston Milliy Universiteti

Quyidagi $T^N = \left\{x \in R^N : -\pi < x_j \le \pi,\ j = 1,2,\ldots,N\right\}$ N- o’lchovli kubni qaraylik. Δ^m – aniqlanish sohasi $C^\infty(T^N)$ dan iborat poligarmonik operator bo’lsin, bu yerda m ihtiyoriy natural son, $\Delta = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ - Laplas operatori. Bu operatorining o’z-o’ziga qo’shma kengaytmalaridan bittasi A davriylik sharti asosida beriladi [1], yani A bu $C^\infty(R^N)$ dagi har bir argumentlari bo’yicha 2π davrga ega bo’lgan funksiyalar fazosida aniqlangan Δ^m operatorining $L_2(T^N)$ dagi yopilmasidir.

Osongina ko’rish mumkinki, A operator $|n|^{2m}$ xos qiymatlarga mos ushbu $(2\pi)^{-N/2} e^{i(n,x)}$ ko’rinishidagi xos funksiyalarga hamda quyidagi

$$\theta(x, y, \lambda) = (2\pi)^{-N} \sum_{|n|^{2m} < \lambda} e^{i(n, x-y)} \qquad (1)$$

spektral funksiyaga ega bo’ladi.

Bu holda, $\forall f \in L_2(T^N)$ funksiyaning spektral yoyilmasi quyidagi

$$E_\lambda f(x) = (2\pi)^{-N} \sum_{|n|^{2m}<\lambda} f_n e^{i(n,x)} \tag{2}$$

ko'rinishida aniqlanadi, bu yerda $f_n = (2\pi)^{-N} \int_{T^N} f(y) e^{-i(n,y)} dy$ - f funksiyaning Furye koeffisientlari.

Shuni takidlash lozimki, (2) spektral yoyilma $f \in L_2(T^N)$ funksiyaning karrali trigonometrik Furye qatorini biror usul bilan jamlashni aniqlaydi. Xususan, $m=1$ da, yani Laplas operatori bo'lganda bu yoyilma karrali Furye qatorining shar bo'yicha qismiy yig'indisini anglatadi.

Mazkur tezisda Sobolev fazosidagi funksiyalar uchun (2) spektral yoyilmani deyarli yaqinlashishiga o'rganishdir. Asosiy natijani bayon etishdan oldin $L_p^a(T^N)$ ($a>0$ haqiqiy son) Sobolev fazosini eslatib o'tamiz. $f \in L_p(T^N)$, $p \geq 1$ funksiya $L_p^a(T^N)$ Sobolev fazosiga tegishli deyiladi, agar quyidagi

$$\|f\|_{L_p^a(T^N)} = \left\| \sum_{n \in Z^N} \left(1+|n|^2\right)^{\frac{a}{2}} f_n e^{inx} \right\|_{L_p(T^N)} \tag{3}$$

norma chekli bo'lsa, a butun bo'lmagan holda bu fazo Liuvill fazosi deb ham ataladi.

YUqorida keltirilgan barcha tushinchalarni batafsilroq [1] ishdan ham ko'rish mumkin.

Endi asosiy natijani quyidagi teorema orqali bayon etamiz.

Teorema. *$1 < p \leq 2$ va $a > (N-1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)$ bo'lsin. U holda $\forall f \in L_p^a(T^N)$ funksiya uchun (2) spektral yoyilma $f(x)$ funksiyaga T^N da deyarli yaqinlashadi. O'z navbatida, ushbu $E_* f(x) = \sup_{\lambda>0} |E_\lambda f(x)|$ maksimal operatori uchun, quyidagi*

$$\|E_* f\|_{L_p(T^N)} \leq C(p,a) \|f\|_{L_p^a(T^N)}$$

baho o'rinli.

Mazkur teorema Laplas operatori uchun [2] ishda isbotlangan.

Adabiyotlar

1. Ш. А. Алимов, Р. Р. Ашуров, А. К. Пулатов. Кратные ряды и интегралы Фурье, Коммутативный гармонический анализ-4, Современные проблемы математики, Фундаментальные направления, том 42, Москва 1989, 105 с.
2. Р.Р. Ашуров. Сходимость почти всюду кратных тригонометрических рядов Фурье функций из классов Соболева. Математические заметки, т.109, №2, 2021, с.163-169.

DEFORMATSIYALANUVCHI MUHITDAGI ELASTIK KONUSSIMON QOBIQNING BURALMA TEBRANISHLARI

[1]IsmoilovX.F., [2]Kasimova F., [3]Abdukarimov N.
[1,2]Samarqand davlat universiteti
[3]Urganch davlat universiteti

Yupqa devorli qobiqlarning klassik va S.P.Timoshenko [1] tipidagi aniqlashtirilgan nazariyalarida elastik va qovushoq-elastik sistemalarning taqribiy tenglamalari, bu sistemalarni turli dinamik yuklanishlarga hisoblashda oxir-oqibat noaniqlik va xatolarga olib keluvchi fizik yoki geometrik xarakterlardagi gipoteza va farazlarga asoslangan holda keltririb chiqarilgan.

Ushbu ishda deformatsiyalanuvchi muhitda joylashgan doiraviy konussimon elastik qobiqning buralma tebranishlari [2,3,4] tadqiqot ishlarida yaratilgan usul asosida, qobiqlarning klassik va S.P.Timoshenko tipidagi aniqlashtirilgan nazariyalarida qo'llaniluvchi gipoteza va farazlardan foydalanmagan holda ishlab chiqilgan.

Konussimon qobiqning buralma tebranishlari haqidagi masalani silindrik (r,θ,z) koordinatalar sistemasida qaraymiz. Qobiqning ichki $-r_1$ va tashqi $-r_2$ radiuslarini bo'ylama koordinataning chiziqli funksiyalari sifatida, ya'ni $r_1 = r_0 + fz; r_2 = r_0 + h + fz$ ko'rinishda tanlaymiz [5]. Bu yerda $r_0 = const;\ h -$ qobiqning qalanligi; $k = tg\alpha$ Biz qarayotgan doiraviy konussimon elastik qobiq $(m=0)$ va muhit $(m=1)$ harakat tenglamalari elastik jismning to'lqin tenglamalaridan iboratdir

$$\mu(\Delta\Psi_{1m}) = \rho\ddot{\Psi}_{1m}, \qquad m = 0,1 \tag{1}$$

Ushbu tenglamalar sistemasini integrallashda aniq yechimlarga ega bo'lish uchun chegaraviy shartlardan, nostatsionar harakat holida esa boshlang'ich shartlardan ham foydalanishga to'g'ri keladi. Buning uchun, doiraviy konussimon elastik qobiqning buralma tebranishlari qobiqning simmetriya o'qiga nisbatan simmetrik masala ekanligini eslab o'tamiz. Bu holda kuchlanishlar va deformatsiyalar tenzori hamda ko'chish vektorining hamma komponentalari $\theta -$ burilishi burchagi koordinatasidan bo'g'liq bo'lmaydi va ko'chish

$$U_\theta^{(m)} = -\frac{d}{dr}\Psi_{1m}, \qquad m = 0,1 \tag{2}$$

Bu yerdan ko'rinadiki $U_\theta^{(m)}$ – aylanma yoki buralma ko'chishlari uchun faqat Ψ_{1m} – patensiallar mos keladi. Boshqacha qilib aytganda buralma tebranishlarda potensiallardan faqat Ψ_{1m} largina noldan farqli bo'ladi.

Doiraviy konussimon elastik qobiq nuqtalaridagi kuchlanish tenzori komponentalari Ψ_{1m} patensial orqali quyidagicha ifodalanadi

$$\sigma_{r\theta}^{(m)} = \mu_m\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\Psi_{1m}^{(0)}(r); \qquad \sigma_{z\theta}^{(m)} = -\mu_m \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial \Psi_{1m}}{\partial z}\right]; \tag{3}$$

Bu yerda $\mu -$ Lame koeffitsienti.

Buralma tebranishlarning kuchlanishlarga nisbatan harakat tenglamalari silindrik koordinatalar sistemasida

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(m)}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(m)}}{\partial z} + \frac{2}{r}\sigma_{r\theta}^{(m)} = \rho \ddot{U}_{\theta r}, \quad m = 0,1 \tag{4}$$

ko'rinishni oladi. Bu yerda $\rho -$ materiallning zichligi.

Buralma tebranishlarda kuchlanishlar qobiq sirtidagi $r = r_i(z); (i = 1,2)$, uchun chegaraviy shartlarning ko'rinishi quyidagicha

$$\begin{cases} \sigma_{r\theta}^{(0)} - f\sigma_{z\theta}^{(0)} = \left(1 + f^2\right) f_{ns_1}^{(i)}(z,t), & r = r_1 \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} - f\sigma_{z\theta}^{(0)} = \sigma_{r\theta}^{(1)} - f\sigma_{z\theta}^{(1)} + \left(1 + f^2\right) f_{ns_1}^{(i)}(z,t), & r = r_2 \end{cases} \tag{5}$$

$$U_\theta^{(0)}(r,z,t)\Big|_{r=r_2} = U_\theta^{(1)}(r,z,t)\Big|_{r=r_2}$$

Boshlang'ich shartlarni nolga teng deb hisoblaymiz.

Silindrik koordinatalarda siljishning ifodasi $U_\theta^{(0)}$ ni Bessel funksiyalari I_1 va K_1 larning r radiuslar darajalari bo'yicha darajali qatorga yoyib ixchamlasak, u holda siljish A_1 va A_2 o'zgarmaslar orqali quyidagi ko'rinishni oladi

$$U_\theta^{(0)} == \frac{1}{r}A_2 - \sum_{n=0}^{\infty}\beta^{2n+2}\left[A_1 - A_2\left(\ln\frac{\beta r}{2} - \frac{1}{2}\left(\psi(n+2) + \psi(n+1)\right)\right)\right]\frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}. \tag{6}$$

Bu yerda $\psi(n) -$ gamma funsiyaning logarifmik hosilasi.

(6) tenglamada $U_\theta^{(0)}$ siljishlarni A_1 va A_2 lar orqali topamiz ya'ni

$$U_{\theta,1}^{(0)} = \frac{1}{\xi}A_2, \quad U_{\theta,0}^{(0)} = -\frac{1}{2}\beta^2\left\{A_1 - A_2\left[\ln\frac{\beta\xi}{2} - \psi(1) - \frac{1}{2}\right]\right\}. \tag{7}$$

Agar (7) tenglama $r = \xi, \quad n = 0$ quyidagi ko'rinishni oladi

$$U_\theta^{(0)}(\xi) = U_{\theta,1}^{(0)} + \xi U_{\theta,0}^{(0)} \tag{8}$$

Ushbu (8) formula buralma tebranish tenglamalaridan topilgan $U_{\theta,0}^{(0)}$ va $U_{\theta,1}^{(0)}$ lar vositasida $U_\theta^{(0)}$ ko'chishni r va z koordinatalar bo'yicha talab qilingan aniqlikda t vaqtning istalgan payti uchun aniqlashga imkon beradi. Siljishni quyidagich c_1 va c_2 o'zgarmmaslar orqali ham yozishimiz mumkin

$$U_\theta^{(0)}(r,z,t) = c_1 U_{\theta,0}^{(0)} + \xi c_2 U_{\theta,1}^{(0)}, \tag{9}$$

bunda

$$c_1 = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}\lambda_2^n; \qquad c_2 = \frac{1}{r} + \sum_{n=0}^{\infty}\eta_{1,n}(r)\frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}\lambda_2^{n+1}.$$

$$\lambda_2^n = \left[\rho_0 M_0^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]^n, \; n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Endi (3) tenglikdan $\sigma_{r\theta}^{(00)}$ *va* $\sigma_{z\theta}^{(00)}$ kuchlanishlarni $\sigma_{r\theta}^{(0)}$ *va* $\sigma_{z\theta}^{(0)}$ almashtirishlar va Ψ_{1m} patensial funksiya orqali topsak u holda quyidagi kuchlanishni aniqlash tenglikka ega bo'lamiz

$$\sigma_{r\theta}^{(0)} = \int_0^\infty \left.\begin{matrix}\sin kz \\ -\cos kz\end{matrix}\right\} dk \int_{(l)} \sigma_{r\theta}^{(00)} e^{pt} dp, \qquad \Psi_{1m} = \int_0^\infty \left.\begin{matrix}\sin kz \\ -\cos kz\end{matrix}\right\} dk \int_{(l)} \Psi_{1m}^{(0)} e^{pt} dp,$$

$$\sigma_{r\theta}^{(0)} = \mu_0 \left[2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r/2)^{2n+2}}{n!(n+2)!} \lambda_0^{n+1} U_{\theta,0}^{(0)} + \xi \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{2,n}(r) \frac{(r/2)^{2n+2}}{n!(n+2)!} \lambda_0^{n+2} U_{\theta,1}^{(0)} + \frac{\xi}{2}\left(\lambda_0 - \frac{4}{r^2} \right) U_{\theta,1}^{(0)} \right] \quad (10)$$

$$\sigma_{z\theta}^{(0)} = \int_0^\infty \left.\begin{matrix}\cos kz \\ \sin kz\end{matrix}\right\} dk \int_{(l)} \sigma_{z\theta}^{(00)} e^{pt} dp, \; \Psi_{1m} = \int_0^\infty \left.\begin{matrix}\sin kz \\ -\cos kz\end{matrix}\right\} dk \int_{(l)} \Psi_{1m}^{(0)} e^{pt} dp$$

$$\sigma_{z\theta}^{(0)} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial z} \left[2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} \lambda_0^n U_{\theta,0}^{(0)} + \xi \left(\frac{1}{r} + \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{1,n}(r) \frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} \lambda_0^{n+1} \right) U_{\theta,1}^{(0)} \right] \quad (11)$$

Endi bu topilgan (10) va (11) kuchlanishlarni ifodalarini (5) chegaraviy shartning birinchi va ikkinchi tengligiga qo'yib ko'chishlarni nolinchi yaqinlashish orqali qarasak u holda quyidagi tenglikni hosil bo'ladi

$$\begin{cases} r_1 \left[\frac{r_1}{4} \lambda_0 - f \frac{\partial}{\partial z} \right] U_{\theta,0}^{(0)} + \xi \left\{ \frac{1}{2} \lambda_0 - \frac{2}{r_1^2} - \frac{f}{r_1} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{r_1}{2} \lambda_0 \left(\eta_{2,0}(r_1) \frac{r_1}{4} \lambda_0 - f \eta_{1,0}(r_1) \frac{\partial}{\partial z} \right) \right\} U_{\theta,1}^{(0)} = \\ = \left[1 + f^2 \right] \mu^{-1} \left[f_{ns_1}^{(i)}(z,t) \right]; \\ r_2 \left[\frac{r_2}{4} \lambda_0 - \frac{\mu_1}{\mu_0} \left(R r_2 - f \frac{\partial}{\partial z} \right) - f \frac{\partial}{\partial z} \right] U_{\theta,0}^{(0)} + \xi \left\{ \frac{1}{2} \lambda_0 - \frac{2}{r_2^2} - \frac{1}{r_2} \frac{\mu_1}{\mu_0} (1-f) - \frac{f}{r_2} \frac{\partial}{\partial z} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \lambda_0 \left(\eta_{2,0}(r_2) \frac{r_2}{4} \lambda_0 - f \eta_{1,0}(r_2) \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\mu_1}{\mu_0} (1-f) \eta_{1,0}(r_2) \right) \right\} U_{\theta,1}^{(0)} = \left[1 + f^2 \right] \mu_0^{-1} \left[f_{ns_1}^{(i)}(z,t) \right]; \end{cases} \quad (12)$$

Bu yerda

$$\lambda_0^n = \left[\frac{1}{\nu'} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]^n, \; n = 0,\, 1,\, 2, \ldots. \; \eta_{1,n}(r) = \ln \frac{r}{\xi} + \frac{n}{2(n+1)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$\eta_{2,n}(r) = \ln \frac{r}{\xi} + \frac{n^2 + n - 1}{2(n+1)(n+2)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Xulosa. Ushbu (12) tenglamalar elastik konussimon qobiq oraliq sirti nuqtalarining ko'chishlari va bosh qismlariga nisbatan qobiq aylanma tebranishlarining umumiy tenglamalaridan iborat. Olingan bu oxirgi tenglamalar sistemasi buralma tebranishlarining, oraliq yuzasi nuqtalari siljishining asosiy qismlariga nisbatan umumiy tenglamalari hisoblanadi. Ularning o'ng tomonidagi hadlar qobiq yuzalariga tatbiq etilgan tashqi kuchlarni to'g'ri hisobga oladi.

Adabiyotlar

1. Kh.Khudoynazarov and Z.B.Khudoyberdiyev (2020) Unsteady vibrations of a three-layer plate with an asymmetric structure. IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science 614. 012061 doi:10.1088/1755-1315/614/1/012061.
2. I.G.Fillipov., K.Kudainazarov. Boundary – value problems of longitudinal vibrations of circular cylindrical shells. International applied mechaninics. 34(12), 1204-1210.
3. Khudoynazarov Kh.Kh., Khalmuradov R.I., Yalgashev B.F. (2021) Ljngitudinal-radial vibrations of a elastic celindrical shel filled with a viscous compressible liquid //*Tomsk state university. Journal of Mathematics and Mechanics*. 69. 139-154. doi 10.17223/19988621/69/11.
4. R.I.Khalmuradov and B.F.Yalgashev (2020) Frequency analysis of longitudinal-radial vibrations of a cylindrical shell. *IOP Conf. Series: Earth and* Environmental Science 614 012087 doi:10.1088/1755-1315/614/1/012087
5. Худойназаров Х. Нестационарное взаимодействие цилиндрических оболочек и стержней с деформируемой средой. - Ташкент, изд-во мед. Литер. имени Ибн Сино. 2003. - 350 с.
6. Худойназаров Х.Х., Буркутбоев Ш.М. (2017) Математическая модель крутильных колебаний цилиндрического слоя с учетом протекающей жидкости и вращения // Математическое моделирование и численные методы. № 4. С. 38–56.

GRAF USTIDA KO'P QUVUVCHILAR ISHTIROKIDA DIFFERENSIAL O'YIN

Kurbanov A. A.
Toshkent davlat texnika universiteti
ado19920200@mail.ru

Masalaning qo'yilishi

Tomoni 1 ga teng kvadratlardan tashkil topgan katakli G graf qirralari ustida harakatlanuvchi $P_i, i = 1,2,3,4$ va E nuqtalar ishtirokidagi differensial o'yinni qaraymiz. Odatda P_i-lar quvuvchi nuqtalar, E-esa qochuvchi nuqta deb nomlanadi.

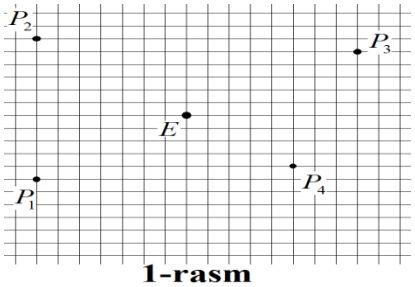
Quyida keltirilgan qonuniyat bilan harakatlanuvchi quvuvchi nuqtalarning maqsadi qandaydir $i = i_0$ va $t = t_1$ da $x_{i_0}(t_1) = y(t_1)$ shartga erishish ya'ni qochuvchini tutish, qochuvchining maqsadi aksincha, bunday bo'lishga yo'l qo'ymaslik. Bizning maqsadimiz quyida berilgan qonuniyatlar bilan harakatlanuvchi quvuvchilar qurshovida turgan qochuvchining maksimal qochib yura olish sohasini aniqlashdan iborat.

$$\dot{x}_i = u_i,\ \ u_i \in P = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\},\ \ x_i(0) = x_i^0, |u_i| = 2,$$

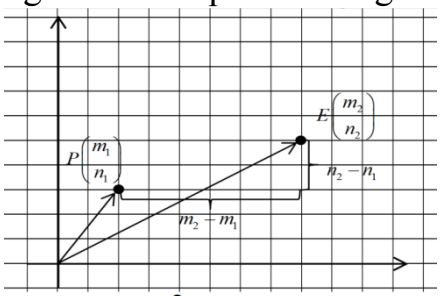
$$\dot{y} = v,\ \ v \in Q = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},\ \ y(0) = y^0, |v| = 1.$$

Olingan natijalar, teorema va isbotlar

Aytaylik quvuvchilar qochuvchini quyidagi tartibda qurshab turgan bo'lsin



1-rasm



2-rasm

(1-rasm). Ushbu holatda qochuvchi maksimal qochib bora olishi mumkin bo'lgan qavariq ko'pburchak qanday bo'lishi mumkin degan savolga javob beramiz.

Biz ushbu savolga javob berish uchun bitta quvuvchi va bitta qochuvchi ishtirokidagi o'yinni qaraymiz va natijasini to'rtta quvuvchi va bitta qochuvchi ishtirokidagi o'yinga tadbiq etamiz. Aytaylik quvuvchi nuqtamizni koordinatasi $P\begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}$ va qochuvchi nuqtamizni koordinatalari esa $E\begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}$ bo'lsin (2-rasm). Quvuvchining tezligi $|u| = 2$ qochuvchiniki esa $|v| = 1$ ga teng. Fizika fanidan bizga ma'lumki A nuqtada turgan ob'yekt v_1 tezlik bilan harakatlanib o'zi bilan bir hil yo'nalishda v_2 tezlik bilan harakatlanayotgan B ob'yektni qancha vaqtda quvib yetish vaqti $t_{\max} = \dfrac{S}{v_1 - v_2}$ formula bilan topiladi. Demak bizning o'ynimizga ko'ra qochuvchi $t_{\max} = \dfrac{(m_2 - m_1) + (n_2 - n_1)}{|u| - |v|}$ vaqt qochuvchiga tomon harakatlanmasdan qochib yura olishi mumkin ekanligini ko'rsatadi. U holda E qochuvchi o'zi turgan nuqtadan

$$U_1 = \left\{ E_1\begin{pmatrix} m_2 + t_{\max} \\ n_2 \end{pmatrix}, E_2\begin{pmatrix} m_2 + t_{\max} - 1 \\ n_2 + 1 \end{pmatrix}, E_3\begin{pmatrix} m_2 + t_{\max} - 2 \\ n_2 + 2 \end{pmatrix}, \ldots, E_{t_{\max}+1}\begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 + t_{\max} \end{pmatrix} \right\},$$

$$U_1 = \left\{ E_j\begin{pmatrix} m_2 + t_{\max} - i \\ n_2 + i \end{pmatrix} \middle| \ i = \overline{0, t_1};\ j = 1, \overline{(t_{\max} + 1)} \right\}$$

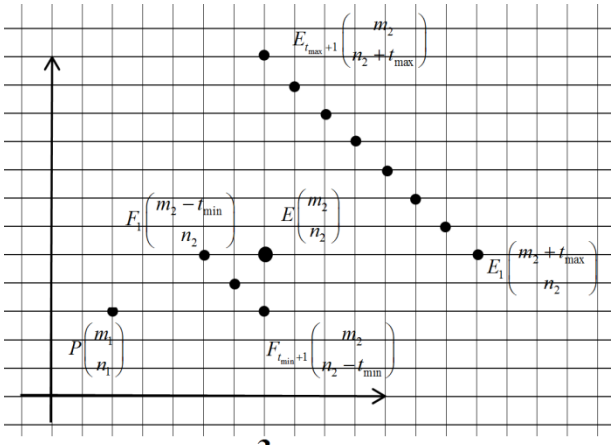
nuqtalar to'plamigacha maksimal qochib yura olishi mumkin ekan. Lekin qochuvchi quvuvchiqa qarama-qarshi tomonga emas balki u tomonga ham bir necha bor harakatlanib ham qandaydur nuqtalargacha ham harakatlanib qochib yura olishi mumkin. Qochuvchining quvuvchiga tomomn ko'pi bilan qochib yura olish vaqtini topsak $t_{\min} = \dfrac{(m_2 - m_1) + (n_2 - n_1)}{|u| + |v|}$ ga teng bo'ladi. Demak qochuvchining $t_{\min}$ vaqtdan foydalanib maksimal yetib bora olishi mumkin bo'lgan U_2 nuqtalar to'plami quyidagicha bo'ladi.

$$U_2 = \left\{ F_1\begin{pmatrix} m_2 - t_{\min} \\ n_2 \end{pmatrix}, F_2\begin{pmatrix} m_2 - t_{\min} - 1 \\ n_2 - 1 \end{pmatrix}, F_3\begin{pmatrix} m_2 - t_{\min} - 2 \\ n_2 - 2 \end{pmatrix}, \ldots, \mathrm{F}_{t_{\min}+1}\begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 - t_{\min} \end{pmatrix} \right\},$$

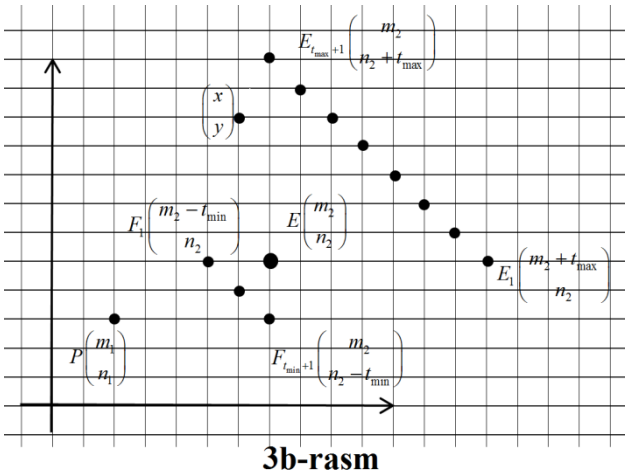
$$U_2 = \left\{ F_j\begin{pmatrix} m_2 - t_{\min} + i \\ n_2 - i \end{pmatrix} \middle| \; i = \overline{0, t_{\min}},\; j = \overline{1, t_{\min}+1} \right\}.$$

Demak qochuvchining maksimal va minimal qochib borishi mumkin bo'lgan E_i va F_i nuqtalarning geometrik o'rinlari 3a-rasmda ko'rsatilganidek bo'lar ekan.

Endi esa biz qochuvchining qanchadur vaqt quvuvchi tomonga qanchadur vaqt esa



3a-rasm



3b-rasm

quvuvchiga qarama-qarshi harakati davomida maksimal yetib bora olishi mumkin bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rnini aniqlashga harakat qilamiz ya'ni F_1 va $E_{t_{\max}+1}$ nuqtalarning orasida maksimal yetib bora olishi mumkin bo'lgan nuqtalarni aniqlaymiz. Aytaylik qochuvchi aralash harakati davomida F_1 va $E_{t_{\max}+1}$ nuqtalar orasidagi qandaydur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ koordinatali nuqtada qo'lga tushdi deylik (3b-rasm). U holda qochuvchining shu nuqtagacha yetib borguncha bosib o'tgan yo'li quvuvchining bosib o'tgan yo'lidan ikki martta kichik bo'ladi ya'ni ushbu tenglik

$2\left(\left|y-n_2\right|+\left|m_2-x\right|\right)=\left|y-n_1\right|+\left|x-m_1\right|$ o'rinli bo'ladi. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ koordinatali nuqtaning joylashuv o'rniga qarab bemalol $x>m_1$, $x<m_2$ va $y>m_1$, $y>m_2$ aytishimiz mumkin. U holda $2\left(\left|y-n_2\right|+\left|m_2-x\right|\right)=\left|y-n_1\right|+\left|x-m_1\right|$ tenglikdagi modullarni quyidagicha ochishimiz mumkin.

$$2\left(y-n_2+m_2-x\right)=y-n_1+x-m_1$$

$$2y-2n_2+2m_2-2x=y-n_1+x-m_1$$

$$y=2n_2-2m_2+3x-n_1-m_1$$

$$y=3x+2\left(n_2-m_2\right)-\left(n_1+m_1\right) \qquad (1)$$

Ohirgi tenglikdan ko'rinib turibdiki qochuvchining aralash harakatlari natijasida qo'lga olinishi mumkin bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rni $y=3x+2\left(n_2-m_2\right)-\left(n_1+m_1\right)$ to'g'ri chiziqda yotar ekan. Lekin bu tog'ri chiziq koordinatalar tekisligida $2\left(n_2-m_2\right)-\left(n_1+m_1\right)$ koeffitsiyentga bog'liq ravishda har xil o'tishi mumkin. Biz esa bu to'g'ri chiziq aynan F_1 va $E_{t_{\max}+1}$ nuqtalar orqali o'tishini ko'rsatamiz. Uning uchun shu ikki nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzamiz va uni soddalashtirib

$$\frac{x-m_2-t_{\min}}{t_{\min}}=\frac{y-n_2}{t_{\max}}$$

$$y=\frac{t_{\max}}{t_{\min}}\left(x-m_2+t_{\min}\right)+n_2$$

$$y=3\left(x-m_2+t_{\min}\right)+n_2$$

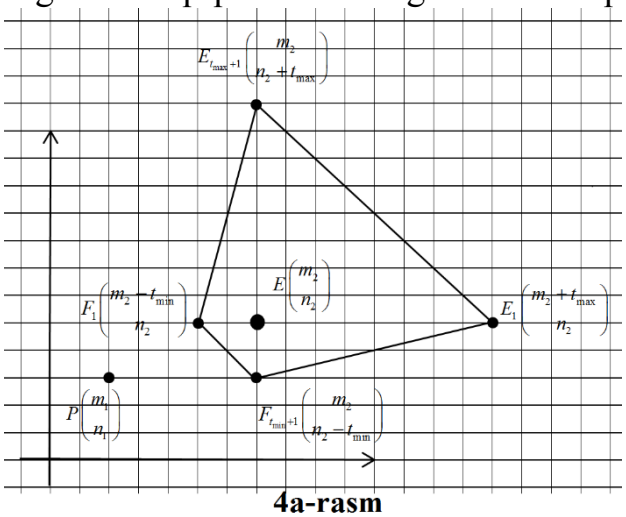
$$y=3\left(x-m_2+\frac{m_2-m_1+n_2-n_1}{3}\right)+n_2$$

$$y=3x-3m_2+m_2-m_1+n_2-n_1+n_2$$

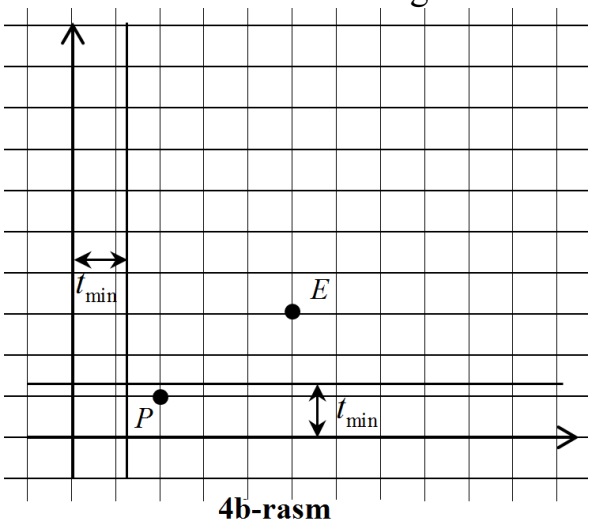
$$y=3x-2m_2+2n_2-m_1-n_1$$

$$y=3x+2\left(n_2-m_2\right)-\left(n_1+m_1\right)$$

yuqoridagi yakuniy tenglamani olib (1) tenglama bilan bir xil ekanligini ko'rsatamiz. Demak (1) tenklik bilan aniqlangan to'g'ri chiziq F_1 va $E_{t_{\max}+1}$ nuqtalar orqali o'tar ekan. Huddi shu tariqa E_1 va $F_{t_{\min}+1}$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq qochuvchining maksimal qochib bora olishi mumkin bo'lgan sohani



4a-rasm



4b-rasm

quyidan chegaralovchi chiziq bo'lishini ko'rsatishimiz mumkin. Demak qochuvchi maksimal qochib bora olishi mumkin bo'lgan soha 4a-rasmda ko'rsatilganidek diagonallari perpendikulyar bo'lgan teng yonli trapetsiyadan iborat bo'lar ekan. Bunday trapetsiya qochuvchi koordinata o'qlaridan minimal $t_{\min}$ masofa uzoqlikda joylashganida hosil bo'ladi (4b-rasm).

Teorema. Koordinata tekisligining birinchi choragida koordinata o'qlaridan $t_{\min}$ masofada turgan qochuvchining koordinata boshida turgan qochuvchiga tutilmasdan maksimal qochib yura olishi mumkin bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rni uchlari $\begin{pmatrix} m_2-t_{\min} \\ n_2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} m_2 \\ n_2-t_{\min}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} m_2 \\ n_2+t_{\max}\end{pmatrix}$ va $\begin{pmatrix} m_2+t_{\max} \\ n_2\end{pmatrix}$ nuqtalarda bo'lgan trapetsiyada yotadi.

Adabiyotlar

1. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А. {\itshape Оптимальный поиск в условиях конфликта.} Л.: Изд-во ЛГУ, 1987.
2. Andreae T. {\itshape Note on a pursuit game played on graphs //} Discrete Appl. Math. 1984. №8. P. 1-11.
3. Nowakowski R., Winkler P. {\itshape Vertex-to-vertex pursuit in a graph //} Discrete Math. 1-83. №43. P. 235-239.
4. Айзекс Р. Дифференциальные игры. – М.: Мир, 1967 – С. 480.
5. Красовский Н. Н., Субботин А. И., Позиционные дифференциальные игры, М., 1974

KEYNSNING DINAMIK MODELI

[1]Mamadiyeva G. B., [2]Davlatov J. E.
[1]O'zbekiston Milliy Universiteti
[2]Toshkent Davlat transport universiteti
gulidilkash@gmail.com
jasurbek.davlatov.90@mail.ru

Bizga ma'lumki dinamik sistemalar mavzusi juda keng qamrovli bo'lib uni fizikada, matematikada qolaversa iqtsodiyotda ham uchratishimiz mumkin. Dinamik sistemalarni Keynsning dinamik modeli orqali tushuntirishga harakat qilamiz. Eslatib o'tamizki, keysning dinamik modeli quyidagicha ko'rinishga ega:

$$\frac{dy}{dt} + (1-c)Y = C + I \tag{1}$$

bu yerda Y-YaIM, C-iste'molchilarning qayd qilinmagan qismi.

Modelning chiqish o'zgaruvchisi y harfi bilan belgilanadi, chunki y harfi tasvir (образ) uchun mo'ljallangan.

I – investitsiyalar, c – iste'mol qilishga moyillik $(0 < c < 1)$, $(1-c)$ – to'planishga moyillik),

tenglamaning o'ng va chap qismini $(1-c)$ ga bo'lganimizda quyidagiga ega bo'lamiz.

$$T\frac{dy}{dt} + y = y_{\xi} \tag{2}$$

bu yerda $T = \frac{1}{(1-c)}$ – inertsion bog'lanishning doimiyligi, to'planishga moyillikka teskari proporsionaldir.

$y_{\xi} = \frac{C+I}{1-c}$ – I investitsiyalarning ma'lum hajmi uchun YaIMning barqaror holati qiymati.

Iqtisodiyotning holatlari dastlabki momentda $t = 0$ muvozanat holatida bo'lgan (2) inertsial bog'lanish shaklida ko'rib chiqamiz,

$$y(0) = y^0{}_{\xi} = \frac{C + I_0}{1-c} \tag{3}$$

Shundan so'ng sarmoyalar I_0 dan $I = I_0 + \Delta I, \Delta I > 0$ u holda (2) ning o'ng qismini quyidagi ikki shart bilan ifodalashimiz mumkin:

$$y_{\xi} = \frac{C+I}{1-c} + \frac{\Delta I}{1-c} = y^{0}{}_{\xi} + x \qquad (4)$$

Bu yerda $x = \frac{\Delta I}{1-c}$

O'z navbatida (2) tenglamaning yechimini ikkita mos qismga ajratish mumkin:

$$y(t) = y_{\xi}{}^{0} + \eta(t)$$

bu yerda $\eta(t) - y(t)$ o'tish jarayonining o'zgaruvchan qismidir.

O'zgaruvchan $\eta(t)$ tenglamani qanoatlantiradi.

$$T\frac{dy}{dt} + \eta = x(t)\,,\ \eta(0) = 0 \qquad (5)$$

$$\eta = x\left(1 - e^{-\frac{T}{t}}\right), \qquad (6)$$

va hokazo.

Shu sababli, o'tish jarayoni tugagandan so'ng, iqtisodiyot haqiqatdan ham y_{ξ} holatiga o'tadi:

$$\lim_{n\to\infty} y(t) = y_{\xi}{}^{0} + x = \frac{C_0 + I_0}{1-c} + \frac{\Delta I}{1-c} = \frac{C_0 + I_0}{1-c} = y_{\xi} \qquad (7)$$

Adabiyotlar

1. Колемаев В.А. Математическая экономика Москва 2002-г
2. Колемаев В.А. Математические модели макроэкономики. М:1994
3. Самуельсон П. Экономика. М:1992
4. www.ziyonet.uz
5. www.wikipedia.uz

BO'LAKLI DOIMIY ARGUMENTLI DIFFERENSIAL TENGLAMANING DAVRIY YECHIMLARI

[1]Muminov M.I., [2]Radjabov T.A.

[1]Malayziya texnologiya universiteti,

[2]Samarqand davlat universiteti

mukhiddin@utm.my ,radjabovtirkash@yandex.com

Bu maqolada, biz bo'lakli konstanta argumentli differentsial tenglamaning N – davriy yechimini topish metodini keltiramiz

$$T'(t)+a^2T(t)+bT([t])=f(t),\quad t>0, \tag{1}$$

bu yerda $f(t)$ funksiya $[0,\infty)$ intervalda $N-$davriy va uzluksiz.

(1) tenglama yechimi haqida ta'rifni keltiramiz.

Ta'rif. $T(t)$ funksiya *(1) tenglamaning yechimi deyiladi, agar u quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:*

(i) $T(t)$ *funksiya* R_+*da uzluksiz;*

(ii) $T'(t)$ R_+ *da mavjud va uzluksiz,* $[t]\in R_+$ *nuqtalarda esa faqat bir tomonlama hosilalar mavjud;*

(iii) $T(t)$ *funksiya* R_+*da (1) tenglamani qanoatlantiradi,* $[t]\in R_+$ *nuqtalardan tashqari joylarda.*

Bo'lakli doimiy argumentli differentsial tenglamaning $2-$**davriy yechimlari.** Biz dastlab, $f(\cdot)$ 2-davriy funksiya bo'lgan hol uchun, (1) tenglamaning davriy yechimlarini topish metodini keltiramiz.

(1) *dan* T *funksiyani* $2-$*davriy funksiya sifatida izlaymiz.*

(1) ni integrallab quyidagi tenglikka ega bo'lamiz

$$T(t)=e^{-a^2t}[T(0)+\Phi(t)-\int_0^t be^{a^2s}T([s])ds].$$

bu yerda

$$\Phi(t)=\int_0^t e^{a^2s}f(s)ds.$$

$T(t)$ funksiya ushbu ko'rinishda ifodalanadi

$$T(t)=\begin{cases} e^{-a^2t}[\Phi(t)+\left(1+\dfrac{b}{a^2}(1-e^{a^2t})\right)T(0)], & t\in[0,1), \\ e^{-a^2t}[\Phi(t)+\left(1+\dfrac{b}{a^2}(1-e^{a^2t})\right)T(0)+\dfrac{b}{a^2}(e^{a^2}-e^{a^2t})T(1)], & t\in[1,2). \end{cases} \tag{2}$$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz

$$P_i(t)=\frac{b}{a^2}(e^{a^2(i-t)}-1), i=1,2,3,...$$

$$N_i(t)=\frac{b}{a^2}(e^{a^2(i-t)}-e^{a^2(1+i-t)}), i=1,2,3,...$$

U holda (2) ushbu ko'rinishda ifodalanadi

$$T(t)=\begin{cases} \left(e^{-a^2t}+P_0(t)\right)T(0)+e^{-a^2t}\Phi(t), & t\in[0,1), \\ \left(e^{-a^2t}+N_0(t)\right)T(0)-P_1(t)T(1)+e^{-a^2t}\Phi(t), & t\in[1,2). \end{cases} \tag{3}$$

Bundan ko'rinib turibdiki, (3) ning o'ng tomoni faqat $T(0)$ va $T(1)$ noma'lum sonlarni saqlaydi. $T(\cdot)$ uzluksiz va davriy bo'lganligi uchun $T(0)=T(2)$. (3) dan quyidagi tenglamalar sistemasini keltirib chiqaramiz

$$\begin{cases}\left(\frac{b}{a^2}(1-e^{-a^2})-e^{-a^2}\right)T(0)+T(1)=e^{-a^2}\Phi(1),\\ \left(1+\frac{b}{a^2}(e^{-a^2}-e^{-2a^2})-e^{-2a^2}\right)T(0)+\frac{b}{a^2}(1-e^{-a^2})T(1)=e^{-2a^2}\Phi(2).\end{cases}$$

yoki

$$\begin{cases}(E_1-e^{-a^2})T(0)+T(1)=e^{-a^2}\Phi(1)\\ (1+E_2-e^{-2a^2})T(0)+E_1T(1)=e^{-2a^2}\Phi(2)\end{cases} \tag{4}$$

Bu yerda

$$E_k := E_k(a,b)=\frac{b}{a^2}(e^{-(k-1)a^2}-e^{-ka^2}),\quad i=1,2,3,... \tag{5}$$

Bu yerda $\Delta_2(a,b)$ esa $M_2(a,b)$ matritsaning determinanti

$$M_2(a,b)=\begin{pmatrix}E_1-e^{-a^2} & 1\\ 1+E_2-e^{-2a^2} & E_1\end{pmatrix}$$

Shunday qilib, (1) tenglamaning 2-davriy yechimi uchun quyidagi teoremaga ega bo'lamiz.

Teorema 1. *$f(\cdot)$ 2–davriy funksiya bo'lsin.*

(i) Agar $\Delta_2(a,b)\neq 0$ bo'lsa, u holda (1) tenglama (3) ko'rinishda yagona 2-davriy yechimga ega, $(T(0),T(1))$ esa (4) ning yagona yechimi.

(ii) Agar $\Delta_2(a,b)=0$ va $\Phi(1)=\Phi(2)=0$ bo'lsa, u holda (1) tenglama cheksiz ko'p 2-davriy yechimga ega. Yechimning ko'rinishi quyidagicha;

$$T_\alpha(t)=\begin{cases}\alpha\left(e^{-a^2t}+P_0(t)\right)T(0)+e^{-a^2t}\Phi(t),\ t\in[0,1),\\ \alpha\left(e^{-a^2t}+N_0(t)\right)T(0)+\alpha P_1(t)T(1)+e^{-a^2t}\Phi(t),\ t\in[1,2).\end{cases}$$

Bu yerda $(T(0),T(1))$ nolga mos keluvchi $M_2(a,b)$ matritsaning xos vektori, α esa ixtiyoriy son.

(iii) Agar $\Delta_2(a,b)=0$ va $rank[M_2(a,b)]<rank[M_2(a,b),\Phi^T]$, $\Phi=(\Phi(1),\Phi(2))$ bo'lsa, u holda (1) tenglamaning 2-davriy yechimi yo'q.

***n*-davriy yechim**. (1) tenglamani f davri $n>3$ bo'lgan hol uchun yechamiz. $T(\cdot)$ funksiyani davriy funksiya ko'rinishida izlaymiz, ya'ni $T(t)=T(t+n)$. Ma'lumki $T(\cdot)$ yechining ko'rinishi quyidagicha bo'ladi

$$T(t)=\begin{cases}\left(e^{-a^2t}+P_0(t)\right)T(0)+e^{-a^2t}\Phi(t), & t\in[0,1),\\ \left(e^{-a^2t}+N_0(t)\right)T(0)+P_1(t)T(1)+e^{-a^2t}\Phi(t), & t\in[1,2),\\ \ldots\ldots\ldots\\ e^{-a^2t}T(0)+\sum_{k=0}^{n-2}N_k(t)T(k)+P_{n-1}(t)T(n-1)+e^{-a^2t}\Phi(t), & t\in[n-1,n).\end{cases} \tag{6}$$

(6) ning o'ng tomoni faqat $T(0),T(1),\ldots,T(n-1)$ noma'lum sonlarni saqlaydi.

$T(\cdot)$ ning davriylik shartidan foydalanib, (6) dan quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

$$\begin{cases} (E_1 - e^{-a^2})T(0) + T(1) = e^{-a^2}\Phi(1) \\ (E_2 - e^{-2a^2})T(0) + E_1T(1) + T(2) = e^{-2a^2}\Phi(2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (E_{n-1} - e^{-(n-1)a^2})T(0) + \sum_{k=2}^{n-1} E_{n-k}T(k-1) + T(n-1) = e^{-(n-1)a^2}\Phi(n-1) \\ (1 + E_n - e^{-n)a^2})T(0) + \sum_{k=1}^{n-1} E_{n-k}T(k) = e^{-na^2}\Phi(n), \end{cases} \tag{7}$$

bu yerda E_k (5) da aniqlangan.

$\Delta_n(a,b)$ bilan (7) sistemaning determinantini belgilaymiz. U holda, $\Delta_n(a,b)$ ushbu matritsaning determinanti bo'ladi

$$M_n(a,b) = \begin{pmatrix} E_1 - e^{-a^2} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ E_1 - e^{-2a^2} & E_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ E_{n-1} - e^{-(n-1)a^2} & E_{n-2} & E_{n-3} & \cdots & 1 \\ 1 + E_1 - e^{-na^2} & E_{n-1} & E_{n-2} & \cdots & E_1 \end{pmatrix}$$

Bu natijalardan xulosa qilib quyidagi teoremaga ega bo'lamiz.

Teorema 2. *$f(\cdot)$ $n-$davriy funksiya bo'lsin.*

(i) Agar $\Delta_n(a,b) \neq 0$ bo'lsa, u holda (1) tenglama (6) ko'rinishda yagona n-davriy yechimga ega, $(T(0),T(1),\ldots,T(n-1))$ esa (7) ning yagona yechimi.

(ii) Agar $\Delta_n(a,b) = 0$ va $\Phi(1) = \Phi(2) = \cdots\Phi(n) = 0$ bo'lsa, u holda (1) tenglama cheksiz ko'p n-davriy yechimga ega. Yechimning ko'rinishi quyidagicha;

$$T_\alpha(t) = \begin{cases} \alpha\left(e^{-a^2t} + P_0(t)\right)T(0) + e^{-a^2t}\Phi(t), t \in [0,1), \\ \alpha\left(e^{-a^2t} + N_0(t)\right)T(0) + \alpha P_1(t)T(1) + e^{-a^2t}\Phi(t), t \in [1,2), \\ \cdots\cdots \\ \alpha(e^{-a^2t}T(0) + \sum_{k=0}^{n-2} N_k(t)T(k) + P_{n-1}(t)T(n-1)) + e^{-a^2t}\Phi(t), t \in [n-1,n). \end{cases}$$

Bu yerda $(T(0),T(1),\ldots,T(n-1))$ nolga mos keluvchi $M_n(a,b)$ matritsaning xos vektori, α esa ixtiyoriy son.

(iii) Agar $\Delta_n(a,b) = 0$ va $rank[M_n(a,b)] < rank[M_n(a,b),\Phi^T]$, $\Phi = (\Phi(1),\ldots,\Phi(n))$ bo'lsa, u holda (1) tenglamaning n-davriy yechimi yo'q.

Teorema 1 va Teorema 2 larning isboti [2] dagi Teorema 2 ning isboti kabi bo'ladi.

Adabiyotlar

1. K. L. Cooke and J. Wiener, *A survey of differential equations with piecewise continuous arguments*, Delay Differential Equations and Dynamical Systems, vol. 1475 (1991), 115, Springer, Berlin, Germany.
2. Mukhiddin I. Muminov, *On the method of finding periodic solutions of second-order neutral differential equations with piecewise constant arguments*. Advances in Difference Equations (2017), 2017:336, DOI 10.1186/s13662-017-1396-7.
3. Mukhiddin I. Muminov and Ali H. M. Murid, *Existence conditions for periodic solutions of second- order neutral delay differential equations with piecewise constant arguments*. Open Mathematics,Volume 18, Issue 1, Pages 93-105, DOI: https://doi.org/10.1515/math-2020-0010.
4. Veloz and M. Pinto. Existence, computability and stability for solutions of the diffusion equation with general piecewise constant argument. J. Math. Anal. Appl. 426(1): 330-339, 2015.
5. Wiener, J., Debnath, L. Partial differential equations with piecewise constant delay, Int. J. Math. Math. Sci. 14 (1991) 485-496.

KOSHI MASALASI YECHIMINI REGULYARLASHTIRISH

Homidov F. F.
Buxoro muhandislik texnologiya institute

Endi faraz qilamiz $U(y)$va$T(\partial y,n)U(y)$ o'rniga S da ularning taqribiy qiymatlari $f_\delta(y)$ va $g_\delta(y)$ lar berilgan bo'lsin,

$$\max_S|U(y)-f_\delta(y)|+\max_S|T(\partial y,n)U(y)-g_\delta(y)|<\delta,\qquad 0<\delta<1.$$

Quyidagi funksiyani qurib olamiz

$$U_{\sigma\delta}(x)=\int_S[\Pi(y,x,\sigma)g_\delta(y)-f_\delta(y)\{T(\partial y,n)\Pi(y,x,\sigma)\}]ds_y,\qquad x\in D.$$

Quyidagi teorema o'rinli

1-teorema. *$U(x)\in A_\rho(D)$bo'lib, (3) shartni qanoatlantirsin. U holda*

$$|U(x)-U_{\sigma\delta}(x)|\le M^{1-\frac{x_2}{h}}C_\rho(x)\delta^{\frac{x_2}{h}}\left[\ln\left(\frac{M}{\delta}\right)\right]^3,\qquad x\in D,$$

bunda $\sigma=h^{-1}\ln\dfrac{M}{\delta}$, $C_\rho(x)=\displaystyle\int_{\partial D}\frac{ds_y}{r^2}$

Isbot. Integral tasvir ifodasi, yuqoridagi funksiyaning qurilishiga ko'ra va

$$|U(x)-U_\sigma(x)|\le MC(\rho,x)\sigma^3\exp(-\sigma x_2),\ x\in D,$$

va

$$|\Pi(y,x,\sigma)|+|T(\partial y,n)\Pi(y,x,\sigma)|\le\frac{C\sigma^3\exp(\sigma y_2-\sigma x_2)}{r^2}$$

baholashlarga ko'ra quyidagiga ega bo'lamiz

$$|U(x)-U_{\sigma\delta}(x)| \le \left| \int_{y_2=0} [\Pi(y,x,\sigma)\{T(\partial y,n)U(y)-g_\delta(y)\}+(U(y)-f_0(y))\{T(\partial y,n)\Pi(y,x,\sigma)\}]ds_y \right| +$$

$$+ \left| \int_S [\Pi(y,x,\sigma)\{T(\partial y,n)U(y)-g_\delta(y)\}+(U(y)-f_0(y))\{T(\partial y,n)\Pi(y,x,\sigma)\}]ds_y \right| \le$$

$$\le MC(\rho,x)\sigma^{3}\exp(-\sigma x_2)+\delta\int_S [|\Pi(y,x,\sigma)|+|T(\partial y,n)\Pi(y,x,\sigma)|]ds_y \le$$

$$MC(\rho,x)\sigma^{3}\exp(-\sigma x_2)+$$

$$+\delta\int_S \frac{C_2(\rho)\sigma^{3}(\sigma y_2-\sigma x_2)}{r^2}ds_y \le C(\rho,x)\sigma^{3}(M\exp(-\sigma x_2)+\delta\exp(h\sigma-\sigma x_2))=$$

$$=C(\rho,x)\sigma^{3}\exp(-\sigma x_2)(M+\delta\exp h\sigma).$$

Endi $M=\delta\exp h\sigma,$ deb olsak, u holda

$$|U(x)-U_{\sigma\delta}(x)| \le C(\rho,x)M^{1-\frac{x_2}{h}}h^{-3}\left(\ln\frac{M}{\delta}\right)^{3}\delta^{\frac{x_2}{h}}.$$

Teorema isbot bo'ldi.

Natija. *Quyidagi limitik tengliklar*

$$\lim_{\sigma\to\infty}U_\sigma(x)=U(x),\ \lim_{\delta\to 0}U_{\sigma\delta}(x)=U(x)$$

D *dagi ixtiyoriy kompakt sohada tekis bajariladi.*

Yuqoridagi natijalarni bir muncha umumlashtirish mumkin. S bo'lak quyidagi shartni kanoatlantirsin:

$\int_S \exp(-b_0 ch\rho_0|y^1|)ds_y<\infty,\quad 0<\rho_0<\rho$

$U(x)\in A_\rho(D)$ bo'lib, quyidagi chegaraviy o'sish shartini qanoatlantirsin

$$|U(y)|+|T(\partial y,n)U(y)| \le C\exp\left(a\cos\rho_1\left(y_2-\frac{h}{2}\right)\exp\rho_1|y_1|\right),\ y\in\partial D$$

S da berilgan $f_\delta(y),\ g_\delta(y)$ funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$|f_\delta(y)|+|g_\delta(y)| \le \exp\left(a\cos\rho_1\left(y_2-\frac{h}{2}\right)\cdot\exp\rho_1|y_1|\right),\ y\in S,$$

$$|U(y)-f_\delta(y)|+|T(\partial y,n)U(y)-g_\delta(y)| \le \delta\exp\left(a\cos\rho_1\left(y_2-\frac{h}{2}\right)\cdot\exp\rho_1|y_1|\right),\ y\in S,$$

bunda $0<\delta<1,\quad 0<\rho_1<\rho,\quad a\ge 0$. Olamiz

$$K(\omega)=\exp\left(\sigma\omega-bchi\rho_1\left(\omega-\frac{h}{2}\right)-b_1chi\rho_0\left(\omega-\frac{h}{2}\right)\right],$$

bunda $\omega=i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_2,\ 0<x_2<h,\ b\ge 0,\ b_1\ge b_0\left(\cos\rho_0\frac{h}{2}\right)^{-1}+\varepsilon,\ \varepsilon>0,$

$\alpha=|y_1-x_1|,\ b=2a\exp\rho_1|x_1|,\qquad \sigma=h^{-1}\ln\delta^{-1}.$

Bu shartlar ostida quyidagi belgilashni olamiz

$U_{\sigma\delta}(x)=\int_S [\Pi(y,x,\sigma)g_\delta(y)-f_\delta(y)\{T(\partial y,n)\Pi(y,x,\sigma)\}]ds_y, x\in D$

2-teorema. *Yuqoridagi shartlar bajarilganda quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi*

$$|U(x)-U_{\sigma\delta}(x)| \le C(x)\delta^{\frac{\mu_2}{h}}\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^3 \cdot \exp\left(2a\cos\rho_1\left(x_2-\frac{h}{2}\right)\cdot\exp\rho_1|x_1|\right), x\in D$$

bunda $C(x)=C(\rho)\int_{\partial D}\frac{1}{r^2}\exp(-b_0 ch\rho_0\alpha)\exp\left[\frac{b}{2}\cos\rho_1\frac{h}{2}\left(\exp\rho_1(|y_1|-|x_1|)-\exp\rho_1|y_1-x_1|\right)\right]ds_y$

Isbot. Yuqoridagi teoremalarning isbotidagidek

$$|U(x)-U_{\sigma\delta}(x)| = \int_S \left|[\Pi(y,x,\sigma)|+|T(\partial y,n)\Pi(y,x,\sigma)|\right]\cdot\left[|U(x)-f_\delta(y)|+|T(\partial y,n)U(y)-g_\delta(y)|\right]ds_y +$$

$$+\int_{y_2=0}\left|[\Pi(y,x,\sigma)|+|T(\partial y,n)\Pi(y,x,\sigma)|\right]\left[|U(y)|+|T(\partial y,n)U(y)|\right]ds_y \le$$

$$\le \delta\int_S \exp\left(a\cos\rho_1\left(y_2-\frac{h}{2}\right)\exp\rho_1|y_1|\right)\left|[\Pi(y,x,\sigma)|+|T(\partial y,n)\Pi(y,x,\sigma)|\right]ds_y +$$

$$+C\int_{y_2=0}\exp\left(a\cos\rho_1\frac{h}{2}\cdot\exp\rho_1|y_1|\right)\left|[\Pi(y,x,\sigma)|+|T(\partial y,n)\Pi(y,x,\sigma)|\right]ds_y$$

$$|\Pi(y,x,\sigma)|+|T(\partial y,n)\Pi(y,x,\sigma)|\right] \le \frac{C(\rho)}{r^2}\cdot\sigma^3\exp(\sigma(y_2-x_2))\cdot$$

$$\exp\left(\frac{-b}{2}\cos\rho_1\left(y_2-\frac{h}{2}\right)\exp\rho_1\alpha - b_1\cos\rho_0\left(y_2-\frac{h}{2}\right)ch\rho_0\alpha\right)\exp\left(b\cos\rho_1\left(x_2-\frac{h}{2}\right)\right)$$

$$\int_{\partial D}\left[\Pi(y,x)\{T(\partial_y,n)U(y)\}-U(y)\{T(\partial_y,n)\Pi(y,x)\}\right]ds_y = U(x)\cdot \quad \text{dan}$$

$$|U(x)-U_{\sigma\delta}(x)| \le C\sigma^2\delta\int_S \exp\left(a\cos\rho_1\left(y_2-\frac{h}{2}\right)\cdot\exp\rho_1|y_1|\right)\cdot\exp\left(b\cos\rho_1\left(x_2-\frac{h}{2}\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{r^2}\exp\sigma(y_2-x_2)\exp\left(-\frac{b}{2}\cos\rho_1\left(y_2-\frac{h}{2}\right)\exp\rho_1\alpha - b_0ch\rho_0\alpha\right)ds_y +$$

$$+C\sigma^3\int_{y_2=0}\exp\left[a\cos\rho_1\frac{h}{2}\exp\rho_1|y_1|\right]\exp\left(-\sigma x_2+b\cos\rho_1\left(x_2-\frac{h}{2}\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\exp\left(\frac{-b}{2}\cos\rho_1\frac{h}{2}\exp\rho_1\alpha\right)\cdot\exp(-b_0ch\rho_0\alpha)\frac{1}{r}ds_y \le C\sigma^3\cdot\delta\exp\sigma h\exp(-\sigma x_2)\cdot$$

$$\cdot\int_S\exp\left[\frac{b}{2}\cos\rho_1\left(y_2-\frac{h}{2}\right)\exp\rho(|y_1|-|x_1|)-\frac{b}{2}\cos\rho_1\left(y_2-\frac{h}{2}\right)\exp\rho_1\alpha\right]\cdot$$

$$\cdot\exp\left(-b\cos\rho_0\left(y_2-\frac{h}{2}\right)ch\rho_0\alpha\right)\exp\left[b\cos\rho_1\left(x_2-\frac{h}{2}\right)\right]\frac{1}{r}ds_y +$$

$$+C\sigma^3\exp(-\sigma x_2)\int_{y_2=0}\exp\left[\frac{b}{2}\cos\frac{\rho_1 h}{2}\exp\rho_1(|y_1|-|x_1|)-\frac{b}{2}\cos\frac{\rho_1 h}{2}\exp\rho_1|y_1-x_1|\right]$$

$$\cdot\exp\left[b\cos\rho_1\left(x_2-\frac{h}{2}\right)-b_0ch\rho_0\alpha\right]\frac{1}{r}ds_y \le \sigma^3(\delta\exp\sigma h+1)\exp(-\sigma x_2)\exp\left(b\cos\rho_1\left(x_2-\frac{h}{2}\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\int_{\partial D}\exp\left[\frac{b}{2}\cos\frac{\rho_1 h}{2}\left(\exp\rho_1(|y_1|-|x_1|)-\exp\rho_1|y_1-x_1|\right)\right]\cdot\exp[-b_0ch\rho_0\alpha]\frac{1}{r}ds_y.$$

Endi $\sigma = h^{-1}\ln\frac{1}{\delta}$ va $b = 2a\exp\rho_1|x_1|$, deb olsak teoremani isbotlagan bo'lamiz.

Adabiyotlar

1. Айзенберг Л.А. Формулы Карлемана в комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1990. 312 с.
2. Берс А., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. Мир, 1966. 351 с.
3. I.E. Niyozov ,F.F.Homidov The Cauchy problem for the system of the thermoelasticity. Ilmiy anjuman Toshkent 2017.may.
4. Ф.Ф. Хомидов. Критерий разрешимости задачи Коши для систем моментной теории упругости. СамДу магитраларнинг XVII илмий канффреяси 2017,№35, с. 74-76.

MATRISALI O‘YINNI CHIZIQLI DASTURLASH YORDAMIDA YECHISHNING DASTURIY TA’MINOTINI ISHLAB CHIQISH.

Radjabov T.A., Egamberdiyev T.X.
Samarqand davlat universiteti

Agar o‘yinning to‘lovlar matrisasi egar nuqtaga ega bo‘lmasa, optimal aralash strategiyalarni va o‘yin bahosini topish masalasi matrisa o‘lchamlari kattalashgan sari murakkablashadi.

To‘lovlar matrisasini tahlil qilish shuni ko‘rsatadiki, takrorlanuvchi va befoydaligi ayon bo‘lgan strategiyalardan voz kechish yordamida o‘yin o‘lchamini kichraytirish va natijada, uni yechishni bir muncha osonlashtirish mumkin.

To‘lovlar matrisasi $H=(a_{ij})$, $i\in M=\{1,2,...,m\}$, $j\in N=\{1,2,...,n\}$, bo‘lgan $m\times n-$ o‘lchamli o‘yin berilgan bo‘lsin. O‘yinning bahosini γ_H orqali, I va II o‘yinchi sof strategiyalarini A_i, B_j, aralash strategiyalarini esa $p=(p_1,...,p_m)$, $q=(q_1,...,q_n)$ orqali belgilaymiz.

1) $\gamma_H=\gamma_{H_{i'}}$ $(\gamma_H=\gamma_{H^{j'}})$;

2) I (II) o‘yinchining $G_{H_{i'}}$ $(G_{H^{j'}})$ o‘yindagi q^* (p^*) optimal aralash strategiyasi G_H o‘yinda ham optimal bo‘ladi;

3) agar $p^*_{(i')}=(p^*_i,...,p^*_{i'-1},p^*_{i'+1},...,p^*_m)$ I o‘yinchining $(q^*_{(j')}=(q^*_i,...,q^*_{j'-1},q^*_{j'+1},...,q^*_n)$ II o‘yinchining) $G_{H_{i'}}$ $(G_{H^{j'}})$ o‘yindagi optimal strategiyasi bo‘lsa, $p^*=(p^*_i,...,p^*_{i'-1},0,p^*_{i'+1},...,p^*_m)$ $(q^*=(q^*_i,...,q^*_{j'-1},0,q^*_{j'+1},...,q^*_n))$ I o‘yinchining (II o‘yinchining) G_H o‘yindagi optimal strategiyasi bo‘ladi.

Bu teoremadan foydalangan holda matritsali o‘yin o‘lchamini kichraytirish quyidagicha bajariladi.

Agar to‘lovlar matrisasining biror i - satri (j -ustuni) shu matrisa qolgan satrlari (ustunlari) qavariq kombinasiyasidan katta (kichik) bo‘lmasa, o‘yinni yechish

uchun shu satrni (ustunni) o‘chirish mumkin. Bunda I (II) o‘yinchining p^* (q^*) optimal strategiyasida $p_i^* = 0$ $(q_j^* = 0)$ deb olinadi.

2x2 - o‘yinni yechish

Endi yuqorida keltirilgan mulohazalardan foydalanib 2x2-o‘yinni yechish bilan shug‘ullanamiz.

Faraz qilaylik, 2x2 o‘yin $H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ to‘lovlar matrisasi bilan berilgan va u egar nuqtaga ega bo‘lmasin. o‘yinchilarning optimal strategiyalari $p^* = (p_1, p_2)$, $q^* = (q_1, q_2)$ va o‘yin bahosi γ ni topish talab qilinadi.

Quyidagi tasdiq o‘rinli: agar 2x2-o‘yinda egar nuqta mavjud bo‘lmasa, o‘yinchilarning ikkala strategiyalari ham aktiv bo‘ladi, ya’ni, $p_i > 0$, $i = 1,2$; $q_j > 0$, $j = 1,2$.

Shuning uchun, 1.3-teorema natijasiga ko‘ra, agar I o‘yinchi $p^* = (p_1, p_2)$ optimal aralash strategiyani qo‘llasa va II o‘yinchi $j = 1$ yoki $j = 2$ strategiyalaridan foydalansa, I o‘yinchining yutug‘i o‘yin bahosiga teng bo‘ladi, ya’ni, $a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 = \gamma$, $j = 1,2$ bajariladi. $p_1 + p_2 = 1$ ekanligini hisobga olsak,

$$\begin{aligned} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 &= \gamma, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 &= \gamma, \\ p_1 + p_2 &= 1, \end{aligned}$$

sistemaga ega bo‘lamiz. Bu sistema yagona yechimga ega deb faraz qilamiz, ya’ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & -1 \\ a_{12} & a_{22} & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21} \neq 0 \qquad (1.4)$$

bo‘lsin. Ko‘rsatish mumkinki, agar egar nuqta mavjud bo‘lmasa, (1.4) shart bajariladi. U vaqtda optimal $p^* = (p_1, p_2)$ strategiyaning komponentalari

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \quad p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \qquad (1.5)$$

formula bo‘yicha topiladi.

Xuddi shunga o‘xshash, 1.3-teorema natijasi asosida II o‘yinchi uchun

$$\begin{aligned} a_{11}q_1 + q_{12}q_2 &= \gamma, \\ q_{21}q_1 + a_{22}q_2 &= \gamma, \\ q_1 + q_2 &= 1, \end{aligned}$$

sistemani hosil qilamiz va (1.4) shart bajarilganda uni yechib $q^*=(q_1,q_2)$ optimal strategiya komponentalarini topamiz:

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \quad q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \tag{1.6}$$

Qaralayotgan 2x2- o‘yin bahosi esa

$$\gamma = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \tag{1.7}$$

formula bo‘yicha topiladi.

1-misol. To‘lovlar matrisasi 1.1-jadvalda keltirilgan o‘yinning yechimi topilsin.

1.1-jadval

II / I	B_1	B_2
A_1	*5*	*-1*
A_2	*2*	*4*

Bu yerda $\alpha = 2$, $\beta = 4$, ya’ni o‘yin egar nuqtaga ega emas. O‘yin yechimini aralash strategiyalarda topamiz. $a_{11} = 5, a_{12} = -1, \quad a_{21} = 2, a_{21} = 4$ bo‘lgani uchun (1.5), (1.6), (1.7) formulalarga ko‘ra

$$p_1 = \frac{4-2}{5+4+1-2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \quad p_2 = \frac{5+1}{5+4+1-2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4},$$

$$q_1 = \frac{4+1}{5+4+1-2} = \frac{5}{8}, \qquad q_2 = \frac{5-2}{5+4+1-2} = \frac{3}{8},$$

$$\gamma = \frac{5.4 - 2.(-1)}{5+4+1-2} = \frac{20+2}{8} = \frac{22}{8} = \frac{11}{4}.$$

matrisali o‘yinni chiziqli dasturlash usuli bilan yechish algoritmini keltiramiz.

1. To‘lovlar matritsasining egar nuqtasini tekshiramiz. Agar o‘yin egar nuqtaga ega bo‘lsa, u holda o‘yinning yechimini sof strategiyalarda yozamiz, aks holda, matritsani tahlil qilishni davom ettiramiz.

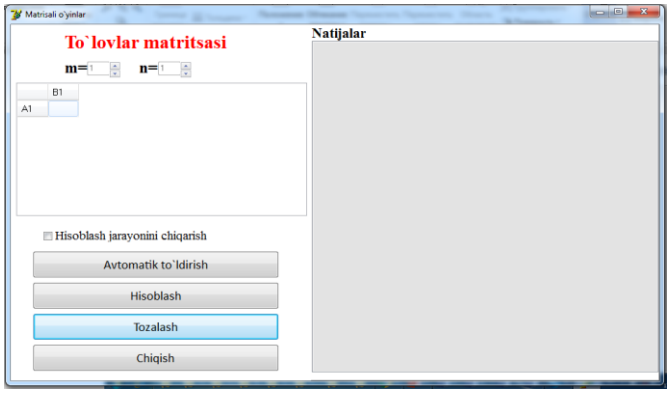
2. Agar ekvivalent yoki befoyda satrlar va ustunlar mavjud bo‘lsa, bu satrlar va ustunlarni o‘chiring. Bunda o‘yinchilarning optimal strategiyalarida o‘z o‘rnida tegishli tarkibiy qismlar nolga teng bo‘ladi.

3. Biz matritsali o‘yinni ma’lum usullardan biri – chiziqli dasturlash usullari bilan yechamiz (agar kamida bitta o‘yinchi faqat ikkita sof strategiyaga ega bo‘lsa).

Har qanday matritsali o‘yinni simmetrik ikkilangan chiziqli dasturlash masalasi juftligiga keltirish mumkin va shuning uchun o‘yinchilarning optimal strategiyasi

va o‘yinning bahosini topish uchun ikki yoqlama simpleks usulini qo‘llash mumkin.

Matrisali o‘yinlar.exe” dasturini ishga tushiramiz. Natijada quyidagi dastur oynasi hosil bo‘ladi (1-rasm).



1-rasm. Dasturning bosh oynasi.

Bu dastur oynasida “To‘lovlar matritsasi” “Hisoblash jarayonini chiqarish”, va “Natijalar” maydonlari hamda “Avtomatik to‘ldirish”, “Hisoblash”, “Tozalash” va “Chiqish” tugmalari joylashgan.

Adabiyotlar

1. Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении: Учебное пособие. - М.: Дело, 2004.
2. В. Гофман, А. Хоманенко. Delphi 7. – СПб.: БХВ–Петербург, 2004 г.
3. Дарахвелидае П. Г., Марков Е. П. Д20 Программирование в Delphi 7. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 784 с : ил.
4. Краснов М. В. OpenGL. Графика в проектах Delphi. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002. – 352 с: ил.

BOUNDED GEOMETRY FOR *P*-HOMEOMORPHISMS ON THE CIRCLE WITH CRITICAL POINT

Safarov U.A
Turin Polytechnic University in Tashkent
safarovua@mail.ru

Let f be a circle homeomorphism of the circle S^1 with lift $F(x)$, $x \in R^1$, i.e. $f(x) = F(x) (\mathrm{mod} 1)$, $x \in S^1$, where $F(x)$ is continuous, strictly increasing and $F(x+1) = F(x) + 1$, $\forall x \in R^1$. The most important arithmetic characteristic of the homeomorphism f is the rotation number (see for instance [1]):

$\rho_f = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x)}{n} (\text{mod} 1)$. Henceforth, F^n denotes the n th iterate of the function F. The rotation number ρ_f is rational if and only if f has periodic orbits.

We consider an orientation preserving circle homeomorphism f that rotation number ρ_f is irrational. We denote by $\{a_n, n \in N\}$ the sequence of entries in the continued fraction expansion of ρ_f, i.e.

$$\rho_f = [a_1, a_2, ..., a_n, ...].$$

Denote by $\frac{p_n}{q_n} = [a_1, a_2, ..., a_n, ...]$ the convergence of ρ_f. Their denominators q_n satisfy the recurrence relation, that is

$$q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1},\ n \geq 1,\ q_0 = 1,\ q_1 = a_1.$$

For an arbitrary point $x_0 \in S^1$ we define $\Delta_0^{(n)}(x_0)$ the closed interval on S^1 with end points x_0 and $x_{q_n} = f^{q_n}(x_0)$. Note that for odd n the point x_{q_n} lies to the left of x_0 and for even n to the right. Denote by $\Delta_i^{(n)}(x_0)$ the iterates of the interval $\Delta_0^{(n)}(x_0)$ under f:

$$\Delta_i^{(n)}(x_0) = f^i(\Delta_0^{(n)}(x_0)),\ i \geq 1$$

Lemma 1([1]). Consider an arbitrary point $x_0 \in S^1$. A finite piece $\{x_i, 0 \leq i < q_n + q_{n-1}\}$ of the trajectory of this point divides the circle into the following disjoint (except for the endpoints) intervals: $\Delta_i^{(n-1)}(x_0),\ 0 \leq i < q_n,\ \Delta_j^{(n)}(x_0), 0 \leq j < q_{n-1}$

We denote the obtained partition by $\xi_n(x_0)$ and call it n-th dynamical partition of the circle. We now briefly describe the process of transition from $\xi_n(x_0)$ to $\xi_{n+1}(x_0)$

All intervals $\Delta_j^{(n)}(x_0), 0 \leq j < q_{n-1}$, are preserved, and each of the intervals $\Delta_i^{(n-1)}(x_0)$ is divided into $a_{n+1}+1$sub intervals:

$$\Delta_i^{(n-1)}(x_0) = \Delta_i^{(n+1)}(x_0) \cup \bigcup_{s=0}^{a_{n+1}-1} \Delta_{i+q_{n-1}+sq_n}^{(n)}(x_0).$$

Definition 1. Let $K > 1$ be a constant. We call two intervals I_1 and I_1 of S^1 are K- comparable, if the inequalities $K^{-1}|I_2| \leq |I_1| \leq K|I_2|$ hold.

This class of P- homeomorphisms consists of orientation preserving circle homeomorphisms f **are differentiable except in many countable points called break points admitting left and right derivatives f'_- and f'_+ such that**

*(*i*)* **There exist some constants $0 < c_1 < c_2 < \infty$, such that $c_1 < f'(x) < c_2$ for all $x \in S^1 \setminus \{B(f)\}$, $c_1 < f'_-(b) < c_2$ and $c_1 < f'_+(b) < c_2$ for all $x \in B(f)$, where $B(f)$ denotes the set of the break points of f;**

*(*ii*)* $\log f'$ **has bounded variation in S^1 i.e. $v = \operatorname{var}_{S^1} \log f' < \infty$.**

Now we consider an orientation preserving circle homeomorphisms f, such that $f \in C^r$, $r \geq 3$, have a critical point x_{cr}, around which, in some C^r coordinate system, f has the form

$$f(x) = \phi(x)\,|\phi(x)|^{d-1} + f(x_{cr}) \text{ for all } x \in U_\delta(x_{cr}),$$

where $\phi : U_\delta(x_{cr}) \to \phi(U_\delta(x_{cr}))$ is a C^r diffeomorphism such that $\phi(x_{cr}) = 0$, and $d > 1$.

Such critical point is called non-flat critical point of order d.

Let $x_{cr} \in S^1$ be a critical point of homeomorphism f. For any $x_0 \in S^1$, consider the dynamical partition $\xi_n(x_0)$. The structure of the dynamical partition implies that $\overline{x}_{cr} = f^{-p}(x_{cr}) \in [x_{q_n}, x_{q_{n-1}}]$ for some p, $0 \leq p < q_n$. Let I_1 and I_1 be any elements of a dynamical partition $\xi_n(\overline{x}_{cr})$ having common endpoints.

Next we formulate the main result of this work.

Theorem. Let f be a P-homeomorphism with single critical point x_{cr} of the order $d > 1$ and irrational rotation number. Then there exists a constant $K > 1$ depending only on f such that the intervals I_1 and I_1 are K-comparable.

Note that the result of Theorem was obtained by Dzhalilov, Noorani and Akhatkulov [2] for critical circle homeomorphisms with odd order of critical point.

References

1. K. M. Khanin and Y. G. Sinai. Smoothness of conjugacies of diffeomorphisms of the circle with rotations. *Russian Math. Surveys* **44** (1989), 69–99.
2. A. Dzhalilov, M. S. Md Noorani and S Akhatkulov. On Critical Circle Homeomorphisms with Infinite Number of Break Points. Hindawi Publishing Corporation, Abstract and Applied Analysis Volume 2014, Article ID 378742, p.1-7

BOSHQARUVLARI GRONUOLL CHEGARALANISHGA EGA DIFFERENSIAL O‘YINDA QOCHISH MASALASI

[1]Samatov B. T., [2]Xorilov M. A., [3]Akbarov A.X.
[1,2]Namangan davlat universiteti,
[3]Andijon davlat universiteti

$\boldsymbol{R^n}$ fazoda qarama-qarshi maqsadli **P** quvlovchi va **E** qochuvchi obyektlar berilgan bo‘lib ularning harakatlari quyidagi differensial tenglamalarga va boshlang‘ich shartlarga asoslangan bo‘lsin

$$\mathbf{P}: \ \dot{x} = u, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$\mathbf{E}: \ \dot{y} = v, \quad y(0) = y_0, \tag{2}$$

bu yerda $x, y, u, v \in R^n$, $n \geq 2$ va $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ nuqtalar $t = 0$ vaqtda mos ravishda quvlovchi va qochuvchining boshlang‘ich vaziyatlari $x_0 \neq y_0$ deb qaraymiz. u va v parametrlar obyektlarning boshqariluvchi tezliklari.

Quvlovchi obyektning boshqaruv parametri u vaqt bo‘yicha o‘lchanuvchi funksiya sifatida tanlanadi va $u:[0,\infty) \to \boldsymbol{R^n}$ akslantirishni bajaradi. Bunday boshqaruv funksiyasi uchun quyidagi shartni qanoatlantirishi talab etiladi ([2])

$$|u(t)|^2 \leq \rho^2 + 2k_1 \int_0^t |u(s)|^2 \, ds, \ \ t \geq 0, \tag{3}$$

bu yerda $\rho > 0$, $k_1 \geq 0$.

Qochuvchi obyektning boshqaruv parametri v ham vaqt bo‘yicha o‘lchanuvchi funksiya sifatida tanlanadi va $v:[0,\infty) \to \boldsymbol{R^n}$ akslantirishni bajaradi. Bunday boshqaruv funksiyasi uchun quyidagi shartni qanoatlantirishi talab etiladi

$$|v(t)|^2 \leq \sigma^2 + 2k_2 \int_0^t |v(s)|^2 \, ds, \ \ t \geq 0, \tag{4}$$

bu yerda $\sigma > 0$, $k_2 \geq 0$.

(3) va (4) chegaralanishlar odatda Gronuoll tipidagi chegaralanishlar deyiladi. Quvlovchining (3) chegaralanishni qanoatlantiruvchi barcha $u(\cdot)$ boshqaruv funksiyalar sinfini U_{Gr} bilan belgilaymiz. Qochuvchining (4) chegaralanishni qanoatlantiruvchi barcha $v(\cdot)$ boshqaruv funksiyalar sinfini V_{Gr} bilan belgilaymiz.

Ta’rif 1. Berilgan $(x_0, u(\cdot))$, $u(\cdot) \in U_{Gr}$ juftlikka mos quyidagi formula

$$x(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds \tag{5}$$

quvlovchining harakat trayektoriyasi deyiladi.

Ta'rif 2. Berilgan $(y_0, v(\cdot))$, $v(\cdot) \in V_{Gr}$ juftlikka mos quyidagi formula

$$y(t) = y_0 + \int_0^t v(s)ds \tag{6}$$

qochuvchining harakat trayektoriyasi deyiladi.

Ta'rif 3. (1)-(4) differensial o'yinda qochish masalasi deb shunday masalaga aytiladiki, bunda quvlovchi ixtiyoriy $u(\cdot) \in U_{Gr}$ boshqaruv funksiya tanlanganda ham qochuvchi uchun shunday $v^*(\cdot) \in V_{Gr}$ strategiya mavjudligini ko'rsatish kerakki, ixtiyoriy t, $t \geq 0$ vaqtda $x(t) \neq y(t)$ tengsizlik bajarilsin. Bunday holda (1)-(4) o'yinda qochuvchi yutuqqa erishgan deyiladi.

Kelgusida amallarni bajarishni soddalashtirish uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz: $z(t) = x(t) - y(t)$, $z(0) = z_0$, $z_0 = x_0 - y_0$.

Ta'rif 4. (1)-(4) differensial o'yin uchun qochuvchining strategiyasi deb quyidagi funksiyaga aytamiz([3]-[5])

$$v^*(t) = -\sigma e^{k_2 t}\xi_0, \quad t \geq 0. \tag{7}$$

bu yerda $\xi_0 = z_0 / |z_0|$.

Teorema. Agar (1)-(4) differensial o'yinda quyidagi shartlardan biri bir vaqtda bajarilsa, ya'ni

1) $\rho \leq \sigma$, $k_2 \geq k_1$;

2) $\rho > \sigma$, $k_2 > k_1$, $|z_0| > \left(\left(\rho^{k_2}\sigma^{k_1}\right)^{1/(k_2-k_1)}\left(k_2 - k_1\right) + \sigma k_1 - \rho k_2\right) / k_1 k_2$, u holda,

quvlovchi ixtiyoriy $u(\cdot) \in U_{Gr}$ boshqaruv tanlanganda ham qochuvchi (7) strategiya yordamida qochish differensial o'yinda yutuqqa erishadi va obyektlar orasidagi masofa quyidagi munosabat bo'yicha o'zgaradi

$$|z(t)| \geq \left(|z_0| + \left(\sigma k_1 e^{k_2 t} - \rho k_2 e^{k_1 t} + \rho k_2 - \sigma k_1\right)\right) / k_1 k_2 .$$

Adabiyotlar

1. Isaacs R. Differential games. John Wiley and Sons, New York, 1965.

2. Gronwall T.H., Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations. 1919, 20(2): 293-296.
3. Azamov A.A., Samatov B.T., The Π-Strategy: Analogies and Applications. The Fourth International Conference Game Theory and Management. St. Petersburg: Leningrad. Univ. June 28-30, 2010. Collected papers. -P. 33-47.
4. Samatov B.T. The Π-strategy in a differential game with linear control constraints. J.Appl.Maths and Mechs, Elsevier. Netherlands: 78(3),2014, 258--263.
5. Samatov B.T., Soyibboyev U.B., Akbarov A.Kh. A linear differential game with Gronwall type constraint. Scientific Bulletin. Physical and Mathematical Research. Andijan state university. Volume 2. 12.31.2020.

BOSHQARUVLARI ARALASH CHEGARALANISHLI SODDA DIFFERENSIAL O‘YINDA TUTISH MASALASI

[1]Samatov B.T., [2]Soyibboyev O‘.B., [3]Jo‘rayev B. I.
[1,2]Namangan davlat universiteti,
[3]Andijon davlat universiteti,

R^n fazoda P quvlovchi va E qochuvchi obyektlar berilgan bo‘lib, ularning harakat tenglamalari mos ravishda quyidagi differensial tenglamalar asosida berilgan bo‘lsin

$$P:\ \dot{x} = u, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$E:\ \dot{y} = v, \quad y(0) = y_0, \tag{2}$$

bu yerda $x, y, u, v \in R^n$, $n \geq 2$; u - quvlovchining tezlik vektori bo‘lib, uning vaqt bo‘yicha o‘zgarishi $u(\cdot):[0,\infty) \to R^n$ Lebeg ma’nosida o‘lchanuvchi funksiyalar sinfidan tanlanadi va unga quyidagi Gronuoll tipidagi chegaralanish (Gr-chegaralanish ([4], [5]) qo‘yiladi

$$|u(t)|^2 \leq \rho^2 + 2k\int_0^t |u(s)|^2\, ds \quad \text{deyarli barcha} \quad t \geq 0, \tag{3}$$

bu yerda $\rho > 0$, $k \geq 0$.

(3) chegaralanishni qanoatlantiruvchi barcha o‘lchanuvchi funksiyalar to‘plamini U_{Gr} bilan belgilaymiz.

Xuddi shu kabi, qochuvchining tezlik vektori v vaqt bo‘yicha o‘zgarishi $v(\cdot):[0,+\infty) \to R^n$ Lebeg ma’nosida o‘lchanuvchi funksiya sifatida tanlanadi va unga quyidagi geometrik chegaralanish (G-chegaralanish) qo‘yiladi

$$|v(t)| \leq \beta \quad \text{deyarli barcha} \quad t \geq 0, \tag{4}$$

bu yerda $\beta > 0$.

(4) chegaralanishni qanoatlantiruvchi barcha o‘lchanuvchi funksiyalar to‘plamini V_G bilan belgilaymiz.

(1)-(2) tenglamalardan $(x_0, u(\cdot))$ va $(y_0, v(\cdot))$ juftliklar uchun quvlovchi va qochuvchi obyektlarning mos ravishda quyidagi harakat trayektoriyalari kelib chiqadi

$$x(t) = x_0 + \int_0^t u(\tau)d\tau, \quad y(t) = y_0 + \int_0^t v(\tau)d\tau.$$

Quvlovchi obyektning maqsadi qochuvchi obyektni biror chekli $t^* > 0$ vaqtda tutish, ya’ni

$$x(t^*) = y(t^*) \tag{5}$$

tenglikka erishish. Qochuvchi obyektning maqsadi esa quvlochi obyekt bilan uchrashmaslikka harakat qilish, ya’ni barcha $t \geq 0$ vaqt oralig‘ida $x(t) \neq y(t)$ munosabatga erishish yoki uchrashish vaqtini iloji boricha kechiktirish.

Lemma. (Gronuoll lemmasi [1]). Agar ushbu

$$|\omega(t)|^2 \leq \alpha^2 + 2l\int_0^t |\omega(s)|^2 ds,$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda $|\omega(t)| \leq \alpha e^{lt}$ munosabat $t \geq 0$ oraliqda doim o‘rinli bo‘ladi, bu yerda $\omega(t)$ o‘lchanuvchi funksiya va α, l - nomanfiy sonlar.

Ta’rif 1. (1)-(4) tutish differensial o‘yinda ushbu

$$u_{GrG}(t,v) = v - \lambda_{GrG}(t,v)\xi_0 \tag{6}$$

funksiyaga quvlovchi obyektning parallel quvish strategiyasi (Π-strategiya [3]) deyiladi, bu yerda $\lambda_{GrG}(t,v) = \langle v, \xi_0 \rangle + \sqrt{\langle v, \xi_0 \rangle^2 + \rho^2 e^{2kt} - |v|^2}$, $\xi_0 = \frac{z_0}{|z_0|}$ va $\langle v, \xi_0 \rangle$ - R^n fazoda v va ξ_0 vektorlarning skalyar ko‘paytmasi.

Xossa 1. Agar $\rho \geq \beta$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda $t \in [0, +\infty)$ vaqt oraligida barcha v, $|v| \leq \beta$ boshqaruvlar uchun $\lambda_{GrG}(t,v)$ funksiya doim aniqlangan va nomanfiy bo‘ladi.

Xossa 2. $\lambda_{GrG}(t,v)$ funksiya $t \in [0, +\infty)$ vaqt oralig‘ida barcha v, $|v| \leq \beta$ boshqaruvlar uchun chegaralangan bo‘ladi va quyidagi munosabat bajariladi

$$\rho e^{kt} - |v| \leq \lambda_{GrG}(t,v) \leq \rho e^{kt} + |v|.$$

Ta'rif 2. (1)-(4) tutish differensial o'yinda (6) strategiya yutuqli deyiladi, agar qochuvchining $\forall v(\cdot) \in V_{Gr}$ boshqaruvi uchun $t \in [0,+\infty)$ vaqt oralig'ining biror t^* qiymatida $x(t^*) = y(t^*)$ tenglik o'rinli bo'lsa.

Teorema. Agar (1)-(4) tutish differensial o'yinda $\rho \geq \beta$ shart bajarilsa, u holda quvlovchi (6) strategiya yordamida $[0, T_{GrG}]$ vaqt oralig'ida yutuqqa erishadi. Bu yerda T_{GrG} quyidagi tenglamaning birinchi musbat yechimi

$$e^{kt} = At + B,$$

$A = \frac{k\beta}{\rho}$, $B = 1 + \frac{|z_0|k}{\rho}$.

Adabiyotlar

1. Gronwall T.H. Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations. Ann. Math., 1919, 20(2): 293-296.
2. Azamov A.A., Samatov B.T. Π-Strategy. An Elementary introduction to the Theory of Differential Games. - T.: National Univ. of Uzb., 2000. - 32 p.
3. Samatov B.T., Ibragimov G.I., Khodjibayeva I.V. Pursuit-evasion differential games with the gronwall type constraints on controls. Ural mathematical journal, Vol. 5, No. 1, 2019, pp. 1-13.
4. Samatov B.T., Soyibboyev U.B., Akbarov A.Kh. Evasion problem in linear differential game with Gronwall type constraint. Scientific Bulletin of Namangan State University 1(10), 25-33, 2019.
5. Samatov B.T., Jo'rayev B.I, Akbarov A.Kh. On evasion problem for the case which imposed geometrical-Gronwall constraint. Scientific Bulletin of Namangan State University 2(5), 3-8, 2020.

DYNAMICAL SYSTEM OF THE p -ADIC (0,2)-RATIONAL FUNCTIONS WITH THREE FIXED POINTS.

[1]Sattarov A., [2]Abdukaxorova Z. T.
[1]Institute of Mathematics, [2]NamSU
sattarovi-a@yandex.ru , zulxumorabdukaxorova@gmail.com

Let $\mathbb{Q}$ be the field of rational numbers. The greatest common divisor of the positive integer n and m is denotes by (n,m). Every rational number $x \neq 0$ can be represented in the form $x = p^r \frac{n}{m}$, where $r, n \in \mathbb{Z}, m$ is a positive integer, $(p,n) = 1$, $(p,m) = 1$ and p is a fixed prime number.

The p-adic norm of x is given by $|x|_p = \begin{cases} p^{-r}, & for\ x \neq 0 \\ 0, & for\ x = 0. \end{cases}$

The completion of $\mathbb{Q}$ with respect to the p-adic norm defines the p-adic field which is denoted by $\mathbb{Q}_p$. The algebraic completion of $\mathbb{Q}_p$ which is complete with respect to $|\cdot|_p$ is denoted by $\mathbb{C}_p$ and it is called the field of complex p-adic numbers.

Let $f:U\to U$ be a function. We denote $f^n=\underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{n}$. If $f(x_0)=x_0$, then x_0 is called a fixed point.

In this work, we consider the p-adic dynamics of $(0,2)$-rational functions with three fixed points. Any $(0,2)$-rational function has the following form

$$f(x)=\frac{1}{x^2+a},\qquad a\in\mathbb{C}_p, \tag{1}$$

where $x\neq\hat{x}_{1,2}=\pm\sqrt{-a}$.

It is easy to see that for $(0,2)$-rational function (1) the equation $f(x)=x$ for fixed points is equivalent to the equation

$$x^3+ax-1=0 \tag{2}$$

Since $\mathbb{C}_p$ is algebraic closed the equation (2) may have three solutions with one of the following relations:

(i) One solution having multiplicity three;

(ii) Two solutions, one of which has multiplicity two;

(iii) Three distinct solutions.

Proposition. For (0,2)-rational functions, the following holds:

1) (0,2)-rational function cannot have a unique fixed point.

2) The function (1) has two distinct fixed points if and only if $a=-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

Let x_i, $i\in\{1,2,3\}$ is fixed points of the function (1) for $a\neq-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$. For any $x\in C_p$, $x\neq\hat{x}_{1,2}$, by simple calculations we get

$$|f(x)-f(x_i)|_p=|x-x_i|_p|x_i|_p\frac{|(x-x_i)+2x_i|_p}{|(x-x_i)+(x_i+\sqrt{-a})|_p|(x-x_i)+(x_i-\sqrt{-a})|_p}. \tag{3}$$

Denote

$$\mathrm{P}=\left\{x\in C_p:\exists n\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ f^n(x)\in\{\hat{x}_1,\hat{x}_2\}\right\}, \tag{4}$$

$$\alpha=|2x_i|_p,\ \beta=\left|x_i+\sqrt{-a}\right|_p,\ \gamma=\left|x_i-\sqrt{-a}\right|_p.. \tag{5}$$

If $|x_i|_p>\sqrt{|a|_p}$, then $\alpha=\beta=\gamma$ for any $p\neq2$. By using (3) for $\alpha=\beta=\gamma$ we define the function $\varphi_\alpha:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ by

$$\varphi_\alpha(r)=\begin{cases} r, & \text{if } r<\alpha \\ \geq 0, & \text{if } r=\alpha \\ \alpha, & \text{if } r>\alpha \end{cases}$$

Lemma. If $\alpha=\beta=\gamma,$ then the dynamical system generated by

1. $Fix(\varphi_\alpha)=\{r:0\leq r<\alpha\}\cup\{\alpha:\text{if } \tilde{\alpha}=\alpha\}.$
2. If $r>\alpha,$ then $\varphi_\alpha(r)=\alpha.$
3. Let $r=\alpha.$

   3.1) If $\tilde{\alpha}>\alpha,$ then $\varphi^2{}_\alpha(r)=\alpha.$

   3.2) If $\tilde{\alpha}<\alpha,$ then $\varphi^n{}_\alpha(r)=\tilde{\alpha}$ for any $n\geq 1.$

Denote

$$\tilde{\alpha}(x)=\left|f(x)\right|_p \text{ , for } x\in S_\alpha(0)$$

Using this Lemma we get

Theorem. If $\alpha=\beta=\gamma$, then the p-adic dynamical system generated by function (1) has the following properties:

1. 1.1) $SI(x_1)=U_\alpha(0)$

   1.2) $U_\alpha(0)\cap \mathrm{P}=\varnothing.$

2. If $r>\alpha$ and $x\in S_r(0),$ then $f(x)\in S_\alpha(0).$
3. Let $f^k(x)\in S_\alpha(0)\setminus \mathrm{P}$ for some $k=0,1,2...,$ then

$$f^k(x)\in\begin{cases} S_{\tilde{\alpha}(f^k(x))}(0), & \text{if } \tilde{\alpha}(f^k(x))\geq\alpha,\ m=k+1 \\ S_\alpha(0), & \text{if } \tilde{\alpha}(f^k(x))>\alpha,\ m=k+2 \\ S_{\tilde{\alpha}(f^k(x))}(0), & \text{if } \tilde{\alpha}(f^k(x))<\alpha,\ \forall m=k+1 \end{cases}.$$

References

1. U.A.Rozikov, I.A.Sattarov. p-adic dynamical systems of (2,2)-rational functions with unique fixed point// **Chaos, Solitons and Fractals, 105** (2017) pp. 260-270.
2. U.A.Rozikov, I.A.Sattarov. Dynamical systems of the p-adic (2,2)-rational functions with two fixed points. **Results in Mathematics, 75:100**, (2020) pp. 1-37.

CHAOS BY THREE DIMENSIONAL QUADRATIC MAPPINGS

[1]Seytov Sh. J., [2]Eshniyozov A.I.,[3]Khidirova Sh.B.

[1]National University of Uzbekistan

[2,3]Gulistan State University

sh-seytov@mail.ru, abdumalikeshniyozov@yandex.com

The study of dynamics of the mapping

$$F_c : x \to x^2 + c \tag{1}$$

on the real line to itself and its various generalizations are devoted hundreds of papers.

Von Neumann and Ulam studied this problem by helping first computers and found out that the behaviors of the orbits are chaotic. Mathematical theory of this numerical experiments constructed by A.N. Sharkosvky [5], T. Li and J.Yorke [4], M. Feigenbaum [2] and others. So far the theory of one dimensional mapping is the most learned part of the general theory of dynamical systems. This paper is devoted to investigating the evolution of populations of the biological systems modeling by three dimensional quadratic mappings which depend on the problem Von Neumann and Ulam [1].

Definition 1. *The filled Julia set* $K(F_c)$ *of the mapping (1) is defined as the set of all points* $x \in R$*, that have bounded orbits with respect to the mapping (1).*

Definition 2. *The Julia set is the common boundary of the filled Julia set*

$$J(F_c) = \partial K(F_c).$$

Theorem 1. *If* $c = -2$ *then there is exist many chaotic orbits in* $K_{F_c} = [-2, 2]$.

Let $S^{m-1} = \{x = (x_1, x_2, ..., x_m) : \sum_{k=1}^{m} x_k = 1, x_k \geq 0\} \subset R^m$, $(m-1)-$ dimensional simplex in R^n.

Quadratic stochastic operator (q.s.o) $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$is defined by

$$(Vx)_k = x'_k = \sum_{k=1}^{m} P_{ij,k} x_i x_j, \; k = \overline{1,m}$$

where $P_{ij,k} \geq 0, P_{ij,k} = P_{ji,k}, \sum_{k=1}^{m} P_{ij,k} = 1, x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in S^{m-1}$.

In mathematical genetics, V is called the evolutionary operator of populations. A population is defined as closed relative to the propagation of a community of organisms. Successive generations $F_1, F_2, ...$ are distinguished in the population. The state of a population is a set of $x = (|x_1|, |x_2|, ..., |x_m|)$ densities of varieties. Inheritance coefficients $P_{ij,k}$ is the probability of the birth of an individual belonging to the $k-th$ variety when the individuals of the $i-th$ and $j-th$ species are crossbreeding.

In [2] investigated some properties of the evolutionary operator of populations on S^{m-1}.

Let $H_p = \{x = (x_1, x_2, ..., x_m) : \sum_{k=1}^{m} x_k = p\} \subset R^m$, $p \in R$, $(m-1)$ -dimensional hyperspace in R^m.

When $p = 1$ the hyperspace H_1 is the expansion of the $(m-1)$-dimensional simplex i.e. $S^{m-1} \subset H_1$.

In this paper we study the properties of the quadratic stochastic operator (q.s.o) in the case $m = 3$, $S^2 \subset H_1$, $V : H_1 \to H_1$.

0.1 Main Part

We investigate population of dynamics of the biological systems which has three kinds creature. Let the populations kinds have a following laws

$$\begin{aligned} &I + I \mapsto I \\ &I + II \mapsto II \\ &III + III \mapsto III \\ &I + II \mapsto II \\ &II + III \mapsto I \\ &I + III \mapsto III \end{aligned}$$

then the evolution of this biological system is defined by the following mapping $V_0 : H_1 \to H_1$

$$V_0 : \begin{cases} x_1' = x_1^2 + 2x_2x_3, \\ x_2' = x_2^2 + 2x_1x_2 \\ x_3' = x_3^2 + 2x_1x_3 \end{cases} \tag{2}$$

If the population kinds have following laws

$$\begin{aligned} &I + I \mapsto I \\ &I + II \mapsto II \\ &II + III \mapsto III \\ &I + II \mapsto I \\ &I + III \mapsto II \\ &I + III \mapsto III \end{aligned}$$

then the evolution of this biological system is defined by the following mapping $V_1 : H_1 \to H_1$

$$V_1 : \begin{cases} x_1' = x_1^2 + 2x_1x_2, \\ x_2' = x_2^2 + 2x_1x_2 \\ x_3' = x_3^2 + 2x_1x_3 \end{cases} \tag{3}$$

Let

$$V = \lambda V_0 + (1-\lambda)V_1$$

V is the new evolution operator that has both properties of V_0 and V_1 which depends on $0 \le \lambda \le 1$

Theorem 2. *Operator V has chaotic orbits and Sharkovsky order bifurcations at the value $\lambda = \frac{1}{2}$ on H_1 .*

Proof. Since $\lambda = \frac{1}{2}$ and $x_3 = 1 - x_1 - x_2$

$$V: \begin{cases} x_1' = x_1^2 + x_2 - x_2^2, \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = x_2^2 - 2x_2 - x_1^2 + 1 \end{cases} \tag{4}$$

If we consider x_2 as a parameter then interesting dynamics occur $-2 \le x_2 - x_2^2 \le 0.25$.

We know from [3] that if c decreases from 0.25 to -2 then period doubling bifurcation with Sharkovsky ordering occurs [5]. According to theorem (1) we easily understand that orbits are chaotic at $c = -2$.

It means that if x_2 increase from 0.5 to 2 and decrease from 0.5 to -1 operator V has Sharkovsky ordering bifurcations. At $x_2 = -1$ and $x_2 = 2$ operator V has chaotic orbits on H_1.

By the propositions (2),(4) we get following statements.

Theorem 3. *The filled Julia set for V is*

$$FJ(V) = \begin{cases} -\frac{1}{2} - \left| x_2 - \frac{1}{2} \right| \le x_1 \le \frac{1}{2} + \left| x_2 - \frac{1}{2} \right|, \\ -1 \le x_2 \le 2, \\ -\frac{3}{2} - \left| x_2 - \frac{1}{2} \right| \le x_3 \le \frac{5}{2} + \left| x_2 - \frac{1}{2} \right|, \end{cases} \tag{5}$$

Theorem 4. *Mandelbrot set for V is the set of all values of λ $M = [0,1]$.*

In the present paper we investigated mathematical model of populations of the biological systems having three kinds by three – dimensional case of the quadratic mapping on the hyperplane to itself. We used the methods of one dimensional dynamical systems. The main results of this paper are existence of the chaotic orbits and Sharkovsky order bifurcations three - dimensional case of the quadratic mapping on the hyperplane $H_1 \subset R^3$.

References

1. Ganikhodzhaev R. N., Seytov Sh. J. *Multi-dimensional case of the problem of Von Neumann-Ulam.* Annual Review of Chaos Theory, Bifurcations and Dynamical Systems 9 (2020), pp. 27-42.
2. Ganikhodzhaev R. N. *Quadratic stochastic operators, Lyapunov functions and tournaments.* Mathematical Manual 183 N 8 (1992), pp. 119-140.
3. Devaney, R. L.: *A first course of chaotic dynamical systems*, Addision-Wesley, Boston, 1992.
4. Li, T., and Yorke, J. *Period Three imply Chaos*. American Mathematical Monthly 82 (1975), pp. 985-992.
5. Sharkovsky A. N. *Coexistence of Cycles of a Continuous Map of a Line into itself.* Ukrain J. Math. 16 (1964), pp. 61-71.

DIFFUZIYA-TO'LQIN TENGLAMASI UCHUN KOEFFISIYENTINI ANIQLASH MASALASI

Subhonova Z.A., Rahmonov A.A.
Buxoro davlat universiteti

To'g'ri va teskari masalaning qo'yilishi. Diffuzion - to'lqinli tenglama – bu amorf kolloid, shishasimon va g'ovakli materiallardan tortib fraktallar, perkolatsiya klasterlari, tasodifiy va tartibsiz muhitlar, taroqli inshootlar, dielektriklar, yarim o'tkazgichlar, polimerlar va biologik tizimlargacha bo'lgan muhim fizik hodisalarning matematik modeli. Hozirda diffuzion - to'lqinli tenglama yechimlarini muntazam ravishda namoyish etishga bag'ishlangan nashr risolasi mavjud emas. Ushbu ishda vaqt o'zgaruvchan koeffisenti bilan kasrli differensial tenglamani ko'rib chiqamiz.

Kasr diffuziya tenglamasi

$$\left(D_t^{\alpha}u\right)(x,t) - u_{xx}(x,t) + q(t)u(x,t) = f(x,t), \quad t>0,\ x\in R, \tag{1}$$

berilgan bo'lsin. Bu yerda $1<\alpha<2$, D_t^{α} – Gerasimov-Kaputo kasr differensial operatori, ya'ni

$$\left(D_t^{\alpha}u\right)(x,t) := \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^t \frac{u_{\tau\tau}(x,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-1}}d\tau,$$

ko'rinishda aniqlangan.

Koshi masalasi uchun boshlang'ich shartlar:

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ u_t(x,0)=\psi(x),\ \ x\in R. \tag{2}$$

Ishning asosiy maqsadi $q(t)$ koeffisentini aniqlashda iborat. [1] ishda Rayt funksiyasidan foydalanib (1) – (2) masalaning (va uning kasr hosilasining boshqa

tushunchalari uchun analoglari) fundamental yechimi batafsil o‘rganib chiqilgan. Faraz qilaylik Z_1, Z_2 va Y funksiyalar (1) – (2) masalaning fundamental yechimlari bo‘lsin. U holda Koshi masalasining yechimi quyidagi integral tenglama bilan ifodalanadi:

$$u(x,t) = \int_R Z_1(x-\xi,t)\varphi(\xi)d\xi + \int_R Z_2(x-\xi,t)\psi(\xi)d\xi +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_R Y(x-\xi,t-\tau)\big(f(\tau,\xi)-q(\tau)u(\xi,\tau)\big)d\xi, \qquad (3)$$

bunda

$$Z_1(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \frac{1}{2}t^{-\frac{\alpha}{2}}\phi\left(-\frac{\alpha}{2},1-\frac{\alpha}{2};-xt^{-\frac{\alpha}{2}}\right);$$

$$Z_2(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \frac{1}{2}t^{1-\frac{\alpha}{2}}\phi\left(-\frac{\alpha}{2},2-\frac{\alpha}{2};-xt^{-\frac{\alpha}{2}}\right);$$

$$\mathrm{Y}(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \frac{1}{2}t^{\frac{\alpha}{2}-1}\phi\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2};-xt^{-\frac{\alpha}{2}}\right),$$

bu yerda $\phi -$ Rayt funksiyasi bo’lib u quyidagicha aniqlanadi:

$$\phi(-\alpha,\delta;\mathrm{z}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{z}^n}{n!\Gamma(\delta-\alpha\,\mathrm{n})}, \qquad \alpha<1,\ \ z\in\mathbb{C}$$

$\Gamma(\bullet)-$ Eylerning gamma funksiyasi.

Teskari masala to’g’ri masala yechimi haqida

$$u(0,\mathrm{t}) = \mathrm{g}(\mathrm{t}),\ \ \mathrm{t}>0 \qquad (4)$$

qo’shimcha ma’lumot bo‘yicha $q(\mathrm{t}),\ \mathrm{t}>0$ uzluksiz funksiyani aniqlashdan iborat, bu yerda $g(\mathrm{t})$ berilgan funksiya.

$u(\mathrm{x},\mathrm{t})$ (1), (2) Koshi masalasining klassik yechimi bo’lsin va f,φ,ψ,g lar yetarlicha silliq funksiyalar bo’lsin. (1) - (4) teskari masalaga ekvivalent bo’lgan yangi asala olamiz. Buning uchun $u(\mathrm{x},\mathrm{t})$ ning x o’zgaruvchi bo‘yicha ikkinchi tartibli hosilasini $v(\mathrm{x},\mathrm{t})$ orqali belgilaymiz, ya’ni $v(\mathrm{x},\mathrm{t}) := u_{xx}(\mathrm{x},\mathrm{t})$. U holda (1) - (4) masala

$$(\mathrm{D}_t^{\alpha}\mathrm{v})(\mathrm{x},\mathrm{t}) - v_{xx}(\mathrm{x},\mathrm{t}) + \mathrm{q}(\mathrm{t})\,\mathrm{v}(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \mathrm{f}_{xx}(\mathrm{x},\mathrm{t}),\ \ \mathrm{t}>0, \mathrm{x}\in\mathrm{R}, \qquad (5)$$

ko’rinishni oladi.

$$v(\mathrm{x},0) = \varphi''(\mathrm{x}),\ \ \mathrm{v}_t(\mathrm{x},0) = \psi''(\mathrm{x}), \qquad \mathrm{x}\in R. \qquad (6)$$

$v(x,t)$ funksiyaga qo'shimcha shart olishda (1) tenglamaga $x=0$ qo'yib (2) - (4) shartlardan

$$v(0,t)=(D_t^{\alpha}g)(t)+q(t)g(t)-f(0,t). \tag{7}$$

ekanligini ko'rish mumkin.

$f(0)=g(0)$ shart bajarilganda (5) – (7) tenglamalardan (1) - (4) masala oson olinadi.

Berilgan $q(t), f(x,t), \varphi(x), \psi(x)$ funksiyalar va $\alpha\in(1,2)$ son uchun (5) va (7) Koshi masalalasi yechimini aniqlash to'g'ri masala deb yuritiladi.

$\Omega_T:=\{(x,t): x\in R, 0\le t\le T\}$ bilan qalinligi T bo'lgan yo'lakni belgilaymiz, bu yerda $T>0$ ixtiyoriy tayinlangan son.

m tartibgacha hosilalar bilan birga R da chegaralangan funksiyalar sinfini $C_b^m(R)$ orqali belgilaymiz.

$m=0$ bo'lganda $C_b^0(R)=:C_b(R)$ va bu doimiy chegaralangan funksiyalar sinfi.

Ushbu ishda $H^l(R)$ [2] bilan $l\in(0,1)$ ko'rsatkichli Gyolder funksiyalar sinfini belgilaymiz.(5) da

$$f_{xx}(x,t)-q(t)u(x,t)=:F(x,t)$$

belgilashni e'tiborga olib va (5) - (6) masala uchun (3) ni qo'llab

$$v(x,t)=v_0(x,t)-\int_0^t q(\tau)d\tau\int_{-\infty}^{\infty}Y(x-\xi,t-\tau)v(\xi,\tau)\,d\xi, \tag{8}$$

ga ega bo'lamiz, bu yerda

$$v_0(x,t):=\int_{-\infty}^{\infty}Z_1(x-\xi,t)\varphi''(\xi)\,d\xi+\int_{-\infty}^{\infty}Z_2(x-\xi,t)\psi''(\xi)\,d\xi+$$
$$+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}Y(x-\xi,t-\tau)\,f_{\xi\xi}(\xi,\tau)\,d\xi.$$

Ishning asosiy natijalari. Quyidagi lemma o'rinli.

Lemma. *Faraz qilaylik* $q(t)\in C[0,T]$, $f(x,t)\in C(H^{2+\alpha}(R),[0,T])$, $\varphi(x)\in H^{\alpha+3}(R)$, $\psi(x)\in H^{\alpha+2}(R)$ *shartlar o'rinli bo'lsin. U holda (1.8) integral tenglamaning $C^{2-\alpha,2}(\Omega_T)$ sinfga qarashli yagona $v(x,t)$ yechimi mavjud.*

(8) tenglamada $x=0$ deb va (1.7) tenglikdan foydalanib $q(t)$ ni topib olamiz

$$q(t)=\frac{1}{g(t)}\Big[f(0,t)-(D_t^{\alpha}g)(t)-v_0(0,t)\Big]-\frac{1}{g(t)}\int_0^t q(\tau)d\tau\int_{-\infty}^{\infty}Y(\xi,t-\tau)v(\xi,\tau)\,d\xi.$$

Teskari masala yechimining lokal mavjudlik va yagonalik to'g'risidagi quyidagi teorema o'rinli.

Teorema. *Aytaylik* $f(x,t) \in C(H^l(R),[0,T])$, $\varphi(x) \in H^{l+1}(R)$, $\psi(x) \in C_b(R)$, $l \in (0,1)$, $|g(t)| \geq g_0 > 0$, $\varphi(0) = g(0)$. *U holda shunday* $T_0 \in (0,T]$ *mavjudki (1.1)-(1.4) teskari masalaning yagona* $q(t) \in C[0,T_0]$ *uzluksiz yechimi mavjud.*

Adabiyotlar

1. A.V. Pskhu, The fundamental solution of a diffusion-wave equation of farctional order, Izvestiya: Math. 73 (2009), 351-392.
2. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'tseva, Linear and quasilinear equations of parabolic type, Moscow: Nauka, 1967; English translation: American Matematical Society, Providence, Rhode Island, 1968.

KOORDINATALARI BO'YICHA SO'NUVCHI GEOMETRIK CHEGARALANISHLI BOSHQARILADIGAN OBYEKTNING YETISHISH SOHASI MASALASI

Tursunaliyev T.G'.,Madaminjonov M. D., Shodmonaliyeva G.H.
Namangan davlat universiteti

R^2 fazoda harakatlanuvchi **P** obyekt berilgan bo'lib, uning harakat koordinatalarini $x = (x_1, x_2)$ deb belgilaymiz. U holda obyektning koordinatalari bo'yicha harakat tenglamasi quyidagicha bo'lsin

$$\mathbf{P}: \begin{array}{ll} \dot{x}_1 = u_1, & x_1(0) = x_{10}, \\ \dot{x}_2 = u_2, & x_2(0) = x_{20}, \end{array} \tag{1}$$

bu yerda u_1 - x_1 koordinataning harakat tezligi, u_2 - x_2 koordinataning harakat tezligi, $x, y, u_1, u_2 \in R^2$, $n = 2$; $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$ nuqtalar $t = 0$ vaqtda obyektning koordinatalar bo'yicha boshlang'ich holatlari va bunda $x_0 \neq y_0$ deb qaraymiz. **P** obyektning $u = (u_1(t), u_2(t))$ boshqaruv parametri vaqt bo'yicha o'lchanuvchi funksiya sifatida tanlanadi va $u(\cdot): [0,\infty) \to R^2$ akslantirishni bajaradi. Ushbu boshqaruv masalasida obyekt boshqaruvi koordinatalari mos ravishda quyidagi geometrik chegaralanishlarni (G-chegaralanish) qanoatlantirishi talab etiladi:

$$|u_1(t)| \leq \alpha e^{-kt}, \ \textit{deyarli barcha} \ t \geq 0, \tag{2}$$

$$|u_2(t)| \leq \beta e^{-kt}, \ \textit{deyarli barcha} \ t \geq 0, \tag{3}$$

bu yerda $\alpha, \beta, k > 0$.

(2) va (3) chegaralanishlarni qanoatlantiruvchi $u_1(t)$ va $u_2(t)$ funksiyalar to‘plamini mos ravishda U_1 va U_2 deb belgilaymiz.

Ta’rif 1. Berilgan $(x_{10}, u_1(\cdot))$, $u_1(\cdot) \in U_1$ juftlikka mos quyidagi formula

$$x_1(t) = x_{10} + \int_0^t u_1(s)ds \tag{4}$$

obyektning birinchi koordinatasi bo‘yicha harakat trayektoriyasi deyiladi.

Ta’rif 2. Berilgan $(x_{20}, u_2(\cdot))$, $u_2(\cdot) \in U_2$ juftlikka mos quyidagi formula

$$x_2(t) = x_{20} + \int_0^t u_2(s)ds \tag{5}$$

obyektning ikkinchi koordinatasi bo‘yicha harakat trayektoriyasi deyiladi.

P obyektning tekislikdagi harakati deb quyidagi juftlikka aytamiz

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t)), \quad t \geq 0.$$

Masala. Obyektning berilgan $x_0 = (x_{10}, x_{20})$ boshlang‘ich holatidan boshlab tekislikda har bir koordinatasi bo‘yicha yetishish sohasini topish.

Teorema. Agar (1) tenglama yordamida harakatlanuvchi obyektning tezliklari mos ravishda (2) va (3) geometrik chegaralanishni qanoatlantirsa, u holda obyekt ixtiyoriy $t \geq 0$ vaqt oralig‘ida quyidagi to‘plamni ichida yotadi

$$R = \left\{ (x_1, x_2) : |x_1 - x_{10}| < \frac{\alpha}{k}, \ |x_2 - x_{20}| < \frac{\beta}{k} \right\} \tag{6}$$

Adabiyotlar

1. Azamov A.A., Samatov B.T. The Π-Strategy: Analogies and Applications. The Fourth International Conference Game Theory and Management , June 28-30, 2010, St. Petersburg, Russia, Collected papers. – P. 33-47.
2. Chernousko F.L., Ananiyevski I.M., Reshmin S.A. Control of Nonlinear Dynamical Systems. – Berlin, Heidel.: Spr., – 2008.– 396 p.
3. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. Conflict interaction of groups of controlled objects. Izhevsk: Udmurt State University- 2009.
4. Isaacs R. Differential Games. – New York: John &Wiley, 1971. – 480 p.
5. Chikrii A.A. (1997) Conflict-Controlled Processes. Kluwer, Dordrecht.

OBYEKT BOSHQARUVINING KOORDINATALARI O‘ZARO BOG‘LIQSIZ BO‘LGANDA OPTIMAL O‘TISH MASALASI

Turg‘unboyeva M. A., Bozarova D.S., Zohidova Z.S.
Namangan davlat universiteti

R^2 fazoda harakatlanuvchi $\mathbf{E}$ obyekt berilgan bo‘lib, uning tekislikdagi holati $x=(x_1,x_2)$ bo‘lsin. U holda obyektning tekislikdagi harakat tenglamasi koordinatalari bo‘yicha quyidagicha ifodalaymiz

$$\mathbf{E}: \begin{array}{ll} \dot{x}_1 = u_1, & x_1(0)=x_{10}, \\ \dot{x}_2 = u_2, & x_2(0)=x_{20}, \end{array} \tag{1}$$

bu yerda u_1 - x_1 koordinataning harakat tezligi, u_2 - x_2 koordinataning harakat tezligi, $x_1,x_2,u_1,u_2 \in R^2$, $n \geq 2$; $x_1(0)=x_{10}$, $x_2(0)=x_{20}$ nuqtalar $t=0$ vaqtda obyektning koordinatalar bo‘yicha boshlang‘ich holatlari va bunda $x_0 \neq y_0$ deb qaraymiz. $\mathbf{E}$ obyektning $u=\left(u_1(t),u_2(t)\right)$ boshqaruv parametri vaqt bo‘yicha o‘lchanuvchi funksiya sifatida tanlanadi va $u(\cdot):[0,+\infty)\to R^2$ akslantirishni bajaradi. Ushbu boshqaruv masalasida obyekt boshqaruvi koordinatalari mos ravishda o‘lchanuvchi funksiyalar sifatida tanlanadi va ular quyidagi geometrik chegaralanishlarni (G-chegaralanish) qanoatlantirishi talab etiladi:

$$|u_1(t)| \leq \alpha \text{, deyarli barcha } t \geq 0, \tag{2}$$

$$|u_2(t)| \leq \beta \text{, deyarli barcha } t \geq 0, \tag{3}$$

bu yerda $\alpha, \beta > 0$.

(2) va (3) chegaralanishlarni qanoatlantiruvchi $u_1(t)$ va $u_2(t)$ o‘lchanuvchi funksiyalar to‘plamini mos ravishda U_1 va U_2 deb belgilaymiz.

Ta’rif 1. Obyekt koordinatalarining trayektoriyalari deb, ixtiyoriy quyidagi juftliklarga

$$\left(x_{10},u_1(\cdot)\right), \quad u_1(\cdot)\in U_1,$$

$$\left(x_{20},u_2(\cdot)\right), \quad u_2(\cdot)\in U_2$$

mos keluvchi

$$x_1\left(t,u_1(\cdot)\right)=x_{10}+\int_0^t u_1(s)ds, \; t\geq 0, \tag{4}$$

$$x_2\left(t,u_2(\cdot)\right)=x_{20}+\int_0^t u_2(s)ds, \; t\geq 0 \tag{5}$$

funksiyalarga aytiladi.

Ta'rif 2. $\mathbf{E}$ obyektning tekislikdagi harakati deb quyidagi tenglikka aytamiz

$$x(t) = \left(t, u_1(t), u_2(t)\right),\ t \geq 0 \tag{6}$$

Bu ta'rifga asosan turlicha $u_1(\cdot) \in U_1,\ u_2(\cdot) \in U_2$ boshqaruvlar uchun boshlang'ich $x_0 = (x_{10},\ x_{20})$ nuqtadan chiquvchi turli trayektoriyalar hosil bo'ladi.

Masala 1. Obyektning berilgan $x_0 = (x_{10},\ x_{20})$ boshlang'ich holatidan boshlab tekislikda har bir koordinatasi bo'yicha yetishish sohasini topish.

Lemma 1. Agar (1) tenglama yordamida harakatlanuvchi obyektning tezliklari mos ravishda (2) va (3) geometrik chegaralanishni qanoatlantirsa, u holda obyekt har bir $t \geq 0$ vaqt oralig'ida quyidagi to'plamni ichida yotadi

$$R = \left\{(x_1, x_2) : |x_1 - x_{10}| \leq \alpha t,\ |x_2 - x_{20}| \leq \beta t\right\} \tag{7}$$

Lemma 1 ga asosan, (7) to'plam (x_1, x_2) tekisligida uchlarining koordinatalari $A\left(x_{10} - \bar{\alpha},\ x_{20} + \bar{\beta}\right)$, $B\left(x_{10} + \bar{\alpha},\ x_{20} + \bar{\beta}\right)$, $C\left(x_{10} + \bar{\alpha},\ x_{20} - \bar{\beta}\right)$, $D\left(x_{10} - \bar{\alpha},\ x_{20} - \bar{\beta}\right)$ nuqtalarda bo'lgan $ABCD$ to'g'ri to'rtburchakni ifodalaydi, bu yerda $\bar{\alpha},\ \bar{\beta} > 0$. $\bar{\alpha} = \alpha t$, $\bar{\beta} = \beta t$.

Masala 2. Berilgan $x_0 = (x_{10},\ x_{20})$ boshlang'ich nuqtadan tekislikning biror $P = (p_1, p_2)$ nuqtasiga o'tkazuvchi optimal boshqaruv va eng qisqa o'tish vaqtini topish.

Dastlab masalani $x_{10} = 0,\ x_{20} = 0$ hol uchun ko'raylik ya'ni $\mathbf{E}$ obyektning boshlang'ich holati koordinatalar boshida bo'lsin. Koordinatalar boshidan $x_2 = \dfrac{\beta}{\alpha} x_1$, va $x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} x_1$ to'g'ri chiziqlarni o'tkazsak, (x_1, x_2) tekislik quyidagi sohalarga ajraladi

$$\Pi_1 = \left\{(x_1, x_2) : x_2 > \frac{\beta}{\alpha} x_1, x > -\frac{\beta}{\alpha} x_1\right\},$$

$$\Pi_1 = \left\{(x_1, x_2) : x_2 < \frac{\beta}{\alpha} x_1, x > -\frac{\beta}{\alpha} x_1\right\},$$

$$\Pi_1 = \left\{(x_1, x_2) : x_2 < \frac{\beta}{\alpha} x_1, x < -\frac{\beta}{\alpha} x_1\right\},$$

$$\Pi_1 = \left\{(x_1, x_2) : x_2 > \frac{\beta}{\alpha} x_1, x < -\frac{\beta}{\alpha} x_1\right\}.$$

Lemma 2. Faraz qilaylik, $\mathbf{E}$ obyektning boshlang'ich holati koordinatalar boshida bo'lsin. Agar R^2 tekislikda berilgan $P = (p_1, p_2)$ nuqta uchun

1. $P \in \Pi_1$ $(P \in \Pi_3)$ bo‘lsa, u holda $\mathbf{E}$ obyekt $u^1 = \left(\beta \frac{p_1}{p_2}, \beta\right)$ $\left(u^3 = \left(-\beta \frac{p_1}{p_2}, -\beta\right)\right)$ boshqaruv orqali $T_1 = T_3 = \left|\frac{p_2}{\beta}\right|$ vaqtda P nuqtaga o‘tadi.
2. $P \in \Pi_2$ $(P \in \Pi_4)$ bo‘lsa, u holda $\mathbf{E}$ obyekt $u^2 = \left(\alpha, \alpha \frac{p_2}{p_1}\right)$ $\left(u^4 = \left(-\alpha, -\alpha \frac{p_2}{p_1}\right)\right)$ boshqaruv orqali $T_2 = T_4 = \left|\frac{p_1}{\alpha}\right|$ vaqtda P nuqtaga o‘tadi.
3. $P \in \bar{\Pi}_1$ $(P \in \bar{\Pi}_2)$ bo‘lsa, u holda $\mathbf{E}$ obyekt $\bar{u}_1 = (\alpha, \beta)$ yoki $\bar{u}_1 = (-\alpha, -\beta)$ $\left(\bar{u}_2 = (-\alpha, \beta)\right.$ yoki $\left.\bar{u}_2 = (\alpha, -\beta)\right)$ boshqaruv orqali $\bar{T} = \left|\frac{p_2}{\beta}\right| = \left|\frac{p_1}{\alpha}\right|$ vaqtda P nuqtaga o‘tadi, bu yerda $\bar{\Pi}_1 = \left\{(x_1, x_2) : x_2 = \frac{\beta}{\alpha} x_1\right\}$, $\bar{\Pi}_2 = \left\{(x_1, x_2) : x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} x_1\right\}$.

Lemma 1 va Lemma 2 yordamida quyidagi teoremani isbotlash mumkin.

Teorema 1. $\mathbf{E}$ obyekt fazoning ixtiyoriy $P \in R^2$, $P = (p_1, p_2)$ nuqtasiga koordinata boshidan quyidagi

$$u^* = \left\{\min\left\{\beta \frac{p_1}{p_2}, \alpha\right\}, \min\left\{\alpha \frac{p_2}{p_1}, \beta\right\}\right\}$$

boshqaruv orqali

$$T = \max\left\{\frac{|p_1|}{\alpha}, \frac{|p_2|}{\beta}\right\}$$

eng qisqa vaqtda o‘tadi.

Agar $x_0 \neq 0$ bo‘lsa, quyidagi teorema o‘rinli.

Teorema 2. $\mathbf{E}$ obyektning $u^* = \left\{\min\left\{\beta \frac{|p_1 - x_{10}|}{|p_2 - x_{20}|}, \alpha\right\}, \min\left\{\alpha \frac{|p_2 - x_{20}|}{|p_1 - x_{10}|}, \beta\right\}\right\}$ boshqaruv orqali tekislikning ixtiyoriy $P \in R^2$, $P = (p_1, p_2)$ nuqtasiga eng qisqa o‘tish vaqti quyidagicha bo‘ladi:

$$T = \max\left\{\frac{|p_1 - x_{10}|}{\alpha}, \frac{|p_2 - x_{20}|}{\beta}\right\}.$$

Adabiyotlar

1. Ли Э.Б., Маркус Л., “Основы теории оптимального управлерия,” ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, Москва 1972
2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мишенко Е.Ф., Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз,1961.
3. G.I Ibragimov, A.A Azamov, and M.Khakestari, “Solution of a linear pursuit-evasion game with integral constraints,” ANZIAM *Journal*, vol. 52, pp. E59-E75, 2010.
4. G.I. Ibragimov, I.A. Alias, “Differential game with many pursuers when controls are subjected to coordinate-wise integral constraints,” Malaysian Journal of Mathematical Sciences 10(2): 195-207 (2016).

ELLIPTIK DIFFERENSIAL OPERATORIGA MOS SPEKTRAL YOYILMALARNING UMUMLASHGAN LOKALIZASIYASI

Xolboyev N. A., Buvaev Q. T.
O’zbekiston Milliy Universiteti

Mazkur tezisda ikkinchi tartibli bir jinsli ikki o’lchovli elliptik operatoriga mos spektal yoyilmalar uchun L_2 sinfda umumlashgan lokalizasiya prinsipi isbotlanganligi haqida qisqacha malumot keltirilgan. Yaqin kunlarga qadar ham ushbu masala, eng sodda hol, yani Furye qatorlarining shar bo’yicha qismiy yig’indisi uchun ham ochiq xisoblangan. 2019 yilga kelibgina yuqorida qayd qilingan hol uchun R.R. Ashurov tomonidan ijobiy javob olindi.

$T^2 = \left\{ x \in R^2 : \ -\pi < x_j \le \pi,\ j = 1,2 \right\}$ kvadratni qaraylik. Aniqlanish sohasi $C^\infty(T^2)$ dan iborat quyidagi

$$L = a_{11}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + a_{22}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \tag{1}$$

elliptic operatori berilgan bo’lsin.

Bu operatorining o’z-o’ziga qo’shma kengaytmalaridan bittasi A, davriylik sharti asosida beriladi [1], yani A bu $C^\infty(R^2)$ dagi har bir argumentlari bo’yicha 2π davrga ega bo’lgan funksiyalar fazosida aniqlangan L operatorining $L_2(T^2)$ dagi yopilmasidir.

Osongina ko’rish mumkinki, A operator $|n|^4$ xos qiymatlarga mos ushbu $(2\pi)^{-1}e^{i(n,x)}$ ko’rinishidagi xos funksiyalarga hamda quyidagi

$$\theta(x,y,\lambda)=(2\pi)^{-2}\sum_{L(n)<\lambda}e^{i(n,x-y)} \tag{2}$$

spektral funksiyaga ega bo'ladi, bu yerda $x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2),\ n=(n_1,n_2),$ $(n,x)=n_1x_1+n_2x_2,\ (n,x-y)=n_1(x_1-y_1)+n_2(x_2-y_2),\ |n|=\sqrt{n_1^2+n_2^2}.$ $L(n)$ - L operatori-ning simvoli, ya'ni ushbu $L(n)=a_{11}n_1^2+2a_{12}n_1n_2+a_{22}n_2^2$ ko'rinishidagi ko'phaddir.

Bu holda, $\forall f\in L_2(T^2)$ funksiyaning spektral yoyilmasi quyidagi

$$E_\lambda f(x)=(2\pi)^{-2}\sum_{L(n)<\lambda}f_ne^{i(n,x)} \tag{3}$$

ko'rinishida aniqlanadi, bu yerda $f_n=(2\pi)^{-2}\int\limits_{T^2}f(y)e^{-i(n,y)}dy$ - f funksiyaning Furye koeffisientlari.

Shuni takidlash lozimki, (3) spektral yoyilma $f\in L_2(T^2)$ funksiyaning karrali trigonometrik Furye qatorini biror usul bilan jamlashni aniqlaydi. Xususan, $L=\Delta$ da, yani Laplas operatori bo'lganda bu yoyilma karrali Furye qatorining shar bo'yicha qismiy yig'indisini anglatadi.

Mazkur tezisda (3) spektral yoyilma uchun $L_2(T^2)$ fazosida umumlashgan lokalizasiya masalasi o'rganilgan. V.A. Il'inning [2] ishida xos funksiyalar bo'yicha ihtiyoriy yoyilma uchun umumlashgan lokalizasiya prinsipi tushunchasini kiritdi. Il'in tushinchasidan kelib chiqib, biz $L_2(T^2)$ da $E_\lambda f$ uchun umumlashgan lokalizasiya prinsipi o'rinli deb aytamiz, agar $\forall f\in L_2(T^2)$ funksiya uchun ushbu

$$\lim_{\lambda\to\infty}E_\lambda f(x)=0 \tag{4}$$

tenglik $T^2\setminus\operatorname{supp}f$ da deyarli bajarilsa.

Ko'rinib turibdiki, klassik lokalizasiya prinsipidan farqli o'laroq bu yerda (4) tenglikni $T^2\setminus\operatorname{supp}f$ da deyarli (hamma joyda emas) bajarilishi yetarli.

Ushbu tezisning asosiy natijasi quyidagi teorema hisoblanadi.

1-teorema. $f\in L_2\left(T^2\right)$ *va* $\Omega\subset T^2$ *ochiq to'plamda* $f=0$ *bo'lsin . U holda, quyidagi*

$$\lim_{\lambda\to\infty}E_\lambda f\left(x\right)=0 \tag{5}$$

munosabat Ω *ning deyarli hamma yerida bajariladi.*

Deyarli yaqinlashish masalalarini o'rganishda maksimal operatorini kiritish maqsadga muvofiq:

$$E_*f\left(x\right)=\sup_{\lambda>0}\left|E_\lambda f\left(x\right)\right|.$$

1-teorema isboti maksimal operatorining quyidagi bahosiga asoslangan:

2-teorema. $K_R = \{(x,y):\ x^2 + y^2 < R^2\}$ *– doira bo'lsin. Agar* $f(x) \in L_2(T^2)$ va $K_R \subset T^2$ *da* $f = 0$ *bo'lsa, u holda* $\forall r\ (r < R)$ *uchun* $\exists C = C(R,r)$ *o'zgarmas mavjudki, ushbu*

$$\int_{K_r} \left[E_* f(x)\right]^2 dxdy \le C \int_{T^2} \left[f(x)\right]^2 dxdy \tag{6}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

n o'lchovli Laplas operatori uchun umumlashgan lokalizatsiya masalasini birinchi bo'lib R.R. Ashurov tomonidan [3] ishda o'rganilgan va bu borada ijobiy natija olingan.

Adabiyotlar

1. Ш. А. Алимов, Р. Р. Ашуров, А. К. Пулатов. Кратные ряды и интегралы Фурье, Коммутативный гармонический анализ-4, Современные проблемы математики, Фундаментальные направления, том 42, Москва 1989, 105 с.
2. В.А. Ильин. Об обобщенный интерпритации принципа локализации для рядов Фурье по фундаментальным системам функций, Сиб. мат. журнал, 1968, 9, 1093-1106.
3. R.R. Ashurov. Generalized Localization for Spherical Partial Sums of Multiple Fourier Series. Doklady Mathematics 100, 505-507(2019).

ГЛОБАЛЛАШУВ ДАВРИДА МАТЕМАТИКА ВА АМАЛИЙ МАТЕМАТИКАНИНГ ДОЛЗАРБ МАСАЛАЛАРИ

мавзусида республика илмий анжумани материаллар тўплами

«AZMIR NASHR PRINT» МЧЖ босмахонасида чоп этилди.

100200, Тошкент шаҳри, Адҳам Раҳмат кўчаси, 10-уй